SUPERSYMETRIE ET INTERACTIONS FONDAMENTALES

Claudio Scrucca
Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne

- Symétries et quantités conservées
- Symétries d'espace-temps et internes
- Théories quantiques relativistes
- Supersymétrie et ses implications
- Théories supersymétriques
- Implications en physique des particules

SYMETRIES ET QUANTITES CONSERVEES

Transformations de symétrie

Les transformations de symétrie d'un système physique doivent former un groupe, incorporant les notions de composition, inverse et identité. Elles peuvent être en nombre infini et dépendre d'un certain nombre de paramètres réels α_a. On a alors un groupe de Lie.

Ces transformations sont réalisées sur l'espace vectoriel des variables du système par une représentation du groupe en termes d'opérateurs linéaires $U(\alpha_a)$ possédant les propriétés suivantes:

$$
\begin{aligned}
&U(\alpha_a)\,U(\beta_a) = U(\gamma_a(\alpha_a, \beta_a)) \\
&U(\alpha_a)^{-1} = U(-\alpha_a) \\
&\mathbb{I} = U(0)
\end{aligned}
$$

Générateurs et algèbre

Pour des transformations continues, les opérateurs $U(\alpha_a)$ peuvent être exprimés en termes d'un nombre fini de générateurs T^a comme:

$$U(\alpha_a) = \exp\{i\alpha_a T^a\}$$

Le fait que ces opérateurs $U(\alpha_a)$ forment un groupe avec une certaine loi de composition se traduit dans le fait que les opérateurs T^a génèrent une algèbre de Lie avec certaines constantes de structure:

$$[T^a, T^b] = i f^{ab}{}_c T^c$$

En fait, les générateurs T^a contrôlent les transformations infinitésimales, dont l'application répétée permet de construire les transformations finies continument reliées à l'identité.

$$U(\delta\alpha_a) = \mathbb{I} + i\,\delta\alpha_a T^a$$

Différentes représentations

Un groupe donné et son algèbre admettent un nombre de représentations inéquivalentes sur des espaces vectoriels de dimensions différentes. Les opérateurs peuvent être des matrices sur un espace vectoriel fini ou des opérateurs différentiels sur un espace fonctionnel infini.

Les différentes représentations sont caractérisées par les valeurs prises par les opérateurs de Casimir commutant avec tous les générateurs.

Symétries en physique quantique

En physique quantique, les configurations sont décrites par des vecteurs $|\psi\rangle$ dans un espace de Hilbert, et les observables sont associées aux éléments de matrice d'opérateurs linéaires $\boldsymbol{O}$ agissant sur cet espace.

Les opérateurs réalisant les transformations de symétrie sont alors en général des matrices d'opérateurs différentiels.

Action des transformations

Une transformation finie $U(\alpha_a)$ et infinitésimale $U(\delta\alpha_a)$ induisent un changement sur les états noté donné par:

$$|\psi'\rangle = U(\alpha_a)|\psi\rangle \;\Leftrightarrow\; \delta^a|\psi\rangle = iT^a|\psi\rangle$$

Pour que la probabilité totale $\langle\psi|\psi\rangle$ reste inchangée, il est nécessaire que $U(\alpha_a)$ soit unitaire et donc T^a Hermitique:

$$U(\alpha_a)^\dagger = U(\alpha_a)^{-1} \;\Leftrightarrow\; (T^a)^\dagger = T^a$$

Pour que les observables $\langle\psi|O|\psi\rangle$ restent inchangées, les opérateurs doivent eux aussi se transformer:

$$O' = U(\alpha_a)O\,U(\alpha_a)^{-1} \;\Leftrightarrow\; \delta^a O = i[T^a, O]$$

La transformation est une symétrie de la dynamique si

$$[H, U(\alpha_a)] = i\frac{\partial}{\partial t}U(\alpha_a) \;\Leftrightarrow\; [H, T^a] = i\frac{\partial}{\partial t}T^a$$

Lois de conservation

A chaque famille de symétries dépendant d'un paramètre α_a laissant invarié un système physique il correspond une quantité conservée durant la dynamique, associée au générateur correspondant T^a:

$$\langle T^a \rangle = \langle \psi | T^a | \psi \rangle : \text{ conservé } \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \langle T^a \rangle = 0$$

Pour un groupe de symétries à plusieurs paramètres α_a, les différents générateurs T^a sont tous conservés. Leurs commutateurs $[T^a, T^b]$ sont eux-aussi automatiquement conservés et sont en fait des combinaisons linéaires des T^c, réalisant l'algèbre associée:

$$[T^a, T^b] = i f^{ab}{}_c T^c$$

Il existe donc une correspondance un à un entre symétries et quantités conservées. Les conséquences physiques sont plus ou moins évidentes selon qu'il y ait une dépendence explicite du temps ou pas.

Théories de champs

L'équation d'onde d'une théorie quantique peut être réinterprétée comme l'équation du mouvement d'un champs classique. Elle peut alors être vue comme équation d'Euler-Lagrange suivant d'un principe variationnel basé sur une action de la forme:

$$I = \int d^4x \, \mathcal{L}[\psi(x)]$$

Dans cette formulation, toute symétrie continue de I dépendant d'un paramètre α_a implique l'existence d'un quadricourant $J^{a\mu} = (\rho^a, \vec{\jmath}^{\,a})$ satisfaisant une équation de continuité:

$$\partial_\mu J^{a\mu} = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{d}{dt}\rho^a + \vec{\nabla}\cdot\vec{\jmath}^{\,a} = 0$$

La quantité conservée correspondante est:

$$\langle T^a \rangle = \int d^3\vec{x}\, \rho^a[\psi(x)] : \text{ conservé } \Leftrightarrow \frac{d}{dt}\langle T^a \rangle = 0$$

SYMETRIES D'ESPACE-TEMPS

Principe de relativité

Le principe de relativité affirme que les lois fondamentales de la physique doivent être invariantes sous changements de référentiels non-accélérés préservant l'intervalle de Minkowski dans l'espace-temps.

