Motivazioni e scopi

Gravità

$$\mathcal{L} = \sqrt{g}R + \frac{1}{2\mu}\mathcal{E}^{\mu\lambda\nu}\Gamma^{\rho}{}_{\lambda\sigma}\left(\partial_{\mu}\Gamma^{\sigma}{}_{\nu\rho} + \frac{2}{3}\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\xi}\Gamma^{\xi}{}_{\nu\rho}\right)$$

Elettrodinamica

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{\mu}{2}\mathcal{E}^{\mu\nu\rho}\partial_{\mu}A_{\nu}A_{\rho}$$

Scopi principali:

1. Quantizzazione canonica covariante delle due teorie
2. Determinazione accurata degli stati fisici e delle loro proprietà per l'elettrodinamica e la gravità linearizzata

Motivazioni:

1. Risoluzione del problema dell'ambiguità infrarossa per le teorie tridimensionali topologicamente massive
2. Quantizzazione canonica sistematica di sistemi vincolati con derivate di ordine superiore nella lagrangiana
3. Congettura di Witten per la gravità:
   - Versione di Einstein
   - Versione del primo ordine
4. Applicazioni dell'elettrodinamica:
   - Effetto Hall quantistico frazionario
   - Superconduttività ad alte temperature
5. Analogie fra elettrodinamica e gravità linearizzata

Perché le teorie tridimensionali topologicamente massive:

1. Possibilità di dare massa in modo gauge-invariante ai campi di gauge tridimensionali
2. Possibilità di costruire teorie tridimensionali che esibiscono stati anionici con spin e statistica arbitrari
3. Teorie topologicamente massive come teorie effettive ad un loop
4. Importanza in sistemi planari di fisica della materia condensata
5. Teorie tridimensionali come limite di temperatura finita delle teorie quadridimensionali

Problemi affrontati:

1. Lagrangiane degeneri
2. Lagrangiane con derivate di ordine superiore
3. Equazioni del moto complicate
4. Problemi di convergenza infrarossa

Elettrodinamica

La lagrangiana è

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{\mu}{2}\mathcal{E}^{\mu\nu\rho}\partial_\mu A_\nu A_\rho$$

Le equazioni del moto sono

$$\Box A^\mu - \partial^\mu\partial_\nu A^\nu + \mu\mathcal{E}^{\mu\nu\rho}\partial_\nu A_\rho = 0$$

La teoria è invariante rispetto a trasformazioni di gauge

$$\delta A^\mu = \partial^\mu\phi$$

Lavoriamo nella gauge di Lorentz

$$\partial_\mu A^\mu = 0$$

e prendiamo come lagrangiana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{\mu}{2}\mathcal{E}^{\mu\nu\rho}\partial_\mu A_\nu A_\rho - \frac{1}{2\xi}\left(\partial_\mu A^\mu\right)^2$$

con le equazioni del moto

$$\Box A^\mu + (\xi - 1)\,\partial^\mu\partial_\nu A^\nu + \mu\mathcal{E}^{\mu\nu\rho}\partial_\nu A_\rho = 0$$

Il momento coniugato a A^μ è

$$\pi^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_0 A_\mu\right)} = F^{\mu 0} + \frac{\mu}{2}\mathcal{E}^{0\mu\nu}A_\nu - \xi\eta^{\mu 0}\partial_\nu A^\nu$$

e non produce nessun vincolo.
Le parentesi di Poisson canoniche

$$\left\{A^\mu\left(\vec{x},t\right), A^\nu\left(\vec{y},t\right)\right\} = 0$$

$$\left\{\pi^\mu\left(\vec{x},t\right), \pi^\nu\left(\vec{y},t\right)\right\} = 0$$

$$\left\{A^\mu\left(\vec{x},t\right), \pi^\nu\left(\vec{y},t\right)\right\} = \eta^{\mu\nu}\delta^2\left(\vec{x}-\vec{y}\right)$$

sono quindi consistenti, come conseguenza del gauge-fixing.

La parentesi di Poisson a tempi diversi

$$\Delta^{\mu\nu}\left(x-y\right)=\left\{A^{\mu}\left(x\right),A^{\nu}\left(y\right)\right\}$$

soddisfa l'equazione del moto

$$\Box\Delta^{\mu\nu}\left(z\right)+\left(\xi-1\right)\partial^{\mu}\partial_{\alpha}\Delta^{\alpha\nu}\left(z\right)+\mu\mathcal{E}^{\mu\alpha\beta}\partial_{\alpha}\Delta_{\beta}{}^{\nu}\left(z\right)=0$$

e le due condizioni al contorno provenienti dalle parentesi di Poisson canoniche

$$\Delta^{\mu\nu}\left(\vec{z},0\right)=0$$

$$\partial^{0}\Delta^{\mu\nu}\left(\vec{z},0\right)=\left(\eta^{\mu\nu}+\frac{1-\xi}{\xi}\eta^{\mu0}\eta^{\nu0}\right)\delta^{2}\left(\vec{z}\right)$$

La funzione Δ è quindi definita univocamente come soluzione di un problema di Cauchy; la soluzione è, nello spazio dei momenti

$$\begin{aligned}\tilde{\Delta}^{\mu\nu}\left(p\right)=&-i2\pi\epsilon\left(p_{0}\right)\delta\left(p^{2}\right)\left[\frac{i}{\mu}\mathcal{E}^{\mu\nu\rho}p_{\rho}-\left(\frac{1}{\mu^{2}}-\frac{1}{\xi}\frac{1}{p^{2}}\right)p^{\mu}p^{\nu}\right]\\&-i2\pi\epsilon\left(p_{0}\right)\delta\left(p^{2}-\mu^{2}\right)\left[-\left(\eta^{\mu\nu}-\frac{p^{\mu}p^{\nu}}{\mu^{2}}\right)-\frac{i}{\mu}\mathcal{E}^{\mu\nu\rho}p_{\rho}\right]\end{aligned}$$

La quantizzazione della teoria è ottenuta con la prescrizione

$$\{A,B\}\rightarrow-i\left[A,B\right]$$

e imponendo debolmente il vincolo di gauge sugli stati fisici

$$\left(\partial_{\mu}A^{\mu}\right)^{-}|\Phi_{f}\rangle=0$$

Gravità

La lagrangiana è

$$\mathcal{L} = \frac{1}{k^2}\left[\sqrt{g}R + \frac{1}{2\mu}\mathcal{E}^{\mu\lambda\nu}\Gamma^{\rho}{}_{\lambda\sigma}\left(\partial_\mu \Gamma^{\sigma}{}_{\nu\rho} + \frac{2}{3}\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\xi}\Gamma^{\xi}{}_{\nu\rho}\right)\right]$$

Le equazioni del moto sono

$$G^{\mu\nu} - \frac{1}{\mu}C^{\mu\nu} = 0$$

con

$$C^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{g}}\mathcal{E}^{\mu\alpha\beta}\mathcal{D}_\alpha\left(R_\beta{}^\nu - \frac{1}{4}\delta^\nu_\beta R\right)$$

