Università degli Studi di Perugia
Facoltà di scienze matematiche fisiche e naturali
Corso di laurea in fisica

Tesi di laurea

Stati quantistici di gravità ed elettrodinamica topologicamente massive

Relatori
Dott. Gianluca Grignani   Prof. Pasquale Sodano

Corelatore
Prof. Antonio Masiero

Laureando
Claudio Scrucca

Anno accademico 1994/95
December 16, 2004

Contents

Capitolo 1

Introduzione

Uno dei campi di ricerca più affascinanti della fisica teorica moderna è senza dubbio la quantizzazione della teoria della gravità di Einstein [1]. Il problema è stato affrontato sin dalla nascita della teoria dei campi, ma nonostante le esperienze ed i successi collezionati nello studio delle altre tre forze fondamentali, la procedura convenzionale di quantizzazione porta nel caso della gravità ad una teoria non finita; più precisamente, la teoria risulta essere non rinormalizzabile [2]. Questo costituisce un problema piuttosto grave nel quadro generale della teoria di campo delle forze fondamentali e rappresenta un grande ostacolo allo scopo ultimo della loro unificazione. È nata cosi la necessità di capire meglio almeno alcuni degli aspetti fondamentali associati alla quantizzazione della gravità; i tentativi effettuati in proposito fino al giorno d'oggi sono innumerevoli [3], e, anche se sistematicamente falliti per vari motivi, hanno dato un notevole contributo alla teoria dei campi.
Inizialmente vi sono stati tentativi di formulare la gravità in dimensioni spazio-temporali maggiori di quattro [4][5] nella speranza di unificare tale teoria con l'elettrodinamica. Più recentemente, queste teorie in dimensioni più alte hanno riscontrato un notevole sviluppo con la supergravità [6][7] e la teoria delle stringhe [8], teorie che non hanno tuttavia portato ad una consistente quantizzazione della gravità, rimanendo affette da problemi fondamentali nella riduzione dimensionale, né a nuove predizioni fisiche. Altri lavori sono stati invece diretti ad una maggior comprensione dei problemi che sorgono nella quantizzazione canonica della teoria originale di Einstein [9]. (Recentemente, la quantizzazione canonica della gravità ha avuto un notevole impulso grazie all'introduzione delle variabili di Ashtekar [10]).
Infine, le ricerche di una parte della comunità scientifica si sono dirette verso teorie in dimensioni spazio-temporali minori di quattro, con la speranza che il minor numero di gradi di libertà permetta di ottenere risultati quantistici anche in teorie gravitazionali. Tali investigazioni sono quelle più rilevanti per lo scopo di questo lavoro. Prendendo spunto dalle indagini effettuate a metà secolo in elettrodinamica bidimensionale [11], sono state studiate anche le versioni bidimensionali e tridimensionali della gravità. (Le prime indagini su queste teorie si trovano rispettivamente in [12][13]).
La possibilità di studiare la relavità generale in dimensioni spazio-temporali minori di quattro è limitata dal fatto che essa ha, in assenza di materia, dinamica banale in tre dimensioni (per lo meno quando definita su varietà con topologia banale) e in due dimensioni non esiste nemmeno [14]. Tuttavia, con l'avvento delle cosiddette teorie topologicamente massive [15], basate sull'introduzione nella lagrangiana di termini, detti di Chern-Simons [16][17], che dipendono dalla topologia dello spazio-tempo ma non dalla sua metrica, è nata la possibilità

di costruire e studiare teorie gravitazionali tridimensionali pure con dinamica interessante anche su una varietà a topologia banale. Le teorie topologicamente massive sono l'oggetto di questo studio.
Un notevole impulso alle ricerche sulla gravità in 2+1 dimensioni si è avuto dopo la trattazione quantistica della formulazione del primo ordine [18] di questa teoria fatta da Witten [19]. (Una breve rassegna degli studi effettuati finora in proposito si trova in [20]). In tale approccio la curvatura viene espressa in termini delle *spin connections* che vengono considerate come gradi di libertà indipendenti dai *dreibein* (analogamente a come nell'originale formulazione di Palatini le connessioni affini venivano prese come gradi di libertà indipendenti dalla metrica [21][22]). In questa formulazione della gravità 2+1 dimensionale, la lagrangiana di Einstein-Hilbert [23] viene sostituita da una lagrangiana di Chern-Simons del gruppo non-abeliano ISO(2,1), che fornisce equazioni del moto classiche equivalenti a quelle di Einstein purché il *dreibein* venga considerato invertibile. Witten ha dimostrato che tale teoria è quantizzabile e rinormalizzabile [1], fornendo cosi il primo esempio di una teoria gravitazionale quantistica. Tuttavia, senza l'ipotesi di invertibilità dei *dreibein*, la formulazione del primo ordine à la Witten contiene configurazioni non metriche che la distinguono, già a livello classico, dalla formulazione convenzionale. Quantisticamente, questo potrebbe significare [15] che allargando lo spazio delle fasi della teoria con l'inclusione di metriche degeneri, si possa ottenere una teoria rinormalizzabile. La gravità à la Einstein sarebbe quindi una versione effettiva della formulazione più generale del primo ordine, come conseguenza di una rottura di simmetria determinata dalla richiesta di invertibilità dei *dreibein*. Questo fenomeno porterebbe alla non rinormalizzabilità della teoria einsteiniana.
La comprensione delle relazioni tra le due formulazioni sembra quindi essere molto importante ed è stata una delle motivazioni del presente lavoro. Infatti, in questa tesi si trovano gli stati quantistici liberi della teoria della gravità topologicamente massiva e sarebbe estremamente interessante vedere la relazione esistente tra tali stati e quelli della formulazione del primo ordine della stessa teoria [2]. La versione del primo ordine della gravità tridimensionale con un termine di Chern-Simons è una teoria topologica pura, poiché non dipende in nessun modo dalla metrica. Anche se di studio molto difficile, tale teoria sembra possedere buone caratteristiche; in particolare, l'adimensionalità della costante di accoppiamento porta molto probabilmente alla sua rinormalizzabilità, e la rottura di simmetria già citata potrebbe dare massa alle eccitazioni [15]. In corrispondenza, la versione metrica della gravità tridimensionale con un termine di Chern-Simons contiene eccitazioni massive e la sua rinormalizzabilità sembra alquanto improbabile per la presenza di una costante di accoppiamento dimensionata e di infiniti vertici di interazione. Anche in questo caso, le due versioni della gravità sono classicamente equivalenti sotto l'ipotesi di invertibilità dei *dreibein*, mentre le loro versioni quantistiche potrebbero essere legate da una rottura di simmetria [19].
L'interesse delle modifiche topologiche, tuttavia, non si limita al caso della gravità tridimensionale, ma si estende a tutte le teorie di gauge. Infatti in 2+1 dimensioni si possono aggiungere termini di Chern-Simons sia alla usuale azione di Maxwell che a quella di Yang-Mills [26][15]. Il termine di Chern-Simons assume poi una particolare rilevanza fisica nelle teorie di gauge accoppiate a materia fermionica; infatti, esso corrisponde ad un controter-

[1] Va notato tuttavia che solo la gravità pura gode di questa proprietà, mentre lo studio del suo accoppiamento con la materia in forma gauge invariante non è stato ancora sviluppato a livello quantistico [24][25].

[2] Si noti che la teoria della gravità topologicamente massiva nel formalismo del primo ordine contiene due termini di Chern-Simons, uno, quello corrispondente all'azione di Einstein-Hilbert, del gruppo di Poincaré in 2+1 dimensioni, ISO(2,1), l'altro del gruppo di Lorentz SO(2,1).

mine generato automaticamente dalla procedura di rinormalizzazione [27] [17] [28]. In dimensioni spazio-temporali dispari, esso può essere associato alla rottura di simmetria per inversioni spazio-temporali [17], peraltro caratteristica anche del termine di massa fermionico, mentre in dimensioni spazio-temporali pari, esso corrisponde all'anomalia chirale [29]. Questa circostanza lascia intravedere la possibilità di eventuali parentele fra i meccanismi di generazione di massa associati alla rottura di simmetrie apparentemente diverse, quali la simmetria per inversioni spazio-temporali in dimensioni dispari e la simmetria chirale in dimensioni pari; inoltre, la considerazione di un termine di Chern-Simons nelle teorie di gauge libere corrisponde, in qualche modo, a contemplare il caso fisico in cui la presenza di materia fermionica è inevitabile, e lavorare con un'azione effettiva ad un loop [17]. Infine, una caratteristica comune a tutte le teorie tridimensionali è che il termine topologico permette l'introduzione della massa in modo gauge-invariante, rappresentando cosi un'alternativa al meccanismo di Higgs della rottura spontanea di simmetria. Inoltre, sempre nel caso tridimensionale, esso offre l'opportunità di costruire teorie che esibiscono stati anionici con spin e statistica arbitrari [30][31][32]. Del tutto in generale, le teorie tridimensionali si rivelano particolarmente importanti e utili anche nello studio di sistemi planari in fisica della materia condensata. In secondo luogo, ogni teoria quadridimensionale degenera, nel limite di temperatura finita, in una corrispondente teoria tridimensionale euclidea [17]; pertanto, lo studio della versione tridimensionale di una teoria può fornire informazioni preziose sulla sua versione quadridimensionale [33].
Il caso dell'elettrodinamica tridimensionale è già stato oggetto di numerosissimi studi approfonditi, sia per il suo interesse formale che per la sua capacità di descrivere alcuni fenomeni elettromagnetici di difficile interpretazione, quali l'effetto Hall quantistico frazionario [34] e la superconduttività ad alte temperature [30]. Per tutti questi motivi è quindi di estrema importanza la comprensione rigorosa della quantizzazione dell'elettrodina-mica in 2+1 dimensioni, un altro degli scopi di questa tesi.
Dalle analisi del contenuto fisico delle teorie della gravità e dell'elettrodinamica topologicamente massive svolte finora [15], emergono alcuni problemi di dubbia interpretazione causati da divergenze infrarosse [35], e la covarianza delle due teorie sembra essere subordinata ad una particolare realizzazione dell'algebra. Lo scopo primo di questo lavoro è di derivare rigorosamente i contenuti quantistici in stati delle due teorie con particolare riguardo ai comportamenti infrarossi precari delle funzioni di Green in tre dimensioni; un suo interesse secondario è poi quello di mostrare come possa essere quantizzata secondo la procedura canonica una teoria vincolata con una lagrangiana contenente derivate di ordine superiore.
La trattazione rigorosa del comportamento infrarosso delle teorie quantistiche libere ci ha permesso di trovare gli stati quantistici di queste teorie in una forma non apparsa precedentemente in letteratura e che può notevolmente influenzare la fisica della teoria interagente anche in elettrodinamica.
Il presente lavoro tratta della quantizzazione canonica delle versioni tridimensionali topologicamente massive della gravità e dell'elettrodinamica libere.
In entrambe le teorie, il termine di Chern-Simons viene costruito contraendo campi dinamici con il tensore $\mathcal{E}^{\alpha\beta\gamma}$, producendo scalari. Il termine topologico permette di dare massa alle particelle in modo naturale e gauge-invariante, ma rompe la simmetria della teoria rispetto ad inversioni spazio-temporali.
L'elettrodinamica tridimensionale topologicamente massiva viene costruita aggiungendo

all'azione di Maxwell il termine

$$S_{CS} = \int d^3x \, \frac{\mu}{2} \mathcal{E}^{\mu\nu\rho} \partial_\mu A_\nu A_\rho \ . \tag{1.1}$$

Esso non modifica la struttura di gauge della teoria, ma ne aumenta i vincoli; tuttavia, questo non genera particolari problemi nella quantizzazione, poiché il gauge-fixing convenzionale rende la lagrangiana non degenere e permette di cortocircuitare il vincolo proveniente dal termine topologico.
Analogamente, la gravità tridimensionale topologicamente massiva viene costruita aggiungendo all'azione di Einstein-Hilbert il termine [3]

$$S_{CS} = \int d^3x \frac{1}{2k^2\mu} \mathcal{E}^{\mu\lambda\nu} \Gamma^\rho{}_{\lambda\sigma} \left(\partial_\mu \Gamma^\sigma{}_{\nu\rho} + \frac{2}{3} \Gamma^\sigma{}_{\mu\xi} \Gamma^\xi{}_{\nu\rho} \right) \ . \tag{1.2}$$

Anche in questo caso, esso non modifica la struttura di gauge della teoria, ma ne aumenta i vincoli e ne altera notevolmente la dinamica a causa delle derivate di ordine superiore che contiene; questo risulta complicare notevolmente la quantizzazione. Per estendere il formalismo hamiltoniano a teorie con derivate di ordine superiore è necessario ridurre la dinamica al primo ordine mediante l'introduzione di nuove variabili per ogni ordine di derivazione superiore; questo comporta un'estensione notevole dello spazio delle fasi in cui si deve lavorare. La conseguenza più rilevante di questa estensione consiste nel fatto che il vincolo proveniente dal termine topologico coinvolge l'intero spazio delle fasi, in modo che la lagrangiana rimanga degenere anche con il gauge-fixing convenzionale. Questa difficoltà viene risolta in questa tesi adottando un approccio ai sistemi vincolati dovuto a Dirac.
Allo scopo di mettere in evidenza le similitudini fra le due teorie libere, la loro analisi viene svolta in parallelo.
Il lavoro inizia nel secondo capitolo con una presentazione delle due teorie a livello classico che evidenzia il tipo di eccitazione e di propagazione che le caratterizza ed il tipo di vincoli che contengono. Viene poi affrontato nel terzo capitolo il problema delle teorie vincolate e esposta la procedura da seguire per impostare un formalismo canonico per teorie con lagrangiane degeneri, quali quelle delle due teorie prese in esame; ripercorrendo la formulazione hamiltoniana avendo cura di considerare i vincoli mediante il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, vengono determinate le generalizzazioni necessarie a contemplare anche il caso di lagrangiane degeneri e viene mostrato come queste si possano riassumere in una generalizzazione delle parentesi di Poisson. Il quarto capitolo è dedicato al problema delle lagrangiane contenenti derivate di ordine superiore, quali quella della teoria gravitazionale esaminata. Viene fatto vedere come possa essere generalizzata la trasformazione di Legendre su cui si basa la decomposizione hamiltoniana della dinamica aumentando il numero di variabili e generalizzando la definizione di momento coniugato; vengono poi derivati i principali risultati riguardanti le simmetrie e le quantità conservate. Nel quinto capitolo

[3] L'integrale in (1.2) può essere scritto in una forma indipendente dalla metrica in termini della spin connection $\omega_\mu{}^{ab}$ secondo la

$$\int d^3x \mathcal{E}^{\mu\lambda\nu} \left(R_{\mu\lambda ab} \omega_\nu{}^{ab} + \frac{2}{3} \omega_{\mu b}{}^c \omega_{\lambda c}{}^a \omega_{\nu a}{}^b \right) \ ,$$

dove

$$R_{\mu\nu ab} = \partial_\mu \omega_{\nu ab} + \omega_{\mu a}{}^c \omega_{\nu cb} - (\mu \leftrightarrow \nu) \ .$$

viene affrontato il problema della realizzazione dell'algebra di una teoria di campo quantistica. Si inizia con un breve excursus sulle soluzioni classiche e quantistiche, mostrando in particolare come la conoscenza delle funzioni a due punti sia subordinata alla risoluzione di un problema di Cauchy, individuato dall'equazione del moto e dalle parentesi canoniche, e sufficiente alla determinazione delle soluzioni della teoria. Viene poi presentato un metodo generale per la costruzione dello spazio degli stati e la definizione dell'azione degli operatori di campo in esso, basato su una particolare funzione a due punti, la funzione di Wightman; allo scopo di garantire la regolarità dell'analisi funzionale nelle condizioni di convergenza infrarossa precaria che caratterizzano le teorie tridimensionali, vengono fatte alcune precisazioni in materia di distribuzioni, facendo vedere in particolare come possa essere definita rigorosamente l'azione degli operatori con l'introduzione di funzioni di test. Viene infine mostrato come si possa eseguire un'espansione in modi normali e definire degli operatori di creazione ed annichilazione per gli stati fisici in modo sistematico, analizzando il problema agli autovalori relativo alla funzione a due punti che entra nella definizione del prodotto scalare. Nel sesto capitolo viene impostata la quantizzazione della gravità linearizzata e dell'elettrodinamica topologicamente massive e determinato in entrambi i casi il problema di Cauchy relativo alle funzioni a due punti. L'elettrodinamica viene quantizzata nella gauge di Lorentz secondo la procedura canonica convenzionale, e il problema dei vincoli viene risolto con un gauge-fixing convenzionale. Analogamente, la gravità viene quantizzata nella gauge di Landau, sempre secondo la procedura canonica convenzionale; in questo caso, il problema dei vincoli viene risolto operando un gauge-fixing convenzionale e applicando i risultati derivati nei capitoli iniziali. Nel settimo capitolo vengono risolti i problemi di Cauchy per le funzioni a due punti; in particolare, dalla determinazione dei propagatori si conclude che in entrambe le teorie la propagazione è massiva. Nell'ottavo capitolo vengono realizzate esplicitamente le algebre delle due teorie secondo lo schema presentato nel quinto capitolo e determinati gli stati fisici, nonché i relativi operatori di creazione ed annichilazione, mostrando che entrambe le teorie contengono una sola eccitazione fisica massiva. Nel nono capitolo vengono usate le espansioni trovate nell'ottavo capitolo per verificare l'algebra di Poincaré e determinare lo spin delle eccitazioni fisiche analizzando lo scalare di Pauli-Lubansky. Si conclude che l'eccitazione della gravità ha spin ± 2 mentre quella dell'elettrodinamica ha spin ± 1 , i segni dipendendo dal segno del coefficiente del termine topologico; inoltre, viene mostrato che eventuali divergenze e anomalie infrarosse compaiono solo come conseguenza di una definizione non regolare dei campi. Infine, nel decimo capitolo, viene evidenziato il collegamento esistente fra il modo di procedere del presente lavoro e quello usato in letteratura [15], evidenziando il punto ove compaiono le eventuali ambiguità infrarosse.

Capitolo 2

Teorie tridimensionali topologicamente massive

Questo capitolo è dedicato alle versioni tridimensionali topologicamente massive dell'elettrodinamica e della gravità. Vengono impostate le teorie libere ed interagenti e determinate alcune loro caratteristiche fondamentali [15].

2.1 Elettrodinamica

La teoria viene costruita aggiungendo alla lagrangiana dell'elettrodinamica convenzionale un termine di massa di Chern-Simons. Il campo che descrive la teoria è il potenziale elettromagnetico A^μ e la sua dinamica è determinata da una versione modificata delle equazioni di Maxwell.
La teoria convenzionale è non banale, per cui ci si aspetta una alterazione dolce della dinamica; in particolare, nel limite in cui tende a zero il coefficiente del termine di massa devono essere ripristinati a tutti i livelli i risultati convenzionali.
Il tensore di campo è

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \ . \tag{2.1}$$

Il suo vettore duale

$$F^\mu = \frac{1}{2}\mathcal{E}^{\mu\alpha\beta}F_{\alpha\beta} \tag{2.2}$$

è conservato

$$\partial_\mu F^\mu = 0 \ . \tag{2.3}$$

Nella teoria convenzionale, le equazioni del moto sono quelle di Maxwell

$$\Box A^\mu - \partial^\mu \partial_\nu A^\nu = eJ^\mu \ . \tag{2.4}$$

La sorgente J^μ è una corrente e deve essere conservata per consistenza

$$\partial_\mu J^\mu = 0 \ , \tag{2.5}$$

mentre e è una costante di accoppiamento con dimensioni $[m]^{\frac{1}{2}}$.
La (2.4) si può riscrivere in termini del tensore di campo

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = eJ^\nu \tag{2.6}$$

o del suo duale

$$\partial^\mu F^\nu - \partial^\nu F^\mu = e\mathcal{E}^{\mu\nu\alpha} J_\alpha \ . \tag{2.7}$$

Le equazioni del moto e il campo fisico $F^{\mu\nu}$ sono invarianti rispetto alla trasformazione di gauge

$$\delta A^\mu = \partial^\mu \phi \ . \tag{2.8}$$

Per risolvere la dinamica è necessario eliminare l'arbitrarietà di gauge fissando una condizione sul potenziale A^μ. È facile vedere che la (2.8) permette di imporre la condizione di Lorentz

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \ . \tag{2.9}$$

Le equazioni del moto si riducono allora a

$$\Box A^\mu = eJ^\mu \ . \tag{2.10}$$

Ciò indica in particolare che le eccitazioni della teoria convenzionale hanno massa nulla.

2.1.1 Teoria libera

La lagrangiana libera è data dalla somma

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{MAX} + \mathcal{L}_{CS} \ , \tag{2.11}$$

con

$$\mathcal{L}_{MAX} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \ , \tag{2.12}$$

$$\mathcal{L}_{CS} = \frac{\mu}{2} \mathcal{E}^{\mu\nu\rho} \partial_\mu A_\nu A_\rho \ . \tag{2.13}$$

Le equazioni del moto di Eulero-Lagrange sono

$$\Box A^\mu - \partial^\mu \partial_\nu A^\nu + \mu \mathcal{E}^{\mu\nu\rho} \partial_\nu A_\rho = 0 \ . \tag{2.14}$$

La teoria preserva l'invarianza di gauge generata dalla trasformazione

$$\delta A^\mu = \partial^\mu \phi \ . \tag{2.15}$$

Si vede che il termine di Chern-Simons è responsabile di una violazione della simmetria per inversioni spazio-temporali, dato che contiene lo pseudotensore $\mathcal{E}^{\alpha\beta\gamma}$. Ci si aspetta quindi un solo grado di libertà fisico poiché dei tre presenti inizialmente, uno viene eliminato dall'invarianza di gauge e l'altro da un vincolo legato alla violazione di $\mathcal{P}$ e $\mathcal{T}$ [15]; infatti, agendo con $\mathcal{E}_{\alpha\beta\mu}\partial^\beta$ nella (2.14) segue il vincolo

$$\Box \left(\mathcal{E}^{\mu\alpha\beta} \partial_\alpha A_\beta - \mu A^\mu \right) = 0 \ . \tag{2.16}$$

È abbastanza facile capire quale tipo di eccitazione produca la teoria. Infatti, l'equazione del moto (2.14) si può riscrivere in termini del tensore di campo

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + \frac{\mu}{2} \mathcal{E}^{\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta} = 0 \tag{2.17}$$

o del suo vettore duale

$$\partial^\mu F^\nu - \partial^\nu F^\mu - \mu F^{\mu\nu} = 0 \ . \tag{2.18}$$

Agendo con ∂_ν in quest'ultima segue, usando la (2.17)

$$\left(\Box + \mu^2\right) F^\mu = 0 \ . \tag{2.19}$$

Questa indica che le eccitazioni hanno massa $|\mu|$.
Nella gauge di Lorentz (2.9), le equazioni del moto si riducono a

$$\Box A^\mu + \mu \mathcal{E}^{\mu\nu\rho} \partial_\nu A_\rho = 0 \ . \tag{2.20}$$

Il campo fisico ha quindi massa $|\mu|$ e soddisfa, nella gauge di Lorentz, le equazioni

$$\left(\Box + \mu^2\right) A^\mu = 0 \ , \tag{2.21}$$

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \ , \tag{2.22}$$

$$A^\mu - \frac{1}{\mu} \mathcal{E}^{\mu\alpha\beta} \partial_\alpha A_\beta = 0 \ . \tag{2.23}$$

2.1.2 Teoria interagente

È interessante analizzare l'interazione con un generico campo di materia. La lagrangiana viene costruita covariantizzando la teoria libera rispetto a trasformazioni di gauge $U(1)$ generalizzate, generate dalla trasformazione composta

$$\delta A^\mu = \partial^\mu \phi \ , \tag{2.24}$$

$$\delta \psi = e^{ie\phi} \psi \ . \tag{2.25}$$

La prescrizione è

$$\partial^\mu \to \mathcal{D}^\mu = \partial^\mu + ieA^\mu \ . \tag{2.26}$$

Il risultato è una lagrangiana di interazione della forma

$$\mathcal{L}_{INT} = -eJ_\mu A^\mu \tag{2.27}$$

ove J_μ è la corrente di Noether conservata che discende dall'invarianza per trasformazioni di fase del campo di materia ed e la costante di accoppiamento.
La lagrangiana totale del sistema in interazione è

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{GAUGE} + \mathcal{L}_{MAT} + \mathcal{L}_{INT} \ , \tag{2.28}$$

con

$$\mathcal{L}_{GAUGE} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{\mu}{2} \mathcal{E}^{\mu\nu\rho} \partial_\mu A_\nu A_\rho \ , \tag{2.29}$$

$$\mathcal{L}_{MAT} = \text{ lagrangiana libera della materia } , \tag{2.30}$$

$$\mathcal{L}_{INT} = -eJ_\mu A^\mu \ . \tag{2.31}$$

Le equazioni di Eulero-Lagrange per A^μ diventano:

$$\Box A^\mu - \partial^\mu \partial_\nu A^\nu + \mu \mathcal{E}^{\mu\nu\rho} \partial_\nu A_\rho = eJ^\mu \ . \tag{2.32}$$

Quando J^μ non dipende da A^μ, come usualmente accade, questa può essere invertita formalmente.

Agendo con ∂_μ segue l'identità

$$\partial_\mu J^\mu = 0 \ . \tag{2.33}$$

Agendo invece con $\mathcal{E}_{\alpha\beta\mu}\partial^\beta$ si ottiene il vincolo

$$\Box \left(\mathcal{E}^{\mu\alpha\beta}\partial_\alpha A_\beta - \mu A^\mu\right) = e\mathcal{E}^{\mu\alpha\beta}\partial_\alpha J_\beta \ , \tag{2.34}$$

da cui segue formalmente

$$\mathcal{E}^{\mu\alpha\beta}\partial_\alpha A_\beta = \mu A^\mu + \frac{e}{\Box}\mathcal{E}^{\mu\alpha\beta}\partial_\alpha J_\beta \ . \tag{2.35}$$

Nella gauge di Lorentz (2.9) l'equazione del moto si riduce a

$$\Box A^\mu + \mu\mathcal{E}^{\mu\nu\alpha}\partial_\nu A_\alpha = eJ^\mu \ , \tag{2.36}$$

che con l'aiuto della (2.35) fornisce

$$\left(\Box + \mu^2\right) A^\mu = e\left(\eta^{\mu\nu} + \frac{\mu}{\Box}\mathcal{E}^{\mu\nu\alpha}\partial_\alpha\right) J_\nu \ . \tag{2.37}$$

Usando il fatto J^μ è conservata, la soluzione formale nella gauge di Lorentz è quindi

$$A^\mu = \frac{e}{\Box + \mu^2}\left(\mathcal{P}^{\mu\nu} + \frac{\mu}{\Box}\mathcal{E}^{\mu\nu\alpha}\partial_\alpha\right) J_\nu \ , \tag{2.38}$$

con

$$\mathcal{P}^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - \frac{\partial^\mu\partial^\nu}{\Box} \ . \tag{2.39}$$

Come verrà mostrato, i poli a massa zero vengono cancellati in virtù della conservazione della corrente; quindi, anche la teoria interagente è caratterizzata da una propagazione puramente massiva dei campi di gauge con massa $|\mu|$. Inoltre, il propagatore nella gauge di Lorentz è

$$\tilde{S}^{\mu\nu}(p) = -\frac{i}{p^2 - \mu^2 + i\epsilon}\left(P^{\mu\nu} + i\frac{\mu}{p^2 + i\epsilon}\mathcal{E}^{\mu\nu\alpha}p_\alpha\right) \ , \tag{2.40}$$

con

$$P^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - \frac{p^\mu p^\nu}{p^2 + i\epsilon} \ , \tag{2.41}$$

come verrà verificato nel settimo capitolo.

