

ANOMALIE IN TEORIE DI STRINGA CON D-BRANE E O-PIANI

Claudio Scrucca (CERN)

- D-BRANE, O-PIANI E CAMPI RR.
- ANOMALIE E INDICI.
- MECCANISMO DI INFLOW.
- ANOMALIE SU D-BRANE E O-PIANI.
ACCOPPIAMENTI RR DALLA CANCELLAZIONE
DELLE ANOMALIE.
- CALCOLO DI STRINGA DELLE ANOMALIE.
ACCOPPIAMENTI RR PER FATTORIZZAZIONE.
- CONCLUSIONI.

In collaborazione con Marco Serone
hep-th/9903145, hep-th/9907112

D-BRANE, O-PIANI E CAMPI RR

Lo spettro delle teorie di stringa si suddivide in settori che differiscono per le condizioni al contorno:

Aperte : $NS(B) + R(F)$

Chiuse : $NSNS(B) + NSR(F) + RNS(F) + RR(B)$

Gli stati RR sono bispinori decomponibili in tensori antisimmetrici. Questi possono essere interpretati come forme: $C_{(n)}$.

Gli stati di stringa perturbativi sono carichi sotto i campi $NSNS$ ma non quelli RR . Esistono invece due tipi di oggetti non-perturbativi con carica RR .

Polchinski

D-brane

Le D -brane sono iperpiani associati a bordi di SM delle stringhe con condizioni al bordo di **Neumann** nelle direzioni \parallel e di **Dirichlet** in quelle \perp .



O-piani

Gli **O-piani** sono iperpiani associati a terminazioni crosscap di **SM** delle stringhe che implementano un cambio di orientamento accompagnato da una riflessione che agisce con **+1** nelle direzioni \parallel e con **-1** in quelle \perp .



Questi oggetti possono avere un numero variabile p di dimensioni spaziali e 1 dimensione temporale. Il **VM** di una **D p -brana** o di un **O p -piano** ha quindi $p + 1$ dimensioni.

L'accoppiamento di **D p -brane** e **O p -piani** ai campi **RR** è:

$$S_p = -\mu_p \int_{p+1} C_{(p+1)}$$

con $\mu_p^D = \sqrt{2\pi}$ e $\mu_p^O = -2^{p-4}\sqrt{2\pi}$.

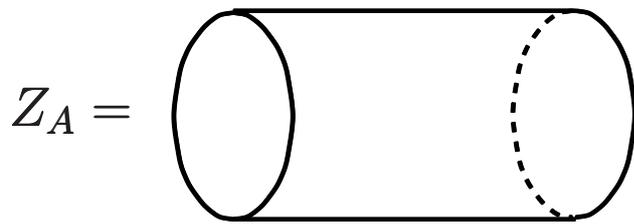
I potenziali **RR** soddisfano $*H_{(p+2)} = H_{(8-p)}$. Segue:

$$\mu_p = \text{carica elettrica per } C_{(p+1)} \text{ e magnetica per } C_{(7-p)}$$

$$\mu_{6-p} = \text{carica magnetica per } C_{(p+1)} \text{ e elettrica per } C_{(7-p)}$$

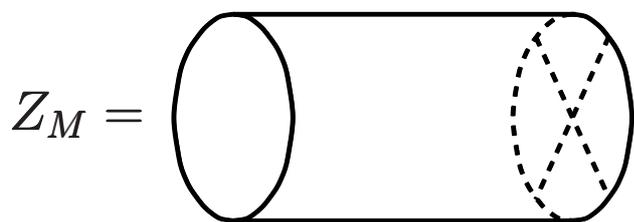
Quindi: **D p /O p** interagiscono elettricamente con **D p /O p** e magneticamente con **D $6-p$ /O $6-p$** .