Ceci implique que toute théorie relativiste doit posséder un groupe de symétries dont les transformations infinitésimales prennent la forme

$$\delta x^\mu = -\epsilon^\mu + \omega^{\mu\nu} x_\nu$$

où ϵ^μ est arbitrarire et $\omega^{\mu\nu}$ antisymétrique, de sorte que:

ϵ^μ : translations spatiales (3) et temporelles (1)

$\omega^{\mu\nu}$: rotations spatiales (3) et boosts (3)

Algèbre de Poincaré

Il y a $\mathbf{10}$ générateurs indépendants correspondant à autant de quantités conservées, qui sont organisés en deux groupes:

P_μ : impulsion (3) et énergie (1)

$M_{\mu\nu}$: moment cinétique (3) et de centre de masse (3)

Les constantes de structure de l'algèbre qu'ils forment sont fixées par le commutateur de deux transformations infinitésimales arbitraires:

$$[\delta_1, \delta_2] x^\mu = (\omega_1 \cdot \epsilon_2 - \omega_2 \cdot \epsilon_1)^\mu - (\omega_1 \cdot \omega_2 - \omega_2 \cdot \omega_1)^{\mu\nu} x_\nu$$

Ce résultat implique que les opérateurs associés aux impulsions et aux moments satisfont l'algèbre suivante:

$$[P_\mu, P_\nu] = 0$$
$$[P_\mu, M_{\rho\sigma}] = i(\eta_{\mu\rho} P_\sigma - \eta_{\mu\sigma} P_\rho)$$
$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = i(\eta_{\nu\rho} M_{\mu\sigma} - \eta_{\mu\rho} M_{\nu\sigma} - \eta_{\nu\sigma} M_{\mu\rho} + \eta_{\mu\sigma} M_{\nu\rho})$$

Représentations et champs

La représentation unitaire la plus générale est construite sur un champ à plusieurs composantes dépendant des coordonnées x^μ:

$$\psi^A(x) = \text{champ à plusieurs composantes}$$

La transformation infinitésimale prend la forme

$$\delta\psi = \left(i\epsilon^\mu P_\mu + \frac{i}{2}\omega^{\mu\nu} M_{\mu\nu}\right)\psi$$

Elle combine des représentations matricielles et différentielles:

$$P_\mu = i\partial_\mu$$
$$M_{\mu\nu} = \Sigma_{\mu\nu} + i(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu)$$

On peut construire une action automatiquement invariante en intégrant sur tout l'espace-temps une densité scalaire de Lagrangien:

$$I = \int d^4x\, \mathcal{L}[\psi(x)]$$

Options possibles

Les représentations possibles sont caractérisées par deux opérateurs de Casimir. Leurs valeurs correspondent à des propriétés intrinsèques qui caractérisent la particule décrite:

m : mass réelle positive ou nulle

s : spin entier ou semi-entier positif

Le nombre de composantes est $2s+1$, et les différentes possibilités pour les matrices $\Sigma^{\mu\nu}$ sont construites à partir des matrices de Pauli:

$$\sigma^{\mu} = (\mathbb{I}, \vec{\sigma}) \qquad \sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{4}(\sigma^{\mu}\bar{\sigma}^{\nu} - \sigma^{\nu}\bar{\sigma}^{\mu})$$

$$\bar{\sigma}^{\mu} = (\mathbb{I}, -\vec{\sigma}) \qquad \bar{\sigma}^{\mu\nu} = \frac{i}{4}(\bar{\sigma}^{\mu}\sigma^{\nu} - \bar{\sigma}^{\nu}\sigma^{\mu})$$

Le deux cas les plus importants sont:

- $s = 0$: $\Sigma^{\mu\nu} = 0$
- $s = \frac{1}{2}$: $\Sigma^{\mu\nu} = \sigma^{\mu\nu}$ ou $\bar{\sigma}^{\mu\nu}$

SYMETRIES INTERNES

Règles de sélection

Une théorie peut posséder un groupe de symétries internes qui préserve les coordonnées et mélange différents champs de même type. De telles symétries impliquent des restrictions particulières sur la dynamique.

Groupe et algèbre de symétries internes

On peut à priori avoir un groupe arbitraire de transformations dépendant de paramètres α_a. Ce groupe doit toutefois être compact, pour qu'il puisse admette des représentations unitaires de dimension finie.

Les n générateurs B^a correspondent alors à des quantités conservées et satisfont l'algèbre correspondante:

$$[B^a, B^b] = i f^{ab}{}_c\, B^c$$

Représentations

Une représentation unitaire générique est construite sur un ensemble de champs de même type. La transformation infinitésimale prend la forme:

$$\delta\psi = i\alpha_a B^a \psi$$

Elle fait intervenir une représentation matricielle:

$$B^a = \lambda^a$$

Options possibles

Les représentations possibles sont caracterisées par un certain nombre d'opérateurs de Casimir. Leurs valeurs définissent des propriétés qui caractérisent le groupe de particules décrites:

c_k : nombres quantifiés

THEORIES QUANTIQUES RELATIVISTES

Propriétés générales

La localité et l'invariance relativiste impliquent que pour chaque particule il existe une antiparticule, avec les mêmes valeurs de la masse m et du spin s mais valeurs opposées des charges q_k:

particules $\Leftrightarrow$ antiparticules

La généralisation des quadricourants de densité de probabilité est donnée par les quadricourants conservés des symétries internes, et les particules et antiparticules contribuent avec des signes opposés.

Les particules de spin $s =$ entier sont des bosons alors que les particules de spin $s =$ semientier sont des fermions.