Nell'approssimazione di campo debole

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + kh^{\mu\nu}$$

La teoria è invariante rispetto a trasformazioni di gauge

$$\delta h^{\mu\nu} = -\partial^\mu \xi^\nu - \partial^\nu \xi^\mu$$

Lavoriamo nella gauge di Landau

$$\partial_\mu h^{\mu\nu} = 0$$

e prendiamo come lagrangiana

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = &-\frac{1}{4}\left[\left(\partial_\rho h_{\mu\nu}\right)\left(\partial^\rho h^{\mu\nu}\right) - \left(\partial_\mu h\right)\left(\partial^\mu h\right) + 2\left(\partial^\nu h\right)\left(\partial^\mu h_{\mu\nu}\right) + 2\left(\partial^\mu h_{\mu\nu}\right)\left(\partial_\rho h^{\rho\nu}\right)\right] \\ &+\frac{1}{4\mu}\mathcal{E}_{\mu\alpha\beta}\left(\partial^\alpha\partial_\nu h_\rho{}^\beta - \partial^\alpha\partial_\rho h_\nu{}^\beta\right)\partial^\nu h^{\mu\rho} - \frac{1}{2\xi}\left(\partial_\mu h^{\mu\lambda}\right)\left(\partial_\nu h^\nu{}_\lambda\right)\end{aligned}$$

con le equazioni del moto

$$\begin{aligned}&\Big\{\Box h^{\mu\nu} + \partial^\mu\partial^\nu h + (\xi - 1)\left(\partial^\nu\partial_\alpha h^{\alpha\mu} + \partial^\mu\partial_\alpha h^{\alpha\nu}\right) - \eta^{\mu\nu}\left(\Box h - \partial_\alpha\partial_\beta h^{\alpha\beta}\right) \\ &-\frac{1}{2\mu}\left[\mathcal{E}^{\mu\alpha\beta}\partial_\alpha\left(\Box h_\beta{}^\nu - \partial^\nu\partial_\lambda h^\lambda{}_\beta\right) + \mathcal{E}^{\nu\alpha\beta}\partial_\alpha\left(\Box h_\beta{}^\mu - \partial^\mu\partial_\lambda h^\lambda{}_\beta\right)\right]\Big\} = 0\end{aligned}$$

Il termine di Chern-Simons dipende da $\left(\partial^0\right)^2 h^{ij}$. Prendiamo quindi come variabili indipendenti

$$h^{\mu\nu}$$

$$k^{ij} = \partial^0 h^{ij}$$

I momenti coniugati a $h^{\mu\nu}$ e k^{ij} sono

$$\pi^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_0 h_{\mu\nu}\right)} - 2\partial_\rho \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\rho \partial_0 h_{\mu\nu}\right)} + \partial_0 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_0 \partial_0 h_{\mu\nu}\right)}$$

$$s^{ij} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_0 \partial_0 h_{ij}\right)}$$

Seguono i quattro vincoli

$$\pi^m{}_m = \frac{1}{2} k^l{}_l - \partial_k h^{k0} - \frac{1}{4\mu} \mathcal{E}_{ki} \partial^i \partial_l h^{kl}$$

$$s^{ij} = -\frac{1}{8\mu}\left[\mathcal{E}_k{}^j\left(k^{ki} - \partial^i h^{k0}\right) + (i \leftrightarrow j)\right]$$

Questo conferma che la lagrangiana rimane degenere nonostante il gauge-fixing.
Le parentesi di Poisson canoniche sono incompatibili con i vincoli e deve essere applicata la procedura di Dirac.
Un sistema vincolato è descritto da una lagrangiana degenere

$$\det\left(\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial\left(\partial^0 \phi^{(i)}\right) \partial\left(\partial^0 \phi^{(j)}\right)}\right) = 0$$

Sono presenti vincoli incompatibili con le parentesi di Poisson canoniche

$$\chi^{[a]}\left(\phi^{(i)}, \partial^k \phi^{(i)}, \pi^{(i)}\right) \approx 0$$

L'hamiltoniana più generale possibile è

$$\widetilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H} \ + u_{[a]} \chi^{[a]} \approx \mathcal{H}$$

e le equazioni del moto hamiltoniane acquistano una arbitrarietà

$$\partial^0 \phi^{(i)} = \left\{\phi^{(i)}, \tilde{H}\right\} \approx \frac{\delta^* H}{\delta^* \pi_{(i)}} + \int d^2\vec{x} u_{[a]} \frac{\delta^* \chi^{[a]}}{\delta^* \pi_{(i)}}$$

$$\partial^0 \pi^{(i)} = \left\{\pi^{(i)}, \tilde{H}\right\} \approx -\frac{\delta^* H}{\delta^* \phi_{(i)}} - \int d^2\vec{x} u_{[a]} \frac{\delta^* \chi^{[a]}}{\delta^* \phi_{(i)}}$$

È necessario imporre la compatibilità dinamica con i vincoli

$$\frac{d}{dt}\chi^{[a]}(\vec{x},t) = \left\{\chi^{[a]}(\vec{x},t)\,,\tilde{H}(t)\right\} \approx 0$$

Questa condizione può fornire nuovi vincoli oppure condizioni sui coefficienti $u_{[a]}$.
Si ottiene un insieme finale di vincoli

$$\varphi^{[a]}\left(\phi^{(i)},\partial^k\phi^{(i)},\pi^{(i)}\right) \approx 0$$

le cui parentesi di Poisson a tempi uguali formano una matrice invertibile

$$M^{[a][b]}(\vec{x},\vec{y},t) = \left\{\varphi^{[a]}(\vec{x},t)\,,\varphi^{[b]}(\vec{y},t)\right\}$$

Le parentesi di Poisson canoniche diventano compatibili con i vincoli se si esegue la trasformazione

$$\{A,B\} \to \{A',B'\}$$

con

$$\begin{aligned} R'(\vec{x},t) &= R(\vec{x},t) - \int d^2\vec{z}\int d^2\vec{w}\left\{R(\vec{x},t)\,,\varphi^{[a]}(\vec{z},t)\right\}M^{-1}_{[a][b]}(\vec{z},\vec{w},t)\,\varphi^{[b]}(\vec{w},t) \\ &\approx R(\vec{x},t) \end{aligned}$$

Equivalentemente, si può generalizzare la definizione delle parentesi

$$\begin{aligned} &\{A(\vec{x},t)\,,B(\vec{y},t)\}^* = \\ &\quad = \{A(\vec{x},t)\,,B(\vec{y},t)\} \\ &\qquad - \int d^2\vec{z}\int d^2\vec{w}\left\{A(\vec{x},t)\,,\chi^{[a]}(\vec{z},t)\right\}C^{-1}_{[a][b]}(\vec{z},\vec{w},t)\left\{\chi^{[b]}(\vec{w},t)\,,B(\vec{y},t)\right\} \end{aligned}$$