Interazioni fra D-brane e O-piani



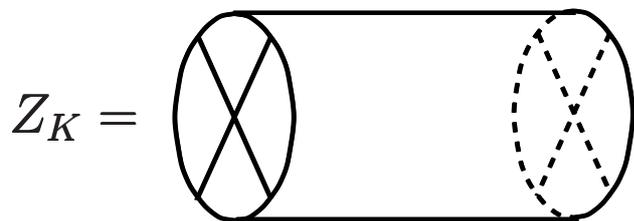
Loop : R + NS

Tree : RR + NSNS



Loop : R + NS

Tree : RR + NSNS



Loop : RR + NSNS

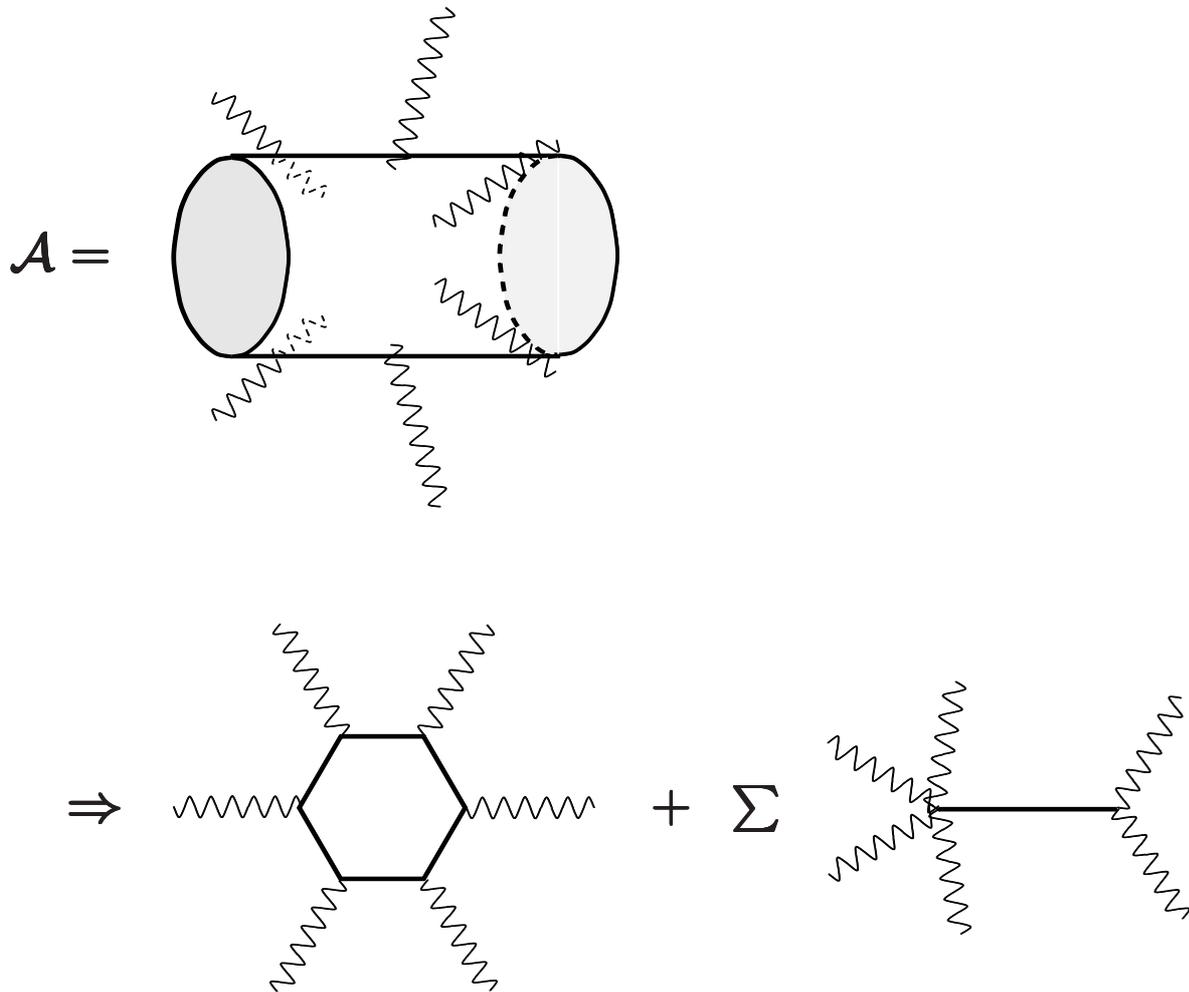
Tree : RR + NSNS

Anomalie

Esiste una corrispondenza precisa fra settori nei due canali. In particolare, la parte anomala del canale loop corrisponde sempre alla parte magnetica delle interazioni tree.

Il diagramma completo non può essere anomalo, perché è finito. Ci deve quindi essere un meccanismo di cancellazione delle anomalie che coinvolge interazioni magnetiche.

Il meccanismo di cancellazione è:



Questo implica accoppiamenti non-minimali di D-brane e O-piani ai campi RR:

$$S_p = -\mu_p \int_{p+1} \left(C_{(p+1)} + Y_{(2)} \wedge C_{(p-1)} + Y_{(4)} \wedge C_{(p-3)} + \dots \right)$$

ANOMALIE E INDICI

Le anomalie si possono vedere come non-invarianza della misura dell'integrale funzionale.

Fujikawa

Le anomalie di gauge/gravitazionali in D dimensioni sono legate all'anomalia chirale in $D + 2$ dimensioni. Questa è un'indice topologico dei fibrati che specificano il background.