Champs scalaires et spinoriels

Le cas bosonique le plus simple $s = 0$ correspond à un champ scalaire à une composante ϕ satisfaisant l'équation de Klein-Gordon:

$$\Box\phi + m^2\phi = 0$$

La densité de Lagrangien correspondante est:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\,\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2$$

Le cas fermionique les plus simple $s = \frac{1}{2}$ correspond à un champ spinoriel à deux composantes χ_α satisfaisant l'équation de Dirac-Majorana:

$$i\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\chi - m\bar{\chi} = 0$$

La densité de Lagrangien correspondante est donnée par:

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2}(\chi\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\chi} - \partial_\mu\chi\bar{\sigma}^\mu\bar{\chi}) - \frac{1}{2}m(\chi\chi + \bar{\chi}\bar{\chi})$$

THEORIES DE CHAMPS QUANTIQUES RELATIVISTES

Théorie quantique des champs

Pour décrire des phénomènes où le nombre et la nature des particules ne sont pas conservés, on utilise le formalisme des champs quantiques.

Le champs classique ψ décrivant la fonction d'onde est quantifié et promu à un opérateur sur un espace de Fock. Ses excitations sont décrites par des oscillateurs harmoniques et interprétées comme particules.

Processus de diffusion

Le phénomène de base étudié est la diffusion arbitraire de particules. Il est décrit par des sections efficaces de diffusion, liées aux probabilités de transition données par les éléments de la matrice de diffusion S:

$$P_{\mathrm{if}} = \langle \mathrm{f} | S | \mathrm{i} \rangle$$

Propriétés de la matrice de diffusion

La probabilité totale d'une quelconque diffusion doit être l'unité. Ceci implique que $\boldsymbol{S}$ est unitaire:

$$\boldsymbol{S}^{\dagger} = \boldsymbol{S}^{-1}$$

Les opérateurs $\boldsymbol{T}^{\boldsymbol{a}}$ générant des symétries de la théorie correspondent à des quantités conservées. Ceci implique que $\boldsymbol{S}$ commute avec eux:

$$[\boldsymbol{T}^{\boldsymbol{a}}, \boldsymbol{S}] = \boldsymbol{0}$$

La présence de symétries implique donc des restrictions sur $\boldsymbol{S}$, qui doit prendre une forme diagonale en blocs, et des lois de conservation:

$$[\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{\mu}}, \boldsymbol{S}] = \boldsymbol{0} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{E} \text{ et } \vec{\boldsymbol{P}}$$
$$[\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{\mu\nu}}, \boldsymbol{S}] = \boldsymbol{0} \;\Rightarrow\; \vec{\boldsymbol{J}} = \vec{\boldsymbol{L}} + \vec{\boldsymbol{S}} \text{ et } \vec{\boldsymbol{J}}' = \boldsymbol{E}\,\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{P}}\,\boldsymbol{t}$$
$$[\boldsymbol{B}^{\boldsymbol{a}}, \boldsymbol{S}] = \boldsymbol{0} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{q}^{\boldsymbol{a}}$$

Statistique et commutateurs-anticommutateurs

Une particule de type fixé est décrite par un oscilateur harmonique, défini par des opérateurs de création et destruction et un opérateur nombre:

$\boldsymbol{a}$ **:** opérateur de destruction

$\boldsymbol{a^\dagger}$ **:** opérateur de création

$\boldsymbol{N = a^\dagger a}$ **:** opérateur nombre

Pour que $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a^\dagger}$ et $\boldsymbol{N}$ aient cette interprétation, il est nécessaire que

$$\boldsymbol{[N, a] = -a \ , \quad [N, a^\dagger] = a^\dagger}$$

On peut réaliser ceci avec deux algèbres différentes pour $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{a^\dagger}$, qui impliquent les statistiques de Bose-Einstein et Fermi-Dirac:

Bosons : $\boldsymbol{[a, a] = 0 \ , \quad [a^\dagger, a^\dagger] = 0 \ , \quad [a, a^\dagger] = 1}$

Fermions : $\boldsymbol{\{a, a\} = 0 \ , \quad \{a^\dagger, a^\dagger\} = 0 \ , \quad \{a, a^\dagger\} = 1}$

Indépendence des symétries d'espace-temps et internes

Les symétries d'espace-temps et internes d'une théorie relativiste avec une matrice S non-banale doivent être indépendantes, de sorte que:

$$[P_\mu, B^a] = 0$$
$$[M_{\mu\nu}, B^a] = 0$$

Cette limitation provient du fait que les deux sous-groupes de symétries d'espace-temps générés par P_μ et $M_{\mu\nu}$ sont non-compacts, alors que le groupe des symétries internes générées par B^a doit être compact.

Interactions

Les interactions entre particules élémentaires sont décrites au travers de termes non-quadratiques dans le Lagrangien, qui se traduisant en des non-linearités dans les équations du mouvement.

Champs scalaires

La forme générale du Lagrangien décrivant des champs scalaires ϕ^i en interaction est la suivante:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} Z_{ij}(\phi) \partial_\mu \phi^i \partial^\mu \phi^j - V(\phi)$$

L'état fondamental correspond à un ϕ_0^i constant et tel que $V_i(\phi_0) = 0$. On peut alors décomposer les ϕ^i en valeurs moyennes plus fluctuations:

$$\phi^i = \phi_0^i + \hat{\phi}^i$$

En développant en puissances des fluctuations on trouve:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} Z_{ij}^0 \partial_\mu \hat{\phi}^i \partial^\mu \hat{\phi}^j - \frac{1}{2} V_{ij}^0 \hat{\phi}^i \hat{\phi}^j + \text{interactions}$$

Après une dernière transformation linéaire des $\hat{\phi}^i$ trivialisant Z_{ij}^0 on peut identifier les masses carrées avec les valeurs propres de la matrice:

$$m^2_{\phi ij} = V_{ij}^0$$

Champs spinoriels

La forme générale du Lagrangien décrivant des champs spinoriels χ^i_α en interaction est la suivante:

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} Z_{i\bar{\jmath}}(\chi,\bar{\chi})\chi^i\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\chi}^j + \mathbf{h.c.} - V(\chi,\bar{\chi})$$

L'état fondamental correspond à un χ^i_0 constant et tel que $V_i(\chi_0) = 0$. On peut alors décomposer les χ^i en valeurs moyennes plus fluctuations:

$$\chi^i = \chi^i_0 + \hat{\chi}^i$$

En développant en puissances des fluctuations on trouve:

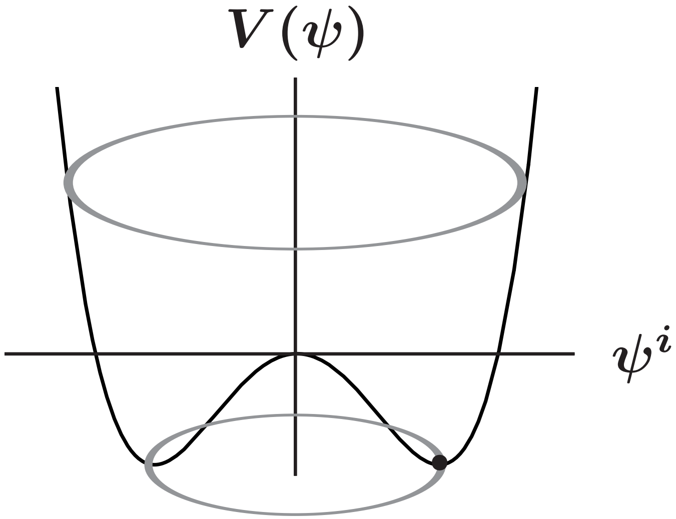
$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} Z^0_{i\bar{\jmath}}\hat{\chi}^i\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\hat{\chi}}^j + \mathbf{h.c.} - \frac{1}{2}V^0_{ij}\hat{\chi}^i\hat{\chi}^j + \mathbf{h.c.} + \text{interactions}$$

Après une dernière transformation linéaire des $\hat{\chi}^i$ trivialisant Z^0_{ij} on peut identifier les masses avec les valeurs diagonales de la matrice:

$$m_{\chi ij} = V^0_{ij}$$

Brisure spontanée de symétries et modes de Goldstone

Les symétries générées par T^a dans une théorie pour des champs ψ^i sont spontanément brisées par l'état fondamental ψ_0^i si $\delta^a \psi_0^i \neq 0$:



ψ_0^i tels que $V_i^0 = 0$

$\delta^a \psi_0^i \neq 0 \Rightarrow T^a$ brisés

$V_{ij}^0 \delta^a \psi_0^j = 0 \Rightarrow \hat{\sigma}^a$ a mass nulle

Les symétries de Poincaré sont toujours préservées, et donc:

$$\phi_0^i = \text{constant} \qquad \chi_0^i = 0$$

Les symétries internes peuvent être spontanément brisées si $\delta^a \phi_0^i \neq 0$.

SUPERSYMETRIE

Symetries entre bosons et fermions

La possibilité qu'il puisse exister une symétrie continue reliant bosons et fermions est intéressante de nombreux points de vue, mais semble impossible à réaliser dans le contexte des symétries ordinaires basées sur des groupes et algèbres de Lie.

La clef permettant de définir une telle symétrie est de considérer des supergroupes de Lie, dont les éléments dépendent de paramètres réels et Grassmanniens, et des superalgèbres de Lie, dont les propriétés sont définies par des commutateurs et des anticommutateurs.

Cette généralisation est naturelle, car elle introduit des générateurs de symétries pouvant être soit bosoniques soit fermioniques, comme les états de particules élémentaires.

Supergroupes de transformations

Un supergroupe de transformations est réalisé sur l'espace vectoriel des variables du système par une représentation par le bief d'opérateurs linéaires $U(\alpha_a, \xi_\alpha)$ possédant les propriétés suivantes:

$$U(\alpha_a, \xi_\alpha)\, U(\beta_a, \eta_\alpha) = U(\gamma_a(\alpha_a, \beta_a, \xi_\alpha, \eta_\alpha), \chi_\alpha(\alpha_a, \beta_a, \xi_\alpha, \eta_\alpha))$$
$$U(\alpha_a, \xi_\alpha)^{-1} = U(-\alpha_a, -\xi_\alpha)$$
$$\mathbb{I} = U(0, 0)$$

Les paramètres α_a, β_b, $\ldots$ et ξ_α, η_β, $\ldots$ sont des nombres réels et Grassmannien, avec les propriétés suivantes:

$$\alpha_a \beta_b = \beta_b \alpha_a \;\Rightarrow\; \alpha_a^2 \neq 0\;, \quad \beta_b^2 \neq 0$$
$$\xi_\alpha \eta_\beta = -\eta_\beta \xi_\alpha \;\Rightarrow\; \xi_\alpha^2 = 0\;, \quad \eta_\beta^2 = 0$$
$$\alpha_a \eta_\beta = \eta_\beta \alpha_a$$

Générateurs et superalgèbre

Pour des transformations continues, les opérateurs $U(\alpha_a, \xi_\alpha)$ peuvent être exprimés en termes de générateurs T^a et S^α comme:

$$U(\alpha_a, \xi_\alpha) = \exp\left\{i(\alpha_a T^a + \xi_\alpha S^\alpha)\right\}$$

Le fait que les $U(\alpha_a, \xi_\alpha)$ forment un supergroupe avec une certaine loi de composition se traduit dans le fait que les T^a et S^α génèrent une superalgèbre de Lie avec certaines constantes de structure:

$$[T^a, T^b] = i f^{ab}{}_c\, T^c$$
$$\{S^\alpha, S^\beta\} = i\, g^{\alpha\beta}{}_c\, T^c$$
$$[T^a, S^\beta] = i\, h^{a\beta}{}_\gamma\, S^\gamma$$

Comme avant, les générateurs T^a et S^α contrôlent les transformations infinitésimales, dont l'application répétée donne les transformations finies continument reliées à l'identité.