Si trova

$$\left\{h^{\mu\nu}\left(\vec{x},t\right),h^{\alpha\beta}\left(\vec{y},t\right)\right\}^{*}=0$$

$$\left\{k^{ij}\left(\vec{x},t\right),k^{mn}\left(\vec{y},t\right)\right\}^{*}=\frac{\mu}{2}\left[\mathcal{E}^{im}\eta^{jn}+\left(i\leftrightarrow j\right)+\left(m\leftrightarrow n\right)\right]\delta^{2}\left(\vec{x}-\vec{y}\right)$$

$$\left\{h^{0\mu}\left(\vec{x},t\right),k^{mn}\left(\vec{y},t\right)\right\}^{*}=0$$

$$\left\{h^{ij}\left(\vec{x},t\right),k^{mn}\left(\vec{y},t\right)\right\}^{*}=\eta^{ij}\eta^{mn}\delta^{2}\left(\vec{x}-\vec{y}\right)$$

$$\left\{\pi^{00}\left(\vec{x},t\right),\pi^{0\mu}\left(\vec{y},t\right)\right\}^{*}=0$$

$$\left\{\pi^{0i}\left(\vec{x},t\right),\pi^{0j}\left(\vec{y},t\right)\right\}^{*}=-\frac{5}{64\mu}\mathcal{E}^{ij}\partial^{k}\partial_{k}\delta^{2}\left(\vec{x}-\vec{y}\right)$$

$$\left\{\pi^{ij}\left(\vec{x},t\right),\pi^{mn}\left(\vec{y},t\right)\right\}^{*}=0$$

$$\left\{\pi^{00}\left(\vec{x},t\right),\pi^{mn}\left(\vec{y},t\right)\right\}^{*}=0$$

$$\left\{\pi^{0k}\left(\vec{x},t\right),\pi^{mn}\left(\vec{y},t\right)\right\}^{*}=\frac{1}{64\mu^{2}}\mathcal{E}^{ik}\left(\mathcal{E}^{mj}\partial^{n}+\mathcal{E}^{nj}\partial^{m}\right)\partial_{i}\partial_{j}\delta^{2}\left(\vec{x}-\vec{y}\right)$$

$$\left\{s^{ij}\left(\vec{x},t\right),s^{mn}\left(\vec{y},t\right)\right\}^{*}=\frac{1}{32\mu}\left[\mathcal{E}^{im}\eta^{jn}+\left(i\leftrightarrow j\right)+\left(m\leftrightarrow n\right)\right]\delta^{2}\left(\vec{x}-\vec{y}\right)$$

$$\left\{\pi^{00}\left(\vec{x},t\right),s^{mn}\left(\vec{y},t\right)\right\}^{*}=0$$

$$\left\{\pi^{0k}\left(\vec{x},t\right),s^{mn}\left(\vec{y},t\right)\right\}^{*}=\frac{1}{32\mu}\left(\mathcal{E}^{km}\partial^{n}+\mathcal{E}^{kn}\partial^{m}+\eta^{mn}\mathcal{E}^{kj}\partial_{j}\right)\delta^{2}\left(\vec{x}-\vec{y}\right)$$

$$\left\{\pi^{ij}\left(\vec{x},t\right),s^{mn}\left(\vec{y},t\right)\right\}^{*}=0$$

$$\left\{h^{\mu\nu}\left(\vec{x},t\right),\pi^{ij}\left(\vec{y},t\right)\right\}^{*}=\frac{1}{2}\left(\eta^{\mu i}\eta^{\nu j}+\eta^{\mu j}\eta^{\nu i}\right)\delta^{2}\left(\vec{x}-\vec{y}\right)$$

$$\left\{h^{ij}\left(\vec{x},t\right),\pi^{00}\left(\vec{y},t\right)\right\}^{*}=0$$

$$\left\{h^{ij}\left(\vec{x},t\right),\pi^{0k}\left(\vec{y},t\right)\right\}^{*}=\frac{1}{8\mu}\eta^{ij}\mathcal{E}^{km}\partial_{m}\delta^{2}\left(\vec{x}-\vec{y}\right)$$

$$\left\{h^{0\mu}\left(\vec{x},t\right),\pi^{0\nu}\left(\vec{y},t\right)\right\}^{*}=\frac{1}{2}\left(\eta^{\mu\nu}+\eta^{\mu0}\eta^{\nu0}\right)\delta^{2}\left(\vec{x}-\vec{y}\right)$$

$$\left\{k^{ij}\left(\vec{x},t\right),s^{mn}\left(\vec{y},t\right)\right\}^{*}=\frac{1}{4}\left(\eta^{im}\eta^{jn}+\eta^{in}\eta^{jm}-\eta^{ij}\eta^{mn}\right)\delta^{2}\left(\vec{x}-\vec{y}\right)$$

$$\left\{h^{\mu\nu}\left(\vec{x},t\right),s^{mn}\left(\vec{y},t\right)\right\}^{*}=0$$

$$\left\{k^{ij}\left(\vec{x},t\right),\pi^{0\mu}\left(\vec{y},t\right)\right\}^{*}=\frac{1}{8}\left(\eta^{\mu i}\partial^{j}+\eta^{\mu j}\partial^{i}+3\eta^{ij}\partial^{\mu}\right)\delta^{2}\left(\vec{x}-\vec{y}\right)$$

$$\left\{k^{ij}\left(\vec{x},t\right),\pi^{mn}\left(\vec{y},t\right)\right\}^{*}=-\frac{1}{8\mu}\eta^{ij}\left(\mathcal{E}^{km}\partial^{n}+\mathcal{E}^{kn}\partial^{m}\right)\partial_{k}\delta^{2}\left(\vec{x}-\vec{y}\right)$$

Queste sono consistenti con i vincoli.

La parentesi di Dirac a tempi diversi

$$\Delta^{\mu\nu\alpha\beta}(x-y) = \left\{h^{\mu\nu}(x), h^{\alpha\beta}(y)\right\}^*$$

soddisfa l'equazione del moto

$$\Big\{\Box\Delta^{\mu\nu\alpha\beta}(z) + \partial^\mu\partial^\nu\Delta^\rho{}_\rho{}^{\alpha\beta} - \eta^{\mu\nu}\left(\Box\Delta^\rho{}_\rho{}^{\alpha\beta}(z) - \partial_\rho\partial_\tau\Delta^{\rho\tau\alpha\beta}(z)\right)$$
$$+(\xi-1)\left(\partial^\nu\partial_\rho\Delta^{\mu\rho\alpha\beta}(z) + \partial^\mu\partial_\rho\Delta^{\rho\nu\alpha\beta}(z)\right)$$
$$-\frac{1}{2\mu}\left[\mathcal{E}^{\mu\rho\tau}\partial_\rho\left(\Box\Delta_\tau{}^{\nu\alpha\beta}(z) - \partial^\nu\partial_\lambda\Delta^\lambda{}_\tau{}^{\alpha\beta}(z)\right) + (\mu\leftrightarrow\nu)\right]\Big\} = 0$$