2.2 Gravità

La teoria viene costruita anche in questo caso aggiungendo alla lagrangiana della gravità convenzionale un termine di massa di Chern-Simons. Il campo fisico è la metrica $g^{\mu\nu}$ e la sua dinamica è determinata da una versione modificata delle equazioni di Einstein.
La teoria convenzionale è banale, per cui ci si aspetta una alterazione drastica della dinamica; in particolare, non è detto in questo caso che nel limite in cui tende a zero il coefficiente del termine di massa vengano ripristinati a tutti i livelli i risultati convenzionali.
L'operatore di derivazione viene covariantizzato rispetto a trasformazioni generalizzate di coordinate, come descritto nell'appendice A, con l'introduzione dei simboli di Christoffel

$$\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\left(\partial_\mu g_{\beta\nu} + \partial_\nu g_{\beta\mu} - \partial_\beta g_{\mu\nu}\right) \ . \tag{2.42}$$

La misura di integrazione è

$$d\tau = \sqrt{g} d^3 x \ , \tag{2.43}$$

con

$$g = \det\left(g_{\mu\nu}\right) \ . \tag{2.44}$$

I tensori di Riemann e di Ricci e lo scalare di curvatura sono dati da

$$R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^{\alpha}{}_{\beta\nu} - \partial_\nu \Gamma^{\alpha}{}_{\beta\mu} + \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\xi}\Gamma^{\xi}{}_{\beta\nu} - \Gamma^{\alpha}{}_{\nu\xi}\Gamma^{\xi}{}_{\beta\mu} \ , \tag{2.45}$$

$$R^{\alpha\beta} = g_{\mu\nu} R^{\mu\alpha\upsilon\beta} \ , \tag{2.46}$$

$$R = g_{\mu\nu} R^{\mu\nu} \ , \tag{2.47}$$

e soddisfano le identità di Bianchi

$$\mathcal{D}_\rho R_{\alpha\beta\mu\nu} + \mathcal{D}_\nu R_{\alpha\beta\rho\mu} + \mathcal{D}_\mu R_{\alpha\beta\nu\rho} = 0 \ , \tag{2.48}$$

$$\mathcal{D}_\mu R - 2\mathcal{D}_\nu R^{\nu}{}_{\mu} = 0 \ . \tag{2.49}$$

Il tensore di Einstein è

$$G^{\alpha\beta} = R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} R \tag{2.50}$$

ed è conservato

$$\mathcal{D}_\mu G^{\mu\nu} = 0 \ . \tag{2.51}$$

Nella teoria convenzionale, le equazioni del moto sono quelle di Einstein

$$G^{\mu\nu} = \frac{k^2}{2} T^{\mu\nu} \ . \tag{2.52}$$

La sorgente $T^{\mu\nu}$ è un tensore energia-impulso e deve essere conservato per consistenza

$$\mathcal{D}_\mu T^{\mu\nu} = 0 \ , \tag{2.53}$$

mentre k è una costante di accoppiamento di dimensioni $[m]^{-\frac{1}{2}}$.
Contraendo la (2.52) segue il vincolo

$$R = -k^2 T \ , \tag{2.54}$$

con

$$T = g_{\mu\nu} T^{\mu\nu} \ . \tag{2.55}$$

Per capire il motivo dell'assenza di dinamica nella gravità tridimensionale libera, si osservi che il tensore di Riemann può sempre essere decomposto in una prima parte esprimibile in termini delle sole contrazioni di Ricci ed una seconda costituita da un tensore, detto di Weyl, che non dipende da queste ultime. Indicando nel caso generale con n la dimensione dello spazio-tempo, risulta per $n \geq 3$ [14]

$$\begin{aligned} R^{\alpha\beta\mu\nu} = & \frac{1}{n-2}\left(g^{\alpha\mu}R^{\beta\nu} + g^{\beta\nu}R^{\alpha\mu} - g^{\alpha\nu}R^{\beta\mu} - g^{\beta\mu}R^{\alpha\nu}\right) \\ & - \frac{R}{(n-1)(n-2)}\left(g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu} - g^{\alpha\nu}g^{\beta\mu}\right) \\ & + C^{\alpha\beta\mu\nu} \ . \end{aligned} \tag{2.56}$$

Il tensore di Weyl ha poi la proprietà di essere invariante rispetto a trasformazioni conformi della metrica

$$\delta g^{\mu\nu} = \rho g^{\mu\nu} \ . \tag{2.57}$$

È possibile dimostrare che affinché lo spazio vuoto sia piatto è necessario e sufficiente l'annullarsi del tensore di Weyl. Nel caso tridimensionale, un semplice conteggio dei gradi di libertà mostra che il tensore di Riemann e la sua contrazione di Ricci hanno entrambi sei componenti indipendenti e devono quindi essere completamente equivalenti; questo implica che il tensore di Weyl sia nullo. Infatti, si ha

$$R^{\alpha\beta\mu\nu} = g^{\alpha\mu}\tilde{R}^{\beta\nu} + g^{\beta\nu}\tilde{R}^{\alpha\mu} - g^{\alpha\nu}\tilde{R}^{\beta\mu} - g^{\beta\mu}\tilde{R}^{\alpha\nu} \ , \tag{2.58}$$

con

$$\tilde{R}^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - \frac{1}{4}g^{\mu\nu}R \ . \tag{2.59}$$

In termini del tensore di Einstein, la (2.58) si scrive poi

$$R^{\alpha\beta\mu\nu} = -\mathcal{E}^{\alpha\beta\rho}\mathcal{E}^{\mu\nu\tau}G_{\rho\tau} \ . \tag{2.60}$$

Nel caso libero, si vede che le equazioni del moto

$$G^{\alpha\beta} = 0 \tag{2.61}$$

implicano

$$R^{\alpha\beta\mu\nu} = 0 \ , \tag{2.62}$$

dimostrando cosi che lo spazio-tempo è effettivamente piatto in assenza di materia.
In presenza di materia, invece, l'annullarsi del tensore di Weyl implica che la curvatura dello spazio-tempo sia determinata localmente dalla materia, poiché il tensore di Riemann risulta essere proporzionale al tensore energia-impulso della sorgente. Questo dimostra in particolare l'assenza di dinamica nella teoria convenzionale.
Tutte le quantità fisiche della teoria sono covarianti rispetto a trasformazioni generalizzate di coordinate; questo rappresenta un'invarianza rispetto alla trasformazione

$$\delta x^{\mu} = \xi^{\mu} \ . \tag{2.63}$$

La teoria completa è difficile da trattare poiché fortemente non lineare. Tuttavia, l'interazione gravitazionale ha una costante di accoppiamento talmente piccola che un'approssimazione lineare rappresenta nella maggior parte dei casi una ottima stima, rendendo cosi possibile un approccio molto più semplice. Inoltre, lo studio della teoria linearizzata è fondamentale per la determinazione del contenuto fisico della teoria.
Nell'approssimazione di campo debole, lo spazio-tempo subisce una curvatura molto piccola ed è possibile trovare un sistema di coordinate nel quale la metrica acquisti solo una piccola deviazione rispetto a quella di Minkowski

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + kh^{\mu\nu} \ . \tag{2.64}$$

La costante di accoppiamento compare nella (2.64) allo scopo di isolare l'ordine di grandezza della deviazione dallo spazio-tempo piatto. Come conseguenza dell'invarianza di cui sopra, il sistema di riferimento in cui vale la (2.64) non è unico. Infatti, operando una trasformazione generalizzata delle coordinate di ordine k

$$\delta x^\mu = k\xi^\mu \ , \tag{2.65}$$

la metrica diventa, al primo ordine in k

$$\begin{aligned}\hat{g}^{\mu\nu} &= \frac{\partial x^\mu}{\partial \hat{x}^\alpha}\frac{\partial x^\nu}{\partial \hat{x}^\beta} g^{\alpha\beta} \\ &= \eta^{\mu\nu} + k\left(h^{\mu\nu} - \partial^\mu \xi^\nu - \partial^\nu \xi^\mu\right) \\ &= \eta^{\mu\nu} + k\hat{h}^{\mu\nu} \ ,\end{aligned} \tag{2.66}$$

mantenendo quindi la stessa forma con

$$\hat{h}^{\mu\nu} = h^{\mu\nu} - \partial^\mu \xi^\nu - \partial^\nu \xi^\mu \ . \tag{2.67}$$

Al primo ordine in k si trova

$$g = 1 \ , \tag{2.68}$$

$$\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu} = \frac{k}{2}\left(\partial_\mu h^\alpha{}_\nu + \partial_\nu h^\alpha{}_\mu - \partial^\alpha h_{\mu\nu}\right) \ , \tag{2.69}$$

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{k}{2}\left(\partial_\mu\partial_\beta h_{\alpha\nu} - \partial_\nu\partial_\beta h_{\alpha\mu} + \partial_\nu\partial_\alpha h_{\beta\mu} - \partial_\mu\partial_\alpha h_{\beta\nu}\right) \ , \tag{2.70}$$

$$R_{\mu\nu} = \frac{k}{2}\left(\partial_\mu\partial^\alpha h_{\alpha\nu} + \partial_\nu\partial^\alpha h_{\alpha\mu} - \partial_\mu\partial_\nu h - \Box h_{\mu\nu}\right) \ , \tag{2.71}$$

$$R = k\left(\partial_\alpha\partial_\beta h^{\alpha\beta} - \Box h\right) \ , \tag{2.72}$$

$$G_{\mu\nu} = \frac{k}{2}\left[\partial_\mu\partial^\alpha h_{\alpha\nu} + \partial_\nu\partial^\alpha h_{\alpha\mu} - \partial_\mu\partial_\nu h - \Box h_{\mu\nu} + \eta_{\mu\nu}\left(\Box h - \partial_\alpha\partial_\beta h^{\alpha\beta}\right)\right] \ , \tag{2.73}$$

$$\tilde{R}_{\mu\nu} = \frac{k}{2}\left[\partial_\mu\partial^\alpha h_{\alpha\nu} + \partial_\nu\partial^\alpha h_{\alpha\mu} - \partial_\mu\partial_\nu h - \Box h_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\left(\Box h - \partial_\alpha\partial_\beta h^{\alpha\beta}\right)\right] \ , \tag{2.74}$$

con

$$h = \eta^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta} \ . \tag{2.75}$$

È facile verificare che tutti i tensori che derivano da quello di Riemann, ovvero quelli rilevanti fisicamente nonché le equazioni del moto, sono invarianti rispetto alla trasformazione (2.65), mentre il simbolo di Christoffel e la deviazione dalla metrica di Minkowski subiscono una variazione

$$\delta h^{\mu\nu} = -\partial^\mu \xi^\nu - \partial^\nu \xi^\mu \ , \tag{2.76}$$

$$\delta h = -2\partial_\alpha \xi^\alpha \ , \tag{2.77}$$

$$\delta \Gamma^\alpha{}_{\mu\nu} = k\partial_\mu\partial_\nu \xi^\alpha \ . \tag{2.78}$$

La (2.76) rappresenta quindi una invarianza di gauge abeliana.
Si osservi poi che, al primo ordine in k, l'innalzamento e l'abbassamento degli indici avviene con la metrica di Minkowski e la derivata covariante è uguale a quella usuale, dato che tutti i tensori che descrivono la teoria sono nulli all'ordine zero in k.

Per risolvere la dinamica è necessario eliminare l'arbitrarietà di gauge fissando una condizione sulla deviazione $h^{\mu\nu}$. È facile vedere che la (2.76) permette di imporre la condizione armonica

$$\partial_\mu \left(h^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu} h \right) = 0 \ . \tag{2.79}$$

Usando il vincolo (2.54) le equazioni del moto si riducono allora a

$$\Box h^{\mu\nu} = -k \left(T^{\mu\nu} - \eta^{\mu\nu} T \right) \ . \tag{2.80}$$

Ciò indica in particolare che le eventuali eccitazioni della teoria convenzionale hanno massa nulla.

2.2.1 Teoria libera

La lagrangiana libera è data dalla somma

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{EIN} + \mathcal{L}_{CS} \ , \tag{2.81}$$

con

$$\mathcal{L}_{EIN} = \frac{1}{k^2}\sqrt{g} R \ , \tag{2.82}$$

$$\mathcal{L}_{CS} = \frac{1}{2k^2\mu}\mathcal{E}^{\mu\lambda\nu}\Gamma^\rho{}_{\lambda\sigma}\left(\partial_\mu \Gamma^\sigma{}_{\nu\rho} + \frac{2}{3}\Gamma^\sigma{}_{\mu\xi}\Gamma^\xi{}_{\nu\rho} \right) \ . \tag{2.83}$$

Le equazioni del moto di Eulero-Lagrange sono

$$\mathcal{G}^{\mu\nu} = G^{\mu\nu} - \frac{1}{\mu}C^{\mu\nu} = 0 \ , \tag{2.84}$$

con

$$C^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{g}}\mathcal{E}^{\mu\alpha\beta}\mathcal{D}_\alpha \tilde{R}_\beta{}^\nu \ . \tag{2.85}$$

Il tensore $C^{\mu\nu}$ è simmetrico

$$\mathcal{E}_{\alpha\mu\nu}C^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{g}}\mathcal{D}_\beta G^\beta{}_\alpha = 0 \tag{2.86}$$

e conservato

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\mu C^{\mu\nu} &= \frac{1}{2\sqrt{g}}\mathcal{E}^{\mu\alpha\beta}\left[\mathcal{D}_\mu, \mathcal{D}_\alpha\right] G_\beta{}^\nu \\ &= \frac{1}{2\sqrt{g}}\mathcal{E}^{\mu\alpha\beta}\left(R_{\mu\alpha\beta\rho}G^{\rho\nu} + R_{\mu\alpha\rho}{}^\nu G_\beta{}^\rho \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{g}}\mathcal{E}^\nu{}_{\rho\sigma}G^{\beta\sigma}G_\beta{}^\rho \\ &= 0 \ , \end{aligned} \tag{2.87}$$

sicché anche $\mathcal{G}^{\mu\nu}$ risulta simmetrico e conservato ed ha quindi le stesse proprietà del tensore di Einstein $G^{\mu\nu}$.
Contraendo la (2.84) segue il vincolo

$$R = 0 \ . \tag{2.88}$$

La teoria rimane covariante rispetto a trasformazioni generalizzate delle coordinate generate dalla trasformazione

$$\delta x^\mu = \xi^\mu \ . \tag{2.89}$$

È facile capire che la teoria acquista dinamica; infatti, usando la (2.60) e le equazioni del moto (2.84), si vede che il tensore di Riemann non è più nullo, ma si può scrivere

$$\begin{aligned} R^{\alpha\beta\mu\nu} &= -\mathcal{E}^{\alpha\beta\rho}\mathcal{E}^{\mu\nu\tau}G_{\rho\tau} \\ &= -\mathcal{E}^{\alpha\beta\rho}\mathcal{E}^{\mu\nu\tau}\left(\mathcal{G}_{\rho\tau}\right) - \frac{1}{\mu}\mathcal{E}^{\alpha\beta\rho}\mathcal{E}^{\mu\nu\tau}C_{\rho\tau} \ . \end{aligned} \tag{2.90}$$

Il primo pezzo corrisponde ad una parte di Ricci ed è nullo in virtù delle equazioni del moto, mentre il secondo pezzo ha tutte le caratteristiche di una parte di Weyl

$$C^{\alpha\beta\mu\nu} = -\frac{1}{\mu}\mathcal{E}^{\alpha\beta\rho}\mathcal{E}^{\mu\nu\tau}C_{\rho\tau} \ , \tag{2.91}$$

dato che esso risulta essere invariante rispetto a trasformazioni conformi della metrica

$$\delta g^{\mu\nu} = \rho g^{\mu\nu} \ . \tag{2.92}$$

Si vede poi che il termine di Chern-Simons è responsabile di una violazione della simmetria per inversioni spazio-temporali, dato che contiene lo pseudotensore $\mathcal{E}^{\alpha\beta\gamma}$. Ci si aspetta quindi un solo grado di libertà fisico poiché dei sei presenti inizialmente, tre vengono eliminati dall'invarianza di gauge, uno dal vincolo (2.88) e un altro da un vincolo legato alla violazione di $\mathcal{P}$ e $\mathcal{T}$ [15]; infatti, agendo con $\mathcal{E}_{\alpha\rho\mu}\mathcal{D}^\rho$ nella (2.84) e usando la (2.88), segue il vincolo

$$\mathcal{E}_{\alpha\rho\mu}\mathcal{D}^\rho R^{\mu\nu} + \frac{1}{\mu\sqrt{g}}\mathcal{D}_\rho\mathcal{D}^\rho R_\alpha{}^\nu = 0 \ . \tag{2.93}$$

È abbastanza facile capire quale tipo di eccitazione produca la teoria. Infatti, tenendo conto della (2.88), l'equazione del moto (2.84) si può riscrivere come

$$\mathcal{O}^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta}\left(\mu\right) R^{\alpha\beta} = 0 \ , \tag{2.94}$$

con

$$\mathcal{O}^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta}\left(\mu\right) = \delta^\mu_\alpha\delta^\nu_\beta - \frac{1}{\mu\sqrt{g}}\mathcal{E}^{\mu\rho}{}_\alpha\delta^\nu_\beta\mathcal{D}_\rho \ . \tag{2.95}$$

Agendo con $\mathcal{O}^{\lambda\sigma}{}_{\mu\nu}\left(-\mu\right)$ nella (2.94) segue

$$\left(\mathcal{D}_\alpha\mathcal{D}^\alpha + \mu^2\right) R^{\mu\nu} = -g^{\mu\nu}R_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta} + 3R^{\mu\alpha}R^\nu{}_\alpha \ . \tag{2.96}$$

Questa indica che le eccitazioni autointeragiscono e hanno massa zero o $|\mu|$.
Nell'approssimazione di campo debole (2.64), la lagrangiana si può prendere come

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{EIN} + \mathcal{L}_{CS} \ , \tag{2.97}$$

con

$$\mathcal{L}_{EIN} = -\frac{1}{2}h_{\mu\nu}G^{\mu\nu} \ , \tag{2.98}$$

$$\mathcal{L}_{CS} = \frac{1}{2\mu}\mathcal{E}_{\alpha\mu\beta}G^{\alpha\nu}\partial^{\mu}h_{\nu}{}^{\beta} \ . \tag{2.99}$$

Essa produce equazioni di Eulero-Lagrange che sono l'approssimazione al primo ordine in k della (2.84) e si scrivono esplicitamente

$$\begin{aligned}&\Big\{\Box h^{\mu\nu} - \partial^{\mu}\partial_{\alpha}h^{\alpha\nu} - \partial^{\nu}\partial_{\alpha}h^{\alpha\mu} + \partial^{\mu}\partial^{\nu}h - \eta^{\mu\nu}\left(\Box h - \partial_{\alpha}\partial_{\beta}h^{\alpha\beta}\right)\\ &-\frac{1}{2\mu}\left[\mathcal{E}^{\mu\alpha\beta}\partial_{\alpha}\left(\Box h_{\beta}{}^{\nu} - \partial^{\nu}\partial_{\lambda}h^{\lambda}{}_{\beta}\right) + \mathcal{E}^{\nu\alpha\beta}\partial_{\alpha}\left(\Box h_{\beta}{}^{\mu} - \partial^{\mu}\partial_{\lambda}h^{\lambda}{}_{\beta}\right)\right]\Big\}\\ &= 0 \ .\end{aligned} \tag{2.100}$$

Usando il vincolo (2.88) rimane

$$\begin{aligned}&\{\Box h^{\mu\nu} - \partial^{\mu}\partial_{\alpha}h^{\alpha\nu} - \partial^{\nu}\partial_{\alpha}h^{\alpha\mu} + \partial^{\mu}\partial^{\nu}h\\ &-\frac{1}{2\mu}\left[\mathcal{E}^{\mu\alpha\beta}\partial_{\alpha}\left(\Box h_{\beta}{}^{\nu} - \partial^{\nu}\partial_{\lambda}h^{\lambda}{}_{\beta}\right) + \mathcal{E}^{\nu\alpha\beta}\partial_{\alpha}\left(\Box h_{\beta}{}^{\mu} - \partial^{\mu}\partial_{\lambda}h^{\lambda}{}_{\beta}\right)\right]\Big\}\\ &= 0 \ .\end{aligned} \tag{2.101}$$

I vincoli (2.88) e (2.93) diventano

$$\Box h - \partial_{\alpha}\partial_{\beta}h^{\alpha\beta} = 0 \ , \tag{2.102}$$

$$\Box\left(\Box h_{\alpha}{}^{\nu} - \partial_{\alpha}\partial_{\tau}h^{\tau\nu} - \partial^{\nu}\partial_{\tau}h^{\tau}{}_{\alpha} + \partial_{\alpha}\partial^{\nu}h\right) + \mu\mathcal{E}_{\alpha\rho\mu}\partial^{\rho}\left(\Box h^{\mu\nu} - \partial^{\nu}\partial_{\tau}h^{\tau\mu}\right) = 0 \ . \tag{2.103}$$

La teoria preserva l'invarianza di gauge generata dalla trasformazione

$$\delta h^{\mu\nu} = -\partial^{\mu}\xi^{\nu} - \partial^{\nu}\xi^{\mu} \ . \tag{2.104}$$

La (2.96) diventa poi

$$\left(\Box + \mu^2\right)R^{\mu\nu} = 0 \ . \tag{2.105}$$

Questa indica che le eccitazioni della teoria linearizzata hanno massa zero o $|\mu|$ e non autointeragiscono al primo ordine in k.
Nella gauge di Landau

$$\partial_{\mu}h^{\mu\nu} = 0 \ , \tag{2.106}$$

le equazioni del moto si riducono a

$$\Box h^{\mu\nu} + \partial^{\mu}\partial^{\nu}h - \frac{1}{2\mu}\left(\mathcal{E}^{\mu\alpha\beta}\partial_{\alpha}\Box h_{\beta}{}^{\nu} + \mathcal{E}^{\nu\alpha\beta}\partial_{\alpha}\Box h_{\beta}{}^{\mu}\right) = 0 \ . \tag{2.107}$$

Le eccitazioni a massa zero della teoria sono reminiscenti della teoria di Einstein e sono triviali. Il campo fisico ha quindi massa $|\mu|$ e soddisfa nella gauge di Landau le equazioni

$$\left(\Box + \mu^2\right)h^{\mu\nu} = 0 \ , \tag{2.108}$$

$$\partial_{\mu}h^{\mu\nu} = 0 \ , \tag{2.109}$$

$$h = 0 \ , \tag{2.110}$$

$$h^{\mu\nu} - \frac{1}{2\mu}\left(\mathcal{E}^{\mu\alpha\beta}\partial_{\alpha}h_{\beta}{}^{\nu} + \mathcal{E}^{\nu\alpha\beta}\partial_{\alpha}h_{\beta}{}^{\mu}\right) = 0 \ . \tag{2.111}$$

2.2.2 Teoria interagente

È interessante analizzare l'interazione con un generico campo di materia. La lagrangiana viene costruita covariantizzando la teoria libera rispetto a trasformazioni di gauge $SO(2,1)$ generalizzate, generate dalla trasformazione composta

$$\delta x^{\mu} = \xi^{\mu} \ , \tag{2.112}$$

$$\delta \psi = e^{\frac{i}{2} w_{\alpha\beta} \Sigma^{\alpha\beta}} \psi \ , \tag{2.113}$$

ove $w_{\alpha\beta}$ indica il generatore della parte di Lorentz della trasformazione (2.112)

$$w^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left(\partial^{\nu} \xi^{\mu} - \partial^{\mu} \xi^{\nu} \right) \ , \tag{2.114}$$

e $\Sigma^{\alpha\beta}$ è la matrice di spin del campo di materia.
Purtroppo, non esiste un modo semplice e generale per determinare l'accoppiamento; tuttavia, nel caso semplice di campi di materia tensoriali, la prescrizione è

$$\eta^{\mu\nu} \rightarrow g^{\mu\nu} \ , \tag{2.115}$$

$$\partial^{\mu} \rightarrow \mathcal{D}^{\mu} \ , \tag{2.116}$$

$$d^3x \rightarrow \sqrt{g} d^3x \ . \tag{2.117}$$

Il risultato è comunque una lagrangiana di interazione che si può scrivere formalmente nella forma

$$\mathcal{L}_{INT} = \frac{1}{2} \sqrt{g} T_{\mu\nu} \left(g^{\mu\nu} - \eta^{\mu\nu} \right) \ , \tag{2.118}$$

ove $T_{\mu\nu}$ è la corrente di Noether conservata che discende dalla invarianza per traslazioni spazio-temporali del campo di materia.
La lagrangiana totale del sistema in interazione è, sempre formalmente

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{GAUGE} + \mathcal{L}_{MAT} + \mathcal{L}_{INT} \ , \tag{2.119}$$

con

$$\mathcal{L}_{GAUGE} = \frac{1}{k^2} \sqrt{g} R + \frac{1}{2k^2 \mu} \mathcal{E}^{\mu\lambda\nu} \Gamma^{\rho}{}_{\lambda\sigma} \left(\partial_{\mu} \Gamma^{\sigma}{}_{\nu\rho} + \frac{2}{3} \Gamma^{\sigma}{}_{\mu\xi} \Gamma^{\xi}{}_{\nu\rho} \right) \ , \tag{2.120}$$

$$\mathcal{L}_{MAT} = \text{ lagrangiana libera della materia } , \tag{2.121}$$

$$\mathcal{L}_{INT} = \frac{1}{2} \sqrt{g} T_{\mu\nu} \left(g^{\mu\nu} - \eta^{\mu\nu} \right) \ . \tag{2.122}$$

Le equazioni di Eulero-Lagrange per $g^{\mu\nu}$ diventano

$$\mathcal{G}^{\mu\nu} = G^{\mu\nu} - \frac{1}{\mu} C^{\mu\nu} = \frac{k^2}{2} T^{\mu\nu} \ . \tag{2.123}$$

Agendo con $\mathcal{D}_{\mu}$ segue l'identità

$$\mathcal{D}_{\mu} T^{\mu\nu} = 0 \ . \tag{2.124}$$

Contraendo segue il vincolo

$$R = -k^2 T \ , \tag{2.125}$$

mentre agendo con $\mathcal{E}_{\alpha\rho\mu}\mathcal{D}^\rho$ si ottiene il vincolo

$$\mathcal{E}_{\alpha\rho\mu}\mathcal{D}^\rho G^{\mu\nu} + \frac{1}{\mu\sqrt{g}}\left(\mathcal{D}_\alpha\mathcal{D}^\rho\tilde{R}_\rho{}^\nu - \mathcal{D}_\rho\mathcal{D}^\rho\tilde{R}_\alpha{}^\nu\right) = \frac{k^2}{2}\mathcal{E}_{\alpha\rho\mu}\mathcal{D}^\rho T^{\mu\nu} \ . \tag{2.126}$$

Per analizzare il contenuto della teoria si può considerare l'approssimazione di campo debole (2.64). La lagrangiana totale del sistema in interazione diventa

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{GAUGE} + \mathcal{L}_{MAT} + \mathcal{L}_{INT} \ , \tag{2.127}$$

con

$$\mathcal{L}_{GAUGE} = -\frac{1}{2}h_{\mu\nu}G^{\mu\nu} + \frac{1}{2\mu}\mathcal{E}_{\alpha\mu\beta}G^{\alpha\nu}\partial^\mu h_\nu{}^\beta \ , \tag{2.128}$$

$$\mathcal{L}_{MAT} = \text{ lagrangiana libera della materia } , \tag{2.129}$$

$$\mathcal{L}_{INT} = \frac{k}{2}T_{\mu\nu}h^{\mu\nu} \ . \tag{2.130}$$

Le equazioni di Eulero-Lagrange per $h^{\mu\nu}$ sono esplicitamente

$$\begin{aligned}&\Big\{\Box h^{\mu\nu} - \partial^\mu\partial_\alpha h^{\alpha\nu} - \partial^\nu\partial_\alpha h^{\alpha\mu} + \partial^\mu\partial^\nu h - \eta^{\mu\nu}\left(\Box h - \partial_\alpha\partial_\beta h^{\alpha\beta}\right)\\ &-\frac{1}{2\mu}\left[\mathcal{E}^{\mu\alpha\beta}\partial_\alpha\left(\Box h_\beta{}^\nu - \partial^\nu\partial_\lambda h^\lambda{}_\beta\right) + \mathcal{E}^{\nu\alpha\beta}\partial_\alpha\left(\Box h_\beta{}^\mu - \partial^\mu\partial_\lambda h^\lambda{}_\beta\right)\right]\Big\}\\ &\quad = -kT^{\mu\nu} \ .\end{aligned} \tag{2.131}$$

Quando $T^{\mu\nu}$ non dipende da $h^{\mu\nu}$, come usualmente succede, questa può essere invertita formalmente.
L'identità (2.124) si riduce a