Algèbre de superPoincaré

Il existe essentiellement une unique extension des symétries usuelles d'espace-temps compatible avec une matrice S non-banale. Outre les générateurs bosoniques P_μ, $M_{\mu\nu}$, elle prévoit de nouveaux générateurs fermioniques Q_α, $\bar{Q}_{\dot{\alpha}}$, et consiste dans l'algèbre suivante:

$$[P_\mu, P_\nu] = 0$$

$$[P_\mu, M_{\rho\sigma}] = i\big(\eta_{\mu\rho}P_\sigma - \eta_{\mu\sigma}P_\rho\big)$$

$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = i\big(\eta_{\nu\rho}M_{\mu\sigma} - \eta_{\mu\rho}M_{\nu\sigma} - \eta_{\nu\sigma}M_{\mu\rho} + \eta_{\mu\sigma}M_{\nu\rho}\big)$$

$$[Q_\alpha, P_\mu] = 0 \qquad [\bar{Q}_{\dot{\alpha}}, P_\mu] = 0$$

$$[Q_\alpha, M_{\rho\sigma}] = \sigma_{\rho\sigma\,\alpha}{}^{\beta} Q_\beta \qquad [\bar{Q}_{\dot{\alpha}}, M_{\rho\sigma}] = -\bar{\sigma}_{\rho\sigma\,\dot{\alpha}}{}^{\dot{\beta}} \bar{Q}_{\dot{\beta}}$$

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\} = 0 \qquad \{\bar{Q}_{\dot{\alpha}}, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} = 0$$

$$\{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} = 2\sigma^\mu{}_{\alpha\dot{\beta}} P_\mu$$

Les nouvelles transformations préservent m mais changent s de $\frac{1}{2}$.

Algèbre interne

On peut comme avant avoir en plus un groupe de symétries internes arbitraire mais compact, avec une algèbre du type:

$$[B^a, B^b] = i f^{ab}{}_c B^c$$

Reste de l'algèbre

Les supersymétries d'espace-temps et les symétries internes sont en général forcées à ne pas interférer, de sorte que:

$$[P_\mu, B^a] = 0$$

$$[M_{\mu\nu}, B^a] = 0$$

$$[Q_\alpha, B^a] = 0 \qquad [\bar{Q}_\alpha, B^a] = 0$$

Généralisations possibles

Il est possible d'introduire plusieurs supersymétries indépendantes. Cette situation donne toutefois des contraintes si fortes qu'elle est exclue.

Théories supersymétriques et superchamps

La représentation unitaire générale est construite sur des superchamps $\Psi(x, \theta, \bar{\theta})$, fonctions de 4 coordonnées bosoniques x^μ et 4 coordonnées fermioniques $\theta^\alpha, \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}$. Les transformations infinitésimales sont:

$$\delta\Psi = \left(i\epsilon^\mu P_\mu + \frac{i}{2}\omega^{\mu\nu} M_{\mu\nu} + \xi^\alpha Q_\alpha + \bar{\xi}^{\dot{\alpha}} \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\right)\Psi$$

Les générateurs prennent la forme

$$P_\mu = i\partial_\mu$$

$$M_{\mu\nu} = \Sigma_{\mu\nu} + i(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu) + \sigma_{\mu\nu\,\alpha}{}^{\beta} \theta^\alpha \partial_\beta - \bar{\sigma}_{\mu\nu\,\dot{\alpha}}{}^{\dot{\beta}} \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \bar{\partial}_{\dot{\beta}}$$

$$Q_\alpha = i\partial_\alpha - \sigma^\mu{}_{\alpha\dot{\beta}}\, \bar{\theta}^{\dot{\beta}} \partial_\mu \qquad \bar{Q}_{\dot{\alpha}} = -i\bar{\partial}_{\dot{\alpha}} + \bar{\sigma}^\mu{}_{\dot{\alpha}\beta}\, \theta^\beta \partial_\mu$$

On peut construire une action automatiquement invariante en intégrant sur tout le super-espace-temps une densité de Lagrangien scalaire:

$$I = \int d^4x\, d^2\theta\, d^2\bar{\theta}\, l[\Psi(x, \theta, \bar{\theta})]$$

Options possibles

Les représentations possibles sont caractérisées par deux opérateurs de Casimir. Leurs valeurs correspondent à des propriétés qui caractérisent le multiplet des particules décrites:

m : mass commune rélle positive ou nulle

s : spin minimal entier ou semi-entier positif

Une représentation de groupe de superPoincaré regroupe donc plusieurs représentations du sous-groupe de Poincaré, avec $m_k = m$ et $s_k \geq s$. Pour chaque particule il doit alors exister une superparticule partenaire, avec le même m et les mêmes q_k mais s différent de $\frac{1}{2}$:

particules $\Leftrightarrow$ superparticules

Cette décomposition des représentations traduit le fait qu'un superchamp admet un dévelopement en série fini en puissances de $\theta^\alpha, \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}$, dont les coefficients sont des champs dépendant de x^μ.