e le condizioni al contorno provenienti dalle parentesi di Dirac canoniche

$$\Delta^{\mu\nu\alpha\beta}(\vec{z},0) = 0$$
$$\partial^0\Delta^{ijmn}(\vec{z},0) = -\eta^{ij}\eta^{mn}\delta^2(\vec{z})$$
$$\partial^0\Delta^{0\mu0\nu}(\vec{z},0) = \frac{1}{\xi}\eta^{\mu\nu}\delta^2(\vec{z})$$
$$\partial^0\Delta^{ij0\mu}(\vec{z},0) = 0$$
$$\left(\partial^0\right)^2\Delta^{ijmn}(\vec{z},0) = -\frac{\mu}{2}\left[\mathcal{E}^{im}\eta^{jn} + (i\leftrightarrow j) + (m\leftrightarrow n)\right]\delta^2(\vec{z})$$
$$\left(\partial^0\right)^2\Delta^{ij0\mu}(\vec{z},0) = \frac{1}{\xi}\left(\eta^{i\mu}\partial^j + \eta^{j\mu}\partial^i + \xi\eta^{ij}\partial^\mu\right)\delta^2(\vec{z})$$
$$\left(\partial^0\right)^2\Delta^{000\mu}(\vec{z},0) = -\frac{1}{\xi}\partial^\mu\delta^2(\vec{z})$$
$$\left(\partial^0\right)^2\Delta^{0i0j}(\vec{z},0) = 0$$

La funzione Δ è quindi definita univocamente come soluzione di un problema di Cauchy; la soluzione è, nello spazio dei momenti

$$\begin{aligned}
\tilde{\Delta}^{\mu\nu\alpha\beta}(p) = -i2\pi\epsilon(p_0)\,\delta(p^2)\Big\{ & 2\eta^{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta} - \left(\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta} + \eta^{\mu\beta}\eta^{\nu\alpha}\right) \\
& -\frac{i}{2\mu}\left[\eta^{\mu\alpha}\mathcal{E}^{\nu\beta\sigma} + (\mu\leftrightarrow\nu) + (\alpha\leftrightarrow\beta)\right]p_\sigma \\
& -\left(\frac{1}{\mu^2} + \frac{2}{p^2}\right)\left(\eta^{\mu\nu}p^\alpha p^\beta + \eta^{\alpha\beta}p^\mu p^\nu\right) \\
& +\left(\frac{1}{\mu^2} + \frac{\xi-1}{\xi}\frac{1}{p^2}\right)\left[\eta^{\mu\alpha}p^\nu p^\beta + (\mu\leftrightarrow\nu) + (\alpha\leftrightarrow\beta)\right] \\
& +\frac{i}{2\mu}\left(\frac{1}{\mu^2} + \frac{1}{p^2}\right)\left[\mathcal{E}^{\mu\alpha\sigma}p^\nu p^\beta + (\mu\leftrightarrow\nu) + (\alpha\leftrightarrow\beta)\right]p_\sigma \\
& -\left(\frac{1}{\mu^4} + \frac{1}{\mu^2 p^2} - \frac{3}{\xi}\frac{1}{p^4}\right)p^\mu p^\nu p^\alpha p^\beta\Big\} \\
-i2\pi\epsilon(p_0)\,\delta(p^2-\mu^2)\Big\{ & -\left(\eta^{\mu\nu} - \frac{p^\mu p^\nu}{\mu^2}\right)\left(\eta^{\alpha\beta} - \frac{p^\alpha p^\beta}{\mu^2}\right) \\
& +\left[\left(\eta^{\mu\alpha} - \frac{p^\mu p^\alpha}{\mu^2}\right)\left(\eta^{\nu\beta} - \frac{p^\nu p^\beta}{\mu^2}\right) + (\alpha\leftrightarrow\beta)\right] \\
& +\frac{i}{2\mu}\left[\mathcal{E}^{\mu\alpha\sigma}\left(\eta^{\nu\beta} - \frac{p^\nu p^\beta}{\mu^2}\right) + (\mu\leftrightarrow\nu) + (\alpha\leftrightarrow\beta)\right]p_\sigma\Big\}
\end{aligned}$$

La quantizzazione della teoria è ottenuta con la prescrizione

$$\{A,B\}^* \to -i\,[A,B]$$

e imponendo debolmente il vincolo di gauge sugli stati fisici

$$(\partial_\mu h^{\mu\nu})^- \,|\Phi_f\rangle = 0$$

Funzioni a due punti

Il commutatore di due campi a tempi diversi è

$$D^{(i)(j)}\left(x-y\right)=\left[\phi^{(i)}\left(x\right),\phi^{(j)}\left(y\right)\right]=i\Delta^{(i)(j)}\left(x-y\right)$$

ed è sempre decomponibile in due parti a frequenza positiva e negativa tali che

$$D_{[a]}^{-(i)(j)}\left(x-y\right)=W^{(i)(j)}\left(x-y\right)$$

$$D_{[a]}^{+(i)(j)}\left(x-y\right)=-W^{(j)(i)}\left(y-x\right)$$

e determinate univocamente dalla richiesta di soddisfare le equazione del moto

$$\mathcal{O}_{x\ \ (j)}^{(i)}W^{(j)}{}_{(k)}\left(x-y\right)=0$$

con la condizione al contorno

$$W^{(i)(j)}\left(\lambda z\right)\to 0\quad\text{per}\quad\lambda\to\infty\quad\text{e}\quad z^{2}<0$$

La funzione W è

$$W^{(i)(j)}\left(x-y\right)=\left[\phi^{-(i)}\left(x\right),\phi^{+(j)}\left(y\right)\right]$$

e tale che

$$\tilde{W}^{(i)(j)}\left(p\right)=\tilde{W}^{*(j)(i)}\left(p\right)$$

Il propagatore S è per definizione

$$S^{(i)(j)}\left(x-y\right)=\theta\left(x_{0}-y_{0}\right)W^{(i)(j)}\left(x-y\right)+\theta\left(y_{0}-x_{0}\right)W^{(j)(i)}\left(y-x\right)$$

e soddisfa l'equazione del moto con una sorgente puntiforme immaginaria

$$\mathcal{O}_{x\ \ (k)}^{(i)}S^{(k)}{}_{(j)}\left(x-y\right)=i\delta_{(j)}^{(i)}\delta^{3}\left(x-y\right)$$

Elettrodinamica

Il propagatore è, nello spazio dei momenti

$$\tilde{S}^{\mu\nu}(p) = -\frac{i}{p^2+i\epsilon}\left[-\frac{1}{\xi}\frac{p^\mu p^\nu}{p^2+i\epsilon}\right] \\ -\frac{i}{p^2-\mu^2+i\epsilon}\left[P^{\mu\nu}+i\frac{\mu}{p^2+i\epsilon}\mathcal{E}^{\mu\nu\rho}p_\rho\right]$$

con

$$P^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - \frac{p^\mu p^\nu}{p^2+i\epsilon}$$