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0 \ , \tag{2.132}$$

mentre i vincoli (2.125) e (2.126) diventano

$$\Box h - \partial_\alpha\partial_\beta h^{\alpha\beta} = kT \ , \tag{2.133}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{\alpha\rho\mu}\partial^\rho\left(\Box h^{\mu\nu} - \partial^\nu\partial_\tau h^{\tau\mu}\right) = &-\frac{1}{\mu}\Box\left(\Box h_\alpha{}^\nu - \partial_\alpha\partial_\tau h^{\tau\nu} - \partial^\nu\partial_\tau h^\tau{}_\alpha + \partial_\alpha\partial^\nu h\right)\\ &-\frac{k}{2}\left[2\mathcal{E}_{\alpha\rho\mu}\partial^\rho\left(T^{\mu\nu} - \eta^{\mu\nu}T\right) - \frac{1}{\mu}\left(\delta^\nu_\alpha\Box + \partial_\alpha\partial^\nu\right)T\right] \ .\end{aligned} \tag{2.134}$$

Usando queste due, l'equazione del moto (2.131) diventa

$$\begin{aligned}&\left(1 + \frac{\Box}{\mu^2}\right)\left(\Box h^{\mu\nu} - \partial^\mu\partial_\alpha h^{\alpha\nu} - \partial^\nu\partial_\alpha h^{\alpha\mu} + \partial^\mu\partial^\nu h\right) =\\ &= -\frac{k}{2}\left[\frac{1}{\mu}\left(\mathcal{E}^{\mu\alpha\beta}\partial_\alpha T_\beta{}^\nu + \mathcal{E}^{\nu\alpha\beta}\partial_\alpha T_\beta{}^\mu\right)\right.\\ &\qquad \left. +2\left(T^{\mu\nu} - \eta^{\mu\nu}T\right) - \frac{1}{\mu^2}\left(\eta^{\mu\nu}\Box + \partial^\mu\partial^\nu\right)T\right] \ .\end{aligned} \tag{2.135}$$

Nella gauge di Landau

$$\partial_\mu h^{\mu\nu} = 0 \ , \tag{2.136}$$

questa si riduce a

$$\left(\Box+\mu^2\right)\left(\Box h^{\mu\nu}+\partial^\mu\partial^\nu h\right)=-\frac{k}{2}\left[\mu\left(\mathcal{E}^{\mu\alpha\beta}\partial_\alpha T_\beta{}^\nu+\mathcal{E}^{\nu\alpha\beta}\partial_\alpha T_\beta{}^\mu\right)\right.$$
$$\left.+2\mu^2\left(T^{\mu\nu}-\eta^{\mu\nu}T\right)-\left(\eta^{\mu\nu}\Box+\partial^\mu\partial^\nu\right)T\right]\ , \tag{2.137}$$

mentre la (2.133) fornisce formalmente

$$h=\frac{k}{\Box}T\ . \tag{2.138}$$

Usando quest'ultima nell'equazione del moto (2.137) si ottiene infine

$$\left(\Box+\mu^2\right)\Box h^{\mu\nu}=-\frac{k}{2}\left\{\mu\left(\mathcal{E}^{\mu\rho\alpha}\partial_\rho\eta^{\beta\nu}+\mathcal{E}^{\nu\rho\alpha}\partial_\rho\eta^{\beta\mu}\right)+2\mu^2\left[\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}-\left(\eta^{\mu\nu}-\frac{\partial^\mu\partial^\nu}{\Box}\right)\eta^{\alpha\beta}\right]\right.$$
$$\left.-\left(\eta^{\mu\nu}\Box-\partial^\mu\partial^\nu\right)\eta^{\alpha\beta}\right\}T_{\alpha\beta}\ , \tag{2.139}$$

la quale, notando che

$$\frac{\mu^2}{\Box\left(\Box+\mu^2\right)}=\frac{1}{\Box}-\frac{1}{\Box+\mu^2}\ , \tag{2.140}$$

fornisce

$$h^{\mu\nu}=-\frac{k}{2}\left\{\frac{1}{\Box}\left[2\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}-2\left(\eta^{\mu\nu}-\frac{\partial^\mu\partial^\nu}{\Box}\right)\eta^{\alpha\beta}\right]\right.$$
$$+\frac{1}{\Box+\mu^2}\left[\frac{\mu}{\Box}\left(\mathcal{E}^{\mu\rho\alpha}\partial_\rho\eta^{\beta\nu}+\mathcal{E}^{\nu\rho\alpha}\partial_\rho\eta^{\beta\mu}\right)\right. \tag{2.141}$$
$$\left.\left.+\left(\eta^{\mu\nu}-\frac{\partial^\mu\partial^\nu}{\Box}\right)\eta^{\alpha\beta}-2\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}\right]\right\}T_{\alpha\beta}\ .$$

Usando il fatto $T^{\mu\nu}$ è conservato, la soluzione formale nella gauge di Landau è quindi

$$h^{\mu\nu}=\frac{k}{2}\left\{\frac{1}{\Box}\left[2\mathcal{P}^{\mu\nu}\mathcal{P}^{\alpha\beta}-\mathcal{P}^{\mu\alpha}\mathcal{P}^{\nu\beta}-\mathcal{P}^{\mu\beta}\mathcal{P}^{\nu\alpha}\right]\right.$$
$$+\frac{1}{\Box+\mu^2}\left[\mathcal{P}^{\mu\alpha}\mathcal{P}^{\nu\beta}+\mathcal{P}^{\mu\alpha}\mathcal{P}^{\nu\beta}-\mathcal{P}^{\mu\nu}\mathcal{P}^{\alpha\beta}\right.$$
$$\left.\left.+\frac{\mu}{2}\frac{\partial_\sigma}{\Box}\left(\mathcal{E}^{\mu\alpha\sigma}\mathcal{P}^{\beta\nu}+\mathcal{E}^{\nu\alpha\sigma}\mathcal{P}^{\beta\mu}+\mathcal{E}^{\mu\beta\sigma}\mathcal{P}^{\alpha\nu}+\mathcal{E}^{\nu\beta\sigma}\mathcal{P}^{\alpha\mu}\right)\right]\right\}T_{\alpha\beta}\ , \tag{2.142}$$

con

$$\mathcal{P}^{\mu\nu}=\eta^{\mu\nu}-\frac{\partial^\mu\partial^\nu}{\Box}\ . \tag{2.143}$$

Come verrà mostrato, i poli a massa zero vengono cancellati in virtù della conservazione del tensore energia-impulso; quindi, anche la teoria interagente è caratterizzata da una propagazione puramente massiva dei campi di gauge con massa $|\mu|$. Inoltre, il propagatore nella gauge di Landau è

$$\tilde{S}^{\mu\nu\alpha\beta}(p) = -\frac{i}{p^2+i\epsilon}\left[\left(P^{\mu\alpha}P^{\nu\beta}+P^{\mu\beta}P^{\nu\alpha}\right)-2P^{\mu\nu}P^{\alpha\beta}\right]$$
$$-\frac{i}{p^2-\mu^2+i\epsilon}\left[P^{\mu\nu}P^{\alpha\beta}-\left(P^{\mu\alpha}P^{\nu\beta}+P^{\mu\alpha}P^{\nu\beta}\right)\right.$$
$$\left.-i\frac{\mu}{2}\frac{p_\sigma}{p^2+i\epsilon}\left(\mathcal{E}^{\mu\alpha\sigma}P^{\beta\nu}+\mathcal{E}^{\nu\alpha\sigma}P^{\beta\mu}+\mathcal{E}^{\mu\beta\sigma}P^{\alpha\nu}+\mathcal{E}^{\nu\beta\sigma}P^{\alpha\mu}\right)\right] \ , \tag{2.144}$$

con

$$P^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - \frac{p^\mu p^\nu}{p^2+i\epsilon} \ , \tag{2.145}$$

come verrà verificato nel settimo capitolo.

Capitolo 3

Sistemi hamiltoniani vincolati

In questo capitolo viene presentata la rassegna di un approccio hamiltoniano ai sistemi lagrangiani vincolati dovuto a Dirac, mettendo in rilievo i punti di maggior interesse per il presente lavoro [36][37][38].

3.1 Formalismo hamiltoniano

Si consideri una generica lagrangiana

$$L = \int d^2\vec{x}\mathcal{L} \quad , \tag{3.1}$$

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}\left(\phi^{(i)}, \partial^\mu \phi^{(i)}\right) \quad . \tag{3.2}$$

Le equazioni di Eulero-Lagrange seguono dal principio di minima azione e sono date da

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^{(i)}} - \partial^\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial^\mu \phi^{(i)}\right)} = 0 \ . \tag{3.3}$$

Il momento coniugato a $\phi^{(i)}$ è

$$\pi_{(i)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial^0 \phi^{(i)}\right)} \quad . \tag{3.4}$$

L'hamiltoniana è ottenuta con la trasformazione di Legendre

$$H = \int d^2\vec{x}\mathcal{H} \quad , \tag{3.5}$$

$$\mathcal{H} = \pi_{(i)}\partial^0\phi^{(i)} - \mathcal{L} \ , \tag{3.6}$$

ed è conservata, come facilmente si vede usando le equazioni del moto (3.3).

3.1.1 Lagrangiane non degeneri

Se la lagrangiana è non degenere

$$\det\left(\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial\left(\partial^0\phi^{(i)}\right)\partial\left(\partial^0\phi^{(j)}\right)}\right) \neq 0 \ , \tag{3.7}$$

la relazione

$$\pi_{(i)} = \pi_{(i)} \left(\phi^{(j)}, \partial^\mu \phi^{(j)} \right) \tag{3.8}$$

è invertibile rispetto a $\partial^0 \phi^{(i)}$, poiché il relativo jacobiano è non nullo

$$\partial^0 \phi^{(i)} = \partial^0 \phi^{(i)} \left(\phi^{(j)}, \partial^k \phi^{(j)}, \pi^{(j)} \right) \quad , \tag{3.9}$$

e l'hamiltoniana può essere riespressa in termini delle variabili canoniche e delle loro derivate spaziali

$$H = \int d^2\vec{x} \mathcal{H} \quad , \tag{3.10}$$

$$\mathcal{H} = \mathcal{H} \left(\phi^{(i)}, \partial^k \phi^{(i)}, \pi^{(i)} \right) \quad . \tag{3.11}$$

Le equazioni del moto possono allora essere scritte in forma hamiltoniana; infatti, dalla (3.6) segue, usando le (3.3) e (3.4)

$$\begin{aligned} dH &= \int d^2\vec{x} \left[\partial^0 \phi^{(i)} d\pi_{(i)} + \pi_{(i)} \partial^0 d\phi^{(i)} - \partial^\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial^\mu \phi^{(i)} \right)} d\phi^{(i)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial^\mu \phi^{(i)} \right)} \partial^\mu d\phi^{(i)} \right] \\ &= \int d^2\vec{x} \left(-\partial^0 \pi^{(i)} d\phi_{(i)} + \partial^0 \phi^{(i)} d\pi_{(i)} \right) \quad , \end{aligned} \tag{3.12}$$

mentre dalla (3.11) segue

$$dH = \int d^2\vec{x} \left[\left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi_{(i)}} - \partial^k \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \left(\partial^k \phi_{(i)} \right)} \right) d\phi_{(i)} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi_{(i)}} d\pi_{(i)} \right] \quad . \tag{3.13}$$

Per confronto seguono le equazioni di Hamilton

$$\partial^0 \phi^{(i)} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi_{(i)}} \quad , \tag{3.14}$$

$$\partial^0 \pi^{(i)} = - \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi_{(i)}} - \partial^k \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \left(\partial^k \phi_{(i)} \right)} \right) \quad . \tag{3.15}$$

Data una variabile dinamica

$$G = \int d^2\vec{x} \mathcal{G} \ \left(\phi^{(i)}, \partial^k \phi^{(i)}, \pi^{(i)} \right) \quad , \tag{3.16}$$

la sua evoluzione temporale è data da

$$\frac{d}{dt} G = \frac{\partial}{\partial t} G + \int d^2\vec{x} \left[\left(\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \phi^{(i)}} - \partial^k \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \left(\partial^k \phi^{(i)} \right)} \right) \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi_{(i)}} - \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \pi_{(i)}} \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi^{(i)}} - \partial^k \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \left(\partial^k \phi^{(i)} \right)} \right) \right] \quad . \tag{3.17}$$

È utile a questo punto usare la definizione di derivata funzionale data nell'appendice A, guadagnando cosi in trasparenza.
In questo modo, le equazioni del moto di Eulero-Lagrange (3.3) si scrivono

$$\frac{\delta^* L}{\delta^* \phi^{(i)}} - \partial^0 \frac{\delta^* L}{\delta^* \left(\partial^0 \phi^{(i)} \right)} = 0 \ , \tag{3.18}$$

e la loro versione hamiltoniana (3.14) e (3.15) si riduce a

$$\partial^0 \phi^{(i)} = \frac{\delta^* H}{\delta^* \pi_{(i)}} \ , \tag{3.19}$$

$$\partial^0 \pi^{(i)} = -\frac{\delta^* H}{\delta^* \phi_{(i)}} \ . \tag{3.20}$$

La (3.17) diventa poi

$$\frac{d}{dt} G(t) = \frac{\partial}{\partial t} G(t) + \int d^2 \vec{z} \left(\frac{\delta^* G(t)}{\delta^* \phi^{(i)}(\vec{z},t)} \frac{\delta^* H(t)}{\delta^* \pi_{(i)}(\vec{z},t)} - \frac{\delta^* G(t)}{\delta^* \pi_{(i)}(\vec{z},t)} \frac{\delta^* H(t)}{\delta^* \phi^{(i)}(\vec{z},t)} \right) \ . \tag{3.21}$$

Definendo la parentesi di Poisson come

$$\{A(\vec{x},t), B(\vec{y},t)\} = \int d^2 \vec{z} \left(\frac{\delta^* A(\vec{x},t)}{\delta^* \phi^{(i)}(\vec{z},t)} \frac{\delta^* B(\vec{y},t)}{\delta^* \pi_{(i)}(\vec{z},t)} - \frac{\delta^* B(\vec{y},t)}{\delta^* \phi^{(i)}(\vec{z},t)} \frac{\delta^* A(\vec{x},t)}{\delta^* \pi_{(i)}(\vec{z},t)} \right) \ , \tag{3.22}$$

la (3.21) si può scrivere come

$$\frac{d}{dt} G = \frac{\partial}{\partial t} G + \{G, H\} \ , \tag{3.23}$$

e le equazioni del moto (3.19) e (3.20) come

$$\partial^0 \phi^{(i)} = \left\{ \phi^{(i)}, H \right\} \ , \tag{3.24}$$

$$\partial^0 \pi^{(i)} = \left\{ \pi^{(i)}, H \right\} \ . \tag{3.25}$$

Inoltre, dalla (3.22) seguono le parentesi canoniche

$$\left\{ \phi^{(i)}(\vec{x},t), \phi^{(j)}(\vec{y},t) \right\} = 0 \ , \tag{3.26}$$

$$\left\{ \pi_{(i)}(\vec{x},t), \pi_{(j)}(\vec{y},t) \right\} = 0 \ , \tag{3.27}$$

$$\left\{ \phi^{(i)}(\vec{x},t), \pi_{(j)}(\vec{y},t) \right\} = \delta^{(i)}_{(j)} \delta^2 (\vec{x} - \vec{y}) \ . \tag{3.28}$$

3.1.2 Lagrangiane degeneri

Se la lagrangiana è degenere

$$\det \left(\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \left(\partial^0 \phi^{(i)} \right) \partial \left(\partial^0 \phi^{(j)} \right)} \right) = 0 \ , \tag{3.29}$$

la relazione

$$\pi_{(i)} = \pi_{(i)} \left(\phi^{(j)}, \partial^\mu \phi^{(j)} \right) \tag{3.30}$$

non è invertibile rispetto a $\partial^0 \phi^{(i)}$, poiché il relativo jacobiano è nullo. Questo indica la presenza di un certo numero di vincoli coinvolgenti le variabili canoniche che discendono direttamente dalla lagrangiana e dalle equazioni del moto; essi vengono detti vincoli primari e sono in generale incompatibili con le parentesi di Poisson canoniche (3.26), (3.27) e (3.28), poiché quest'ultime valgono nell'ipotesi che la lagrangiana sia non degenere; introducendo il segno di uguaglianza debole $\approx$ per indicare uguaglianze incompatibili con le parentesi di Poisson canoniche, tali vincoli si possono scrivere come

$$\chi^{[a]}\left(\phi^{(i)}, \partial^k \phi^{(i)}, \pi^{(i)}\right) \approx 0 \ . \tag{3.31}$$

Come conseguenza di questi vincoli, $\partial^0 \phi^{(i)}$ e $\mathcal{H}$ non sono più determinati univocamente in termini delle variabili canoniche, ma acquistano un'arbitrarietà che si può esplicitare convenientemente aggiungendo all'hamiltoniana canonica (3.5) i vincoli (3.31) con dei moltiplicatori di Lagrange, ottenendo cosi l'hamiltoniana più generale possibile che sia debolmente equivalente a quella canonica

$$\tilde{H} = \int d^2\vec{x}\widetilde{\mathcal{H}} \ , \tag{3.32}$$

$$\widetilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H} \ + u_{[a]}\chi^{[a]} \approx \mathcal{H} \ . \tag{3.33}$$

Le equazioni del moto hamiltoniane diventano allora

$$\partial^0 \phi^{(i)} = \left\{\phi^{(i)}, \tilde{H}\right\} \approx \frac{\delta^* H}{\delta^* \pi_{(i)}} + \int d^2\vec{x} u_{[a]} \frac{\delta^* \chi^{[a]}}{\delta^* \pi_{(i)}} \ , \tag{3.34}$$

$$\partial^0 \pi^{(i)} = \left\{\pi^{(i)}, \tilde{H}\right\} \approx -\frac{\delta^* H}{\delta^* \phi_{(i)}} - \int d^2\vec{x} u_{[a]} \frac{\delta^* \chi^{[a]}}{\delta^* \phi_{(i)}} \ . \tag{3.35}$$

e sono le più generali possibili in accordo con il principio di minima azione ed i vincoli (3.31).
Si vede quindi che la decomposizione hamiltoniana soffre di una ambiguità generata dai vincoli; ovviamente, tale ambiguità, rappresentata dai coefficienti indeterminati $u_{[a]}$, è solo apparente, e viene fissata da condizioni di coerenza globale della formulazione hamiltoniana.

3.2 Procedura di Dirac

Per risolvere l'indeterminazione presente nella formulazione hamiltoniana è necessario imporre la compatibilità dinamica con i vincoli. In particolare, i vincoli devono rimanere debolmente soddisfatti ad ogni istante; questo suggerisce di richiedere che la derivata temporale dei vincoli debba mantenersi debolmente nulla

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\chi^{[a]}(\vec{x},t) &= \left\{\chi^{[a]}(\vec{x},t), \tilde{H}(t)\right\} \\ &\approx \left\{\chi^{[a]}(\vec{x},t), H(t)\right\} + \int d^2\vec{y} u_{[b]}(\vec{y},t) \left\{\chi^{[a]}(\vec{x},t), \chi^{[b]}(\vec{y},t)\right\} \\ &\approx 0 \ . \end{aligned} \tag{3.36}$$

Possono allora verificarsi due situazioni; nella prima, la (3.36) non produce nuovi vincoli, ma impone condizioni sui coefficienti $u_{[a]}$, mentre nella seconda, essa produce nuovi vincoli, detti secondari, indipendenti dalle $u_{[a]}$. Nel caso compaiano vincoli secondari, essi devono essere aggiunti a quelli primari e deve essere ripetuto il procedimento con il nuovo insieme di vincoli, più ampio; in particolare, deve essere garantita la compatibilità dinamica imponendo nuovamente la (3.36). Si ripete allora la procedura finché non vengano più generati vincoli e siano state trovate tutte le condizioni sui coefficienti $u_{[a]}$. La totalità dei vincoli cosi ottenuti viene indicata sempre con

$$\chi^{[a]}\left(\phi^{(i)},\partial^k\phi^{(i)},\pi^{(i)}\right)\approx 0\ . \tag{3.37}$$

Una variabile dinamica $R\left(\phi^{(i)},\partial^k\phi^{(i)},\pi^{(i)}\right)$ si definisce poi di prima specie se ha parentesi di Poisson debolmente nulla con tutti i vincoli

$$\left\{R,\chi^{[a]}\right\}\approx 0\quad\forall\,[a]\ \ , \tag{3.38}$$

e di seconda specie se ha parentesi di Poisson debolmente non nulla con almeno uno dei vincoli

$$\exists\,[a]\ :\ \left\{R,\chi^{[a]}\right\}\approx 0\ . \tag{3.39}$$

Questo permette di dividere i vincoli (3.37) in due gruppi, il primo dei quali contiene tutti i vincoli di prima specie linearmente indipendenti, indicati con

$$\psi^{[a]}\left(\phi^{(i)},\partial^k\phi^{(i)},\pi^{(i)}\right)\approx 0\ , \tag{3.40}$$

mentre il secondo contiene i rimanenti vincoli di seconda specie, indicati con

$$\varphi^{[a]}\left(\phi^{(i)},\partial^k\phi^{(i)},\pi^{(i)}\right)\approx 0\ . \tag{3.41}$$

3.2.1 Vincoli di seconda specie

Si può dimostrare che la matrice formata dalle parentesi di Poisson dei vincoli di seconda specie

$$C^{[a][b]}\left(\vec{x},\vec{y},t\right)=\left\{\varphi^{[a]}\left(\vec{x},t\right),\varphi^{[b]}\left(\vec{y},t\right)\right\} \tag{3.42}$$

risulta essere invertibile, nel senso che

$$\exists C^{-1}_{[a][b]}\left(\vec{x},\vec{y},t\right)\ :\ \int d^2\vec{z}C^{[a][c]}\left(\vec{x},\vec{z},t\right)C^{-1}_{[c][b]}\left(\vec{z},\vec{y},t\right)=\delta^{[a]}_{[b]}\delta^2\left(\vec{x}-\vec{y}\right)\ \ . \tag{3.43}$$

Le condizioni sui coefficienti $u_{[a]}$ associati ai vincoli di seconda specie forniscono allora una soluzione unica in termini delle variabili canoniche

$$u_{[a]}=u_{[a]}\left(\phi^{(i)},\partial^k\phi^{(i)},\pi^{(i)}\right) \tag{3.44}$$

che, usando le (3.36), risulta essere

$$u_{[a]}\left(\vec{x},t\right)\approx-\int d^2\vec{y}C^{-1}_{[a][b]}\left(\vec{x},\vec{y},t\right)\left\{\varphi^{[b]}\left(\vec{y},t\right),H\left(t\right)\right\}\ \ , \tag{3.45}$$

mentre i coefficienti $u_{[a]}$ associati ai vincoli di prima specie rimangono del tutto arbitrari, poiché in questo caso la (3.36) non fornisce condizioni su di essi.
L'hamiltoniana (3.32) è quindi

$$\tilde{H}=\int d^2\vec{x}\widetilde{\mathcal{H}}\ \ , \tag{3.46}$$

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathcal{H}}\left(\vec{x},t\right)=\mathcal{H}\ \left(\vec{x},t\right)-\int d^2\vec{y}C^{-1}_{[a][b]}\left(\vec{x},\vec{y},t\right)\left\{\varphi^{[b]}\left(\vec{y},t\right),H\left(t\right)\right\}\varphi^{[a]}\left(\vec{x},t\right)\\+u_{[a]}\left(\vec{x},t\right)\psi^{[a]}\left(\vec{x},t\right)\ \ ,\end{aligned} \tag{3.47}$$

cioè

$$
\begin{aligned}
\tilde{H}(t) = H(t) - \int d^2\vec{x} \int d^2\vec{y} \left\{ H(t), \varphi^{[a]}(\vec{x},t) \right\} C^{-1}_{[a][b]}(\vec{x},\vec{y},t)\, \varphi^{[b]}(\vec{y},t) \\
+ \int d^2\vec{x} u_{[a]}(\vec{x},t)\, \psi^{[a]}(\vec{x},t) \quad .
\end{aligned}
\tag{3.48}
$$

È poi possibile associare ad ogni variabile dinamica R una nuova variabile R' debolmente equivalente

$$
\begin{aligned}
R'(\vec{x},t) &= R(\vec{x},t) - \int d^2\vec{z} \int d^2\vec{w} \left\{ R(\vec{x},t), \varphi^{[a]}(\vec{z},t) \right\} C^{-1}_{[a][b]}(\vec{z},\vec{w},t)\, \varphi^{[b]}(\vec{w},t) \\
&\approx R(\vec{x},t)
\end{aligned}
\tag{3.49}
$$

che ha parentesi di Poisson nulla con tutti i vincoli di seconda specie

$$
\begin{aligned}
\left\{ R'(\vec{x},t), \varphi^{[a]}(\vec{y},t) \right\} &\approx \left\{ R(\vec{x},t), \varphi^{[a]}(\vec{y},t) \right\} \\
&\quad - \int d^2\vec{z} \int d^2\vec{w} \left\{ R(\vec{x},t), \varphi^{[b]}(\vec{z},t) \right\} C^{-1}_{[b][c]}(\vec{z},\vec{w},t)\, C^{[c][a]}(\vec{w},\vec{y},t) \\
&= 0 \quad .
\end{aligned}
\tag{3.50}
$$

Con questa definizione, l'hamiltoniana (3.48) si scrive

$$
\tilde{H}(t) = H'(t) + \int d^2\vec{x} u_{[a]}(\vec{x},t)\, \psi^{[a]}(\vec{x},t) \quad , \tag{3.51}
$$

e le equazioni del moto (3.34) e (3.35) diventano

$$
\partial^0 \phi^{(i)} = \left\{ \phi^{(i)}, \tilde{H} \right\} \approx \frac{\delta^* H'}{\delta^* \pi_{(i)}} + \int d^2\vec{x} u_{[a]} \frac{\delta^* \psi^{[a]}}{\delta^* \pi_{(i)}} \quad , \tag{3.52}
$$

$$
\partial^0 \pi^{(i)} = \left\{ \pi^{(i)}, \tilde{H} \right\} \approx -\frac{\delta^* H'}{\delta^* \phi_{(i)}} - \int d^2\vec{x} u_{[a]} \frac{\delta^* \psi^{[a]}}{\delta^* \phi_{(i)}} \quad . \tag{3.53}
$$

Per garantire la compatibilità forte dei vincoli di seconda specie con le parentesi di Poisson basta quindi usare all'interno delle parentesi le variabili apostrofate invece di quelle originali, ovvero eseguire la sostituzione

$$
\{A, B\} \to \{A', B'\} \quad . \tag{3.54}
$$

Rimane però l'incompatibilità dei vincoli di prima specie con le parentesi di Poisson, nonché l'arbitrarietà presente nell'hamiltoniana e le equazioni del moto attraverso i rimanenti coefficienti $u_{[a]}$ che sono del tutto arbitrari.