THEORIES SUPERSYMETRIQUES

Superchamps génériques

Un superchamp scalaire générique admet un dévelopement en serie de champs ordinaires avec composantes $(\phi, \chi_\alpha, F, \lambda_\alpha, A_\mu, D)$:

$$\begin{aligned}\Psi(x,\theta,\bar\theta) = \phi(x) + \sqrt{2}\,\theta^\alpha\chi_\alpha(x) + \mathrm{h.c.}\\ &+ \theta^\alpha\theta^\beta\epsilon_{\alpha\beta}F(x) + \mathrm{h.c.} - \theta^\alpha\bar\theta^{\dot\beta}\sigma^\mu{}_{\alpha\dot\beta}A_\mu(x)\\ &- i\,\theta^\alpha\theta^\beta\bar\theta^{\dot\gamma}\epsilon_{\alpha\beta}\big(\bar\lambda_{\dot\gamma}(x) + \frac{1}{\sqrt{2}}\bar\sigma^\mu{}_{\dot\gamma\delta}\partial_\mu\chi^\delta(x)\big) + \mathrm{h.c.}\\ &+ \frac{1}{2}\,\theta^\alpha\theta^\beta\bar\theta^{\dot\gamma}\bar\theta^{\dot\delta}\epsilon_{\alpha\beta}\epsilon_{\dot\gamma\dot\delta}\big(D(x) + \frac{1}{2}\Box\phi(x)\big)\end{aligned}$$

C'est par construction une représentation de groupe de superPoincaré, mais elle est réductible. On peut définir des représentations irréductibles en imposant des contraintes supercovariantes.

Dérivées supercovariantes

On peut introduire les dérivés supercovariantes suivantes

$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu$$

$$\mathcal{D}_\alpha = \partial_\alpha - i\sigma^\mu{}_{\alpha\dot\beta}\,\bar\theta^{\dot\beta}\partial_\mu \qquad \bar{\mathcal{D}}_{\dot\alpha} = -\bar\partial_{\dot\alpha} + i\bar\sigma^\mu{}_{\dot\alpha\beta}\,\theta^\beta\partial_\mu$$

Ces dérivées commutent ou anticommutent avec les supertranslations P_μ, Q_α, $\bar Q_{\dot\alpha}$, et leurs commutateurs avec $M_{\mu\nu}$ reflètent le fait que ce sont des vecteurs et spineurs. Leur action sur un superchamp produit donc un nouveau superchamp avec un indice de Lorentz supplémentaire.

Superchamps chiraux, antichiraux et vectoriels

Les superchamps suivants sont des représentation irréductibles:

- Chiral ou antichiral : $\bar{\mathcal{D}}_{\dot\alpha}\Psi = 0$ ou $\mathcal{D}_\alpha\Psi = 0 \;\Rightarrow\; (\phi, \chi_\alpha, F)$
- Vectoriel : partie restante de $\Psi \;\Rightarrow\; (A_\mu, \lambda_\alpha, D)$

Cas le plus simple

Le cas le plus simple est obtenu en considérant des superchamps chiraux Ψ^i avec composantes $(\phi^i, \chi^i_\alpha, F^i)$ et dévelopement:

$$\begin{aligned}\Psi^i(x, \theta, \bar\theta) = \phi^i(x) + \sqrt{2}\,\theta^\alpha \chi^i_\alpha(x) + \theta^\alpha\theta^\beta \epsilon_{\alpha\beta} F^i(x) \\ + i\,\theta^\alpha\bar\theta^{\dot\beta}\sigma^\mu{}_{\alpha\dot\beta}\partial_\mu\phi^i(x) + \frac{i}{\sqrt{2}}\,\theta^\alpha\theta^\beta\bar\theta^{\dot\gamma}\epsilon_{\alpha\beta}\bar\sigma^\mu{}_{\dot\gamma\delta}\partial_\mu\chi^{i\delta}(x) \\ + \frac{1}{4}\,\theta^\alpha\theta^\beta\bar\theta^{\dot\gamma}\bar\theta^{\dot\delta}\epsilon_{\alpha\beta}\epsilon_{\dot\gamma\dot\delta}\Box\phi^i(x)\end{aligned}$$

La forme générale du Lagrangien est paramétrisé par un potentiel de Kähler $K(\Psi, \bar\Psi)$ réel et un superpotentiel $W(\Psi)$ holomorphe:

$$I = \int d^4x\, d^2\theta\, d^2\bar\theta\, K(\Psi, \bar\Psi) + \int d^4x\, d^2\theta\, W(\Psi) + \mathrm{h.c.}$$

L'action en composantes est calculée en intégrant explicitement sur les coordonnées fermioniques θ^α et $\bar\theta^{\dot\alpha}$, avec les règles suivantes:

$$\int d\theta\, 1 = 0 \qquad \int d\theta\, \theta = 1 \qquad \int d\bar\theta\, 1 = 0 \qquad \int d\bar\theta\, \bar\theta = 1$$

Lagrangien en composantes

Par un calcul simple on déduit que:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = K_{i\bar{\jmath}}(\phi,\bar{\phi})\big(\partial_\mu\phi^i\partial^\mu\bar{\phi}^{\bar{\jmath}} + \frac{i}{2}\chi^i\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\chi}^{\bar{\jmath}} + \text{h.c.} + F^i\bar{F}^{\bar{\jmath}}\big) \\ + \frac{1}{2}K_{i\bar{\jmath}k}(\phi,\bar{\phi})\big(-\chi^i\chi^k\bar{F}^{\bar{\jmath}} - i\chi^i\sigma^\mu\bar{\chi}^{\bar{\jmath}}\partial_\mu\phi^k\big) + \text{h.c.} \\ + \frac{1}{4}K_{i\bar{\jmath}k\bar{l}}(\phi,\bar{\phi})\chi^i\chi^k\bar{\chi}^{\bar{\jmath}}\bar{\chi}^{\bar{l}} + \big(W_i(\phi)F^i - \frac{1}{2}W_{ij}(\phi)\chi^i\chi^j\big) + \text{h.c.}\end{aligned}$$

Les transformations infinitésimales de supersymétrie sont:

$$\begin{aligned}\delta\phi^i &= \sqrt{2}\,\xi\,\chi^i \\ \delta\chi^i &= \sqrt{2}\,\xi\,F^i + \sqrt{2}i\,\bar{\xi}\,\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\phi^i \\ \delta F^i &= \sqrt{2}i\,\bar{\xi}\,\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\chi^i\end{aligned}$$