Gravità

Il propagatore è, nello spazio dei momenti

$$\tilde{S}^{\mu\nu\alpha\beta}(p) = -\frac{i}{p^2+i\epsilon}\Big\{\Big[\Big(P^{\mu\alpha}P^{\nu\beta}+P^{\mu\beta}P^{\nu\alpha}\Big)-2P^{\mu\nu}P^{\alpha\beta}\Big] \\ -\frac{1}{\xi}\left[\left(\eta^{\mu\alpha}\frac{p^\nu p^\beta}{p^2+i\epsilon}+(\mu\leftrightarrow\nu)+(\alpha\leftrightarrow\beta)\right)-3\frac{p^\mu p^\nu p^\alpha p^\beta}{(p^2+i\epsilon)^2}\right]\Big\} \\ -\frac{i}{p^2-\mu^2+i\epsilon}\Big[P^{\mu\nu}P^{\alpha\beta}-\Big(P^{\mu\alpha}P^{\nu\beta}+P^{\mu\alpha}P^{\nu\beta}\Big) \\ -i\frac{\mu}{2}\frac{p_\sigma}{p^2+i\epsilon}\Big(\mathcal{E}^{\mu\alpha\sigma}P^{\beta\nu}+\mathcal{E}^{\nu\alpha\sigma}P^{\beta\mu}+\mathcal{E}^{\mu\beta\sigma}P^{\alpha\nu}+\mathcal{E}^{\nu\beta\sigma}P^{\alpha\mu}\Big)\Big]$$

con

$$P^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - \frac{p^\mu p^\nu}{p^2+i\epsilon}$$

Realizzazione dell'algebra

Per realizzare l'algebra quantistica definiamo

$$\mathcal{H} = \{|\Phi\rangle\}$$

ove

$$|\Phi\rangle = \left\{\phi_0, \phi_1^{(\mu_1)}(p_1), \phi_2^{(\mu_1)(\mu_2)}(p_{1,}p_2), ..., \phi_n^{(\mu_1)...(\mu_n)}(p_1, ..., p_n), ...\right\}$$

e

$$\phi_n^{(\mu_1)...(\mu_n)}(p_1, ..., p_n)$$

indica un tensore completamente simmetrico rispetto allo scambio

$$(\mu_i, p_i) \leftrightarrow (\mu_j, p_j)$$

Il prodotto scalare può essere definito come

$$\langle\Phi|\ \Psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \int \frac{d^3p_1}{(2\pi)^3} ... \int \frac{d^3p_n}{(2\pi)^3}$$
$$\phi^{*n}_{(\mu_1)...(\mu_n)}(p_1, .., p_n)\, \tilde{W}^{(\mu_1)}{}_{(\nu_1)}(p_1) ... \tilde{W}^{(\mu_n)}{}_{(\nu_n)}(p_n)\, \psi_n^{(\nu_1)...(\nu_n)}(p_1, .., p_n)$$

Si possono definire le azioni degli operatori di campo, in accordo con l'equazione del moto e le regole di commutazione.
Per determinare i stati fisici, si impone la condizione di gauge

$$G^-(x)\,|\Phi_f\rangle$$

e si analizza la norma per determinare quali gradi di libertà funzionali contribuiscono agli elementi di matrice.

Elettrodinamica

Gli stati ad una particella sono del tipo

$$|\Phi_1\rangle = \left\{0, \phi^{\alpha}_{(0)}(p) + \phi^{\alpha}_{(\mu)}(p), 0, 0, 0, ...\right\}$$

con

$$\phi^{\alpha}_{(0)}(p) \in V_0^+$$

$$\phi^{\alpha}_{(\mu)}(p) \in V_\mu^+$$

La condizione di gauge

$$(\partial_\mu A^\mu)^- (x) |\Phi_1\rangle$$

implica

$$p_\alpha \phi^{\alpha}_{(0)}(p) = 0$$

Come conseguenza, la norma coinvolge solo la parte a massa $|\mu|$

$$\langle \Phi_1 | \Phi_1 \rangle = -2 \int \widetilde{dp}^\mu \frac{1}{2\pi\sqrt{2p_0}} \phi^{*\alpha}_{(\mu)}(p) P^{(\mu)}_{\alpha\rho}(p) \phi^{\beta}_{(\mu)}(p)$$

ove $P^{(\mu)}_{\alpha\beta}(p)$ è il proiettore

$$P^{(\mu)\alpha\beta}(p) = \frac{1}{2}\left[\left(\eta^{\alpha\beta} - \frac{p^\alpha p^\beta}{\mu^2}\right) + \frac{i}{\mu}\mathcal{E}^{\alpha\beta\rho} p_\rho\right]$$

$P^{(\mu)}_{\alpha\beta}(p)$ ha un solo autovalore non nullo pari a 1 e l'unico contributo non nullo alla norma è positivo e proviene dal corrispondente autovettore

$$P^{(\mu)}_{\alpha\beta}(p) f^\beta(p) = f_\alpha(p)$$

Quindi, la teoria contiene una sola eccitazione fisica a massa $|\mu|$.
Il generico stato fisico ad una particella è

$$|\Phi_{f1}\rangle = \{0, 2\pi\sqrt{p_0} a(p) f^\alpha(p), 0, 0, 0, ...\}$$

con $a(p) \in V_\mu^+$ tale che

$$\int d^2\vec{p} |a(p)|^2 = 1$$

La forma esplicita del vettore di polarizzazione è

$$f^{\mu}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\mu^2\left(p_0^2-\mu^2\right)}}\begin{pmatrix} \mu^2 - p_0^2 \\ i\mu p^2 - p^0 p^1 \\ -i\mu p^1 - p^0 p^2 \end{pmatrix} e^{i\beta(p)}$$

La fase $\beta(p)$ non è completamente arbitraria. Infatti

$$f^{\mu}(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -i\frac{\mu}{|\mu|} \end{pmatrix} e^{i\lim\limits_{|\vec{p}|\to 0}\left(\beta(p)-\frac{\mu}{|\mu|}\theta(p)\right)}$$

con

$$\theta(p) = \arctan\left(\frac{p^2}{p^1}\right)$$

Siccome

$$\lim_{|\vec{p}|\to 0}\theta(p) = \nexists$$

si deve scegliere

$$\beta(p) = \frac{\mu}{|\mu|}\theta(p) + \gamma(p)$$

con $\gamma(p)$ funzione arbitraria ma regolare.
Soltanto in questo modo la fase arbitraria, rappresentata a questo punto da $\gamma(p)$, diventa completamente ininfluente, e può quindi essere posta uguale a zero, ottenendo

$$f^{\mu}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\mu^2\left(p_0^2-\mu^2\right)}}\begin{pmatrix} \mu^2 - p_0^2 \\ i\mu p^2 - p^0 p^1 \\ -i\mu p^1 - p^0 p^2 \end{pmatrix} e^{i\frac{\mu}{|\mu|}\theta(p)}$$