3.2.2 Vincoli di prima specie

Si è visto che la presenza di vincoli di prima specie è associata ad un'arbitrarietà reale della teoria; questa circostanza può avere come unica causa un'arbitrarietà preesistente nella formulazione lagrangiana, ovvero un'invarianza di gauge. Infatti, si può dimostrare che la presenza di un'invarianza di gauge implica che la lagrangiana sia degenere e produce un'incompatibilità con le parentesi di Poisson, rappresentata da tutti e soli i vincoli di prima specie. Alla luce di ciò, si capisce che l'arbitrarietà contenuta nelle (3.51), (3.52) e (3.53) rappresenta il fatto che la teoria è invariante rispetto a trasformazioni di contatto generate dai vincoli di prima specie $\psi^{[a]}$ (con parametri $u_{[a]}$); in altre parole, i vincoli di prima specie sono i generatori delle trasformazioni di gauge. Niente di strano, quindi, nel fatto che l'arbitrarietà in questione non sia eliminabile; infatti, essa viene fissata da una opportuna condizione di gauge

$$G^{[a]}\left(\phi^{(i)},\partial^k\phi^{(i)},\pi^{(i)}\right)\approx 0\ . \tag{3.55}$$

Per eliminare totalmente l'arbitrarietà, tale condizione deve poi essere scelta in modo che i vincoli di prima specie diventino di seconda specie, e risultare essa stessa di seconda specie. A questo punto, l'arbitrarietà di prima specie può essere eliminata definitivamente procedendo come nel caso dell'arbitrarietà di seconda specie. I vincoli rimasti, ovvero quelli che erano di prima specie più quelli rappresentati dalla condizione di gauge (3.55), vengono denotati con

$$\lambda^{[a]}\left(\phi^{(i)},\partial^k\phi^{(i)},\pi^{(i)}\right)\approx 0\ . \tag{3.56}$$

Tutta la procedura di Dirac viene allora ripetuta con questi vincoli e l'hamiltoniana

$$\bar{H}=\int d^2\vec{x}\overline{\mathcal{H}}\ , \tag{3.57}$$

$$\overline{\mathcal{H}}=\mathcal{H}'+u_{[a]}\lambda^{[a]}\approx\mathcal{H}'\approx\mathcal{H}\ , \tag{3.58}$$

e la condizione di compatibilità dinamica (3.36) diventa

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\lambda^{[a]}(\vec{x},t)&=\left\{\lambda^{[a]}(\vec{x},t),\bar{H}(t)\right\}\\&\approx\left\{\lambda^{[a]}(\vec{x},t),H'(t)\right\}+\int d^2\vec{y}u_{[b]}(\vec{y},t)\left\{\lambda^{[a]}(\vec{x},t),\lambda^{[b]}(\vec{y},t)\right\}\\&\approx 0\ .\end{aligned} \tag{3.59}$$

Siccome i vincoli $\lambda^{[a]}$ sono tutti di seconda specie, la matrice formata dalla loro parentesi di Poisson

$$M^{[a][b]}(\vec{x},\vec{y},t)=\left\{\lambda^{[a]}(\vec{x},t),\lambda^{[b]}(\vec{y},t)\right\} \tag{3.60}$$

risulta essere invertibile, nel senso che

$$\exists M^{-1}_{[a][b]}(\vec{x},\vec{y},t)\ :\ \int d^2\vec{z}M^{[a][c]}(\vec{x},\vec{z},t)\,M^{-1}_{[c][b]}(\vec{z},\vec{y},t)=\delta^{[a]}_{[b]}\delta^2(\vec{x}-\vec{y})\ , \tag{3.61}$$

e la (3.59) fornisce soltanto una soluzione unica per i coefficienti $u_{[a]}$ in termini delle variabili canoniche

$$u_{[a]}=u_{[a]}\left(\phi^{(i)},\partial^k\phi^{(i)},\pi^{(i)}\right) \tag{3.62}$$

che risulta essere

$$u_{[a]}(\vec{x},t)\approx-\int d^2\vec{y}M^{-1}_{[a][b]}(\vec{x},\vec{y},t)\left\{\lambda^{[b]}(\vec{y},t),H'(t)\right\}\ . \tag{3.63}$$

L'hamiltoniana (3.57) è quindi

$$\bar{H}=\int d^2\vec{x}\overline{\mathcal{H}}\ , \tag{3.64}$$

$$\overline{\mathcal{H}}\left(\vec{x},t\right)=\mathcal{H}'\left(\vec{x},t\right)-\int d^2\vec{y}M^{-1}_{[a][b]}\left(\vec{x},\vec{y},t\right)\left\{\lambda^{[b]}\left(\vec{y},t\right),H'\left(t\right)\right\}\lambda^{[a]}\left(\vec{x},t\right)\quad , \tag{3.65}$$

cioè

$$\bar{H}\left(t\right)=H'\left(t\right)-\int d^2\vec{x}\int d^2\vec{y}\left\{H'\left(t\right),\lambda^{[a]}\left(\vec{x},t\right)\right\}M^{-1}_{[a][b]}\left(\vec{x},\vec{y},t\right)\lambda^{[b]}\left(\vec{y},t\right)\quad . \tag{3.66}$$

Ad ogni variabile dinamica R si associa allora la nuova variabile R'' debolmente equivalente, definita a partire dalla R' della (3.49) come

$$\begin{aligned}R''\left(\vec{x},t\right)&=R'\left(\vec{x},t\right)-\int d^2\vec{z}\int d^2\vec{w}\left\{R'\left(\vec{x},t\right),\lambda^{[a]}\left(\vec{z},t\right)\right\}M^{-1}_{[a][b]}\left(\vec{z},\vec{w},t\right)\lambda^{[b]}\left(\vec{w},t\right)\\&\approx R'\left(\vec{x},t\right)\approx R\left(\vec{x},t\right)\quad ,\end{aligned} \tag{3.67}$$

che ha parentesi di Poisson nulla anche con tutti i nuovi vincoli

$$\begin{aligned}\left\{R''\left(\vec{x},t\right),\lambda^{[a]}\left(\vec{y},t\right)\right\}&\approx\left\{R'\left(\vec{x},t\right),\lambda^{[a]}\left(\vec{y},t\right)\right\}\\&\quad-\int d^2\vec{z}\int d^2\vec{w}\left\{R'\left(\vec{x},t\right),\lambda^{[b]}\left(\vec{z},t\right)\right\}M^{-1}_{[b][c]}\left(\vec{z},\vec{w},t\right)M^{[c][a]}\left(\vec{w},\vec{y},t\right)\\&=0\quad .\end{aligned} \tag{3.68}$$

Con questa definizione, l'hamiltoniana (3.64) si scrive

$$\bar{H}\left(t\right)=H''\left(t\right) \tag{3.69}$$

e le equazioni del moto diventano

$$\partial^0\phi^{(i)}=\left\{\phi^{(i)},\bar{H}\right\}\approx\frac{\delta^*H''}{\delta^*\pi_{(i)}}\quad , \tag{3.70}$$

$$\partial^0\pi^{(i)}=\left\{\pi^{(i)},\bar{H}\right\}\approx-\frac{\delta^*H''}{\delta^*\phi_{(i)}}\quad . \tag{3.71}$$

Per garantire la compatibilità forte di tutti i vincoli con le parentesi di Poisson basta quindi usare all'interno delle parentesi le variabili con il doppio apostrofo invece di quelle originali, ovvero eseguire la sostituzione

$$\{A,B\}\rightarrow\{A'',B''\}\quad . \tag{3.72}$$

3.2.3 Proprietà

È interessante notare che la struttura matriciale della procedura permette di dimostrare che la (3.67) si può scrivere equivalentemente come

$$R''\left(\vec{x},t\right)=R\left(\vec{x},t\right)-\int d^2\vec{z}\int d^2\vec{w}\left\{R\left(\vec{x},t\right),\vartheta^{[a]}\left(\vec{z},t\right)\right\}K^{-1}_{[a][b]}\left(\vec{z},\vec{w},t\right)\vartheta^{[b]}\left(\vec{w},t\right)\quad , \tag{3.73}$$

ove

$$\vartheta^{[a]}\left(\phi^{(i)},\partial^k\phi^{(i)},\pi^{(i)}\right)\approx 0 \tag{3.74}$$

rappresenta la totalità dei vincoli e

$$K^{[a][b]}\left(\vec{x},\vec{y},t\right)=\left\{\vartheta^{[a]}\left(\vec{x},t\right),\vartheta^{[b]}\left(\vec{y},t\right)\right\} \tag{3.75}$$

è la matrice non singolare formata dalla loro parentesi di Poisson. La procedura di Dirac può quindi essere applicata una sola volta partendo con l'insieme completo di tutti vincoli, i quali risultano tutti di seconda specie dopo aver fissato la condizione di gauge. Più in generale, data una scomposizione dell'insieme dei vincoli (3.74) in sottoinsiemi con un numero pari di vincoli, le relative matrici formate dalle parentesi di Poisson sono invertibili e la procedura di Dirac può essere applicata iterativamente ad ogni insieme; questa proprietà risulta essere provvidenziale quando il numero di vincoli è alto, poiché permette di evitare l'inversione di matrici troppo grandi.
Infine, è importante notare che la procedura di Dirac, quando applicata ad una teoria contenente solo vincoli di gauge, produce gli stessi risultati del metodo convenzionale di Gupta-Bleuler. Grazie a ciò, si ottiene una notevole semplificazione se si esegue un gauge-fixing nella lagrangiana prima di svolgere la procedura, poiché in questo modo tutti i vincoli sono di seconda specie e quindi direttamente risolvibili; inoltre, questo modo di procedere presenta l'ulteriore vantaggio di evidenziare la struttura di gauge della teoria nel suo sviluppo quantistico, conservando la dipendenza dal parametro di gauge.

3.2.4 Parentesi di Dirac

Si è visto che la procedura di Dirac fornisce un metodo potente e sistematico di gestire i vincoli e permette di ottenere una versione hamiltoniana consistente della teoria. Il risultato finale che essa produce è essenzialmente una ridefinizione lecita della struttura variabili-parentesi che tiene conto dei vincoli. Tale ridefinizione può essere trasferita integralmente alla struttura delle parentesi di Poisson, notando che la ridefinizione (3.72)

$$\{A, B\} \to \{A'', B''\} \tag{3.76}$$

è completamente equivalente alla ridefinizione

$$\{A(\vec{x},t), B(\vec{y},t)\} \to \{A(\vec{x},t), B(\vec{y},t)\}^* \quad , \tag{3.77}$$

con

$$\begin{aligned} &\{A(\vec{x},t), B(\vec{y},t)\}^* = \\ &\quad = \{A(\vec{x},t), B(\vec{y},t)\} \\ &\qquad - \int d^2\vec{z} \int d^2\vec{w} \left\{A(\vec{x},t), \vartheta^{[a]}(\vec{z},t)\right\} M^{-1}_{[a][b]}(\vec{z},\vec{w},t) \left\{\vartheta^{[b]}(\vec{w},t), B(\vec{y},t)\right\} \quad , \end{aligned} \tag{3.78}$$

dato che

$$\{A(\vec{x},t), B(\vec{y},t)\}^* \approx \{A''(\vec{x},t), B''(\vec{y},t)\} \quad . \tag{3.79}$$

Ovviamente, la procedura rimane iterabile.
Questa formulazione finale della procedura fornisce quindi una versione generalizzata delle parentesi di Poisson, dette parentesi di Dirac, che rende consistente la teoria senza nessun'altra modifica; in particolare, le parentesi di Dirac sono consistenti con la totalità dei vincoli e questi ultimi possono essere imposti come equazioni forti

$$\vartheta^{[a]}\left(\phi^{(i)}, \partial^k \phi^{(i)}, \pi^{(i)}\right) = 0 \quad . \tag{3.80}$$

Diventa allora possibile, ma non necessario, riformulare la teoria in termini delle sole variabili indipendenti, eseguendo una trasformazione canonica che trasformi l'insieme iniziale delle n variabili soggette agli m vincoli in un nuovo insieme costituito da m variabili identicamente nulle e da $n - m$ variabili indipendenti.

Le parentesi di Dirac hanno, come è facile verificare, tutte le proprietà caratteristiche delle parentesi di Poisson; la teoria classica rimane quindi formalmente intatta, mentre la sua versione quantistica è ottenuta con il principio di corrispondenza generalizzato

$$\{A, B\}^* \to -i\,[A, B] \quad . \tag{3.81}$$

Si osservi infine che le parentesi di Dirac canoniche, ovvero quelle formate con le variabili canoniche, non hanno in generale la struttura semplice del caso convenzionale non degenere; questa è una conseguenza del fatto che le parentesi di Dirac sono compatibili con i vincoli della teoria. Un modo alternativo di convincersi del motivo fisico di essere delle parentesi di Dirac consiste nel partire dal principio di Hamilton ed eseguire le variazioni tenendo conto dei vincoli mediante il metodo dei moltiplicatori di Lagrange; lo sviluppo formale della teoria si articola allora sulla definizione delle parentesi di Lagrange ed il passo finale consiste nel definire le parentesi di Dirac come le inverse delle parentesi di Lagrange. Questo modo di vedere le cose rende conto della complessità della struttura delle parentesi di Dirac, poiché anche una pur lieve alterazione delle parentesi di Lagrange dovuta ai vincoli produce un cambiamento drastico nelle loro inverse.

Capitolo 4

Formalismo canonico per sistemi con derivate di ordine superiore nella lagrangiana

In questo capitolo vengono analizzati i problemi che sorgono nel formalismo hamiltoniano quando la lagrangiana contiene derivate di ordine superiore al primo. Viene sviluppato un metodo più generale di quello di Hamilton per ridurre la dinamica [39][40][41][42].

4.1 Formulazione lagrangiana

Si consideri una generica lagrangiana dipendente dai campi e dalle loro derivate

$$L = \int d^2\vec{x}\mathcal{L} \ , \tag{4.1}$$

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}\left(\phi^{(i)}, \partial^\mu\phi^{(i)}, \partial^\mu\partial^\nu\phi^{(i)}, \partial^\mu\partial^\nu\partial^\rho\phi^{(i)}, ...\right) \ . \tag{4.2}$$

Le equazioni di Eulero-Lagrange discendono dal principio di minima azione e sono

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^{(i)}} - \partial^\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial^\mu\phi^{(i)}\right)} + \partial^\mu\partial^\nu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial^\mu\partial^\nu\phi^{(i)}\right)} - \partial^\mu\partial^\nu\partial^\rho\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial^\mu\partial^\nu\partial^\rho\phi^{(i)}\right)} + ... = 0 \ . \tag{4.3}$$

Per mettere in luce le particolarità introdotte dalle derivate di ordine superiore, è utile analizzare le quantità conservate come conseguenza dell'invarianza dell'azione rispetto ad una generica trasformazione infinitesima

$$\delta x^\mu \ , \tag{4.4}$$

$$\delta\phi^{(i)} = \delta^o\phi^{(i)} + \partial_\mu\phi^{(i)}\delta x^\mu \ . \tag{4.5}$$

Usando l'equazione del moto (4.3), si ottiene

$$\delta^o \mathcal{L} = \partial^\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial^\mu \phi^{(i)}\right)} \delta^o \phi^{(i)} + \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial^\mu \partial^\nu \phi^{(i)}\right)} \partial^\nu \left(\delta^o \phi^{(i)}\right) - \partial^\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial^\mu \partial^\nu \phi^{(i)}\right)} \left(\delta^o \phi^{(i)}\right) \right) \right.$$
$$+ \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial^\mu \partial^\nu \partial^\rho \phi^{(i)}\right)} \partial^\nu \partial^\rho \left(\delta^o \phi^{(i)}\right) - \partial^\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial^\mu \partial^\nu \partial^\rho \phi^{(i)}\right)} \partial^\rho \left(\delta^o \phi^{(i)}\right) \right.$$
$$\left. \left. + \partial^\nu \partial^\rho \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial^\mu \partial^\nu \partial^\rho \phi^{(i)}\right)} \left(\delta^o \phi^{(i)}\right) \right) + ... \right] \ . \tag{4.6}$$

Inoltre

$$\delta d^3 x = \partial_\mu \delta x^\mu d^3 x \ , \tag{4.7}$$

per cui la variazione totale dell'azione è

$$\begin{aligned} \delta S &= \int \left(\delta d^3 x \mathcal{L} + d^3 x \delta \mathcal{L}\right) \\ &= \int d^3 x \left(\delta \mathcal{L} + \partial_\mu \delta x^\mu \mathcal{L}\right) \\ &= \int d^3 x \left[\delta^o \mathcal{L} + \partial_\mu \left(\mathcal{L} \delta x^\mu\right)\right] \ , \end{aligned} \tag{4.8}$$

che dà

$$\delta S = \int d^3 x \partial_\mu \left[\mathcal{L} \delta x^\mu + \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu \phi^{(i)}\right)} - \partial_\rho \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu \partial_\rho \phi^{(i)}\right)} + ... \right) \delta^o \phi^{(i)} \right.$$
$$+ \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu \partial_\nu \phi^{(i)}\right)} - \partial_\rho \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu \partial_\nu \partial_\rho \phi^{(i)}\right)} + ... \right) \delta^o \left(\partial_\nu \phi^{(i)}\right)$$
$$\left. + \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu \partial_\nu \partial_\tau \phi^{(i)}\right)} - \partial_\rho \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu \partial_\nu \partial_\tau \partial \rho \phi^{(i)}\right)} + ... \right) \delta^o \left(\partial_\nu \partial_\tau \phi^{(i)}\right) + ... \right] \ . \tag{4.9}$$

Usando la (4.5) per riesprimere tutto in funzione delle variazioni totali, segue finalmente

$$\delta S = \int d^3 x \partial_\mu \left\{ \left[\mathcal{L} \eta^{\mu\nu} - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu \phi^{(i)}\right)} - \partial_\rho \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu \partial_\rho \phi^{(i)}\right)} + ... \right) \partial^\nu \phi^{(i)} \right. \right.$$
$$\left. - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu \partial_\alpha \phi^{(i)}\right)} - \partial_\rho \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu \partial_\alpha \partial_\rho \phi^{(i)}\right)} + ... \right) \partial^\nu \left(\partial_\alpha \phi^{(i)}\right) - ... \right] \delta x_\nu$$
$$+ \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu \phi^{(i)}\right)} - \partial_\rho \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu \partial_\rho \phi^{(i)}\right)} + ... \right) \delta \phi^{(i)}$$
$$\left. + \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu \partial_\alpha \phi^{(i)}\right)} - \partial_\rho \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu \partial_\alpha \partial_\rho \phi^{(i)}\right)} + ... \right) \delta \left(\partial_\alpha \phi^{(i)}\right) + ... \right\} \ . \tag{4.10}$$

4.1.1 Teorema di Noether

Data una lagrangiana del tipo (4.1), si consideri una trasformazione infinitesima parametrizzata da $\xi^{[a]}$

$$\delta x^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^{[a]}}\xi^{[a]} \ , \tag{4.11}$$

$$\delta \phi^{(i)} = \frac{\partial \phi^{(i)}}{\partial \xi^{[a]}}\xi^{[a]} \ . \tag{4.12}$$

La variazione dell'azione è, usando la (4.10)

$$\begin{aligned}\delta S = \int d^3x \partial_\mu \Bigg\{ \Bigg[& \mathcal{L}\eta^{\mu\nu} - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu \phi^{(i)}\right)} - \partial_\rho \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu \partial_\rho \phi^{(i)}\right)} + ... \right) \partial^\nu \phi^{(i)} \\ & - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu \partial_\alpha \phi^{(i)}\right)} - \partial_\rho \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu \partial_\alpha \partial_\rho \phi^{(i)}\right)} + ... \right) \partial^\nu \left(\partial_\alpha \phi^{(i)}\right) - ... \Bigg] \frac{\partial x_\nu}{\partial \xi^{[a]}} \\ & + \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu \phi^{(i)}\right)} - \partial_\rho \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu \partial_\rho \phi^{(i)}\right)} + ... \right) \frac{\partial \phi^{(i)}}{\partial \xi^{[a]}} \\ & + \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu \partial_\alpha \phi^{(i)}\right)} - \partial_\rho \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu \partial_\alpha \partial_\rho \phi^{(i)}\right)} + ... \right) \frac{\partial\left(\partial_\alpha \phi^{(i)}\right)}{\partial \xi^{[a]}} + ... \Bigg\} \xi^{[a]} \ .\end{aligned} \tag{4.13}$$

Se la trasformazione lascia invariata l'azione

$$\delta S = 0 \quad \forall \xi^{[a]} \ , \tag{4.14}$$

segue, data l'arbitrarietà di $\xi^{[a]}$, la conservazione della corrente di Noether

$$\begin{aligned} J^\mu_{[a]} = \Bigg[& \mathcal{L}\eta^{\mu\nu} - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu \phi^{(i)}\right)} - \partial_\rho \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu \partial_\rho \phi^{(i)}\right)} + ... \right) \partial^\nu \phi^{(i)} \\ & - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu \partial_\alpha \phi^{(i)}\right)} - \partial_\rho \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu \partial_\alpha \partial_\rho \phi^{(i)}\right)} + ... \right) \partial^\nu \left(\partial_\alpha \phi^{(i)}\right) - ... \Bigg] \frac{\partial x_\nu}{\partial \xi^{[a]}} \\ & + \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu \phi^{(i)}\right)} - \partial_\rho \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu \partial_\rho \phi^{(i)}\right)} + ... \right) \frac{\partial \phi^{(i)}}{\partial \xi^{[a]}} \\ & + \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu \partial_\alpha \phi^{(i)}\right)} - \partial_\rho \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu \partial_\alpha \partial_\rho \phi^{(i)}\right)} + ... \right) \frac{\partial\left(\partial_\alpha \phi^{(i)}\right)}{\partial \xi^{[a]}} + ... \ ,\end{aligned} \tag{4.15}$$

$$\partial_\mu J^\mu_{[a]} = 0 \ . \tag{4.16}$$

4.1.2 Tensori energia-impulso e di Lorentz

L'invarianza dell'azione sotto trasformazioni di Poincaré garantisce la conservazione del quadrimpulso lineare ed angolare; infatti, si consideri la trasformazione

$$\delta x^\mu = w^\mu{}_\nu x^\nu + b^\mu \ , \tag{4.17}$$

$$\delta\phi^{(i)} = \frac{1}{2}w_{\mu\nu}\left(\Sigma^{\mu\nu}\right)^{(i)}{}_{(j)}\phi^{(j)} \ , \tag{4.18}$$

$$\delta\left(\partial_\alpha\phi^{(i)}\right) = \frac{1}{2}w_{\mu\nu}\left(\Sigma^{\mu\nu}{}_{\alpha}{}^{\rho}\right)^{(i)}{}_{(j)}\left(\partial_\rho\phi^{(j)}\right) \ , \tag{4.19}$$

$$\delta\left(\partial_\alpha\partial_\beta\phi^{(i)}\right) = \frac{1}{2}w_{\mu\nu}\left(\Sigma^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta}{}^{\rho\tau}\right)^{(i)}{}_{(j)}\left(\partial_\rho\partial_\tau\phi^{(j)}\right) \ , \tag{4.20}$$

$$\dots \ .$$

$w_{\mu\nu}$ è la deviazione antisimmetrica della trasformazione di Lorentz dall'identità, b^μ una traslazione uniforme e $\left(\Sigma^{\mu\nu}\right)^{(i)}{}_{(j)}$ la matrice di spin dei campi $\phi^{(i)}$, mentre le matrici $\left(\Sigma^{\mu\nu}{}_{\alpha}{}^{\rho}\right)^{(i)}{}_{(j)}, \left(\Sigma^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta}{}^{\rho\tau}\right)^{(i)}{}_{(j)}, \dots$ sono le matrici di spin delle derivate dei campi $\phi^{(i)}$ e sono

$$\left(\Sigma^{\mu\nu}{}_{\alpha}{}^{\rho}\right)^{(i)}{}_{(j)} = \left(\Sigma^{\mu\nu}\right)^{(i)}{}_{(j)}\delta^\rho_\alpha - \left(\delta^\mu_\alpha\eta^{\nu\rho} - \delta^\nu_\alpha\eta^{\mu\rho}\right)\delta^{(i)}_{(j)} \ , \tag{4.21}$$

$$\left(\Sigma^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta}{}^{\rho\tau}\right)^{(i)}{}_{(j)} = \left(\Sigma^{\mu\nu}\right)^{(i)}{}_{(j)}\delta^\rho_\alpha\delta^\tau_\beta - \left[\left(\delta^\mu_\alpha\eta^{\nu\rho} - \delta^\nu_\alpha\eta^{\mu\rho}\right)\delta^\tau_\beta + \left(\delta^\mu_\beta\eta^{\nu\tau} - \delta^\nu_\beta\eta^{\mu\tau}\right)\delta^\rho_\alpha\right]\delta^{(i)}_{(j)} \ , \tag{4.22}$$

$$\dots \ .$$

La (4.10) fornisce allora per la variazione dell'azione

$$\begin{aligned}
\delta S = \int d^3x\partial_\mu \Bigg[&\mathcal{L}\eta^{\mu\nu} - \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\phi^{(i)}\right)} - \partial_\rho\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\partial_\rho\phi^{(i)}\right)} + \dots\right)\partial^\nu\phi^{(i)} \\
&- \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\partial_\alpha\phi^{(i)}\right)} - \partial_\rho\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\partial_\alpha\partial_\rho\phi^{(i)}\right)} + \dots\right)\partial^\nu\left(\partial_\alpha\phi^{(i)}\right) - \dots\Bigg] b_\nu \\
+\frac{1}{2}\int d^3x\partial_\mu \Bigg\{&\Bigg[\mathcal{L}\eta^{\mu\lambda} - \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\phi^{(i)}\right)} - \partial_\rho\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\partial_\rho\phi^{(i)}\right)} + \dots\right)\partial^\lambda\phi^{(i)} \\
&- \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\partial_\alpha\phi^{(i)}\right)} - \partial_\rho\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\partial_\alpha\partial_\rho\phi^{(i)}\right)} + \dots\right)\partial^\lambda\left(\partial_\alpha\phi^{(i)}\right) - \dots\Bigg] x^\sigma \\
&- \Bigg[\mathcal{L}\eta^{\mu\sigma} - \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\phi^{(i)}\right)} - \partial_\rho\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\partial_\rho\phi^{(i)}\right)} + \dots\right)\partial^\sigma\phi^{(i)} \\
&- \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\partial_\alpha\phi^{(i)}\right)} - \partial_\rho\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\partial_\alpha\partial_\rho\phi^{(i)}\right)} + \dots\right)\partial^\sigma\left(\partial_\alpha\phi^{(i)}\right) - \dots\Bigg] x^\lambda \\
&+ \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\phi^{(i)}\right)} - \partial_\rho\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\partial_\rho\phi^{(i)}\right)} + \dots\right)\left(\Sigma^{\lambda\sigma}\right)^{(i)}{}_{(j)}\phi^{(j)} \\
&+ \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\partial_\alpha\phi^{(i)}\right)} - \partial_\rho\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\partial_\alpha\partial_\rho\phi^{(i)}\right)} + \dots\right)\left(\Sigma^{\lambda\sigma}{}_{\alpha}{}^{\epsilon}\right)^{(i)}{}_{(j)}\left(\partial_\epsilon\phi^{(j)}\right) \\
&+ \dots\Bigg\} w_{\lambda\sigma} \ .
\end{aligned} \tag{4.23}$$

Se questa è nulla sono conservati i tensori energia-impulso e del momento angolare

$$\begin{aligned}
T^{\mu\nu} = \mathcal{L}\ \eta^{\mu\nu} &- \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\phi^{(i)}\right)} - \partial_\rho\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\partial_\rho\phi^{(i)}\right)} + \dots\right)\partial^\nu\phi^{(i)} \\
&- \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\partial_\alpha\phi^{(i)}\right)} - \partial_\rho\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\partial_\alpha\partial_\rho\phi^{(i)}\right)} + \dots\right)\partial^\nu\left(\partial_\alpha\phi^{(i)}\right) - \dots \ ,
\end{aligned} \tag{4.24}$$

$$
\begin{aligned}
M^{\mu\alpha\beta} = {} & x^\alpha T^{\mu\beta} - x^\beta T^{\mu\alpha} \\
& + \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial_\mu \phi^{(i)}\right)} - \partial_\rho \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial_\mu \partial_\rho \phi^{(i)}\right)} + \ldots \right) \left(\Sigma^{\alpha\beta}\right)^{(i)}{}_{(j)} \phi^{(j)} \\
& + \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial_\mu \partial_\lambda \phi^{(i)}\right)} - \partial_\rho \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial_\mu \partial_\lambda \partial_\rho \phi^{(i)}\right)} + \ldots \right) \left(\Sigma^{\alpha\beta}{}_\lambda{}^\epsilon\right)^{(i)}{}_{(j)} \left(\partial_\epsilon \phi^{(j)}\right) + \ldots \ ,
\end{aligned}
\tag{4.25}
$$

$$
\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0 \ , \tag{4.26}
$$

$$
\partial_\mu M^{\mu\alpha\beta} = 0 \ . \tag{4.27}
$$

4.1.3 Variabili generalizzate

La forma delle quantità conservate viene notevolmente semplificata introducendo le seguenti variabili generalizzate

$$
\begin{aligned}
& \tilde{\phi}^{(i)}_{[1]} = \phi^{(i)} \ , && \left(\tilde{\pi}^{(i)}_{[1]}\right)_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial^\mu \phi^{(i)}\right)} - \partial^\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial^\mu \partial^\alpha \phi^{(i)}\right)} + \ldots \ , \\
& \left(\tilde{\phi}^{(i)}_{[2]}\right)^\mu = \partial^\mu \phi^{(i)} \ , && \left(\tilde{\pi}^{(i)}_{[2]}\right)_{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial^\mu \partial^\nu \phi^{(i)}\right)} - \partial^\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial^\mu \partial^\nu \partial^\alpha \phi^{(i)}\right)} + \ldots \ , \\
& \left(\tilde{\phi}^{(i)}_{[3]}\right)^{\mu\nu} = \partial^\mu \partial^\nu \phi^{(i)} \ , && \left(\tilde{\pi}^{(i)}_{[3]}\right)_{\mu\nu\rho} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial^\mu \partial^\nu \partial^\rho \phi^{(i)}\right)} - \partial^\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial^\mu \partial^\nu \partial^\rho \partial^\alpha \phi^{(i)}\right)} + \ldots \ , \\
& && \ldots \ .
\end{aligned}
\tag{4.28}
$$

Infatti, in questo modo, la corrente di Noether (4.15) si scrive come

$$
\begin{aligned}
J^\mu_{[a]} = {} & \left[\mathcal{L} \eta^{\mu\nu} - \left(\tilde{\pi}_{(i)[n]}\right)^{\mu\alpha\beta\ldots} \partial^\nu \left(\tilde{\phi}^{(i)[n]}\right)_{\alpha\beta\ldots} \right] \frac{\partial x_\nu}{\partial \xi^{[a]}} \\
& + \left(\tilde{\pi}_{(i)[n]}\right)^{\mu\alpha\beta\ldots} \frac{\partial \left(\tilde{\phi}^{(i)[n]}\right)_{\alpha\beta\ldots}}{\partial \xi^{[a]}}
\end{aligned}
\tag{4.29}
$$

ed i tensori energia-impulso (4.24) e del momento angolare (4.25) come

$$
T^{\mu\nu} = \mathcal{L} \eta^{\mu\nu} - \left(\tilde{\pi}_{(i)[n]}\right)^{\mu\alpha\beta\ldots} \partial^\nu \left(\tilde{\phi}^{(i)[n]}\right)_{\alpha\beta\ldots} \ , \tag{4.30}
$$

$$
M^{\mu\alpha\beta} = x^\alpha T^{\mu\beta} - x^\beta T^{\mu\alpha} + \left(\tilde{\pi}_{(i)[n]}\right)^{\mu\rho\tau\ldots} \left(\Sigma^{\alpha\beta}{}_{\rho\tau\ldots}{}^{\lambda\sigma\ldots}\right)^{(i)}{}_{(j)} \left(\tilde{\phi}^{(j)[n]}\right)_{\lambda\sigma\ldots} \ . \tag{4.31}
$$

Si vede quindi che la formulazione lagrangiana è estendibile in modo semplice al caso generale in cui la lagrangiana dipende dai campi e dalle loro derivate di qualunque ordine; inoltre, con le definizioni fatte, tutto è covariante.