Alvarez-Gaumé, Witten

Anomalie chirali

Consideriamo una generica teoria con un campo φ interagente con A e ω , dotata di una simmetria generata da Q , e definiamo:

$$e^{-\Gamma^{\text{eff}}(A,\omega)} = \int \mathcal{D}\varphi^\dagger \mathcal{D}\varphi e^{-S(\varphi,A,\omega)}$$

Sotto una trasformazione infinitesima $\varphi \rightarrow \varphi + i\alpha Q\varphi$, $S \rightarrow S$ ma:

$$\mathcal{D}\varphi^\dagger \mathcal{D}\varphi \rightarrow \mathcal{D}\varphi^\dagger \mathcal{D}\varphi e^{-i\alpha \text{Tr}[Q]}$$

dove Tr è sullo spettro dell'operatore cinetico K .

Questo si traduce in una variazione anomala $\delta\Gamma^{\text{eff}} = i\alpha Z$, con:

$$Z = \text{Tr}[Q]$$

Esempi di base:

- Spinore in $D = 2n$: $K = i\mathcal{D}$ e $Q = \Gamma_{D+1}$.
- Tensore in $D = 4n + 2$: $K = \mathcal{D} = d + d^*$ e $Q = *_{D}$.
(L'operatore cinetico è $K^2 = \square$. Il rango è $D/2$)

Quando $\{Q, K\} = 0$ e $Q^2 = 1$, come in questi casi, è facile verificare che:

$$\begin{aligned} Z &= \#(K = 0, Q = +1) - \#(K = 0, Q = -1) \\ &= \text{index}(K) \end{aligned}$$

Le anomalie chirali sono quindi indici, che dipendono da classi caratteristiche del fibrato di gauge e del fibrato tangente. Questi si possono calcolare usando teoremi dell'indice.

Alternativamente, si può fare un calcolo diretto della traccia regolarizzata:

$$Z = \lim_{t \rightarrow 0} \text{Tr}[Q e^{-tK^2}]$$

Questa è la funzione di partizione di una **MQS** con hamiltoniana K^2 e supercarica K , dotata di una simmetria Q . Contribuiscono solo stati ad energia nulla, e il risultato è indipendente da t . Le **MQS** appropriate sono riduzioni del **MSNS** da $1 + 1$ a $0 + 1$ dimensioni.

Le classi caratteristiche più importanti sono:

$$\text{ch}(F) = \text{tr} \exp i \frac{F}{2\pi} \quad \left(\text{tr} \mathbb{1} + \frac{i}{2\pi} \text{tr} F + \dots \right)$$

$$\hat{A}(R) = \prod_{a=1}^{D/2} \frac{\frac{R_a}{4\pi}}{\sinh \frac{R_a}{4\pi}} \quad \left(1 + \frac{1}{48(2\pi)^2} \text{tr} R \wedge R + \dots \right)$$

$$\hat{L}(R) = \prod_{a=1}^{D/2} \frac{\frac{R_a}{2\pi}}{\tanh \frac{R_a}{2\pi}} \quad \left(1 - \frac{1}{6(2\pi)^2} \text{tr} R \wedge R + \dots \right)$$

$$e(R) = \prod_{a=1}^{D/2} \frac{R_a}{2\pi} \quad \left(\frac{1}{(D/2)! (4\pi)^{D/2}} \text{tr} R \wedge R \wedge \dots \wedge R \right)$$

Per i due esempi base, si trova:

$$\begin{aligned} Z_{\Gamma} &= \text{index}(i\mathcal{D}) = \int \text{ch}(F) \wedge \hat{A}(R) \Big|_D \\ Z_* &= -\frac{1}{8} \text{index}(\mathcal{D}) = -\frac{1}{8} \int \hat{L}(R) \Big|_D \end{aligned}$$

Anomalie di gauge e gravitazionali

L'anomalia \mathcal{A} sotto una simmetria locale si calcola analogamente. I sottospazi con $Q = \pm 1$ contribuiscono con segni opposti, e si trova:

$$\mathcal{A} = \text{Tr}[Q \delta]$$

\mathcal{A} deve soddisfare la condizione di WZ. Questo implica che sia il discendente di una $D + 2$ -forma $I(F, R)$ chiusa e gauge-invariante. Definendo $I = dI^{(0)}$ e $\delta I^{(0)} = dI^{(1)}$, la soluzione generale è:

$$\mathcal{A} = 2\pi i \int I^{(1)}$$

Si può verificare che la forma I da cui discende \mathcal{A} in D dimensioni è data da Z in $D + 2$ dimensioni:

$$\int I = Z$$

MECCANISMO DI INFLOW

Può succedere che una teoria consistente ammetta come vuoto un difetto topologico su cui vivono modi zero chirali. L'anomalia localizzata sul suo VM deve essere automaticamente cancellata grazie all'accoppiamento con il resto dello spazio-tempo.

Callan, Harvey

Questo è il caso dei vuoti di stringa con D-brane e O-pani: presentano uno spettro chirale ma non possono esserci anomalie. In generale, c'è un'anomalia quantistica sul VM, ma questa deve essere cancellata da un inflow classico di anomalia.