Les champs auxiliaires F^i ont une équation du mouvement algébrique:

$$F^i = -K^{i\bar{\jmath}}(\phi,\bar{\phi})\bar{W}_{\bar{\jmath}}(\bar{\phi}) + \frac{1}{2}K_{ijk}(\phi,\bar{\phi})\chi^j\chi^k$$

Dynamique des champs physiques

Le Lagrangien pour les champs physiques ϕ^i et χ^i est obtenu en éliminant les F^i. On obtient de cette manière:

$$\mathcal{L} = Z_{i\bar{\jmath}}\big(\nabla_\mu\phi^i\nabla^\mu\bar{\phi}^{\bar{\jmath}} + \frac{i}{2}\chi^i\sigma^\mu\nabla_\mu\bar{\chi}^{\bar{\jmath}} + \mathrm{h.c.}\big) - V$$

avec

$$Z_{i\bar{\jmath}} = G_{i\bar{\jmath}} \qquad \nabla_\mu\phi^i = \partial_\mu\phi^i \qquad \nabla_\mu\chi^i = \partial_\mu\chi^i - \Gamma^i_{jk}\partial_\mu\phi^j\chi^k$$

$$V = W_i G^{i\bar{\jmath}}\bar{W}_{\bar{\jmath}} + \frac{1}{2}W_{ij}\chi^i\chi^j + \mathrm{h.c.} - \frac{1}{4}R_{i\bar{\jmath}k\bar{l}}\,\chi^i\chi^k\bar{\chi}^{\bar{\jmath}}\bar{\chi}^{\bar{l}}$$

Ce résultat compact est écrit en termes d'une géometrie définie par les dérivées de K, et les dérivées de W sont maintenant sous-entendues covariantes par rapport à celle-ci:

$$G_{i\bar{\jmath}} = K_{i\bar{\jmath}} \qquad \Gamma^i_{jk} = K^{i\bar{l}}K_{\bar{l}jk} \qquad R_{i\bar{\jmath}k\bar{l}} = K_{i\bar{\jmath}k\bar{l}} - K_{ik\bar{s}}K^{\bar{s}r}K_{r\bar{\jmath}\bar{l}}$$

Etat fondamental et masses

L'état fondamental correspond à une configuration de la forme:

$$\phi_0^i = \text{constant} \qquad \chi_0^i = 0 \qquad F_0^i = \text{constant}$$

La condition de stationarité de l'énergie potentielle implique que:

$$W_{ij}^0 F_0^j = 0$$

La supersymétrie agit alors comme $\delta\phi_0^i = 0$, $\delta\chi_0^i = \sqrt{2}\,\epsilon\, F_0^i$, $\delta F_0^i = 0$. Elle est donc spontanément brisée si $F_0^i \neq 0$. La direction de F_0^i définit le spineur de Goldstone.

Les matrices de masse pour les fluctuations des champs $\hat{\phi}^i$ and $\hat{\chi}^i$ sont données par les expressions suivantes:

$$m^2_{\phi\, i\bar{\jmath}} = W^0_{ik} G_0^{k\bar{l}} \bar{W}^0_{\bar{l}\bar{\jmath}} - R^0_{i\bar{\jmath}k\bar{l}} F_0^k \bar{F}_0^{\bar{l}} \qquad m_{\chi\, ij} = -W^0_{ij}$$

$$m^2_{\phi\, ij} = -W^0_{ijk} F_0^k \qquad \bar{m}^2_{\phi\, \bar{\imath}\bar{\jmath}} = -\bar{W}^0_{\bar{\imath}\bar{\jmath}\bar{k}} \bar{F}_0^{\bar{k}} \qquad \bar{m}_{\chi\, \bar{\imath}\bar{\jmath}} = -\bar{W}^0_{\bar{\imath}\bar{\jmath}}$$

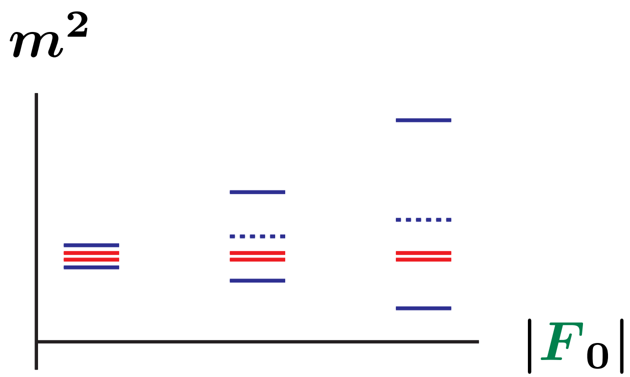
Masses physiques

Les matrices de masses carrées physiques pour les $2n + 2n$ degrés de liberté sont données par:

$$m^2_{\phi\, IJ} = \begin{pmatrix} m^2_{\phi\, i\bar{\jmath}} & m^2_{\phi\, ij} \\ \bar{m}^2_{\phi\, \bar{\imath}\bar{\jmath}} & m^2_{\phi\, \bar{\imath}j} \end{pmatrix} \quad m^2_{\chi\, IJ} = \begin{pmatrix} (m_\chi \bar{m}_\chi)_{i\bar{\jmath}} & 0 \\ 0 & (\bar{m}_\chi m_\chi)_{\bar{\imath}j} \end{pmatrix}$$

Si $F^i_0 = 0$ (phase non-brisée) on a $m^2_{\phi\, IJ} = m^2_{\chi\, IJ}$. Les masses sont dégénérées et à chaque niveau il y a deux bosons et deux fermions.

Si $F^i_0 \neq 0$ (phase brisée) on a $m^2_{\phi\, IJ} \neq m^2_{\chi\, IJ}$. Dans chaque multiplet, les masses des bosons et des fermions se séparent.