4.2 Formulazione hamiltoniana

Per ottenere una versione hamiltoniana, ovvero del primo ordine nel tempo, della teoria, è necessario eseguire una trasformazione di Legendre generalizzata capace di decomporre il sistema di equazioni differenziali lagrangiane in un sistema di equazioni differenziali hamiltoniane più esteso, ma del primo ordine nel tempo, e generalizzare il formalismo canonico.

Risulta di grande utilità usare sin dall'inizio le definizioni di derivata funzionale e variazionale date nell'appendice A.
Le equazioni del moto di Eulero-Lagrange si possono allora scrivere

$$\frac{\delta S}{\delta \phi^{(i)}} = \frac{\delta^* L}{\delta^* \phi^{(i)}} - \partial^0 \frac{\delta^* L}{\delta^* \left(\partial^0 \phi^{(i)}\right)} + \partial^0 \partial^0 \frac{\delta^* L}{\delta^* \left(\partial^0 \phi^{(i)}\right)} - ... = 0 \ . \tag{4.32}$$

4.2.1 Decomposizione della dinamica

Nel caso convenzionale in cui sono presenti solo derivate prime nella lagrangiana, le equazioni di Eulero-Lagrange sono del secondo ordine

$$\frac{\delta^* L}{\delta^* \phi^{(i)}} - \partial^0 \frac{\delta^* L}{\delta^* \left(\partial^0 \phi^{(i)}\right)} = 0 \tag{4.33}$$

e possono essere disaccoppiate in una forma del primo ordine nel tempo introducendo una nuova variabile per la derivata temporale

$$\partial^0 \phi^{(i)} \to \pi^{(i)} \ . \tag{4.34}$$

A questo scopo è conveniente introdurre il momento coniugato

$$\pi_{(i)} = \frac{\delta S}{\delta \left(\partial^0 \phi^{(i)}\right)} = \frac{\delta^* L}{\delta^* \left(\partial^0 \phi^{(i)}\right)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial^0 \phi^{(i)}\right)} \ , \tag{4.35}$$

supponendo per semplicità che la lagrangiana sia non degenere per garantire la regolarità del cambiamento di variabili

$$\det \left(\frac{\delta^2 S}{\delta \left(\partial^0 \phi^{(i)}\right) \delta \left(\partial^0 \phi^{(j)}\right)} \right) = \det \left(\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \left(\partial^0 \phi^{(i)}\right) \partial \left(\partial^0 \phi^{(j)}\right)} \right) \neq 0 \ . \tag{4.36}$$

L'equazione del moto (4.33) diventa

$$\frac{\delta^* L}{\delta^* \phi^{(i)}} = \partial^0 \pi_{(i)} \ . \tag{4.37}$$

Eseguendo allora la trasformazione di Legendre

$$\partial^0 \phi^{(i)} \to \pi^{(i)} \ , \tag{4.38}$$

$$\mathcal{L} \to \mathcal{H} = \pi_{(i)} \partial^0 \phi^{(i)} - \mathcal{L} \ , \tag{4.39}$$

seguono le equazioni di Hamilton

$$\partial^0 \phi^{(i)} = \frac{\delta^* H}{\delta^* \pi_{(i)}} \ , \tag{4.40}$$

$$\partial^0 \pi_{(i)} = -\frac{\delta^* H}{\delta^* \phi^{(i)}} \ . \tag{4.41}$$

che rappresentano effettivamente una versione del primo ordine nel tempo delle equazioni del moto. Infatti, il differenziale dell'hamiltoniana è, usando le (4.35), (4.37) e (4.39)

$$
\begin{aligned}
dH &= \int d^2\vec{x} \left[\pi_{(i)} d\left(\partial^0 \phi^{(i)}\right) + \partial^0 \phi^{(i)} d\pi_{(i)} - \frac{\delta^* L}{\delta^* \phi^{(i)}} d\phi^{(i)} - \frac{\delta^* L}{\delta^* \left(\partial^0 \phi^{(i)}\right)} d\left(\partial^0 \phi^{(i)}\right) \right] \\
&= \int d^2\vec{x} \left(\partial^0 \phi^{(i)} d\pi_{(i)} - \partial^0 \pi_{(i)} d\phi^{(i)} \right) \ .
\end{aligned}
\tag{4.42}
$$

Ma l'hamiltoniana può essere espressa come funzione delle sole variabili canoniche, ed il suo differenziale è anche

$$
dH = \int d^2\vec{x} \left(\frac{\delta^* H}{\delta^* \phi^{(i)}} d\phi^{(i)} + \frac{\delta^* H}{\delta^* \pi_{(i)}} d\pi_{(i)} \right) \ . \tag{4.43}
$$

Confrontando le (4.42) e (4.43) seguono allora le (4.40) e (4.41).
Nel caso in cui siano presenti anche derivate seconde nella lagrangiana, le equazioni di Eulero-Lagrange sono del quarto ordine

$$
\frac{\delta^* L}{\delta^* \phi^{(i)}} - \partial^0 \left(\frac{\delta^* L}{\delta^* \left(\partial^0 \phi^{(i)}\right)} - \partial^0 \frac{\delta^* L}{\delta^* \left(\partial^0 \partial^0 \phi^{(i)}\right)} \right) = 0 \ . \tag{4.44}
$$

Per ottenerne una forma del primo ordine nel tempo è necessario introdurre tre nuove variabili al posto delle derivate temporali

$$
\partial^0 \phi^{(i)} \to k^{(i)} \ , \tag{4.45}
$$

$$
\partial^0 \partial^0 \phi^{(i)} \to s^{(i)} \ , \tag{4.46}
$$

$$
\partial^0 \partial^0 \partial^0 \phi^{(i)} \to \pi^{(i)} \ . \tag{4.47}
$$

A questo scopo è conveniente definire la variabile

$$
k^{(i)} = \partial^0 \phi^{(i)} \tag{4.48}
$$

ed i momenti coniugati

$$
\begin{aligned}
\pi_{(i)} = \frac{\delta S}{\delta \left(\partial^0 \phi^{(i)}\right)} &= \frac{\delta^* L}{\delta^* \left(\partial^0 \phi^{(i)}\right)} - \partial^0 \frac{\delta^* L}{\delta^* \left(\partial^0 \partial^0 \phi^{(i)}\right)} \\
&= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial^0 \phi^{(i)}\right)} - 2\partial^\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial^0 \partial^\mu \phi^{(i)}\right)} + \partial^0 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial^0 \partial^0 \phi^{(i)}\right)} \ ,
\end{aligned}
\tag{4.49}
$$

$$
s_{(i)} = \frac{\delta S}{\delta \left(\partial^0 \partial^0 \phi^{(i)}\right)} = \frac{\delta^* L}{\delta^* \left(\partial^0 \partial^0 \phi^{(i)}\right)} = \frac{\partial L}{\partial \left(\partial^0 \partial^0 \phi^{(i)}\right)} \ , \tag{4.50}
$$

supponendo per semplicità che la lagrangiana sia non degenere per garantire la regolarità del cambiamento di variabili

$$
\det \left(\frac{\delta^2 S}{\delta \left(\partial^0 \partial^0 \phi^{(i)}\right) \delta \left(\partial^0 \partial^0 \phi^{(j)}\right)} \right) = \det \left(\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \left(\partial^0 \partial^0 \phi^{(i)}\right) \partial \left(\partial^0 \partial^0 \phi^{(j)}\right)} \right) \neq 0 \ . \tag{4.51}
$$

L'equazione del moto (4.44) diventa

$$\frac{\delta^* L}{\delta^* \phi^{(i)}} = \partial^0 \pi_{(i)} \tag{4.52}$$

e dalle definizioni dei momenti segue

$$\frac{\delta^* L}{\delta^* \partial^0 \phi^{(i)}} = \pi_{(i)} + \partial^0 s_{(i)} \ . \tag{4.53}$$

Eseguendo allora la trasformazione di Legendre generalizzata

$$\partial^0 \phi^{(i)} \to k^{(i)} \ , \tag{4.54}$$

$$\partial^0 \partial^0 \phi^{(i)} \to s^{(i)} \ , \tag{4.55}$$

$$\partial^0 \partial^0 \partial^0 \phi^{(i)} \to \pi^{(i)} \ , \tag{4.56}$$

$$\mathcal{L} \to \mathcal{H} = \pi_{(i)} k^{(i)} + s_{(i)} \left(\partial^0 k^{(i)} \right) - \mathcal{L} \ , \tag{4.57}$$

seguono le equazioni di Hamilton generalizzate

$$\partial^0 \phi^{(i)} = \frac{\delta^* H}{\delta^* \pi_{(i)}} \ , \tag{4.58}$$

$$\partial^0 k^{(i)} = \frac{\delta^* H}{\delta^* s_{(i)}} \ , \tag{4.59}$$

$$\partial^0 \pi_{(i)} = -\frac{\delta^* H}{\delta^* \phi^{(i)}} \ , \tag{4.60}$$

$$\partial^0 s_{(i)} = -\frac{\delta^* H}{\delta^* k^{(i)}} \ , \tag{4.61}$$

che rappresentano effettivamente una versione del primo ordine nel tempo delle equazioni del moto. Infatti, il differenziale dell'hamiltoniana è, usando le (4.48), (4.49), (4.50), (4.52), (4.53) e (4.57)

$$\begin{aligned}
dH = & \int d^2\vec{x} \left[\pi_{(i)} dk^{(i)} + \partial^0 \phi^{(i)} d\pi_{(i)} + s_{(i)} d\left(\partial^0 k^{(i)} \right) + \partial^0 k^{(i)} ds_{(i)} \right. \\
& \left. - \frac{\delta^* L}{\delta^* \phi^{(i)}} d\phi^{(i)} - \frac{\delta^* L}{\delta^* \left(\partial^0 \phi^{(i)} \right)} dk^{(i)} - \frac{\delta^* L}{\delta^* \left(\partial^0 \partial^0 \phi^{(i)} \right)} d\left(\partial^0 k^{(i)} \right) \right] \\
= & \int d^2\vec{x} \left[\pi_{(i)} dk^{(i)} + \partial^0 \phi^{(i)} d\pi_{(i)} + s_{(i)} d\left(\partial^0 k^{(i)} \right) + \partial^0 k^{(i)} ds_{(i)} \right. \\
& \left. - \partial^0 \pi_{(i)} d\phi^{(i)} - \left(\pi_{(i)} + \partial^0 s_{(i)} \right) dk^{(i)} - s_{(i)} d\left(\partial^0 k^{(i)} \right) \right] \\
= & \int d^2\vec{x} \left(\partial^0 \phi^{(i)} d\pi_{(i)} + \partial^0 k^{(i)} ds_{(i)} - \partial^0 \pi_{(i)} d\phi^{(i)} - \partial^0 s_{(i)} dk^{(i)} \right) \ .
\end{aligned} \tag{4.62}$$

Ma l'hamiltoniana può essere espressa come funzione delle sole variabili canoniche, ed il suo differenziale è anche

$$dH = \int d^2\vec{x} \left(\frac{\delta^* H}{\delta^* \phi^{(i)}} d\phi^{(i)} + \frac{\delta^* H}{\delta^* k^{(i)}} dk^{(i)} + \frac{\delta^* H}{\delta^* \pi_{(i)}} d\pi_{(i)} + \frac{\delta^* H}{\delta^* s_{(i)}} ds_{(i)} \right) \ . \tag{4.63}$$

Confrontando le (4.62) e (4.63) seguono allora le (4.58), (4.59), (4.60) e (4.61).
È facile a questo punto estendere il formalismo al caso in cui siano presenti derivate fino all'ordine n nella lagrangiana; le equazioni di Eulero-Lagrange sono di ordine $2n$

$$\frac{\delta^* L}{\delta^* \phi^{(i)}} - \partial^0 \left(\frac{\delta^* \mathcal{L}}{\delta^* \left(\partial^0 \phi^{(i)}\right)} - \partial^0 \frac{\delta^* \mathcal{L}}{\delta^* \left(\partial^0 \partial^0 \phi^{(i)}\right)} + \partial^0 \partial^0 \frac{\delta^* \mathcal{L}}{\delta^* \left(\partial^0 \partial^0 \partial^0 \phi^{(i)}\right)} - ... \right) = 0 \ . \tag{4.64}$$

Per ottenerne una forma del primo ordine nel tempo è necessario introdurre $2n - 1$ nuove variabili al posto delle derivate temporali

$$\partial^0 \phi^{(i)} \to \phi^{(i)}_{[2]} \ , \tag{4.65}$$

$$\left(\partial^0\right)^2 \phi^{(i)} \to \phi^{(i)}_{[3]} \ , \tag{4.66}$$

$$... \ ,$$

$$\left(\partial^0\right)^{n-1} \phi^{(i)} \to \phi^{(i)}_{[n]} \ , \tag{4.67}$$

$$\left(\partial^0\right)^{n} \phi^{(i)} \to \pi^{(i)}_{[n]} \ , \tag{4.68}$$

$$\left(\partial^0\right)^{n+1} \phi^{(i)} \to \pi^{(i)}_{[n-1]} \ , \tag{4.69}$$

$$... \ ,$$

$$\left(\partial^0\right)^{2n-1} \phi^{(i)} \to \pi^{(i)}_{[1]} \ . \tag{4.70}$$

A questo scopo è conveniente definire le variabili

$$\phi^{(i)}_{[a]} = \left(\partial^0\right)^{a-1} \phi^{(i)} \quad , \quad a = 1, 2, ..., n \tag{4.71}$$

ed i momenti coniugati

$$\pi^{[a]}_{(i)} = \frac{\delta S}{\delta \left(\partial^0 \phi^{(i)}_{[a]}\right)} = \frac{\delta^* L}{\delta^* \left(\partial^0 \phi^{(i)}_{[a]}\right)} - \partial^0 \frac{\delta^* L}{\delta^* \left(\partial^0 \partial^0 \phi^{(i)}_{[a]}\right)} + \partial^0 \partial^0 \frac{\delta^* L}{\delta^* \left(\partial^0 \partial^0 \partial^0 \phi^{(i)}_{[a]}\right)} - ... \quad , \quad a = 1, 2, ..., n \ , \tag{4.72}$$

supponendo per semplicità che la lagrangiana sia non degenere per garantire la regolarità del cambiamento di variabili

$$\det \left(\frac{\delta^2 S}{\delta \left(\left(\partial^0\right)^n \phi^{(i)}\right) \delta \left(\left(\partial^0\right)^n \phi^{(j)}\right)} \right) = \det \left(\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \left(\left(\partial^0\right)^n \phi^{(i)}\right) \partial \left(\left(\partial^0\right)^n \phi^{(j)}\right)} \right) \neq 0 \ . \tag{4.73}$$

L'equazione del moto (4.64) diventa

$$\frac{\delta^* L}{\delta^* \phi^{(i)}_{[1]}} = \partial^0 \pi^{[1]}_{(i)} \tag{4.74}$$

e dalle definizioni dei momenti segue

$$\frac{\delta^* L}{\delta^* \left(\partial^0 \phi^{(i)}_{[a]}\right)} = \pi^{[a]}_{(i)} + \partial^0 \pi^{[a+1]}_{(i)} \quad , \quad a = 1, 2, ..., n - 1 \ . \tag{4.75}$$

Eseguendo allora la trasformazione di Legendre generalizzata

$$\left(\partial^0\right)^{a-1}\phi^{(i)} \to \phi^{(i)}_{[a]} \quad , \quad a=1,2,...,n \ , \tag{4.76}$$

$$\left(\partial^0\right)^{2n-a}\phi^{(i)} \to \pi^{(i)}_{[a]} \quad , \quad a=1,2,...,n \ , \tag{4.77}$$

$$\mathcal{L} \to \mathcal{H} = \pi^{[a]}_{(i)}\partial^0\phi^{(i)}_{[a]} - \mathcal{L} \ , \tag{4.78}$$

seguono le equazioni di Hamilton generalizzate

$$\partial^0\phi^{(i)}_{[a]} = \frac{\delta^* H}{\delta^*\pi^{[a]}_{(i)}} \quad , \quad a=1,2,...,n \ , \tag{4.79}$$

$$\partial^0\pi^{[a]}_{(i)} = -\frac{\delta^* H}{\delta^*\phi^{(i)}_{[a]}} \quad , \quad a=1,2,...,n \ , \tag{4.80}$$

che rappresentano effettivamente una versione del primo ordine nel tempo delle equazioni del moto. Infatti, il differenziale dell'hamiltoniana è, usando le (4.71), (4.72), (4.74), (4.75) e (4.78)

$$\begin{aligned} dH = & \int d^2\vec{x}\,\Big[\pi^{[a]}_{(i)}d\left(\partial^0\phi^{(i)}_{[a]}\right) + \partial^0\phi^{(i)}_{[a]}d\pi^{[a]}_{(i)} \\ & \qquad -\frac{\delta*\mathcal{L}}{\delta*\phi^{(i)}_{[1]}}d\phi^{(i)}_{[1]} - \frac{\delta*\mathcal{L}}{\delta*\left(\partial^0\phi^{(i)}_{[1]}\right)}d\left(\partial^0\phi^{(i)}_{[1]}\right) - ... - \frac{\delta*\mathcal{L}}{\delta*\left(\partial^0\phi^{(i)}_{[n]}\right)}d\left(\partial^0\phi^{(i)}_{[n]}\right)\Big] \\ = & \int d^2\vec{x}\,\Big[\pi^{[a]}_{(i)}d\left(\partial^0\phi^{(i)}_{[a]}\right) + \partial^0\phi^{(i)}_{[a]}d\pi^{[a]}_{(i)} \\ & \qquad -\partial^0\pi^{[1]}_{(i)}d\phi^{(i)}_{[1]} - \left(\pi^{[1]}_{(i)} + \partial^0\pi^{[2]}_{(i)}\right)d\left(\partial^0\phi^{(i)}_{[1]}\right) - ... \\ & \qquad - \left(\pi^{[n-1]}_{(i)} + \partial^0\pi^{[n]}_{(i)}\right)d\left(\partial^0\phi^{(i)}_{[n-1]}\right) - \pi^{[n]}_{(i)}d\left(\partial^0\phi^{(i)}_{[n]}\right)\Big] \\ = & \int d^2\vec{x}\left(\partial^0\phi^{(i)}_{[a]}d\pi^{[a]}_{(i)} - \partial^0\pi^{[a]}_{(i)}d\phi^{(i)}_{[a]}\right) \ . \end{aligned} \tag{4.81}$$

Ma l'hamiltoniana può essere espressa come funzione delle sole variabili canoniche, ed il suo differenziale è anche

$$dH = \int d^2\vec{x}\left(\frac{\delta^* H}{\delta^*\phi^{(i)}_{[a]}}d\phi^{(i)}_{[a]} + \frac{\delta^* H}{\delta^*\pi^{[a]}_{(i)}}d\pi^{[a]}_{(i)}\right) \ . \tag{4.82}$$

Confrontando le (4.81) e (4.82) seguono allora le (4.79) e (4.80).

4.2.2 Variabili canoniche generalizzate

Alla luce di quanto visto appare chiaro che anche la formulazione hamiltoniana è facilmente estendibile al caso in cui la lagrangiana contiene derivate fino all'ordine n; infatti, la generalizzazione del formalismo si riassume nel definire come variabili indipendenti i campi e le loro derivate temporali fino all'ordine $n-1$

$$\phi^{(i)}_{[a]} = \left(\partial^0\right)^{a-1}\phi^{(i)} \quad , \quad a=1,2,...,n \tag{4.83}$$

ed associare ad ognuna di esse un momento coniugato definito dalla generalizzazione

$$\pi^{[a]}_{(i)} = \frac{\delta S}{\delta\left(\partial^0 \phi^{(i)}_{[a]}\right)} \quad , \quad a = 1, 2, ..., n \ . \tag{4.84}$$

È allora facile vedere che il formalismo canonico rimane intatto; infatti, data una variabile dinamica

$$G = \int d^2\vec{x}\mathcal{G}\left(\phi^{(i)}_{[a]}, \partial^k \phi^{(i)}_{[a]}, ..., \pi^{(i)}_{[a]}, \partial^k \pi^{(i)}_{[a]}, ...\right) \ , \tag{4.85}$$

la sua evoluzione temporale è, usando le equazioni di Hamilton generalizzate (4.79) e (4.80)

$$\frac{d}{dt}G = \frac{\partial}{\partial t}G + \int d^2\vec{x}\left(\frac{\delta^* G}{\delta^* \phi^{(i)}_{[a]}}\frac{\delta^* H}{\delta^* \pi^{[a]}_{(i)}} - \frac{\delta^* H}{\delta^* \phi^{(i)}_{[a]}}\frac{\delta^* G}{\delta^* \pi^{[a]}_{(i)}}\right) \ . \tag{4.86}$$

Definendo allora la parentesi di Poisson generalizzata come

$$\{A(\vec{x}, t), B(\vec{y}, t)\} = \int d^2\vec{z}\left(\frac{\delta^* A(\vec{x}, t)}{\delta^* \phi^{(i)}_{[a]}(\vec{z}, t)}\frac{\delta^* B(\vec{y}, t)}{\delta^* \pi^{[a]}_{(i)}(\vec{z}, t)} - \frac{\delta^* B(\vec{y}, t)}{\delta^* \phi^{(i)}_{[a]}(\vec{z}, t)}\frac{\delta^* A(\vec{x}, t)}{\delta^* \pi^{[a]}_{(i)}(\vec{z}, t)}\right) \ , \tag{4.87}$$

la (4.86) si scrive

$$\frac{d}{dt}G = \frac{\partial}{\partial t}G + \{G, H\} \tag{4.88}$$

e le equazioni di Hamilton generalizzate (4.79) e (4.80) diventano

$$\partial^0 \phi^{(i)}_{[a]} = \left\{\phi^{(i)}_{[a]}, H\right\} \ , \tag{4.89}$$

$$\partial^0 \pi^{[a]}_{(i)} = \left\{\pi^{[a]}_{(i)}, H\right\} \ . \tag{4.90}$$

Inoltre, dalla (4.87) seguono le parentesi canoniche

$$\left\{\phi^{(i)}_{[a]}(\vec{x}, t), \phi^{(j)}_{[b]}(\vec{y}, t)\right\} = 0 \ , \tag{4.91}$$

$$\left\{\pi^{[a]}_{(i)}(\vec{x}, t), \pi^{[b]}_{(j)}(\vec{y}, t)\right\} = 0 \ , \tag{4.92}$$

$$\left\{\phi^{(i)}_{[a]}(\vec{x}, t), \pi^{[b]}_{(j)}(\vec{y}, t)\right\} = \delta^{(i)}_{(j)}\delta^{[b]}_{[a]}\delta^2(\vec{x} - \vec{y}) \ . \tag{4.93}$$

Si noti infine che le variabili canoniche generalizzate coincidono con la componente zero delle variabili generalizzate introdotte nella formulazione lagrangiana solo nel caso in cui la lagrangiana contenga le sole derivate prime dei campi.