Anomalie classiche possono emergere in interazioni magnetiche. Consideriamo degli oggetti M_i in uno spazio-tempo X , con accoppiamenti RR:

$$S_i = -\mu_i \int_{M_i} C \wedge Y_i$$

con $C = \sum_p C_{(p)}$ e $Y_i = Y_i(F, R)$.

Questi si possono scrivere come integrale su tutto X usando le correnti τ_{M_i} . Localmente, $\tau_{M_i} \sim \delta(x^{d_i}) dx^{d_i} \wedge \dots \wedge \delta(x^D) dx^D$, ma globalmente τ_{M_i} è determinata da $N(M_i)$.

L'azione per i campi RR diventa allora:

$$S = -\frac{1}{2} \int_X H \wedge *H + \sum_i \mu_i \int_X \tau_{M_i} \wedge H \wedge Y_i^{(0)}$$

Le equazioni del moto e le identità di Bianchi sono:

$$d^*H = \sum_i \mu_i \tau_{M_i} \wedge Y_i$$

$$dH = - \sum_i \mu_i \tau_{M_i} \wedge \bar{Y}_i$$

L'identità di Bianchi implica:

$$H = dC - \sum_i \mu_i \tau_{M_i} \wedge \bar{Y}_i^{(0)}$$

Siccome H deve essere invariante, C deve trasformarsi come:

$$\delta C = \sum_i \mu_i \tau_{M_i} \wedge \bar{Y}_i^{(1)}$$

Gli accoppiamenti **RR** sono quindi anomali:

$$\mathcal{A} = -i \sum_{i,j} \mu_i \mu_j \int_X \tau_{M_i} \wedge \tau_{M_j} \wedge (Y_i \wedge \bar{Y}_j)^{(1)}$$

L'interazione magnetica di M_i con M_j produce un'anomalia localizzata sull'intersezione M_{ij} . Questo segue dalla proprietà:

$$\tau_{M_i} \wedge \tau_{M_j} = \tau_{M_{ij}} \wedge e[N(M_{ij})]$$

Finalmente, l'inflow classico di anomalia su ogni intersezione M_{ij} si può scrivere come $\mathcal{A}_{ij} = 2\pi i \int_{M_{ij}} I_{ij}^{(1)}$ con

$$I_{ij} = -\frac{\mu_i \mu_j}{2\pi} Y_i \wedge \bar{Y}_j \wedge e[N(M_{ij})]$$

Green, Harvey, Moore; Cheung, Yin

ANOMALIA E INFLOW PER D-BRANE E O-PIANI

Consideriamo due Dp-brane e/o Op-piani sovrapposti su $M \subset X$. I campi chirali su M possono essere letti dalle corrispondenti funzioni di partizione:

DD : $Z_A \Rightarrow$ Spinore R chirale nell'aggiunta

DO : $Z_M \Rightarrow$ Spinore R chirale nella fondamentale

OO : $Z_K \Rightarrow$ Tensore RR self-duale

Questi campi compaiono in multipletti ottenuti riducendo un singolo campo chirale da X a M . Siccome $Q_D = Q_d Q_{D-d}$:

$$Q_D = + \rightarrow (Q_d, Q_{D-d}) = (+, +) \oplus (-, -)$$

$$Q_D = - \rightarrow (Q_d, Q_{D-d}) = (+, -) \oplus (-, +)$$

Ci possono essere anomalie solo se lo spazio trasverso è curvo, rendendo le rappresentazioni $(+, +)$ e $(-, -)$ inequivalenti.

Anomalia da uno spinore chirale ridotto

L'anomalia di uno spinore chirale ridotto da X a M è

$$\mathcal{A} = \lim_{t \rightarrow 0} \text{Tr} \left[\Gamma^{D+1} \delta e^{-t(i\mathcal{P})^2} \right]$$

Esponenziando δ , questa si può scrivere come $\mathcal{A} = 2\pi i Z^{(1)}$, dove

$$Z = \lim_{t \rightarrow 0} \text{Tr} \left[\Gamma^{D+1} e^{-t(i\mathcal{P})^2} \right]$$

Matematicamente, Z è l'indice di un complesso di spin:

$$Z = \text{index}(i\mathcal{D})$$

Uno spinore con chiralità \pm su tutto X è una sezione di $S_{T(X)}^{\pm}$. Su $M \subset X$, $T(X)$ si decompone in $T(M) \oplus N(M)$ e $S_{T(X)}^{\pm}$ in:

$$E^{\pm} = \left(S_{T(M)}^{\pm} \otimes S_{N(M)}^{+} \right) \oplus \left(S_{T(M)}^{\mp} \otimes S_{N(M)}^{-} \right)$$