Gravità

Anche in questo caso, la teoria contiene una sola eccitazione fisica a massa $|\mu|$.
Il generico stato fisico ad una particella è

$$|\Phi_{f1}\rangle = \left\{0, \pi\sqrt{2p_0}a\left(p\right)f^{\alpha\beta}\left(p\right), 0, 0, 0, ...\right\}$$

con $a\left(p\right) \in V_\mu^+$ tale che

$$\int d^2\vec{p}\left|a\left(p\right)\right|^2 = 1$$

La forma esplicita del tensore di polarizzazione è

$$f^{\mu\nu}\left(p\right) = \frac{1}{2\mu^2}\begin{pmatrix} p_0^2 - \mu^2 & p^0p^1 - i\mu p^2 & p^0p^2 + i\mu p^1 \\ p^0p^1 - i\mu p^2 & \frac{\left(p^0p^1 - i\mu p^2\right)^2}{p_0^2 - \mu^2} & \frac{\left(p^0p^1 - i\mu p^2\right)\left(p^0p^2 + i\mu p^1\right)}{p_0^2 - \mu^2} \\ p^0p^2 + i\mu p^1 & \frac{\left(p^0p^1 - i\mu p^2\right)\left(p^0p^2 + i\mu p^1\right)}{p_0^2 - \mu^2} & \frac{\left(p^0p^2 + i\mu p^1\right)^2}{p_0^2 - \mu^2} \end{pmatrix}$$

$$e^{i2\frac{\mu}{|\mu|}\theta(p)}$$

Da notarsi infine l'analogia con il caso dell'elettrodinamica

$$f^{\mu\nu}\left(p\right) = f^{\mu}\left(p\right)f^{\nu}\left(p\right)$$

Questo implica che lo spin del gravitone sia due volte quello del fotone.

Osservabili

La conoscenza della funzione di Wightman permette di espandere i campi in modi normali

$$\phi^{(i)}(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^2}\sqrt{2p_0}\left[\tilde{W}^{(i)(j)}(p)\, a_{(j)}(p)\, e^{-ipx} + \tilde{W}^{*(i)(j)}(p)\, a^{+}_{(j)}(p)\, e^{ipx}\right]$$

In entrambi i casi in esame, il campo fisico è del tipo

$$\phi^{(i)}_{f}(x) = \alpha \int \widetilde{dp}^{\mu}\left[a(p)\, f^{(i)}(p)\, e^{-ipx} + a^{+}(p)\, f^{*(i)}(p)\, e^{ipx}\right]$$

e dalle regole di commutazione segue

$$\left[a(p)\,, a^{+}(q)\right] = \delta^{2}(\vec{p}-\vec{q})$$

$$[a(p)\,, a(q)] = 0$$

$$\left[a^{+}(p)\,, a^{+}(q)\right] = 0$$

L'azione degli operatori $a(p)$ e $a^{+}(p)$ può essere ricavata da quella dei campi e mostra che essi creano e distruggono gli stati fisici ottenuti.
Le proprietà degli stati fisici vengono determinate dall'analisi dei generatori del gruppo di Poincaré, e lo spin è dato dallo scalare di Pauli-Lubansky

$$S = \frac{1}{2|\mu|}\mathcal{E}_{\alpha\mu\nu}P^{\alpha}M^{\mu\nu}$$

Elettrodinamica

La matrice di spin del campo vettoriale A^μ è

$$(\Sigma^{\mu\nu})^{\rho\tau} = \eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\tau} - \eta^{\mu\tau}\eta^{\nu\rho}$$

I tensori energia-impulso e del momento angolare canonici sono

$$T^{\mu\nu} = \pi^{\rho(\mu)}\partial^\nu A_\rho - \eta^{\mu\nu}\mathcal{L}$$

$$M^{\mu\alpha\beta} = x^\alpha T^{\mu\beta} - x^\beta T^{\mu\alpha} + \pi^{\rho(\mu)}\left(\Sigma^{\alpha\beta}\right)_{\rho\tau} A^\tau$$

e le loro cariche

$$P^\mu = \int d^2\vec{x} : \left(\pi^\rho(x)\,\partial^\mu A_\rho(x) - \eta^{\mu 0}\mathcal{L}(x)\right) :$$

$$M^{\mu\nu} = \int d^2\vec{x} : \Big[x^\mu\left(\pi^\rho(x)\,\partial^\nu A_\rho(x) - \eta^{\nu 0}\mathcal{L}(x)\right) - x^\nu\left(\pi^\rho(x)\,\partial^\mu A_\rho(x) - \eta^{\mu 0}\mathcal{L}(x)\right)$$
$$+\pi^\rho(x)\,(\Sigma^{\mu\nu})_{\rho\tau} A^\tau(x)\Big] :$$

Il campo fisico è

$$A_f^\mu(x) = \sqrt{2}\int \widetilde{dp}^\mu\left[a(p)\,f^\mu(p)\,e^{-ipx} + a^+(p)\,f^{*\mu}(p)\,e^{ipx}\right]$$

Dalle proprietà del vettore $f^\mu(p)$ segue che esso soddisfa i vincoli

$$A_f^\mu(x) - \frac{1}{\mu}\mathcal{E}^{\mu\alpha\beta}\partial_\alpha A_{f\beta}(x) = 0$$

$$\partial_\mu A_f^\mu(x) = 0$$

e la sua equazione del moto si riduce a

$$\left(\Box + \mu^2\right) A_f^\mu(x) = 0$$

Si trova

$$P^\mu_f = \int d^2\vec{p} p^\mu a^+ (p)\, a (p)$$

$$M^{ij}_f = \mathcal{E}^{ij} \int d^2\vec{p} \left[a^+ (p) \left(\overleftrightarrow{-\frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial\theta}} \right) a (p) + \frac{\mu}{|\mu|} a^+ (p)\, a (p) \right]$$

$$M^{0i}_f = tP^i_f + \int d^2\vec{p} \left[a^+ (p) \left(\overleftrightarrow{\frac{i}{2} p^0 \partial^i} \right) a (p) + \frac{\mu}{|\mu|} \frac{1}{|\mu| + p^0} \mathcal{E}^i{}_k p^k a^+ (p)\, a (p) \right]$$

e l'algebra di Poincaré è soddisfatta.
Su uno stato fisico puro ad una particella

$$|\Phi_{f1} (k)\rangle = a^+ (k) |\Phi_{f0}\rangle$$

segue

$$\langle \Phi_{f1} (k)| P^\mu_f |\Phi_{f1} (k)\rangle = k^\mu$$

$$\langle \Phi_{f1} (k)| S_f |\Phi_{f1} (k)\rangle = \frac{\mu}{|\mu|}$$

Quindi, l'operatore $a^+ (k)$ crea un fotone di massa $|\mu|$, quadrimpulso k^μ, spin $\frac{\mu}{|\mu|}$ e polarizzazione $f^\mu (k)$.