4.2.3 Tensori energia-impulso e di Lorentz canonici

È importante verificare che le cariche corrispondenti alla conservazione dei tensori energia-impulso e di Lorentz rappresentino effettivamente il quadrimpulso lineare ed angolare. Definendo

$$P^\mu = \int d^2\vec{x}T^{0\mu} \ , \tag{4.94}$$

$$M^{\mu\nu} = \int d^2\vec{x}M^{0\mu\nu} \ , \tag{4.95}$$

la conservazione durante il moto è assicurata dalle (4.26) e (4.27)

$$\partial^0 P^\mu = 0 \ , \tag{4.96}$$

$$\partial^0 M^{\mu\nu} = 0 \ , \tag{4.97}$$

mentre per identificare P^μ e $M^{\mu\nu}$ rispettivamente con il quadrimpulso lineare ed angolare è necessario verificare che essi generino rispettivamente le traslazioni e le rotazioni spazio-temporali

$$\left\{\phi^{(i)}_{[a]}(x)\,, P^\mu\right\} = \partial^\mu \phi^{(i)}_{[a]}(x) \ , \tag{4.98}$$

$$\left\{\phi^{(i)}_{[a]}(x)\,, M^{\mu\nu}\right\} = \left(x^\mu\partial^\nu - x^\nu\partial^\mu\right)\phi^{(j)}_{[a]}(x) + \left(\Sigma^{\mu\nu}{}_{00\ldots}{}^{\rho\tau\ldots}\right)^{(i)}_{[a]\ (j)}\partial_\rho\partial_\tau\ldots\phi^{(j)}(x) \ , \tag{4.99}$$

ove le matrici $\left(\Sigma^{\mu\nu}{}_{00\ldots}{}^{\rho\tau\ldots}\right)^{(i)}_{[a]\ (j)}$ indicano le matrici di spin associate alle $\phi^{(i)}_{[a]}$ e sono

$$\left(\Sigma^{\mu\nu}\right)^{(i)}_{[1]\ (j)} = \left(\Sigma^{\mu\nu}\right)^{(i)}{}_{(j)} \ , \tag{4.100}$$

$$\left(\Sigma^{\mu\nu}{}_0{}^\rho\right)^{(i)}_{[2]\ (j)} = \left(\Sigma^{\mu\nu}\right)^{(i)}{}_{(j)}\delta^\rho_0 - \left(\delta^\mu_0\eta^{\nu\rho} - \delta^\nu_0\eta^{\mu\rho}\right)\delta^{(i)}_{(j)} \ , \tag{4.101}$$

$$\left(\Sigma^{\mu\nu}{}_{00}{}^{\rho\tau}\right)^{(i)}{}_{(j)} = \left(\Sigma^{\mu\nu}\right)^{(i)}{}_{(j)}\delta^\rho_0\delta^\tau_0 - \left[\left(\delta^\mu_0\eta^{\nu\rho} - \delta^\nu_0\eta^{\mu\rho}\right)\delta^\tau_0 + \left(\delta^\mu_0\eta^{\nu\tau} - \delta^\nu_0\eta^{\mu\tau}\right)\delta^\rho_0\right]\delta^{(i)}_{(j)} \ , \tag{4.102}$$

$$\ldots \ .$$

Per verificare le (4.98) e (4.99) è opportuno esprimere P^μ e $M^{\mu\nu}$ in modo conveniente in termini delle variabili canoniche. Dalla (4.24) segue, eseguendo alcune integrazioni per parti

$$\begin{aligned} P^\mu &= \int d^2\vec{x}\left(\eta^{\mu 0}\mathcal{L} - \frac{\delta S}{\delta\left(\partial_0\phi^{(i)}_{[a]}\right)}\partial^\mu\phi^{(i)}_{[a]}\right) \\ &= \int d^2\vec{x}\left(\eta^{\mu 0}\mathcal{L} - \pi^{[a]}_{(i)}\partial^\mu\phi^{(i)}_{[a]}\right) \ , \end{aligned} \tag{4.103}$$

mentre dalla (4.25) segue, procedendo similmente ed usando le proprietà delle matrici di spin

$$\begin{aligned} M^{\mu\nu} = &\int d^2\vec{x}\left\{x^\mu\left(\eta^{\nu 0}\mathcal{L} - \pi^{[a]}_{(i)}\partial^\nu\phi^{(i)}_{[a]}\right) - x^\nu\left(\eta^{\mu 0}\mathcal{L} - \pi^{[a]}_{(i)}\partial^\mu\phi^{(i)}_{[a]}\right)\right. \\ &\left. + \frac{\delta S}{\delta\left(\partial_0\phi^{(i)}\right)}\left(\Sigma^{\mu\nu}\right)^{(i)}{}_{(j)}\phi^{(j)} + \frac{\delta S}{\delta\left(\partial_0\partial_0\phi^{(i)}\right)}\left(\Sigma^{\mu\nu}{}_0{}^\alpha\right)^{(i)}{}_{(j)}\left(\partial_\alpha\phi^{(j)}\right) + \ldots\right\} \\ = &\int d^2\vec{x}\left\{x^\mu\left(\eta^{\nu 0}\mathcal{L} - \pi^{[a]}_{(i)}\partial^\nu\phi^{(i)}_{[a]}\right) - x^\nu\left(\eta^{\mu 0}\mathcal{L} - \pi^{[a]}_{(i)}\partial^\mu\phi^{(i)}_{[a]}\right)\right. \\ &\left. + \pi^{[a]}_{(i)}\left(\Sigma^{\mu\nu}{}_{00\ldots}{}^{\alpha\beta\ldots}\right)^{(i)}_{[a]\ (j)}\left(\partial_\alpha\partial_\beta\ldots\phi^{(j)}\right)\right\} \ . \end{aligned} \tag{4.104}$$

Definendo allora

$$\Theta^{0\mu} = \eta^{\mu 0}\mathcal{L} - \pi^{[a]}_{(i)}\partial^\mu\phi^{(i)}_{[a]} \ , \tag{4.105}$$

$$\mathcal{M}^{0\mu\nu} = x^\mu\Theta^{0\nu} - x^\nu\Theta^{0\mu} + \pi^{[a]}_{(i)}\left(\Sigma^{\mu\nu}{}_{00\ldots}{}^{\alpha\beta\ldots}\right)^{(i)}_{[a]\ (j)}\partial_\alpha\partial_\beta\ldots\phi^{(j)} \ , \tag{4.106}$$

segue

$$P^\mu = \int d^2\vec{x}\Theta^{0\mu} \ , \tag{4.107}$$

$$M^{\mu\nu} = \int d^2\vec{x}\mathcal{M}^{0\mu\nu} \ . \tag{4.108}$$

Diventa allora banale, usando l'equazione del moto (4.89) e le parentesi canoniche (4.91), (4.92) e (4.93), verificare che valgono le (4.98) e (4.99); in particolare, si noti che

$$\mathcal{H} \neq T^{00} \tag{4.109}$$

ma

$$\mathcal{H} = \Theta^{00} \tag{4.110}$$

e quindi risulta, come deve

$$H = P^0 \ . \tag{4.111}$$

Quindi P^μ e $M^{\mu\nu}$ rappresentano effettivamente il quadrimpulso lineare ed angolare. Si noti tuttavia che i tensori $T^{\alpha\mu}$ e $M^{\alpha\mu\nu}$ non rappresentano direttamente le densità fisiche di quadrimpulso lineare ed angolare. Questa circostanza deriva dal fatto del tutto generale che le correnti di Noether conservate sono in realtà definite a meno della quadridivergenza di un superpotenziale e solo le cariche corrispondenti sono univocamente determinate. Ad ogni simmetria rimane però associata una ed una sola quantità fisica conservata, che è appunto la carica di Noether, e l'arbitrarietà della corrispondente equazione di continuità viene eliminata se questa è valutata su un elemento di volume piccolo ad arbitrio, come richiesto dalla misurabilità fisica, e non puntualmente. Rimangono comunque situazione in cui l'arbitrarietà delle densità viene fissata da una opportuna richiesta. In particolare, è facile vedere, procedendo esattamente come nelle (4.103) e (4.104), che una possibile versione, detta canonica, dei tensori energia-impulso e del momento angolare è

$$\Theta_C^{\alpha\mu} = \eta^{\alpha\mu}\mathcal{L} - \left(\pi^{[a]}_{(i)}\right)^\alpha \partial^\mu \phi^{(i)}_{[a]} \ , \tag{4.112}$$

$$\mathcal{M}_C^{\alpha\mu\nu} = x^\mu \Theta_C^{\alpha\nu} - x^\nu \Theta_C^{\alpha\mu} + \left(\pi^{[a]}_{(i)}\right)^\alpha \left(\Sigma^{\mu\nu}{}_{00\ldots}{}^{\rho\tau\ldots}\right)^{(i)}_{[a](j)} \partial_\rho \partial_\tau \ldots \phi^{(j)} \ , \tag{4.113}$$

con la ovvia generalizzazione

$$\begin{aligned}
\left(\pi^{[a]}_{(i)}\right)^\mu = & \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\phi^{(i)}_{[a]}\right)} - (a+1)\,\partial_m \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_m\partial_\mu\phi^{(i)}_{[a]}\right)} + (a+2)\,\partial_m\partial_n \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_m\partial_n\partial_\mu\phi^{(i)}_{[a]}\right)} - \ldots\right) \\
& -\partial^0 \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\phi^{(i)}_{[a+1]}\right)} - (a+2)\,\partial_m \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_m\partial_\mu\phi^{(i)}_{[a+1]}\right)} \right. \\
& \qquad \left. + (a+3)\,\partial_m\partial_n \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_m\partial_n\partial_\mu\phi^{(i)}_{[a+1]}\right)} - \ldots\right) \\
& +\partial^0\partial^0 \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\phi^{(i)}_{[a+2]}\right)} - (a+3)\,\partial_m \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_m\partial_\mu\phi^{(i)}_{[a+2]}\right)} \right. \\
& \qquad \left. + (a+4)\,\partial_m\partial_n \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_m\partial_n\partial_\mu\phi^{(i)}_{[a+2]}\right)} - \ldots\right) - \ldots \ .
\end{aligned} \tag{4.114}$$

Essa presenta il vantaggio di avere una espressione semplice in termini delle variabili canoniche e di permettere un calcolo facile delle parentesi di Poisson. Un'altra versione interessante dei tensori energia-impulso e del momento angolare è quella soddisfacente la richiesta di rappresentare le densità fisiche; deve quindi essere richiesta la simmetria del tensore energia-impulso. Esiste in proposito una procedura sistematica, dovuta a Bellinfante, che determina il superpotenziale da aggiungere [17]; la forma che si ottiene è poi

$$\Theta_B^{\alpha\mu} \ , \tag{4.115}$$

$$\mathcal{M}_B^{\alpha\mu\nu} = x^\mu \Theta_B^{\alpha\nu} - x^\nu \Theta_B^{\alpha\mu} \ . \tag{4.116}$$

L'importanza di questa ultima versione consiste nel fatto che il tensore energia-impulso da usare per un campo di materia in interazione con un campo gravitazionale è quello fisico, ovvero quello di Bellinfante.

4.3 Sistemi vincolati

Per trattare il caso più generale possibile, rimane da analizzare la situazione in cui la lagrangiana, oltre a contenere derivate fino all'ordine n, sia degenere. Questo è, come visto nel precedente capitolo, il caso di tutte le teorie vincolate; si noti poi che, incidentalmente, tutte le equazioni differenziali di ordine dispari non possono che provenire da una lagrangiana degenere, e descrivono quindi sistemi vincolati. Si è visto che, per garantire la possibilità di esprimere l'hamiltoniana univocamente in termini delle variabili generalizzate e dei momenti canonici, è necessario eliminare le derivate temporali fino all'ordine n; poiché le prime $n-1$ di queste sono definite come nuove variabili, la condizioni di invertibilità riguarda solo la derivata di ordine n. La lagrangiana è quindi degenere se, come già visto

$$\det\left(\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial\left(\left(\partial^0\right)^n \phi^{(i)}\right)\partial\left(\left(\partial^0\right)^n \phi^{(j)}\right)}\right) = 0 \ . \tag{4.117}$$

Tutti i momenti acquistano allora una arbitrarietà, poiché ognuno di essi contiene nella sua definizione un termine che dipende dalla derivata della lagrangiana rispetto alla derivata temporale di ordine n dei campi, come anche l'hamiltoniana e le equazioni del moto hamiltoniane. La situazione è quindi esattamente quella esaminata nel precedente capitolo, sempre considerando l'insieme esteso di variabili; come conseguenza della (4.117) sono presenti dei vincoli che legano in generale tutte le variabili e tutti i momenti

$$\vartheta\left(\phi_{[a]}^{(i)}, \partial^m \phi_{[a]}^{(i)}, \partial^m \partial^n \phi_{[a]}^{(i)}, ..., \pi_{[a]}^{(i)}, \partial^m \pi_{[a]}^{(i)}, \partial^m \partial^n \pi_{[a]}^{(i)}, ...\right) \approx 0 \tag{4.118}$$

e che sono incompatibili con le parentesi canoniche.

Per ottenere una versione hamiltoniana consistente deve essere applicata la procedura di Dirac. Tutto procede quindi come nel caso in cui la lagrangiana contiene solo derivate prime, ma con uno spazio delle fasi esteso.

Capitolo 5

Soluzioni classiche e quantistiche

In questo capitolo viene presentato un metodo generale di risoluzione della dinamica, a livello sia classico che quantistico, basato sulla funzione di Wightman. Viene sviluppato in particolare un metodo generale per la realizzazione dell'algebra di Weyl nel caso di teorie di gauge abeliane con equazione del moto reale, estendendo il lavoro di Bogolubov ed altri [43]-[52]. Viene infine sviluppato in quest'ambito un nuovo metodo, sistematico e del tutto generale, per la definizione di operatori di creazione ed annichilazione.

5.1 Soluzione classica

La soluzione classica del problema può essere ottenuta in vari modi; uno di questi, particolarmente interessante in vista della quantizzazione, è basato sulla generalizzazione a tempi diversi delle parentesi di Poisson.

5.1.1 Parentesi di Poisson a tempi diversi

La parentesi di Poisson a tempi uguali è stata definita, nel caso generale in cui la lagrangiana contiene derivate di ordine superiore, come

$$\{A(\vec{x},t)\,,B(\vec{y},t)\} = \int d^2\vec{z}\left(\frac{\delta^* A(\vec{x},t)}{\delta^*\phi^{(i)}_{[a]}(\vec{z},t)}\frac{\delta^* B(\vec{y},t)}{\delta^*\pi^{[a]}_{(i)}(\vec{z},t)} - \frac{\delta^* B(\vec{y},t)}{\delta^*\phi^{(i)}_{[a]}(\vec{z},t)}\frac{\delta^* A(\vec{x},t)}{\delta^*\pi^{[a]}_{(i)}(\vec{z},t)}\right) \quad . \tag{5.1}$$

Si dimostra facilmente che la parentesi cosi definita risulta essere invariante rispetto a trasformazioni canoniche delle variabili; in particolare, l'evoluzione temporale delle variabili può essere vista come una trasformazione canonica generata dall'hamiltoniana, e lascia quindi invariate le parentesi di Poisson. La (5.1) si può allora scrivere equivalentemente come

$$\{A(\vec{x},t)\,,B(\vec{y},t)\} = \int d^2\vec{z}\left(\frac{\delta^* A(\vec{x},t)}{\delta^*\phi^{(i)}_{[a]}(z)}\frac{\delta^* B(\vec{y},t)}{\delta^*\pi^{[a]}_{(i)}(z)} - \frac{\delta^* B(\vec{y},t)}{\delta^*\phi^{(i)}_{[a]}(z)}\frac{\delta^* A(\vec{x},t)}{\delta^*\pi^{[a]}_{(i)}(z)}\right) \quad , \tag{5.2}$$

con z^0 arbitrario. È allora immediato estendere la definizione a tempi diversi

$$\{A(x)\,,B(y)\} = \int d^2\vec{z}\left(\frac{\delta^* A(x)}{\delta^*\phi^{(i)}_{[a]}(z)}\frac{\delta^* B(y)}{\delta^*\pi^{[a]}_{(i)}(z)} - \frac{\delta^* B(y)}{\delta^*\phi^{(i)}_{[a]}(z)}\frac{\delta^* A(x)}{\delta^*\pi^{[a]}_{(i)}(z)}\right) \quad . \tag{5.3}$$

Nel caso in cui la lagrangiana sia degenere, le parentesi da usare sono quelle di Dirac e la loro definizione viene estesa a tempi diversi a partire dalla (5.3).

5.1.2 Funzioni di correlazione a due punti

La definizione (5.3) fornisce essenzialmente le funzioni a due punti della teoria.
Si definisce la funzione Δ come la parentesi di Poisson di due campi valutati in punti arbitrari

$$\Delta^{(i)(j)}(x,y) = \left\{\phi^{(i)}(x), \phi^{(j)}(y)\right\} \quad . \tag{5.4}$$

L'invarianza della teoria rispetto a traslazioni spazio-temporali garantisce poi che essa dipende solo dall'intervallo $x-y$

$$\Delta^{(i)(j)}(x,y) = \Delta^{(i)(j)}(x-y) \tag{5.5}$$

e dall'antisimmetria delle parentesi di Poisson seguono le proprietà

$$\Delta^{(i)(j)}(x-y) = -\Delta^{(j)(i)}(y-x) \quad , \tag{5.6}$$

$$(\partial_x^\mu)^m \Delta^{(i)(j)}(x-y) = \left(-\partial_y^\mu\right)^m \Delta^{(i)(j)}(x-y) \quad . \tag{5.7}$$

È immediato capire che la funzione Δ è determinata esplicitamente da un problema di Cauchy. Infatti, dalla sua definizione segue che essa soddisfa l'equazione di Eulero-Lagrange, che risulta essere di ordine $2n$ e può essere scritta operatorialmente come

$$\mathcal{O}_x^{(i)}{}_{(k)}\Delta^{(k)}{}_{(j)}(x-y) = 0 \ . \tag{5.8}$$

Le parentesi canoniche

$$\left\{\phi_{[a]}^{(i)}(\vec{x},t), \phi_{[b]}^{(j)}(\vec{y},t)\right\} = 0 \ , \tag{5.9}$$

$$\left\{\pi_{(i)}^{[a]}(\vec{x},t), \pi_{(j)}^{[b]}(\vec{y},t)\right\} = 0 \ , \tag{5.10}$$

$$\left\{\phi_{[a]}^{(i)}(\vec{x},t), \pi_{(j)}^{[b]}(\vec{y},t)\right\} = \delta_{(j)}^{(i)}\delta_{[a]}^{[b]}\delta^2(\vec{x}-\vec{y}) \tag{5.11}$$

forniscono poi le $2n$ condizioni iniziali indipendenti necessarie a rendere unica la soluzione. Infatti, ricordando le definizioni delle variabili generalizzate fatte nel precedente capitolo, la (5.9) fornisce

$$\left(\partial_x^0\right)^m \Delta^{(i)(j)}(\vec{x}-\vec{y},0) = 0 \quad , \quad m = 0,1,...,n-1 \ , \tag{5.12}$$

che sono n condizioni iniziali indipendenti sulla funzione Δ e le sue derivate temporali fino all'ordine $n-1$, mentre la (5.11) fornisce

$$\left\{\pi_{(i)}^{[1]}(\vec{x},t), \phi^{(j)}(\vec{y},t)\right\} = -\delta_{(i)}^{(j)}\delta^2(\vec{x}-\vec{y}) \quad , \tag{5.13}$$

$$\left\{\pi_{(i)}^{[m]}(\vec{y},t), \phi^{(j)}(\vec{x},t)\right\} = 0 \quad , \quad m = 2,3,...,n \ , \tag{5.14}$$

che sono n condizioni iniziali indipendenti sulle derivate temporali di ordine compreso fra n e $2n-1$.

Nel caso in cui la lagrangiana sia degenere, tutto procede nello stesso modo, usando le parentesi di Dirac invece di quelle di Poisson, e la definizione più generale della funzione Δ è

$$\Delta^{(i)(j)}\left(x-y\right)=\left\{\phi^{(i)}\left(x\right),\phi^{(j)}\left(y\right)\right\}^{*}\quad . \tag{5.15}$$

La determinazione della funzione Δ si riduce quindi alla risoluzione di un problema di Cauchy di ordine $2n$. Questo suggerisce che essa sia in qualche modo capace di fornire la soluzione del problema; infatti, essa può essere sfruttata per invertire le equazioni di Hamilton generalizzate. Si osservi a questo proposito che, essendo l'hamiltoniana una costante del moto indipendente dal tempo, l'equazione del moto hamiltoniana per il campo $\phi^{(i)}$ può essere scritta come una equazione integrale per quest'ultimo, la quale può essere integrata per ottenere il campo ad un tempo t in funzione del campo ad un tempo iniziale t_0.
La funzione Δ fornisce quindi effettivamente la soluzione del problema, a meno di una quadratura.
Dalla proprietà (5.6) della funzione Δ segue che essa è sempre decomponibile in due parti a frequenza positiva e negativa tali che

$$\Delta^{(i)(j)}\left(x-y\right)=Z^{(i)(j)}\left(x-y\right)-Z^{(j)(i)}\left(y-x\right) \tag{5.16}$$

e determinate univocamente dalla richiesta di soddisfare le equazioni del moto

$$\mathcal{O}_x^{(i)}{}_{(j)}Z^{(j)}{}_{(k)}\left(x-y\right)=0\quad , \tag{5.17}$$

con la condizione al contorno

$$Z^{(i)(j)}\left(\lambda z\right)\to 0\quad \text{per}\quad \lambda\to\infty\quad \text{e}\quad z^2<0\ . \tag{5.18}$$

La funzione Z rappresenta la parentesi delle parti a frequenza opposta di due campi in punti arbitrari

$$Z^{(i)(j)}\left(x-y\right)=\left\{\phi^{-(i)}\left(x\right),\phi^{+(j)}\left(y\right)\right\}^{*} \tag{5.19}$$

e le parti a frequenza positiva e negativa della funzione Δ sono allora date da

$$\Delta_{[a]}^{+(i)(j)}\left(x-y\right)=-Z^{(j)(i)}\left(y-x\right)\quad , \tag{5.20}$$

$$\Delta_{[a]}^{-(i)(j)}\left(x-y\right)=Z^{(i)(j)}\left(x-y\right)\quad , \tag{5.21}$$

Da queste e dal fatto che, ammesso che l'equazione del moto sia reale, la funzione Δ è reale, segue che la trasformata di Fourier della funzione di Z è antihermitiana

$$\tilde{Z}^{(i)(j)}\left(p\right)=-\tilde{Z}^{*(j)(i)}\left(p\right)\quad . \tag{5.22}$$

La funzione Z cosi definita non assume particolare rilevanza nel contesto classico della teoria, se non per il fatto che essa permette di introdurre il propagatore P; la definizione di quest'ultimo, estesa al caso di una lagrangiana completamente generica, è

$$\begin{aligned}P^{(i)(j)}\left(x-y\right)&=T\left\{\phi^{(i)}\left(x\right),\phi^{(j)}\left(y\right)\right\}^{*}\\&=\theta\left(x_0-y_0\right)Z^{(i)(j)}\left(x-y\right)+\theta\left(y_0-x_0\right)Z^{(j)(i)}\left(y-x\right)\quad .\end{aligned} \tag{5.23}$$

Anche se non è banale dimostrarlo nel caso generale, si può verificare caso per caso che il propagatore cosi definito è soluzione delle equazioni del moto con una sorgente puntiforme

$$\mathcal{O}_x^{(i)}{}_{(k)}P^{(k)}{}_{(j)}\left(x-y\right)=\delta^{(i)}_{(j)}\delta^3\left(x-y\right)\quad . \tag{5.24}$$

5.2 Soluzione quantistica

La teoria quantistica è ottenuta da quella classica mediante il principio di corrispondenza generalizzato

$$\{A, B\}^* \to -i\,[A, B] \quad . \tag{5.25}$$

Tutte le funzioni a due punti sono allora immediatamente estendibili al caso quantistico.
La funzione D è definita come il commutatore di due campi in punti arbitrari; essa risulta proporzionale alla funzione classica Δ e ne condivide quindi tutte le proprietà

$$D^{(i)(j)}(x-y) = \left[\phi^{(i)}(x), \phi^{(j)}(y)\right] = i\Delta^{(i)(j)}(x-y) \quad . \tag{5.26}$$

Essa rappresenta, allo stesso titolo che nel caso classico, la soluzione delle equazioni della teoria.
Come la funzione classica Δ, anche la funzione D è sempre decomponibile in due parti a frequenza positiva e negativa tali che

$$D^{(i)(j)}(x-y) = W^{(i)(j)}(x-y) - W^{(j)(i)}(y-x) \tag{5.27}$$

e determinate univocamente dalla richiesta di soddisfare le equazione del moto

$$\mathcal{O}_x^{(i)}{}_{(j)} W^{(j)}{}_{(k)}(x-y) = 0 \ , \tag{5.28}$$

con la condizione al contorno

$$W^{(i)(j)}(\lambda z) \to 0 \quad \text{per} \quad \lambda \to \infty \quad \text{e} \quad z^2 < 0 \ . \tag{5.29}$$

La funzione W è proporzionale alla funzione Z e rappresenta il commutatore delle parti a frequenza opposta di due campi in punti arbitrari

$$W^{(i)(j)}(x-y) = \left[\phi^{-(i)}(x), \phi^{+(j)}(y)\right] = iZ^{(i)(j)}(x-y) \quad . \tag{5.30}$$

Le parti a frequenza positiva e negativa della funzione D sono allora date da

$$D_{[a]}^{+(i)(j)}(x-y) = -W^{(j)(i)}(y-x) \quad , \tag{5.31}$$

$$D_{[a]}^{-(i)(j)}(x-y) = W^{(i)(j)}(x-y) \quad . \tag{5.32}$$

Da queste e dal fatto che, ammesso che l'equazione del moto sia reale, la funzione D è immaginaria, segue che la trasformata di Fourier della funzione W è hermitiana

$$\tilde{W}^{(i)(j)}(p) = \tilde{W}^{*(j)(i)}(p) \quad . \tag{5.33}$$

La funzione W viene detta funzione di Wightman e riveste una importanza notevole nella costruzione della teoria quantistica. Tutte le funzioni a due punti possono essere scritte come combinazioni lineari di questa funzione; in particolare, il propagatore S è per definizione

$$\begin{aligned} S^{(i)(j)}(x-y) &= T\left[\phi^{(i)}(x), \phi^{(j)}(y)\right] \\ &= \theta(x_0 - y_0)\, W^{(i)(j)}(x-y) + \theta(y_0 - x_0)\, W^{(j)(i)}(y-x) \\ &= iP^{(i)(j)}(x-y) \quad , \end{aligned} \tag{5.34}$$

e, dato che esso è proporzionale al propagatore classico, soddisfa l'equazione del moto con una sorgente puntiforme immaginaria

$$\mathcal{O}_x^{(i)}{}_{(k)} S^{(k)}{}_{(j)}(x-y) = i\delta^{(i)}_{(j)}\delta^3(x-y) \quad . \tag{5.35}$$

5.3 Realizzazione dell'algebra

La soluzione quantistica della dinamica è, come già accennato, completamente definita dalla conoscenza della funzione di Wightman. Tale soluzione consiste poi in una rappresentazione dell'algebra definita dal principio di corrispondenza, detta algebra di Weyl. La costruzione di una tale rappresentazione presuppone la definizione di uno spazio di Hilbert costituito dagli stati della teoria e dell'azione degli operatori di campo in esso. Le condizioni da adempire a questo scopo sono dettate dall'equazione del moto e dalle proprietà di coniugazione degli operatori, e concernono essenzialmente le definizioni del prodotto scalare e dell'azione degli operatori. Per contemplare anche il caso di teorie vincolate deve poi essere considerato il caso generale in cui lo spazio degli stati abbia metrica indefinita. Va infine notato che la rappresentazione dell'algebra di Weyl non è unica; sotto alcune ipotesi si può però dimostrare che due rappresentazioni distinte sono unitariamente equivalenti e producono quindi valori di aspettazione uguali. Purtroppo, tali ipotesi non sono soddisfatte in teoria dei campi, essenzialmente per la presenza di un numero infinito di gradi di libertà, e due rappresentazioni diverse dell'algebra possono, in linea di principio, produrre valori di aspettazione diversi, ovvero fisiche diverse [53][54]. Per esempio, le prescrizioni troppo empiriche di rinormalizzazione delle teorie di campo interagenti potrebbero, come tanti pensano, provenire soltanto da una scelta infelice della rappresentazione di lavoro. L'unica soluzione trovata finora a questo dilemma è quella di sperare di procedere nel modo giusto cercando di non introdurre troppa matematica ambigua nella teoria; in tal senso sono stati fatti notevoli progressi ed è stato almeno impostato un approccio assiomatico alla teoria dei campi che sembra promettere la possibilità di procedere correttamente dal punto di vista matematico. La rappresentazione qui presentata è orientata su questa linea di pensiero ed è stata sviluppata da Bogolubov [52].

5.3.1 Funzioni singolari e distribuzioni

La principale difficoltà matematica da affrontare nella realizzazione dell'algebra risiede nella presenza inevitabile di distribuzioni nell'analisi funzionale adoperata. Le distribuzioni sono essenzialmente funzioni altamente singolari che sono definite soltanto quando moltiplicate per una funzione regolare ed integrate; la richiesta fondamentale a cui esse devono soddisfare è quella di individuare, quando viste come integrandi, un funzionale ben definito e continuo. Per precisare ulteriormente le cose occorrono alcune definizioni [43][44].

Sia $S\left(R^n\right)$ lo spazio delle funzioni di classe C^∞ in R^n e decrescenti all'infinito più rapidamente di ogni polinomio. Una distribuzione $[f]$ può allora essere considerata come un oggetto matematico la cui azione in una integrazione venga definita mediante l'assegnazione di un funzionale continuo $F : S\left(R^n\right) \to R^n$

$$\int d^n x \left[f\left(x\right)\right] \varphi\left(x\right) \equiv \left(f, \varphi\right) \equiv F\left[\varphi\right] \quad . \tag{5.36}$$

La distribuzione $[f]$ rappresenta quindi una regola di integrazione che deve essere valida per ogni funzione di prova regolare $\varphi \in S\left(R^n\right)$ e tale che il funzionale cosi definito sia continuo. La proprietà di continuità permette poi di definire alternativamente il funzionale associato alla distribuzione come limite di una successione.