Introducendo anche un fibrato di gauge, si ottiene il complesso

$$i\mathcal{D} : \Gamma[M, E^{+} \otimes V] \rightarrow \Gamma[M, E^{-} \otimes V]$$

Il teorema dell'indice da:

$$\text{index}(i\mathcal{D}) = \int_M \text{ch}(V) \text{ch}(E^{+} \ominus E^{-}) \frac{\text{Td}[T(M^C)]}{e[T(M)]}$$

che porta al risultato

$$Z = \int_M \text{ch}(F) \wedge \frac{\hat{A}(R)}{\hat{A}(R')} \wedge e(R')$$

Fisicamente, Z è una funzione di partizione. Trovata una MQS con $Q = i\mathcal{D}$ e $(-1)^F = \Gamma^{D+1}$, Z diventa un indice di Witten:

$$Z = \text{Tr} \left[(-1)^F e^{-tH} \right]$$

La MQS appropriata è ottenuta riducendo il MSNS con condizioni al contorno di N e D ($\mu, \nu, \dots \parallel M$; $i, j, \dots \perp M$):

$$x^{\mu} = x^{\mu} \quad , \quad x^i = 0$$

$$\psi_1^{\mu} = \psi_2^{\mu} = \psi^{\mu} \quad , \quad \psi_1^i = -\psi_2^i = \psi^i$$

La lagrangiana è:

$$L = \frac{1}{2}g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu + \frac{i}{2}\psi_\mu (\dot{\psi}^\mu + \omega_\rho{}^\mu{}_\nu \dot{x}^\rho \psi^\nu) \\ + \frac{i}{2}\psi_i (\dot{\psi}^i + \omega_\rho{}^i{}_j \dot{x}^\rho \psi^j) + \frac{1}{4}R_{\mu\nu ij} \psi^\mu \psi^\nu \psi^i \psi^j$$

con:

$$(-1)^F : (x, \psi) \rightarrow (x, -\psi)$$

Campi di gauge possono essere incorporati in modo standard.

A causa di $(-1)^F$, tutti i campi sono periodici e

$$Z = \int_P \mathcal{D}x^\mu \int_P \mathcal{D}\psi^\mu \int_P \mathcal{D}\psi^i e^{-S}$$

Per $t \rightarrow 0$, Z è dominata da traiettorie costanti:

$$x^\mu = x_0^\mu + \xi^\mu, \quad x^i = 0$$

$$\psi^\mu = \psi_0^\mu + \lambda^\mu, \quad \psi^i = \psi_0^i + \lambda^i$$

È sufficiente limitarsi ad interazioni quadratiche e con un numero massimo di ψ_0 . Considerando anche il background di gauge, si trova:

$$L^{eff} = \frac{1}{2}(\dot{\xi}_\mu \dot{\xi}^\mu + i\lambda_\mu \dot{\lambda}^\mu + i\lambda_i \dot{\lambda}^i + iR_{\mu\nu} \dot{\xi}^\mu \dot{\xi}^\nu + R'_{ij} \lambda^i \lambda^j) \\ + \frac{1}{2}R'_{ij} \psi_0^i \psi_0^j + iF$$

dove

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}R_{\mu\nu\rho\sigma}(x_0) \psi_0^\rho \psi_0^\sigma, \quad R'_{ij} = \frac{1}{2}R_{ij\rho\sigma}(x_0) \psi_0^\rho \psi_0^\sigma$$

$$F = \frac{1}{2}F_{\mu\nu}(x_0) \psi_0^\mu \psi_0^\nu$$

L'integrale funzionale si calcola facilmente:

$$\begin{aligned}
 Z = & \int dx_0^\mu \int d\psi_0^\mu \operatorname{tr} \exp \{iFt\} \underbrace{(2\pi t)^{-\frac{d}{2}} \prod_{a=1}^{d/2} \frac{R_{at}/2}{\sinh R_{at}/2}}_{\det_P(i\eta_{\mu\nu}\partial_\tau)} \frac{\det_P(i\eta_{\mu\nu}\partial_\tau)}{\det_P(\eta_{\mu\nu}\partial_\tau^2 + iR_{\mu\nu}\partial_\tau)} \\
 & \underbrace{\det_P(i\eta_{ij}\partial_\tau + R'_{ij})}_{\prod_{a=1}^{d/2} \frac{\sinh R'_a t/2}{R'_a t/2}} \int d\psi_0^i \underbrace{\exp \left\{ \frac{t}{2} R'_{ij} \psi_0^i \psi_0^j \right\}}_{\prod_{a=d/2}^{D/2} R'_a t}
 \end{aligned}$$

Finalmente, si ottiene:

$$Z = \int_M \operatorname{ch}(F) \wedge \frac{\widehat{A}(R)}{\widehat{A}(R')} \wedge e(R')$$

Cheung, Yin; Scrucca, Serone

Anomalia da un tensore self-duale ridotto

L'anomalia di un tensore self-duale ridotto da X a M è

$$\mathcal{A} = \frac{1}{4} \lim_{t \rightarrow 0} \operatorname{Tr} \left[*_D I \delta e^{-t\mathcal{D}^2} \right]$$

dove I è una riflessione trasversa che lascia fissato $M \subset X$ e $\mathcal{D} = d + d^*$ su tutto X .