$\Delta_{\phi\chi} : m^2_{\phi\,\mathrm{dia}} - m^2_\chi$

$\Delta_{\phi\phi} : m^2_{\phi\,\mathrm{off}}$

Echelle de brisure: $M \propto |F_0|$

CORRECTIONS QUANTIQUES

Diagrammes à boucles et corrections de mass

La masse m d'une particule reçoit des corrections quantiques Δm à priori arbitrairement grandes. Ceci pose un problème de naturalité.

Dans certains cas spécifiques, le problème est résolu par les symétries relativistes présentes à toute échelle, qui impliquent une compensation entre particules et antiparticules virtuelles pour $p^* \gg m$. On a alors:

$$\Delta m \propto m$$

Plus en général, le problème est résolu par la supersymétrie brisée à une certaine échelle M, qui implique une compensation entre particules et superparticules virtuelles pour $p^* \gg M$. on a alors:

$$\Delta m \propto M$$

IMPLICATIONS EN PHYSIQUE DES PARTICULES

Modèle standard supersymétrique

Le version supersymétrique minimale du modèle standard prévoit:

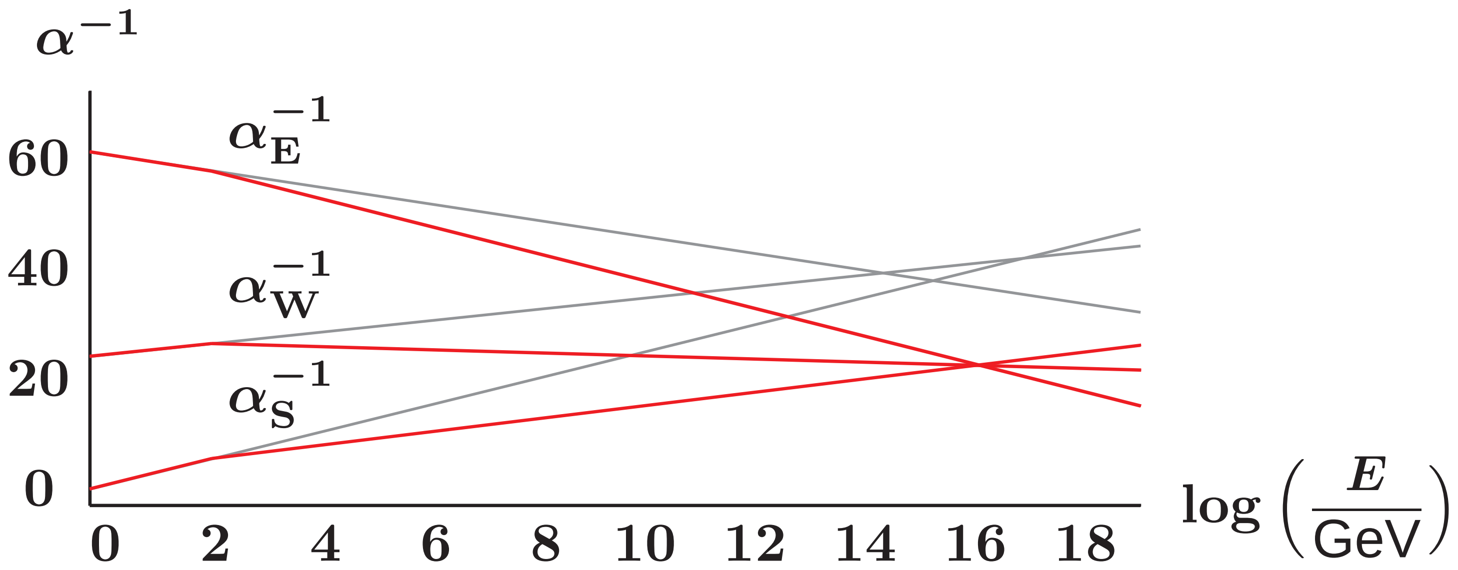
- $\mathbf{3}$ familles de multiplets de matière avec spins $\mathbf{\frac{1}{2}}$ et $\mathbf{0}$.
- $\mathbf{3}$ groupes de multiplets de radiation avec spins $\mathbf{1}$ et $\mathbf{\frac{1}{2}}$.
- $\mathbf{2}$ multiplets de Higgs avec spins $\mathbf{0}$ et $\mathbf{\frac{1}{2}}$.
- $\mathbf{1}$ multiplet de O'Raifeartaigh avec spins $\mathbf{0}$ et $\mathbf{\frac{1}{2}}$.

Contraintes et perspectives de découverte

La non-observation présente de superparticules implique $\boldsymbol{M \gtrsim 10^{2\text{-}3}}$ GeV.
La naturalité du nouveau modèle demande au contraire $\boldsymbol{M \lesssim 10^{2\text{-}3}}$ GeV.
On s'attend donc à découvir bientôt quelque chose à $\boldsymbol{E \sim 10^{2\text{-}3}}$ GeV.

Unification des interactions fondamentales

Les effets quantiques induisent une dépendence calculable de l'énérgie $\boldsymbol{E}$ pour les couplages des forces éléctromagnétiques, faibles et fortes. En extrapolant les valeurs mesurées à basses énérgies on trouve:



Il y a donc une évidence indirecte quantitative pour la supersymétrie et l'idée d'unification des forces fondamentales.

CONCLUSIONS

- La supersymétrie est un principe totalement naturel et plausible généralisant le principe de relativité, dont la forme est prédite de façon pratiquement unique.
- Un grand nombre de physiciens sont persuadés qu'elle doit jouer un rôle crucial dans une description plus fondamentale et unifiée des interactions de base.
- La possibilité qu'elle se manifeste à basses énergies atteignables expérimentalement est indirectement suggérée par la naturalité et par l'unification des couplages extrapolés.