L'esempio più comune di distribuzione è quello della delta di Dirac; essa è definita, per esempio per $n = 1$, dal funzionale

$$\int dx \delta(x) \varphi(x) \equiv (\delta, \varphi) \equiv \varphi(0) \quad \forall \varphi \in S(R) \ . \tag{5.37}$$

Dalle definizioni fatte segue immediatamente la proprietà

$$(\phi f, \varphi) = (f, \phi \varphi) \quad \forall \varphi, \phi \in S(R^n) \ . \tag{5.38}$$

Nel caso particolare in cui la distribuzione $[f]$ sia una funzione f regolare contenuta in $S(R^n)$, il funzionale che la definisce deve ovviamente coincidere con la sua integrazione con una funzione di prova

$$\int d^n x \, [f(x)] \, \varphi(x) \equiv (f, \varphi) \equiv \int d^n x f(x) \varphi(x) \ . \tag{5.39}$$

In questo caso particolare risulta automaticamente definita la derivata della distribuzione tramite una integrazione per parti

$$\begin{aligned} \int d^n x \partial^a [f(x)] \varphi(x) &\equiv (\partial^a f, \varphi) \equiv \int d^n x \partial^a f(x) \varphi(x) \\ &= - \int d^n x f(x) \, \partial^a \varphi(x) \equiv (f, -\partial^a \varphi) \ . \end{aligned} \tag{5.40}$$

Questo suggerisce che una definizione generale e consistente della derivata di una distribuzione sia data dalla relazione

$$(\partial^a f, \varphi) \equiv (f, -\partial^a \varphi) \ . \tag{5.41}$$

Come conseguenza di questa definizione, l'operazione di derivazione è commutativa e individua una nuova distribuzione; ogni distribuzione $[f]$ è quindi infinitamente derivabile e soddisfa il teorema di Schwartz.
Con lo stesso procedimento si estende la definizione di trasformata di Fourier alle distribuzioni con la relazione

$$(F[f], \varphi) \equiv (f, F[\varphi]) \ . \tag{5.42}$$

Con il dovuto riguardo ed alcune modifiche, le definizioni fatte possono essere utilizzate vantaggiosamente per definire anche l'integrazione di funzioni localmente non integrabili in un numero finito di punti, associandovi una distribuzione il cui funzionale di definizione sia una versione opportunamente regolarizzata dell'integrale sennò indefinito. A seconda della regolarizzazione necessaria può però accadere che le proprietà (5.38), (5.41) e (5.42) vengano a trovarsi in disaccordo con la richiesta che la distribuzione definita coincida con la funzione di partenza nei punti in cui è localmente integrabile.
Un esempio di questo tipo, di particolare importanza nel caso bidimensionale, è quello della funzione singolare

$$f(x) = \frac{1}{\vec{x}^2} \ . \tag{5.43}$$

Essa non è definita né localmente integrabile in $\vec{x} = 0$ e per essere utilizzata operativamente, deve essere sostituita con una distribuzione $\left[\mathrm{Reg}\left[\frac{1}{\vec{x}^2}\right]\right]$ che differisca da essa solo nel punto di singolarità e garantisca l'uguaglianza

$$\left(\vec{x}^2 \mathrm{Reg}\left[\frac{1}{\vec{x}^2}\right], \varphi\right) = (1, \varphi) \ . \tag{5.44}$$

È chiaro che in questo caso la definizione semplice

$$\left(\mathrm{Reg}\left[\frac{1}{\vec{x}^2}\right],\varphi\right)=\int d^2\vec{x}\frac{1}{\vec{x}^2}\varphi\left(\vec{x}\right) \tag{5.45}$$

non è lecita poiché $\frac{1}{\vec{x}^2}\varphi\left(\vec{x}\right)$ non è integrabile $\forall\varphi\in S\left(R^2\right)$ in R^2 e non costituisce quindi una buona regolarizzazione. Infatti, l'integrale

$$\int_{|\vec{x}|<\epsilon} d^2\vec{x}\frac{1}{\vec{x}^2}\varphi\left(\vec{x}\right)=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\epsilon}d\left|\vec{x}\right|\frac{1}{|\vec{x}|}\varphi\left(\vec{x}\right) \tag{5.46}$$

esiste solo se $\varphi\rightarrow 0$ più rapidamente di $|\vec{x}|$ per $\vec{x}\rightarrow 0$. L'unico modo di fare convergere l'integrale $\forall\varphi\in S\left(R^2\right)$ è di evidenziare in qualche modo un fattore $|\vec{x}|$ in prossimità di $\vec{x}=0$. Questo è possibile, per esempio, con la definizione

$$\left(Reg\left[\frac{1}{\vec{x}^2}\right],\varphi\right)=\lim_{\epsilon\rightarrow 0}\left[\int_{|\vec{x}|<\epsilon}d^2\vec{x}\frac{1}{\vec{x}^2}\left(\varphi\left(\vec{x}\right)-\varphi\left(0\right)\right)+\int_{|\vec{x}|>\epsilon}d^2x\frac{1}{\vec{x}^2}\varphi\left(\vec{x}\right)\right] \ . \tag{5.47}$$

Il secondo pezzo è chiaramente integrabile $\forall\varphi\in S\left(R^2\right)$, mentre il primo pezzo è

$$\begin{aligned}
&\lim_{\epsilon\rightarrow 0}\int_{|\vec{x}|<\epsilon}d^2\vec{x}\frac{1}{\vec{x}^2}\left(\varphi\left(\vec{x}\right)-\varphi\left(0\right)\right)=\\
&\qquad\simeq\lim_{\epsilon\rightarrow 0}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\epsilon}d\left|\vec{x}\right|\frac{1}{|\vec{x}|}\left[\left(\varphi\left(0\right)+\vec{x}\cdot\vec{\nabla}\varphi\left(0\right)\right)-\varphi\left(0\right)\right]\\
&\qquad=\lim_{\epsilon\rightarrow 0}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\epsilon}d\left|\vec{x}\right|\frac{1}{|\vec{x}|}\vec{x}\cdot\vec{\nabla}\varphi\left(0\right)\\
&\qquad=\lim_{\epsilon\rightarrow 0}2\pi\epsilon\varphi'\left(0\right)\\
&\qquad=0 \ ,
\end{aligned} \tag{5.48}$$

ed è quindi anch'esso integrabile $\forall\varphi\in S\left(R^2\right)$. Poiché si verifica facilmente che rimane soddisfatta la richiesta (5.44), la definizione (5.47) individua effettivamente una versione corretta della distribuzione cercata e rappresenta una generalizzazione del concetto di parte principale.

La distribuzione di cui sopra, oltre che rappresentare un esempio interessante dal punto di vista matematico, riveste un ruolo importante nella fisica bidimensionale, poiché la sua antitrasformata di Fourier è legata alla funzione di Green del laplaciano. Infatti, quest'ultima è definita come soluzione dell'equazione

$$\nabla^2 G=\delta^2 \ . \tag{5.49}$$

Nello spazio dei momenti, questa si scrive

$$-\vec{p}^2\tilde{G}\left(\vec{p}\right)=1 \ . \tag{5.50}$$

Per quanto visto, una soluzione di quest'ultima è

$$\tilde{G}\left(\vec{p}\right)=-\mathrm{Reg}\left[\frac{1}{\vec{p}^2}\right] \ . \tag{5.51}$$

Usando la definizione (5.42), non è difficile verificare che nello spazio delle configurazioni si ha

$$G(\vec{x}) = \frac{1}{2\pi} \ln(|\vec{x}|) \quad . \tag{5.52}$$

Il fatto che la precedente sia effettivamente soluzione della (5.49) può essere verificato direttamente; infatti, dalle equazioni di Cauchy-Riemann segue

$$\nabla^2 \ln(|\vec{x}|) = 2\pi\delta^2(\vec{x}) \quad . \tag{5.53}$$

Da questo esempio appare chiaro il tipo di sottigliezze presenti nella trattazione delle funzioni di Green in due dimensioni; in particolare, va prestata particolare attenzione al comportamento infrarosso [43][44].
Si noti infine che il fatto che l'inverso del laplaciano bidimensionale sia $\ln(|\vec{x}|)$ e non $\frac{1}{|\vec{x}|}$ è in accordo con il fatto che esso descrive il potenziale di Coulomb; infatti, una carica puntiforme in uno spazio bidimensionale corrisponde ad un filo infinito uniformemente carico in uno spazio tridimensionale, il quale produce effettivamente un potenziale logaritmico a lungo raggio nella sezione bidimensionale in questione.

5.3.2 Spazio degli stati

Armati delle definizioni fatte, è possibile dare una definizione dello spazio degli stati che preveda anche l'azione di operatori coinvolgenti distribuzioni.
Si consideri lo spazio vettoriale $\mathcal{H}$

$$\mathcal{H} = \{|\Phi\rangle\} \tag{5.54}$$

costituito dalle sequenze

$$|\Phi\rangle = \left\{\phi_0, \phi_1^{(\mu_1)}(p_1), \phi_2^{(\mu_1)(\mu_2)}(p_1,p_2), ..., \phi_n^{(\mu_1)...(\mu_n)}(p_1, ..., p_n), ...\right\} \quad , \tag{5.55}$$

ove

$$\phi_n^{(\mu_1)...(\mu_n)}(p_1, ..., p_n) \in S\left(R^{3n}\right) \tag{5.56}$$

indica, limitandosi al caso bosonico, un tensore completamente simmetrico rispetto allo scambio

$$(\mu_i, p_i) \leftrightarrow (\mu_j, p_j) \quad . \tag{5.57}$$

Lo spazio $\mathcal{H}$ così definito costituisce lo spazio di Fock, e le funzioni $\phi_n^{(\mu_1)...(\mu_n)}(p_1, ..., p_n)$ rappresentano le componenti ad n particelle del generico stato. Per completarne la struttura deve essere definito un prodotto scalare; tale definizione deve mettere in gioco una delle funzioni di correlazione a due punti definite. Come conseguenza delle proprietà a cui deve soddisfare il prodotto scalare, si rivela particolarmente conveniente usare la funzione di Wightman. Limitandosi per il momento al sottospazio $\mathcal{H}'$ di $\mathcal{H}$, denso in $\mathcal{H}$, contenente gli stati con un numero finito di particelle

$$\mathcal{H}' = \left\{|\Phi\rangle \in \mathcal{H} : \exists n_0 \in N : \forall n > n_0 \quad \phi_n^{(\mu_1)...(\mu_n)}(p_1,...,p_n) = 0\right\} \quad , \tag{5.58}$$

il prodotto scalare può essere definito, $\forall\, |\Phi\rangle, |\Psi\rangle \in \mathcal{H}'$, come

$$\langle\Phi|\,\Psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \int \frac{d^3p_1}{(2\pi)^3} ... \int \frac{d^3p_n}{(2\pi)^3}$$
$$\phi^{*n}_{(\mu_1)...(\mu_n)}(p_1, .., p_n)\, \tilde{W}^{(\mu_1)}{}_{(\nu_1)}(p_1) ... \tilde{W}^{(\mu_n)}{}_{(\nu_n)}(p_n)\, \psi_n^{(\nu_1)...(\nu_n)}(p_1, .., p_n) \quad . \tag{5.59}$$

Grazie alla proprietà di hermiticità (5.33) della funzione di Wightman, il prodotto scalare cosi definito soddisfa la condizione

$$\langle\Phi|\ \Psi\rangle = \langle\Psi|\ \Phi\rangle^* \quad \forall\,|\Phi\rangle\,,|\Psi\rangle \in \mathcal{H}' \ . \tag{5.60}$$

Per definire nello spazio $\mathcal{H}'$ l'azione di un generico operatore $A\,(x)$ in modo da contemplare il caso generale in cui esso coinvolga una distribuzione $[A\,(x)]$, si introduce l'operatore addolcito

$$A\,[\varphi] = \int d^3x A\,(x)\,\varphi\,(x) = (A,\varphi) \quad \forall\varphi \in S\left(R^3\right) \ . \tag{5.61}$$

La definizione dell'azione di $A\,[\varphi]$ in $\mathcal{H}'$ è allora possibile e sufficiente a determinare univocamente anche l'azione di $A\,(x)$, poiché il funzionale di definizione della distribuzione $[A\,(x)]$ rimane cosi individuato e permette un limite in cui $\varphi \to \delta^3$. Definendo quindi in modo del tutto generale

$$A\,[\varphi]\,|\Phi\rangle = |\Psi\rangle \ , \tag{5.62}$$

$$\begin{aligned} &\psi_n^{(\mu_1)\ldots(\mu_n)}\,(p_1,\ldots,p_n) = \\ &\quad = \sum_{m=0}^{\infty} \int \frac{d^3q_1}{(2\pi)^3} \ldots \int \frac{d^3q_m}{(2\pi)^3} \\ &\qquad \mathcal{A}_n^{(\mu_1)\ldots(\mu_n)m}{}_{(\nu_1)\ldots(\nu_m)}\,(p_1,\ldots,p_n,q_1,\ldots,q_m,\tilde{\varphi}\,(q_1)\,,\ldots,\tilde{\varphi}\,(q_m)) \\ &\qquad \phi_m^{(\nu_1)\ldots(\nu_m)}\,(q_1,\ldots,q_m) \ , \end{aligned} \tag{5.63}$$

segue, poiché il funzionale definito deve essere continuo

$$A\,(x)\,|\Phi\rangle = |\Psi\rangle \ , \tag{5.64}$$

$$\begin{aligned} &\psi_n^{(\mu_1)\ldots(\mu_n)}\,(p_1,\ldots,p_n) = \\ &\quad = \lim_{\varphi\to\delta^3} \int \frac{d^3q_1}{(2\pi)^3} \ldots \int \frac{d^3q_m}{(2\pi)^3} \\ &\qquad \mathcal{A}_n^{(\mu_1)\ldots(\mu_n)m}{}_{(\nu_1)\ldots(\nu_m)}\,(p_1,\ldots,p_n,q_1,\ldots,q_m,\tilde{\varphi}\,(q_1)\,,\ldots,\tilde{\varphi}\,(q_m)) \\ &\qquad \phi_m^{(\nu_1)\ldots(\nu_m)}\,(q_1,\ldots,q_m) \ . \end{aligned} \tag{5.65}$$

Infine, per ottenere lo spazio degli stati $\mathcal{H}$ occorre completare lo spazio $\mathcal{H}'$. Tale completamento risulta però unico soltanto se la metrica è definita positiva, proprietà ovviamente soddisfatta nel sottospazio fisico di $\mathcal{H}$.

5.3.3 Operatori di campo

Sistemata cosi la questione delle distribuzioni nello spazio degli stati, possono essere definiti gli operatori di campo. Per questo vengono trattate separatamente le parti a frequenza positiva e negativa, poiché, come verrà verificato, corrispondono alle parti di innalzamento ed abbassamento dell'operatore

$$\phi^{(i)}\,(x) = \phi^{+(i)}\,(x) + \phi^{-(i)}\,(x) \ . \tag{5.66}$$

Procedendo nell'ottica illustrata, si definiscono $\forall\varphi \in S\left(R^3\right)$

$$\phi^{(i)}\left[\varphi\right] = \int d^3x\phi^{(i)}\left(x\right)\varphi\left(x\right) = \left(\phi^{(i)}, \varphi\right) \quad , \tag{5.67}$$

$$\phi^{+(i)}\left[\varphi\right] = \int d^3x\phi^{+(i)}\left(x\right)\varphi\left(x\right) = \left(\phi^{+(i)}, \varphi\right) \quad , \tag{5.68}$$

$$\phi^{-(i)}\left[\varphi\right] = \int d^3x\phi^{-(i)}\left(x\right)\varphi\left(x\right) = \left(\phi^{-(i)}, \varphi\right) \quad , \tag{5.69}$$

con le seguenti azioni in $\mathcal{H}'$

$$\begin{aligned} &\left(\phi^{+(i)}\left[\varphi\right]|\Phi\rangle\right)_n^{(\mu_1)\dots(\mu_n)}\left(p_1, \dots, p_n\right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{m=1}^{n}\phi_{n-1}^{(\mu_1)\dots(\mu_{m-1})(\mu_{m+1})\dots(\mu_n)}\left(p_1, \dots, p_{m-1}, p_{m+1}, \dots, p_n\right)\eta^{(i)(\mu_m)}\tilde{\varphi}\left(p_m\right) \quad , \end{aligned} \tag{5.70}$$

$$\begin{aligned} &\left(\phi^{-(i)}\left[\varphi\right]|\Phi\rangle\right)_n^{(\mu_1)\dots(\mu_n)}\left(p_1, \dots, p_n\right) = \\ &= \sqrt{n+1}\int\frac{d^3p}{\left(2\pi\right)^3}\tilde{W}^{(i)}{}_{(j)}\left(p\right)\phi_{n+1}^{(j)(\mu_1)\dots(\mu_n)}\left(p, p_1, \dots, p_n\right)\tilde{\varphi}\left(-p\right) \quad , \end{aligned} \tag{5.71}$$

$$\begin{aligned} &\left(\phi^{(i)}\left[\varphi\right]|\Phi\rangle\right)_n^{(\mu_1)\dots(\mu_n)}\left(p_1, \dots, p_n\right) = \\ &= \left(\phi^{+(i)}\left[\varphi\right]|\Phi\rangle\right)_n^{(\mu_1)\dots(\mu_n)}\left(p_1, \dots, p_n\right) + \left(\phi^{-(i)}\left[\varphi\right]|\Phi\rangle\right)_n^{(\mu_1)\dots(\mu_n)}\left(p_1, \dots, p_n\right) \quad . \end{aligned} \tag{5.72}$$

Segue

$$\begin{aligned} &\left(\phi^{+(i)}\left(x\right)|\Phi\rangle\right)_n^{(\mu_1)\dots(\mu_n)}\left(p_1, \dots, p_n\right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{m=1}^{n}\phi_{n-1}^{(\mu_1)\dots(\mu_{m-1})(\mu_{m+1})\dots(\mu_n)}\left(p_1, \dots, p_{m-1}, p_{m+1}, \dots, p_n\right)\eta^{(i)(\mu_m)}e^{ip_mx} \quad , \end{aligned} \tag{5.73}$$

$$\begin{aligned} &\left(\phi^{-(i)}\left(x\right)|\Phi\rangle\right)_n^{(\mu_1)\dots(\mu_n)}\left(p_1, \dots, p_n\right) = \\ &= \sqrt{n+1}\int\frac{d^3p}{\left(2\pi\right)^3}\tilde{W}^{(i)}{}_{(j)}\left(p\right)\phi_{n+1}^{(j)(\mu_1)\dots(\mu_n)}\left(p, p_1, \dots, p_n\right)e^{-ipx} \quad , \end{aligned} \tag{5.74}$$

$$\begin{aligned} &\left(\phi^{(i)}\left(x\right)|\Phi\rangle\right)_n^{(\mu_1)\dots(\mu_n)}\left(p_1, \dots, p_n\right) = \\ &= \left(\phi^{+(i)}\left(x\right)|\Phi\rangle\right)_n^{(\mu_1)\dots(\mu_n)}\left(p_1, \dots, p_n\right) + \left(\phi^{-(i)}\left(x\right)|\Phi\rangle\right)_n^{(\mu_1)\dots(\mu_n)}\left(p_1, \dots, p_n\right) \quad . \end{aligned} \tag{5.75}$$

Per dimostrare che gli operatori definiti in questo modo soddisfano l'equazione del moto di Eulero-Lagrange in $\mathcal{H}'$, è sufficiente dimostrare che in $\mathcal{H}'$ risulta

$$\phi^{(i)}\left[\mathcal{W}^{(j)}{}_{(i)}\varphi\right] = 0 \quad \forall\varphi \in S\left(R^3\right) \quad , \tag{5.76}$$

ove $\mathcal{W}^{(i)}{}_{(j)}$ indica l'operatore ottenuto integrando totalmente per parti l'operatore $\mathcal{O}^{(i)}{}_{(j)}$; infatti, la precedente, insieme alla (5.67), garantisce che, $\forall\varphi \in S\left(R^3\right)$

$$\mathcal{O}^{(i)}{}_{(j)}\phi^{(j)}\left[\varphi\right] = 0 \quad , \tag{5.77}$$

da cui segue in particolare che

$$\mathcal{O}^{(i)}{}_{(j)}\phi^{(j)}(x) = 0 \ . \tag{5.78}$$

A questo scopo, si osservi che nello spazio degli impulsi, gli operatori $\mathcal{O}^{(i)}{}_{(j)}$ e $\mathcal{W}^{(i)}{}_{(j)}$ si riducono a polinomi complessi indicati con

$$\mathcal{O}^{(i)}{}_{(j)}(p) \ , \tag{5.79}$$

$$\mathcal{W}^{(i)}{}_{(j)}(p) \ , \tag{5.80}$$

che, ammesso che l'equazione del moto sia reale, soddisfano le relazioni

$$\mathcal{W}^{(i)}{}_{(j)}(p) = \mathcal{O}^{*(i)}{}_{(j)}(p) \ , \tag{5.81}$$

$$\mathcal{O}^{*(i)}{}_{(j)}(p) = \mathcal{O}^{(i)}{}_{(j)}(-p) \ , \tag{5.82}$$

$$\mathcal{W}^{*(i)}{}_{(j)}(p) = \mathcal{W}^{(i)}{}_{(j)}(-p) \ . \tag{5.83}$$

Usando le precedenti relazioni si trova, $\forall\varphi \in S\left(R^3\right)$ e $\forall\left|\Phi\right\rangle \in \mathcal{H}'$

$$\begin{aligned}
&\left(\phi^{+(j)}\left[\mathcal{W}^{(i)}{}_{(j)}\varphi\right]\left|\Phi\right\rangle\right)_n^{(\mu_1)\ldots(\mu_n)}(p_1,\ldots,p_n) = \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{m=1}^{n}\phi_{n-1}^{(\mu_1)\ldots(\mu_{m-1})(\mu_{m+1})\ldots(\mu_n)}(p_1,\ldots,p_{m-1},p_{m+1},\ldots,p_n)\,\mathcal{O}^{*(i)(\mu_m)}(p_m)\,\tilde{\varphi}(p_m) \ ,
\end{aligned} \tag{5.84}$$

$$\begin{aligned}
&\left(\phi^{-(j)}\left[\mathcal{W}^{(i)}{}_{(j)}\varphi\right]\left|\Phi\right\rangle\right)_n^{(\mu_1)\ldots(\mu_n)}(p_1,\ldots,p_n) = \\
&= \sqrt{n+1}\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\tilde{W}^{(j)}{}_{(k)}(p)\,\phi_{n+1}^{(k)(\mu_1)\ldots(\mu_n)}(p,p_1,\ldots,p_n)\,\mathcal{O}^{(i)}{}_{(j)}(p)\,\tilde{\varphi}(-p) \ ,
\end{aligned} \tag{5.85}$$

da cui segue, sfruttando il fatto che la funzione di Wightman è soluzione dell'equazione del moto, $\forall\varphi \in S\left(R^3\right)$ e $\forall\left|\Phi\right\rangle,\left|\Psi\right\rangle \in \mathcal{H}'$

$$\begin{aligned}
&\left\langle\Psi\right|\phi^{+(j)}\left[\mathcal{W}^{(i)}{}_{(j)}\varphi\right]\left|\Phi\right\rangle = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{m=1}^{n}\int\frac{d^3p_1}{(2\pi)^3}\cdots\int\frac{d^3p_n}{(2\pi)^3}\psi^{*n}_{(\mu_1)\ldots(\mu_n)}(p_1,..,p_n) \\
&\quad \tilde{W}^{(\mu_1)}{}_{(\nu_1)}(p_1)\ldots\mathcal{O}^{*(i)(\nu_m)}(p_m)\,\tilde{W}^{*}{}_{(\nu_m)}{}^{(\mu_m)}(p_m)\ldots\tilde{W}^{(\mu_n)}{}_{(\nu_n)}(p_n) \\
&\quad \phi_{n-1}^{(\nu_1)\ldots(\nu_{m-1})(\nu_{m+1})\ldots(\nu_n)}(p_1,\ldots,p_{m-1},p_{m+1},\ldots,p_n)\,\tilde{\varphi}(p_m) \\
&= 0 \ ,
\end{aligned} \tag{5.86}$$

$$\begin{aligned}
&\left\langle\Psi\right|\phi^{-(j)}\left[\mathcal{W}^{(i)}{}_{(j)}\varphi\right]\left|\Phi\right\rangle = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sqrt{n+1}\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3p_1}{(2\pi)^3}\cdots\int\frac{d^3p_n}{(2\pi)^3}\psi^{*n}_{(\mu_1)\ldots(\mu_n)}(p_1,..,p_n) \\
&\quad \tilde{W}^{(\mu_1)}{}_{(\nu_1)}(p_1)\ldots\tilde{W}^{(\mu_n)}{}_{(\nu_n)}(p_n)\,\mathcal{O}^{(i)}{}_{(j)}(p)\,\tilde{W}^{(j)}{}_{(k)}(p) \\
&\quad \phi_{n+1}^{(k)(\mu_1)\ldots(\mu_n)}(p,p_1,\ldots,p_n)\,\tilde{\varphi}(-p) \\
&= 0 \ .
\end{aligned} \tag{5.87}$$

Quindi, $\phi^{+(i)}(x)$ e $\phi^{-(i)}(x)$ sono entrambi soluzioni dell'equazione del moto; in particolare, la loro somma $\phi^{(i)}(x)$ è anch'essa soluzione.
Una seconda richiesta da verificare, sempre nel caso in cui l'equazione del moto risulti reale, è l'hermiticità dell'operatore $\phi^{(i)}(x)$ rispetto al prodotto scalare definito. Questa può essere dimostrata tramite il risultato più forte

$$\left(\phi^{+(i)}[\varphi]\right)^{+} = \phi^{-(i)}[\varphi] \quad \forall\varphi \text{ reale} \in S\left(R^3\right) \tag{5.88}$$

che garantisce in particolare che $\phi^{(i)}(x)$ coincida con la sua parte hermitiana. Infatti, se $\varphi \in S\left(R^3\right)$ è reale, la sua trasformata di Fourier soddisfa la proprietà

$$\tilde{\varphi}(-p) = \tilde{\varphi}^*(p) \quad , \tag{5.89}$$

per cui, $\forall\varphi$ reale $\in S\left(R^3\right)$ e $\forall\left|\Phi\right\rangle, \left|\Psi\right\rangle \in \mathcal{H}'$ si ha

$$\begin{aligned}
&\left\langle\Psi\right|\phi^{+(i)}[\varphi]\left|\Phi\right\rangle = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{m=1}^{n}\int\frac{d^3p_1}{(2\pi)^3}...\int\frac{d^3p_{m-1}}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3p_{m+1}}{(2\pi)^3}...\int\frac{d^3p_n}{(2\pi)^3} \\
&\quad \left[\int\frac{d^3p_m}{(2\pi)^3}\tilde{W}^{(\mu_m)(i)}(p_m)\,\psi^{*n}_{(\mu_1)...(\mu_n)}(p_1,..,p_n)\,\tilde{\varphi}(p_m)\right] \\
&\quad \tilde{W}^{(\mu_1)}{}_{(\nu_1)}(p_1)...\tilde{W}^{(\mu_{m-1})}{}_{(\nu_{m-1})}(p_{m-1})\,\tilde{W}^{(\mu_{m+1})}{}_{(\nu_{m+1})}(p_{m+1})...\tilde{W}^{(\mu_n)}{}_{(\nu_n)}(p_n) \\
&\quad \phi_{n-1}^{(\nu_1)...(\nu_{m-1})(\nu_{m+1})...(\nu_n)}(p_1,...,p_{m-1},p_{m+1},...,p_n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\int\frac{d^3p_1}{(2\pi)^3}...\int\frac{d^3p_n}{(2\pi)^3} \\
&\quad \left[\sqrt{n+1}\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\tilde{W}^{*(i)(j)}(p)\,\psi^{*n+1}_{(j)(\mu_1)...(\mu_n)}(p,p_1,..,p_n)\,\tilde{\varphi}^*(-p)\right] \\
&\quad \tilde{W}^{(\mu_1)}{}_{(\nu_1)}(p_1)...\tilde{W}^{(\mu_n)}{}_{(\nu_n)}(p_n)\,\phi_n^{(\nu_1)...(\nu_n)}(p_1,...,p_n) \\
&= \left\langle\Phi\right|\phi^{-(i)}[\varphi]\left|\Psi\right\rangle^* \quad ,
\end{aligned} \tag{5.90}$$

da cui segue, per definizione di operatore aggiunto, la (5.88).
L'ultimo passo necessario per dimostrare che le definizioni fatte realizzano l'algebra di Weyl consiste nel verificare che gli operatori di campo introdotti soddisfino le regole di commutazione giuste; sfruttando i risultati già ottenuti, si ha, $\forall\varphi,\chi \in S\left(R^3\right)$ e $\forall\left|\Phi\right\rangle \in \mathcal{H}'$

$$\begin{aligned}
&\left(\phi^{+(i)}[\varphi]\,\phi^{+(j)}[\chi]\left|\Phi\right\rangle\right)_n^{(\mu_1)...(\mu_n)}(p_1,...,p_n) = \\
&= \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}\sum_{\substack{k,m=1\\k\neq m}}^{n}\eta^{(i)(\mu_k)}\eta^{(j)(\mu_m)}\tilde{\varphi}(p_k)\,\tilde{\chi}(p_m) \\
&\quad \phi_{n-2}^{(\mu_1)...(\mu_{m-1})(\mu_{m+1})...(\mu_{k-1})(\mu_{k+1})...(\mu_n)}(p_1,...,p_{m-1},p_{m+1},...,p_{k-1},p_{k+1},...,p_n) \quad ,
\end{aligned} \tag{5.91}$$

$$\left(\phi^{-(i)}\left[\varphi\right]\phi^{-(j)}\left[\chi\right]|\Phi\rangle\right)_n^{(\mu_1)\dots(\mu_n)}(p_1,\dots,p_n)=$$
$$=\sqrt{(n+1)(n+2)}\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\tilde{W}^{(i)}{}_{(k)}(p)\,\tilde{W}^{(j)}{}_{(l)}(q)\,\tilde{\varphi}(-p)\,\tilde{\chi}(-q) \qquad (5.92)$$
$$\phi_{n+2}^{(k)(l)(\mu_1)\dots(\mu_n)}(p,q,p_1,\dots,p_n)\quad,$$

$$\left(\phi^{+(i)}\left[\varphi\right]\phi^{-(j)}\left[\chi\right]|\Phi\rangle\right)_n^{(\mu_1)\dots(\mu_n)}(p_1,\dots,p_n)=$$
$$=\sum_{m=1}^{n}\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\eta^{(i)(\mu_m)}\tilde{W}^{(j)}{}_{(k)}(p)\,\tilde{\varphi}(p_m)\,\tilde{\chi}(-p) \qquad (5.93)$$
$$\phi_n^{(k)(\mu_1)\dots(\mu_{m-1})(\mu_{m+1})\dots(\mu_n)}(p,p_1,\dots,p_{m-1},p_{m+1},\dots,p_n)\quad,$$

$$\left(\phi^{-(i)}\left[\varphi\right]\phi^{+(j)}\left[\chi\right]|\Phi\rangle\right)_n^{(\mu_1)\dots(\mu_n)}(p_1,\dots,p_n)=$$
$$=\sum_{m=1}^{n}\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\eta^{(j)(\mu_m)}\tilde{W}^{(i)}{}_{(k)}(p)\,\tilde{\varphi}(-p)\,\tilde{\chi}(p_m)$$
$$\phi_n^{(k)(\mu_1)\dots(\mu_{m-1})(\mu_{m+1})\dots(\mu_n)}(p,p_1,\dots,p_{m-1},p_{m+1},\dots,p_n) \qquad (5.94)$$
$$+\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\tilde{W}^{(i)(j)}(p)\,\phi_n^{(\mu_1)\dots(\mu_n)}(p_1,\dots,p_n)\,\tilde{\varphi}(-p)\,\tilde{\chi}(p)\quad.$$