Esponenziando δ , questa si può scrivere come $\mathcal{A} = 2\pi i Z^{(1)}$, con

$$Z = -\frac{1}{8} \lim_{t \rightarrow 0} \text{Tr} \left[*_D I e^{-t\mathcal{D}^2} \right]$$

Matematicamente, Z è un G -indice del complesso di segnatura:

$$Z = -\frac{1}{8} \text{index}_G(\mathcal{D})$$

Più precisamente:

$$\mathcal{D} : \Gamma[X, +\wedge T^*(X)] \longrightarrow \Gamma[X, -\wedge T^*(X)]$$

$$G : X \longrightarrow X \quad (I : (x^\mu, x^i) \longrightarrow (x^\mu, -x^i))$$

$G = \mathbf{Z}_2$ preserva l'orientamento poichè D e d devono essere pari.

Lascia fissato $M \subset X$ e agisce con $+1$ in $T(M)$ e -1 in $N(M)$.

Il teorema del G -indice da:

$$\text{index}_G(\mathcal{D}) = \int_M \frac{\text{ch}(E^+ \ominus E^-) \text{ch}(F^+ \ominus F^-) \text{Td}[T(M^C)]}{\text{ch}(F) e[T(M)]}$$

dove

$$E^\pm = \pm \wedge T^*(M), \quad F^\pm = \pm \wedge N^*(M)$$

$$F = \bigoplus_i (-1)^i \wedge^i N^*(M)$$

Finalmente, si ottiene:

$$Z = -\frac{1}{8} \int_M \frac{\widehat{L}(R)}{\widehat{L}(R')} \wedge e(R')$$

Fisicamente, Z è di nuovo una funzione di partizione. In questo caso, abbiamo bisogno di una **MQS** con $H = \mathcal{D}^2$ e una simmetria $\Omega = *_{\mathcal{D}}$, in modo che Z diventi un indice di **Witten**:

$$Z = -\frac{1}{8} \text{Tr} \left[\Omega I e^{-tH} \right]$$

La **MQS** appropriata è la riduzione dimensionale banale del **MSNS**,

$$L = \frac{1}{2} g_{MN}(x) \dot{x}^M \dot{x}^N + \frac{i}{2} \sum_{\alpha=1,2} \psi_{\alpha M} \left(\dot{\psi}_{\alpha}^M + \omega_M{}^N(x) \psi_{\alpha}^N \dot{x}^M \right) \\ + \frac{1}{4} R_{MNPQ}(x) \psi_1^M \psi_1^N \psi_2^P \psi_2^Q$$

con $(M, N, \dots \in X; \mu, \nu, \dots \parallel M; i, j, \dots \perp M)$:

$$\Omega : (x, \psi_1, \psi_2) \rightarrow (x, -\psi_1, \psi_2)$$

$$I : (x^\mu, x^i; \psi_\alpha^\mu, \psi_\alpha^i) \rightarrow (x^\mu, -x^i; \psi_\alpha^\mu, -\psi_\alpha^i)$$

A causa di ΩI , la periodicità dei campi non è quella usuale e

$$Z = -\frac{1}{8} \int_P \mathcal{D}x^\mu \int_A \mathcal{D}x^i \int_P \mathcal{D}\psi_1^\mu \int_A \mathcal{D}\psi_1^i \int_A \mathcal{D}\psi_2^\mu \int_P \mathcal{D}\psi_2^i e^{-S}$$

Per $t \rightarrow 0$, Z è dominata da traiettorie costanti:

$$x^\mu = x_0^\mu + \xi^\mu, \quad x^i = \xi^i$$

$$\psi_1^\mu = \psi_0^\mu + \lambda_1^\mu, \quad \psi_1^i = \lambda_1^i$$

$$\psi_2^\mu = \lambda_2^\mu, \quad \psi_2^i = \psi_0^i + \lambda_2^i$$

Come prima, basta tenere interazioni quadratiche nelle fluttuazioni e con un numero massimo di ψ_0 .