Gravità

Tutto procede come nel caso dell'elettrodinamica, prestando attenzione alle proprietà di trasformazione dei campi tensoriali $h^{\mu\nu}$ e k^{ij}.
Il campo fisico è

$$h_f^{\mu\nu}(x) = 2\int \widetilde{dp}^{\mu} \left[a(p)\, f^{\mu\nu}(p)\, e^{-ipx} + a^+(p)\, f^{*\mu\nu}(p)\, e^{ipx} \right]$$

Dalle proprietà del tensore $f^{\mu\nu}(p)$ segue che esso soddisfa i vincoli

$$h_f^{\mu\nu}(p) - \frac{1}{2\mu}\left[\mathcal{E}^{\mu\alpha\beta}\partial_\alpha h_{f\beta}{}^{\nu}(x) + \mathcal{E}^{\nu\alpha\beta}\partial_\alpha h_{f\beta}{}^{\mu}(x) \right] = 0$$

$$\partial_\mu h_f^{\mu\nu}(x) = 0$$

$$h_{f\,\mu}^{\mu}(x) = 0$$

e la sua equazione del moto si riduce a

$$\left(\Box + \mu^2 \right) h_f^{\mu\nu}(x) = 0$$

I generatori hanno la stessa forma che nel caso dell'elettrodinamica, ma con spin doppio.
Su uno stato fisico puro ad una particella

$$|\Phi_{f1}(k)\rangle = a^+(k)\, |\Phi_{f0}\rangle$$

segue

$$\langle \Phi_{f1}(k)|\, P_f^{\mu}\, |\Phi_{f1}(k)\rangle = k^{\mu}$$

$$\langle \Phi_{f1}(k)|\, S_f\, |\Phi_{f1}(k)\rangle = 2\frac{\mu}{|\mu|}$$

Quindi, l'operatore $a^+(k)$ crea un gravitone di massa $|\mu|$, quadrimpulso k^{μ}, spin $2\frac{\mu}{|\mu|}$ e polarizzazione $f^{\mu\nu}(k)$.
In entrambi i casi, un scelta di fase diversa da quella effettuata porta a generatori fisici che non chiudono l'algebra.

Risultati e prospettive

I risultati sono i seguenti:

1. Entrambe le teorie hanno una sola eccitazione fisica a massa $|\mu|$
2. Il fotone ha spin $\dfrac{\mu}{|\mu|}$ mentre il gravitone ha spin $2\dfrac{\mu}{|\mu|}$
3. Gli stati fisici sono descritti da tensori di polarizzazione che contengono una fase legata allo spin: $e^{iS\theta(p)}$; questa fase influenza le previsioni fisiche ed è l'unica accettabile
4. È stato sviluppato un metodo sistematico per l'isolamento delle eccitazioni fisiche delle teorie di campo

Le principali prospettive possono essere:

1. Implicazioni pratiche della fase di regolarizzazione infrarossa nel caso dell'elettrodinamica
2. Futuro confronto degli stati della gravità con quelli della sua formulazione al primo ordine
3. Applicazione del metodo di isolamento delle eccitazioni fisiche ad altre teorie di gauge

Formalismo hamiltoniano per sistemi con derivate di ordine superiore nella lagrangiana

Consideriamo una generica lagrangiana

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}\left(\phi^{(i)}, \partial^\mu \phi^{(i)}, \partial^\mu \partial^\nu \phi^{(i)}, \partial^\mu \partial^\nu \partial^\rho \phi^{(i)}, ...\right)$$

Le equazioni di Eulero-Lagrange sono

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^{(i)}} - \partial^\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial^\mu \phi^{(i)}\right)} + \partial^\mu \partial^\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial^\mu \partial^\nu \phi^{(i)}\right)} - \partial^\mu \partial^\nu \partial^\rho \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial^\mu \partial^\nu \partial^\rho \phi^{(i)}\right)} + ... = 0$$

In una trasformazione di Poincaré infinitesima

$$\delta x^\mu = w^\mu{}_\nu x^\nu + b^\mu$$

le variazioni sono

$$\delta \phi^{(i)} = \frac{1}{2} w_{\mu\nu} \left(\Sigma^{\mu\nu}\right)^{(i)}{}_{(j)} \phi^{(j)}$$

$$\delta\left(\partial_\alpha \phi^{(i)}\right) = \frac{1}{2} w_{\mu\nu} \left(\Sigma^{\mu\nu}{}_\alpha{}^\rho\right)^{(i)}{}_{(j)} \left(\partial_\rho \phi^{(j)}\right)$$

$$\delta\left(\partial_\alpha \partial_\beta \phi^{(i)}\right) = \frac{1}{2} w_{\mu\nu} \left(\Sigma^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta}{}^{\rho\tau}\right)^{(i)}{}_{(j)} \left(\partial_\rho \partial_\tau \phi^{(j)}\right)$$

$$...$$

con

$$\left(\Sigma^{\mu\nu}{}_\alpha{}^\rho\right)^{(i)}{}_{(j)} = \left(\Sigma^{\mu\nu}\right)^{(i)}{}_{(j)} \delta^\rho_\alpha - \left(\delta^\mu_\alpha \eta^{\nu\rho} - \delta^\nu_\alpha \eta^{\mu\rho}\right) \delta^{(i)}_{(j)}$$

$$\left(\Sigma^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta}{}^{\rho\tau}\right)^{(i)}{}_{(j)} = \left(\Sigma^{\mu\nu}\right)^{(i)}{}_{(j)} \delta^\rho_\alpha \delta^\tau_\beta - \left[\left(\delta^\mu_\alpha \eta^{\nu\rho} - \delta^\nu_\alpha \eta^{\mu\rho}\right) \delta^\tau_\beta + \left(\delta^\mu_\beta \eta^{\nu\tau} - \delta^\nu_\beta \eta^{\mu\tau}\right) \delta^\rho_\alpha\right] \delta^{(i)}_{(j)}$$

$$...$$

Se l'azione rimane invariata si conservano i tensori energia-impulso e del momento angolare

$$T^{\mu\nu} = \mathcal{L}\ \eta^{\mu\nu} - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial_\mu \phi^{(i)}\right)} - \partial_\rho \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial_\mu \partial_\rho \phi^{(i)}\right)} + ... \right) \partial^\nu \phi^{(i)}$$

$$- \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial_\mu \partial_\alpha \phi^{(i)}\right)} - \partial_\rho \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial_\mu \partial_\alpha \partial_\rho \phi^{(i)}\right)} + ... \right) \partial^\nu \left(\partial_\alpha \phi^{(i)}\right) - ...$$