Si trova:

$$L^{eff} = \frac{1}{2} \left[\dot{\xi}_\mu \dot{\xi}^\mu + \dot{\xi}_i \dot{\xi}^i + i\lambda_{1\mu} \dot{\lambda}_1^\mu + i\lambda_{1i} \dot{\lambda}_1^i + i\lambda_{2\mu} \dot{\lambda}_2^\mu + i\lambda_{2i} \dot{\lambda}_2^i \right. \\ \left. + R_{\mu\nu} \left(i \dot{\xi}^\mu \dot{\xi}^\nu + \lambda_2^\mu \lambda_2^\nu \right) + R'_{ij} \left(i \dot{\xi}^i \dot{\xi}^j + \lambda_2^i \lambda_2^j \right) \right] \\ + \frac{1}{2} R'_{ij} \psi_0^i \psi_0^j$$

dove

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} R_{\mu\nu\rho\sigma}(x_0) \psi_0^\rho \psi_0^\sigma, \quad R'_{ij} = \frac{1}{2} R_{ij\rho\sigma}(x_0) \psi_0^\rho \psi_0^\sigma$$

L'integrale funzionale è facile da calcolare:

$$Z = -\frac{1}{8} \int dx_0^\mu \int d\psi_0^\mu \underbrace{\frac{(\pi t)^{-\frac{d}{2}} \prod_{a=1}^{d/2} \frac{R_a t/2}{\tanh R_a t/2}}{\det_P(i\eta_{\mu\nu} \partial_\tau) \det_A(i\eta_{\mu\nu} \partial_\tau + R_{\mu\nu})}}_{\det_P(\eta_{\mu\nu} \partial_\tau^2 + iR_{\mu\nu} \partial_\tau)} \\ \underbrace{\frac{\det_A(i\eta_{ij} \partial_\tau) \det_P(i\eta_{ij} \partial_\tau + R'_{ij})}{\det_A(\eta_{ij} \partial_\tau^2 + iR'_{ij} \partial_\tau)}}_{2^{-\frac{D-d}{2}} \prod_{a=1}^{d/2} \frac{\tanh R'_a t/2}{R'_a t/2}} \int d\psi_0^i \exp \left\{ \frac{t}{2} R'_{ij} \psi_0^i \psi_0^j \right\} \\ \underbrace{\quad}_{2^{\frac{D-d}{2}} \prod_{a=d/2}^{D/2} R'_a t/2}$$

Finalmente, il risultato è:

$$Z = -\frac{1}{8} \int_M \frac{\widehat{L}(R)}{\widehat{L}(R')} \wedge e(R')$$

Scrucca, Serone

Accoppiamenti anomali

Le anomalie su due Dp-brane e/o Op-piani sovrapposti sono

$$I_{DD} = \text{ch}_{\mathbf{n} \otimes \bar{\mathbf{n}}}(F) \wedge \frac{\hat{A}(R)}{\hat{A}(R')} \wedge e(R')$$

$$I_{DO} = \text{ch}_{\mathbf{n} \oplus \bar{\mathbf{n}}}(2F) \wedge \frac{\hat{A}(R)}{\hat{A}(R')} \wedge e(R')$$

$$I_{OO} = -\frac{1}{8} \frac{\hat{L}(R)}{\hat{L}(R')} \wedge e(R')$$

Assegnando gli accoppiamenti di RR

$$S_{D,O} = \sqrt{2\pi} \int C \wedge Y_{D,O}$$

si trovano gli inflows

$$I_{DD} = -Y_D \wedge \bar{Y}_D \wedge e(R')$$

$$I_{DO} = -(Y_D \wedge \bar{Y}_O + Y_O \wedge \bar{Y}_D) \wedge e(R')$$

$$I_{OO} = -Y_O \wedge \bar{Y}_O \wedge e(R')$$

La cancellazione delle anomalie richiede:

$$Y_D = \text{ch}_{\mathbf{n}}(F) \wedge \sqrt{\frac{\hat{A}(R)}{\hat{A}(R')}}}$$

$$Y_O = -2^{p-4} \sqrt{\frac{\hat{L}(R/4)}{\hat{L}(R'/4)}}$$

CALCOLO DI STRINGA DELLE ANOMALIE E DEGLI INFLOWS

Calcolo dell'anomalia totale

Le anomalie di una teoria sono determinate da diagrammi ad un loop in cui una delle particelle esterne ha una polarizzazione non-fisica. La somma di queste ampiezze misura la variazione dell'azione effettiva ad un loop.

Le ampiezze da considerare sono quelle con struttura di spin dispari sulle superfici $\Sigma = A, M$ e K . Il loro funzionale generatore ha la forma:

$$\mathcal{A}_\Sigma = \int_0^\infty dt \left\langle J V^{\text{phy}} e^{-(S_0 + V^{\text{phy}})} \right\rangle_\Sigma$$

dove $t \in [0, \infty[$ è il modulo di Σ , J è la supercorrente della teoria superconforme, e V denota l'operatore di vertice di un fotone o di un gravitone.

Questa ampiezza non si annulla, perché il vertice non-fisico con polarizzazione longitudinale non è zero, ma soltanto BRST-triviale:

$$V^{\text{phy}} = [Q, \hat{V}^{\text{phy}}]$$

Siccome i vertici fisici sono BRST-invarianti, $[Q, \hat{V}^{\text{phy}}] = 0$, si può spostare Q ad agire su J , che viene trasformata nel tensore energia impulso:

$$[Q, J] = T$$

L'inserzione di T genera una deformazione rispetto alla variazione della metrica. Siccome la teoria è conforme, il risultato è una derivata rispetto al modulo:

$$\mathcal{A}_\Sigma = \int_0^\infty dt \frac{d}{dt} \left\langle \hat{V}^{\text{phy}} e^{-(S_0 + V^{\text{phy}})} \right\rangle_\Sigma$$

In modelli di stringa consistenti, l'assenza di divergenze implica che $\mathcal{A}_A + \mathcal{A}_M + \mathcal{A}_K = 0$.

Inami, Kanno, Kubota; Polchinski, Cai

La parte dominante di \mathcal{A}_Σ si può calcolare usando vertici effettivi bilineari in ψ_0 :

$$V^{\text{phy}} \simeq V^{\text{eff}}(F, R)$$

$$\hat{V}^{\text{phy}} \simeq V^{\text{eff}}(F^{(1)}, R^{(1)})$$

Il ruolo del vertice non-fisico è di generare il discendente della rimanente funzione di partizione:

$$Z_\Sigma(t) = \left\langle e^{-(S_0 + V^{\text{eff}})} \right\rangle_\Sigma$$

L'anomalia assume allora la forma standard $\mathcal{A}_\Sigma = 2\pi i \int I_\Sigma^{(1)}$, con:

$$I_\Sigma = Z'_\Sigma(\infty) - Z'_\Sigma(0)$$

Questo è l'analogo del metodo di Fujikawa in stringa.

Scrucca, Serone

Nel limite di bassa energia, i vertici si semplificano e $Z(t)$ diventa un indice topologico indipendente da t . Quindi, $I_\Sigma = 0$ grazie alla cancellazione fra anomalie quantistiche ($Z_\Sigma(\infty)$) e inflows classici ($Z_\Sigma(0)$) associati alla stessa Σ .

I polinomi di anomalia e inflow su **D-brane** e **O-piani** sono dati da:

$$I_{DD} = Z'_A = \frac{1}{4} \text{Tr}'_R \left[(-1)^F e^{-tH} \right]$$

$$I_{DO} = Z'_M = \frac{1}{4} \text{Tr}'_R \left[\Omega I (-1)^F e^{-tH} \right]$$

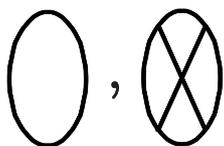
$$I_{OO} = Z'_K = \frac{1}{8} \text{Tr}'_{RR} \left[\Omega I (-1)^{F+\tilde{F}} e^{-tH} \right]$$

Questi sono indici a cui contribuiscono solo modi costanti lungo la direzione spaziale con $H = 0$. In questo modo, si ritrovano le **MQS** introdotte prima.

Chiaramente, si trovano gli stessi risultati per anomalie e accoppiamenti anomali.

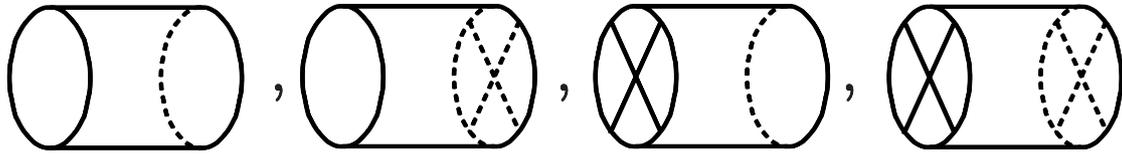
Calcolo diretto degli accoppiamenti **RR**

L'effettiva presenza dei giusti accoppiamenti **RR** si può verificare calcolando correlazioni su $\Sigma = D$ e C .



Li; Craps, Roose; Stefanski

Alternativamente, si possono calcolare le interazioni magnetiche RR fra D-brane e O-piani su $\Sigma = A, M$ e K ed estrarre le cariche per fattorizzazione.



Morales, Scrucca, Serone

Argomenti di dualità

Alcuni degli accoppiamenti anomali sono stati predetti usando varie dualità di stringa.

Bershadski, Sadov, Vafa; Dasgupta, Jatkar, Mukhi

CONCLUSIONI

- D-brane e O-piani hanno accoppiamenti RR anomali, cruciali per la consistenza della teoria.
- Le anomalie di VM vengono cancellate tramite un meccanismo di inflow.
- Anomalie e inflows si possono calcolare direttamente in teoria di stringa.
- Un meccanismo simile funziona anche in modelli più complicati.