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$$

$$M^{\mu\alpha\beta} = x^\alpha T^{\mu\beta} - x^\beta T^{\mu\alpha}$$

$$+ \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial_\mu \phi^{(i)}\right)} - \partial_\rho \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial_\mu \partial_\rho \phi^{(i)}\right)} + ... \right) \left(\Sigma^{\alpha\beta}\right)^{(i)}{}_{(j)} \phi^{(j)}$$

$$+ \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial_\mu \partial_\lambda \phi^{(i)}\right)} - \partial_\rho \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial_\mu \partial_\lambda \partial_\rho \phi^{(i)}\right)} + ... \right) \left(\Sigma^{\alpha\beta}{}_\lambda{}^\epsilon\right)^{(i)}{}_{(j)} \left(\partial_\epsilon \phi^{(j)}\right) + ...$$

$$\partial_\mu M^{\mu\alpha\beta} = 0$$

Se la lagrangiana contiene derivate fino all'ordine n, le equazioni di Eulero-Lagrange sono di ordine $2n$

$$\frac{\delta S}{\delta \phi^{(i)}} = \frac{\delta^* L}{\delta^* \phi^{(i)}} - \partial^0 \frac{\delta^* L}{\delta^* \left(\partial^0 \phi^{(i)}\right)} + \partial^0 \partial^0 \frac{\delta^* L}{\delta^* \left(\partial^0 \phi^{(i)}\right)} - ... = 0$$

Per ottenerne una forma hamiltoniana della teoria è necessario introdurre $2n - 1$ nuove variabili.
Si definiscono le variabili

$$\phi^{(i)}_{[a]} = \left(\partial^0\right)^{a-1} \phi^{(i)} \quad , \quad a = 1, 2, ..., n$$

ed i momenti coniugati

$$\pi^{[a]}_{(i)} = \frac{\delta S}{\delta \left(\partial^0 \phi^{(i)}_{[a]}\right)} = \frac{\delta^* L}{\delta^* \left(\partial^0 \phi^{(i)}_{[a]}\right)} - \partial^0 \frac{\delta^* L}{\delta^* \left(\partial^0 \partial^0 \phi^{(i)}_{[a]}\right)} + \partial^0 \partial^0 \frac{\delta^* L}{\delta^* \left(\partial^0 \partial^0 \partial^0 \phi^{(i)}_{[a]}\right)} - ...$$
$$, \quad a = 1, 2, ..., n$$

supponendo che la lagrangiana non sia degenere

$$\det \left(\frac{\delta^2 S}{\delta \left(\left(\partial^0\right)^n \phi^{(i)}\right) \delta \left(\left(\partial^0\right)^n \phi^{(j)}\right)} \right) \neq 0$$

Eseguendo la trasformazione di Legendre generalizzata

$$\left(\partial^0\right)^{a-1}\phi^{(i)} \to \phi^{(i)}_{[a]} \quad , \quad a = 1, 2, ..., n$$

$$\left(\partial^0\right)^{2n-a}\phi^{(i)} \to \pi^{(i)}_{[a]} \quad , \quad a = 1, 2, ..., n$$

$$\mathcal{L} \to \mathcal{H} = \pi^{[a]}_{(i)}\partial^0\phi^{(i)}_{[a]} - \mathcal{L}$$

seguono le equazioni di Hamilton generalizzate

$$\partial^0\phi^{(i)}_{[a]} = \frac{\delta^* H}{\delta^*\pi^{[a]}_{(i)}} \quad , \quad a = 1, 2, ..., n$$

$$\partial^0\pi^{[a]}_{(i)} = -\frac{\delta^* H}{\delta^*\phi^{(i)}_{[a]}} \quad , \quad a = 1, 2, ..., n$$

Il formalismo canonico rimane intatto definendo la parentesi di Poisson come

$$\{A(\vec{x},t), B(\vec{y},t)\} = \int d^2\vec{z}\left(\frac{\delta^* A(\vec{x},t)}{\delta^*\phi^{(i)}_{[a]}(\vec{z},t)}\frac{\delta^* B(\vec{y},t)}{\delta^*\pi^{[a]}_{(i)}(\vec{z},t)} - \frac{\delta^* B(\vec{y},t)}{\delta^*\phi^{(i)}_{[a]}(\vec{z},t)}\frac{\delta^* A(\vec{x},t)}{\delta^*\pi^{[a]}_{(i)}(\vec{z},t)}\right)$$

Le equazioni di Hamilton generalizzate si scrivono nel modo convenzionale

$$\partial^0\phi^{(i)}_{[a]} = \left\{\phi^{(i)}_{[a]}, H\right\}$$

$$\partial^0\pi^{[a]}_{(i)} = \left\{\pi^{[a]}_{(i)}, H\right\}$$

e le parentesi canoniche sono

$$\left\{\phi^{(i)}_{[a]}(\vec{x},t), \phi^{(j)}_{[b]}(\vec{y},t)\right\} = 0$$

$$\left\{\pi^{[a]}_{(i)}(\vec{x},t), \pi^{[b]}_{(j)}(\vec{y},t)\right\} = 0$$

$$\left\{\phi^{(i)}_{[a]}(\vec{x},t), \pi^{[b]}_{(j)}(\vec{y},t)\right\} = \delta^{(i)}_{(j)}\delta^{[b]}_{[a]}\delta^2(\vec{x}-\vec{y})$$

A meno di una quadridivergenza, i tensori energia impulso e del momento angolare si possono scrivere

$$\Theta_C^{\alpha\mu} = \eta^{\alpha\mu}\mathcal{L} - \left(\pi_{(i)}^{[a]}\right)^\alpha \partial^\mu \phi_{[a]}^{(i)}$$

$$\mathcal{M}_C^{\alpha\mu\nu} = x^\mu \Theta_C^{\alpha\nu} - x^\nu \Theta_C^{\alpha\mu} + \left(\pi_{(i)}^{[a]}\right)^\alpha \left(\Sigma^{\mu\nu}{}_{00...}{}^{\rho\tau...}\right)_{[a](j)}^{(i)} \partial_\rho \partial_\tau ... \phi^{(j)}$$

con la generalizzazione

$$\begin{aligned}
\left(\pi_{(i)}^{[a]}\right)^\mu = & \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu \phi_{[a]}^{(i)}\right)} - (a+1)\,\partial_m \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_m \partial_\mu \phi_{[a]}^{(i)}\right)} + (a+2)\,\partial_m \partial_n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_m \partial_n \partial_\mu \phi_{[a]}^{(i)}\right)} - ...\right) \\
& -\partial^0 \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu \phi_{[a+1]}^{(i)}\right)} - (a+2)\,\partial_m \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_m \partial_\mu \phi_{[a+1]}^{(i)}\right)}\right. \\
& \qquad \left. + (a+3)\,\partial_m \partial_n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_m \partial_n \partial_\mu \phi_{[a+1]}^{(i)}\right)} - ...\right) \\
& +\partial^0 \partial^0 \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu \phi_{[a+2]}^{(i)}\right)} - (a+3)\,\partial_m \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_m \partial_\mu \phi_{[a+2]}^{(i)}\right)}\right. \\
& \qquad \left. + (a+4)\,\partial_m \partial_n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_m \partial_n \partial_\mu \phi_{[a+2]}^{(i)}\right)} - ...\right) - ...
\end{aligned}$$

Quindi, tutto procede come nel caso convenzionale, lavorando in uno spazio delle fasi esteso e prestando attenzione alle proprietà sotto trasformazioni di Poincaré.