Risulta quindi, $\forall\varphi,\chi\in S\left(R^3\right)$ e $\forall|\Phi\rangle\in\mathcal{H}'$

$$\left(\left[\phi^{+(i)}\left[\varphi\right],\phi^{+(j)}\left[\chi\right]\right]|\Phi\rangle\right)_n^{(\mu_1)\dots(\mu_n)}(p_1,\dots,p_n)=0\quad, \qquad (5.95)$$
$$\left(\left[\phi^{-(i)}\left[\varphi\right],\phi^{-(j)}\left[\chi\right]\right]|\Phi\rangle\right)_n^{(\mu_1)\dots(\mu_n)}(p_1,\dots,p_n)=0\quad, \qquad (5.96)$$
$$\left(\left[\phi^{-(i)}\left[\varphi\right],\phi^{+(j)}\left[\chi\right]\right]|\Phi\rangle\right)_n^{(\mu_1)\dots(\mu_n)}(p_1,\dots,p_n)=$$
$$=\left[\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\tilde{\varphi}(-p)\,\tilde{W}^{(i)(j)}(p)\,\tilde{\chi}(p)\right]\left(|\Phi\rangle\right)_n^{(\mu_1)\dots(\mu_n)}(p_1,\dots,p_n)\quad, \qquad (5.97)$$

da cui seguono le regole di commutazione

$$\left[\phi^{\pm(i)}\left[\varphi\right],\phi^{\pm(j)}\left[\chi\right]\right]=0\quad, \qquad (5.98)$$

$$\left[\phi^{-(i)}\left[\varphi\right],\phi^{+(j)}\left[\chi\right]\right]=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\tilde{\varphi}(-p)\,\tilde{W}^{(i)(j)}(p)\,\tilde{\chi}(p)$$
$$=\int d^3x\int d^3y\varphi(x)\,W^{(i)(j)}(x-y)\,\chi(y) \qquad (5.99)$$
$$=\int d^3x\int d^3y\varphi(x)\,D^{-(i)(j)}(x-y)\,\chi(y)\quad,$$

$$\left[\phi^{+(i)}\left[\varphi\right],\phi^{-(j)}\left[\chi\right]\right]=-\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\tilde{\varphi}(-p)\,\tilde{W}^{(j)(i)}(-p)\,\tilde{\chi}(p)$$
$$=-\int d^3x\int d^3y\varphi(x)\,W^{(j)(i)}(y-x)\,\chi(y) \qquad (5.100)$$
$$=\int d^3x\int d^3y\varphi(x)\,D^{+(i)(j)}(x-y)\,\chi(y)\quad,$$

$$\begin{aligned}\left[\phi^{(i)}[\varphi],\phi^{(j)}[\chi]\right] &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\tilde{\varphi}(-p)\,D^{(i)(j)}(p)\,\tilde{\chi}(p) \\ &= \int d^3x \int d^3y \varphi(x)\,D^{(i)(j)}(x-y)\,\chi(y) \ ,\end{aligned} \tag{5.101}$$

ed in particolare

$$\left[\phi^{\pm(i)}(x),\phi^{\pm(j)}(y)\right] = 0 \ , \tag{5.102}$$

$$\left[\phi^{\pm(i)}(x),\phi^{\mp(j)}(y)\right] = D^{\pm(i)(j)}(x-y) \ , \tag{5.103}$$

$$\left[\phi^{(i)}(x),\phi^{(j)}(y)\right] = D^{(i)(j)}(x-y) \ . \tag{5.104}$$

Questo completa la dimostrazione di consistenza della rappresentazione illustrata.
Infine, vale la pena notare che, indicando con

$$|\Omega\rangle = \{\omega_0, 0, 0, ...\} \tag{5.105}$$

il vuoto del sistema, le funzioni a due punti della teoria possono essere scritte semplicemente come

$$W^{(i)(j)}(x-y) = \langle\Omega|\,\phi^{(i)}(x)\,\phi^{(j)}(y)\,|\Omega\rangle \ , \tag{5.106}$$

$$D^{(i)(j)}(x-y) = \langle\Omega|\left[\phi^{(i)}(x),\phi^{(j)}(y)\right]|\Omega\rangle \ , \tag{5.107}$$

$$S^{(i)(j)}(x-y) = \langle\Omega|\,T\left(\phi^{(i)}(x)\,\phi^{(j)}(y)\right)|\Omega\rangle \ , \tag{5.108}$$

5.3.4 Spazio degli stati fisici

Appare evidente che la rappresentazione introdotta non è limitata in alcun modo dalla forma particolare della funzione di Wightman e contempla anche il caso in cui quest'ultima appartenga ad un sistema vincolato. Per capire come si riflettono le caratteristiche di una teoria, ed in particolare il numero di gradi di libertà fisici che essa contiene, sulla funzione di Wightman, è utile analizzare la forma generale di quest'ultima. Si consideri per questo l'equazione del moto scritta operatorialmente

$$\mathcal{O}^{(i)}{}_{(j)}\phi^{(j)}(x) = 0 \ . \tag{5.109}$$

La sua forma può essere classificata essenzialmente in due casi.
Nel primo caso, la teoria non è vincolata e l'operatore $\mathcal{O}^{(i)}{}_{(j)}$ è invertibile. Come conseguenza, la funzione di Wightman ha autovalori positivi non nulli e genera uno spazio degli stati con metrica definita positiva. Tutti i gradi di libertà del campo sono quindi fisici.
Nel secondo caso, la teoria è vincolata e l'operatore $\mathcal{O}^{(i)}{}_{(j)}$ non è invertibile. Alcuni degli autovalori della funzione di Wightman sono allora nulli o negativi, e lo spazio degli stati ha metrica indefinita, come conseguenza dei vincoli. Questi ultimi vengono imposti come condizioni deboli sugli stati fisici usando solo la loro parte di annichilazione

$$G^{-[a]}\left(\phi^{(j)}(x),\partial^{\mu}\phi^{(j)}(x),...\right)|\Phi\rangle = 0 \ . \tag{5.110}$$

Il sottospazio degli stati fisici deve avere metrica definita positiva.
L'analisi di un sistema vincolato può quindi essere svolta convenientemente ed è basata sull'imposizione dei vincoli non risolti con la procedura di Dirac e l'analisi degli autovalori ed autovettori della funzione di Wightman.

Del tutto in generale, esistono argomenti per asserire che una teoria di campo relativistica e locale sia caratterizzata da un'equazione del moto del tipo (5.109) con la proprietà di essere riconducibile ad equazioni scalari; più precisamente, esiste sempre un operatore differenziale ${\mathcal{O}'^{(i)}}_{(j)}$ tale che

$$ {\mathcal{O}'^{(i)}}_{(k)} {\mathcal{O}^{(k)}}_{(j)} = \mathcal{O} {\delta^{(i)}}_{(j)} \quad , \tag{5.111} $$

ove $\mathcal{O}$ è un operatore differenziale scalare. L'operatore ${\mathcal{O}'^{(i)}}_{(j)}$ è detto cofattore.
Come conseguenza di questa proprietà, la forma generale della funzione di Wightman è, nello spazio dei momenti

$$ \tilde{W}^{(i)(j)}(p) = 2\pi\theta(p_0) \sum_{n=1}^{N} \delta\left(p^2 - \mu_n^2\right) W^{\mu_n(i)(j)}(p) \quad , \tag{5.112} $$

ove i parametri μ_n hanno dimensione $[m]$ e sono funzioni dei parametri che compaiono nella lagrangiana, e le matrici $W^{\mu_n(i)(j)}(p)$ sono hermitiane; la precedente si estende a qualunque prodotto di operatori ed è nota come rappresentazione spettrale [46]. In particolare, è importante il fatto che il supporto della funzione di Wightman sia l'unione di N iperboloidi di dispersione relativistica

$$ V^+_{\mu_n} = \left\{p \in R^3 : p^2 = \mu_n^2, p_0 \geq 0\right\} \quad . \tag{5.113} $$

Questo permette infatti di analizzare separatamente le componenti a massa diversa.
La determinazione del sottospazio fisico degli stati a norma positiva si riduce alla risoluzione del problema agli autovalori per le N matrici $W^{\mu_n(i)(j)}(p)$ sul relativo iperboloide

$$ {W^{\mu_n(i)}}_{(j)}(p) f^{\mu_n(j)}_{[k]}(p) = \lambda^{\mu_n}_{[k]}(p) f^{\mu_n(i)}_{[k]}(p) \quad , \quad p \in V^+_{\mu_n} \quad . \tag{5.114} $$

Dall'hermiticità delle matrici $W^{\mu_n(i)(j)}(p)$ segue che gli autovalori λ^{μ_n} sono reali e che gli autovettori $f^{\mu_n(i)}(p)$ formano una base completa su $V^+_{\mu_n}$. Poiché la metrica interna dei campi $\eta^{(i)(j)}$, anche se piatta, non è sempre definita positiva, gli autovettori sono normalizzabili a ± 1

$$ f^{\mu_n(i)}_{[k]}(p) f^{*\mu_n}_{[l](i)}(p) = \pm\eta_{[k][l]} \quad , \quad p \in V^+_{\mu_n} \quad , \tag{5.115} $$

e le matrici $W^{\mu_n(i)(j)}(p)$ si possono scrivere come prodotto cartesiano degli autovettori

$$ W^{\mu_n(i)(j)}(p) = \pm \sum\nolimits_{[k]} \eta_{[k][k]} \lambda^{\mu_n}_{[k]}(p) f^{\mu_n(i)}_{[k]}(p) f^{*\mu_n(j)}_{[k]}(p) \quad , \quad p \in V^+_{\mu_n} \quad . \tag{5.116} $$

Si consideri ora un generico stato ad una particella; chiaramente, esso deve avere supporto contenuto in quello della funzione di Wightman per avere norma non nulla, e può quindi essere scritto come combinazione lineare degli autovettori $f^{\mu_n(i)}_{[k]}(p)$

$$ |\Phi\rangle = \left\{0, \phi^{(i)}_1(p), 0, 0, ...\right\} \quad , \tag{5.117} $$

$$ \phi^{(i)}_1(p) = \sum_{n=1}^{N} \sum\nolimits_{[k]} a^{\mu_n}_{[k]}(p) f^{\mu_n(i)}_{[k]}(p) \quad . \tag{5.118} $$

Le funzioni scalari arbitrarie $a^{\mu_n}_{[k]}$ rappresentano a tutti gli effetti i gradi di libertà funzionali degli stati e giocano il ruolo di funzioni d'onda.

Prestando attenzione al fatto che ogni autovettore è definito identicamente nullo fuori dal suo supporto, la norma del generico stato ad una particella è

$$\begin{aligned}
\langle\Phi|\ \Phi\rangle &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\phi_1^{*(i)}(p)\,\tilde{W}_{(i)(j)}(p)\,\phi_1^{(j)}(p) \\
&= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\left[\sum_{a=1}^{N}\sum\nolimits_{[k]} a_{[k]}^{*\mu_a}(p)\,f_{[k]}^{*\mu_a(i)}(p)\right] \\
&\quad \left[\sum_{n=1}^{N} 2\pi\theta(p_0)\,\delta\left(p^2-\mu_n^2\right)W_{(i)(j)}^{\mu_n}(p)\right]\left[\sum_{b=1}^{N}\sum\nolimits_{[l]} a_{[l]}^{\mu_b}(p)\,f_{[l]}^{\mu_b(j)}(p)\right] \\
&= \pm\sum_{n=1}^{N}\sum\nolimits_{[k]}\int\frac{d^3p}{(2\pi)^2}\theta(p_0)\,\delta\left(p^2-\mu_n^2\right)\eta_{[k][k]}\lambda_{[k]}^{\mu_n}(p)\left|a_{[k]}^{\mu_n}(p)\right|^2 \quad .
\end{aligned} \tag{5.119}$$

Quindi, il segno del contributo alla norma proveniente dal sottospazio generato dall'autovettore $f_{[k]}^{\mu_n(i)}(p)$ è pari al segno di $\pm\eta_{[k][k]}\lambda_{[k]}^{\mu_n}(p)$; si osservi in particolare che esso dipende dal segno di normalizzazione.

In corrispondenza di questo risultato, l'imposizione debole dei vincoli (5.110) sugli stati fisici ad una particella si riduce all'eliminazione della porzione di autovettori che non li soddisfa. Deve poi essere verificato, per garantire l'interpretazione quantistica usuale, che questi ultimi corrispondano a tutti e soli gli autovettori con autovalori con segno tale da dare un contributo negativo alla norma. Gli autovettori rimasti formano la base dello spazio degli stati fisici ad una particella.

Per le definizioni fatte, lo spazio degli stati ad n particelle è il prodotto cartesiano simmetrizzato di n spazi ad una particella, e la sua parte fisica rimane quindi individuata dal precedente ragionamento, svolto nel caso di una sola particella. Come conseguenza, anche tutto il sottospazio fisico $\mathcal{H}''$ di $\mathcal{H}'$ rimane definito e può inoltre essere completato in modo unico per contenere anche gli stati con un numero infinito di particelle, poiché ha metrica non negativa.

Infine, può accadere che lo spazio cosi definito contenga ancora un sottospazio a norma nulla, ovvero stati che non contribuiscono a nessun valore di aspettazione. Per eliminarli, si definisce lo spazio degli stati fisici finale $\mathcal{H}_f$ come spazio quoziente di $\mathcal{H}''$ rispetto al suo sottospazio a norma nulla. A questo proposito, va notato che la presenza di un sottospazio a norma nulla permette, nella maggior parte dei casi, di associare alla struttura di gauge di una teoria una particolare operazione di proiezione; per esempio, è ben noto che alla invarianza di gauge dell'elettrodinamica corrisponde una proiezione sulla parte trasversale. Se tutte le condizioni citate sono verificate, lo spazio degli stati è quindi formato dagli stati a norma positiva non nulla dello spazio di partenza $\mathcal{H}$ e soddisfacenti la condizione di gauge, ovvero

$$\mathcal{H}_f = \left\{|\Phi\rangle \in \mathcal{H} : \langle\Phi|\ \Phi\rangle > 0, G^{-[a]}(x)\,|\Phi\rangle = 0\right\} \quad . \tag{5.120}$$

5.3.5 Operatori di creazione ed annichilazione

In molte applicazioni quantistiche si rivela di grande utilità una costruzione alternativa dello spazio degli stati, basata sulla definizione di operatori di creazione ed annichilazione, che produce risultati compatibili con quanto introdotto finora, almeno all'interno della classe di equivalenza definita dal prodotto scalare. L'idea di partenza è di rappresentare i campi come sovrapposizioni di modi normali; dato che la funzione di Wightman soddisfa l'equazione del moto, un'espansione possibile e in accordo con le equazioni del moto è data da

$$\phi^{(i)}(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^2} \sqrt{2p_0} \left[\tilde{W}^{(i)(j)}(p)\, a_{(j)}(p)\, e^{-ipx} + \tilde{W}^{*(i)(j)}(p)\, a^+_{(j)}(p)\, e^{ipx} \right] \ . \tag{5.121}$$

Tenendo conto della forma generale della funzione di Wightman, questa si scrive anche come

$$\phi^{(i)}(x) = \sum_{n=1}^{N} \int \widetilde{dp}^{\mu_n} \left[W^{\mu_n(i)(j)}(p)\, a^{\mu_n}_{(j)}(p)\, e^{-ipx} + W^{*\mu_n(i)(j)} a^{+\mu_n}_{(j)}(p)\, e^{ipx} \right] \ , \tag{5.122}$$

con

$$\widetilde{dp}^{\mu_n} = \left. \frac{d^2\vec{p}}{2\pi\sqrt{2p_0}} \right|_{p\in V^+_{\mu_n}} = \frac{d^3p}{2\pi} \sqrt{2p_0}\theta(p_0)\, \delta\left(p^2 - \mu_n^2\right) \ . \tag{5.123}$$

Le regole di commutazione degli operatori $a^{\mu_n(i)}(p)$ e $a^{+\mu_n(i)}(p)$ sono determinate da quelle dei campi. Infatti, usando la (5.121) segue facilmente

$$\begin{aligned}
&\left[\phi^{(i)}(x), \phi^{(j)}(y)\right] = \\
&= \sum_{m,n=1}^{N} \int \frac{d^3p}{2\pi} \int \frac{d^3q}{2\pi} \left(\sqrt{2p_0}\theta(p_0)\right)\left(\sqrt{2q_0}\theta(q_0)\right) \\
&\quad \delta\left(p^2-\mu_m^2\right)\delta\left(q^2-\mu_n^2\right) \\
&\quad \Big(e^{-i(px-qy)} \left[a^{\mu_m}_{(k)}(p), a^{+\mu_n}_{(l)}(q)\right] W^{\mu_m(i)(k)}(p)\, W^{*\mu_n(j)(l)}(q) \\
&\quad +e^{i(px-qy)} \left[a^{+\mu_m}_{(k)}(p), a^{\mu_n}_{(l)}(q)\right] W^{*\mu_m(i)(k)}(p)\, W^{\mu_n(j)(l)}(q) \\
&\quad +e^{-i(px+qy)} \left[a^{\mu_m}_{(k)}(p), a^{\mu_n}_{(l)}(q)\right] W^{\mu_m(i)(k)}(p)\, W^{\mu_n(j)(l)}(q) \\
&\quad +e^{i(px+qy)} \left[a^{+\mu_m}_{(k)}(p), a^{+\mu_n}_{(l)}(q)\right] W^{*\mu_m(i)(k)}(p)\, W^{*\mu_n(j)(l)}(q)\Big) \ .
\end{aligned} \tag{5.124}$$

Ma per la definizione della funzione di Wightman è anche

$$\begin{aligned}
\left[\phi^{(i)}(x), \phi^{(j)}(y)\right] &= W^{(i)(j)}(x-y) - W^{(j)(i)}(y-x) \\
&= \sum_{m,n=1}^{N} \int \frac{d^3p}{2\pi} \int \frac{d^3q}{2\pi} \left(\sqrt{2p_0}\theta(p_0)\right)\left(\sqrt{2q_0}\theta(q_0)\right) \\
&\quad \delta\left(p^2-\mu_m^2\right)\delta\left(q^2-\mu_n^2\right)\delta^{mn}\delta^2(\vec{p}-\vec{q}) \\
&\quad \Big(e^{-i(px-qy)} W^{\mu_m(i)(j)}(p) \\
&\quad -e^{i(px-qy)} W^{*\mu_m(i)(j)}(p)\Big) \ .
\end{aligned} \tag{5.125}$$

Per confronto segue

$$\left[a^{\mu_m}_{(k)}(p), a^{+\mu_n}_{(l)}(q)\right] W^{\mu_m(i)(k)}(p)\, W^{*\mu_n(j)(l)}(q) = W^{\mu_m(i)(j)}(p)\, \delta^{mn}\delta^2(\vec{p}-\vec{q}) \ , \tag{5.126}$$

$$\left[a^{\mu_m}_{(k)}(p), a^{\mu_n}_{(l)}(q)\right] W^{\mu_m(i)(k)}(p)\, W^{\mu_n(j)(l)}(q) = 0 \ , \tag{5.127}$$

$$\left[a^{+\mu_m}_{(k)}\left(p\right), a^{+\mu_n}_{(l)}\left(q\right)\right] W^{*\mu_m(i)(k)}\left(p\right) W^{*\mu_n(j)(l)}\left(q\right) = 0 \ . \tag{5.128}$$

Per semplificare ulteriormente le cose, possono essere sfruttati gli autovettori delle matrici $W^{\mu_n(i)(j)}\left(p\right)$ per esplicitare i gradi di libertà funzionali di $a^{\mu_n}_{(i)}\left(p\right)$ e $a^{+\mu_n}_{(i)}\left(p\right)$. Escludendo fin da ora gli autovettori con autovalore nullo, poiché essi non contribuiscono al campo, si pone

$$a^{\mu_n(i)}\left(p\right) = \sum\nolimits_{[k]} \frac{\sqrt{\left|\lambda^{\mu_n}_{[k]}\left(p\right)\right|}}{\lambda^{\mu_n}_{[k]}\left(p\right)} a^{\mu_n}_{[k]}\left(p\right) f^{\mu_n(i)}_{[k]}\left(p\right) \ , \tag{5.129}$$

$$a^{+\mu_n(i)}\left(p\right) = \sum\nolimits_{[k]} \frac{\sqrt{\left|\lambda^{\mu_n}_{[k]}\left(p\right)\right|}}{\lambda^{\mu_n}_{[k]}\left(p\right)} a^{+\mu_n}_{[k]}\left(p\right) f^{*\mu_n(i)}_{[k]}\left(p\right) \ . \tag{5.130}$$

In questo modo, l'espansione in modi normali (5.122) si scrive

$$\phi^{(i)}\left(x\right) = \sum_{n=1}^{N} \sum\nolimits_{[k]} \int \widetilde{dp}^{\mu_n} \sqrt{\left|\lambda^{\mu_n}_{[k]}\left(p\right)\right|} \left[a^{\mu_n}_{[k]}\left(p\right) f^{\mu_n(i)}_{[k]}\left(p\right) e^{-ipx} + a^{+\mu_n}_{[k]}\left(p\right) f^{*\mu_n(i)}_{[k]}\left(p\right) e^{ipx}\right] \ , \tag{5.131}$$

mentre le (5.126), (5.127) e (5.128) forniscono, usando la (5.116)

$$\left[a^{\mu_m}_{[k]}\left(p\right), a^{+\mu_n}_{[l]}\left(q\right)\right] = \pm\delta^{mn}\eta_{[k][l]} \frac{\left|\lambda^{\mu_m}_{[k]}\left(p\right)\right|}{\lambda^{\mu_m}_{[k]}\left(p\right)} \delta^2\left(\vec{p}-\vec{q}\right) \ , \tag{5.132}$$

$$\left[a^{\mu_m}_{[k]}\left(p\right), a^{\mu_n}_{[l]}\left(q\right)\right] = 0 \ , \tag{5.133}$$

$$\left[a^{+\mu_m}_{[k]}\left(p\right), a^{+\mu_n}_{[l]}\left(q\right)\right] = 0 \ . \tag{5.134}$$

Si vede quindi che gli operatori $a^{\mu_n}_{[k]}\left(p\right)$ e $a^{+\mu_n}_{[k]}\left(p\right)$ sono operatori di creazione ed annichilazione, mentre gli autovettori della funzione di Wightman rappresentano una possibile scelta di quelli che vengono chiamati tensori di polarizzazione. Nell'ambito della realizzazione dell'algebra di Weyl qui presentata, tale scelta si rivela particolarmente felice, poiché le diverse polarizzazioni corrispondono, come verrà fatto vedere, a sottospazi con metrica di segno definito. Nel caso in cui si dovesse presentare un autovalore degenere, la scelta dei corrispondenti autovettori può essere fatta convenientemente richiedendo che essi corrispondano a spin definito.

Per completare anche questa versione alternativa degli operatori di campo, è necessario definire l'azione degli operatori di creazione ed annichilazione; queste discendono ovviamente in modo univoco da quelle dei campi, ma essendo piuttosto difficile invertire l'espansione in modi normali quando è in gioco più di una massa, è più facile procedere diversamente e verificare che con una loro opportuna definizione, la nuova versione degli operatori di campo è equivalente a quella iniziale rispetto alla classe di equivalenza definita dal prodotto scalare. Si definiscono per questo gli operatori addolciti, $\forall\varphi \in S\left(R^2\right)$

$$a^{\mu_n}_{[k]}\left[\varphi\right] = \int d^2\vec{p} a^{\mu_n}_{[k]}\left(p\right)\varphi\left(p\right) = \left(a^{\mu_n}_{[k]}, \varphi\right) \ , \tag{5.135}$$

$$a^{+\mu_n}_{[k]}\left[\varphi\right] = \int d^2\vec{p} a^{+\mu_n}_{[k]}\left(p\right)\varphi^*\left(p\right) = \left(a^{+\mu_n}_{[k]}, \varphi^*\right) \ , \tag{5.136}$$

con le seguenti azioni

$$\left(a^{+\mu_p}_{[k]}\left[\varphi\right]\left|\Phi\right\rangle\right)^{(\mu_1)\dots(\mu_n)}_n (p_1,...,p_n) =$$
$$= \pm \frac{2\pi\sqrt{2p_0}}{\sqrt{n}} \sum_{m=1}^{n} \phi^{(\mu_1)\dots(\mu_{m-1})(\mu_{m+1})\dots(\mu_n)}_{n-1} (p_1,...,p_{m-1},p_{m+1},...,p_n)$$
$$\frac{\eta_{[k][k]}}{\sqrt{\left|\lambda^{\mu_p}_{[k]}(p_m)\right|}} f^{\mu_p(\mu_m)}_{[k]}(p_m)\,\varphi^*(p_m) \quad , \tag{5.137}$$

$$\left(a^{\mu_p}_{[k]}\left[\varphi\right]\left|\Phi\right\rangle\right)^{(\mu_1)\dots(\mu_n)}_n (p_1,...,p_n) =$$
$$= \pm\sqrt{n+1}\int \widetilde{dp}^{\mu_p}\eta_{[k][k]}\frac{\lambda^{\mu_p}_{[k]}(p)}{\sqrt{\left|\lambda^{\mu_p}_{[k]}(p)\right|}} f^{*\mu_p}_{[k](i)}(p)\,\phi^{(i)(\mu_1)\dots(\mu_n)}_{n+1}(p,p_1,...,p_n)\,\varphi(p) \quad . \tag{5.138}$$

Segue

$$\left(a^{+\mu_p}_{[k]}(p)\left|\Phi\right\rangle\right)^{(\mu_1)\dots(\mu_n)}_n (p_1,...,p_n) =$$
$$= \pm \frac{2\pi\sqrt{2p_0}}{\sqrt{n}} \sum_{m=1}^{n} \phi^{(\mu_1)\dots(\mu_{m-1})(\mu_{m+1})\dots(\mu_n)}_{n-1} (p_1,...,p_{m-1},p_{m+1},...,p_n)$$
$$\frac{\eta_{[k][k]}}{\sqrt{\left|\lambda^{\mu_p}_{[k]}(p_m)\right|}} f^{\mu_p(\mu_m)}_{[k]}(p_m)\,\delta^2\left(\vec{p}-\vec{p}_m\right) \quad , \tag{5.139}$$

$$\left(a^{\mu_p}_{[k]}(p)\left|\Phi\right\rangle\right)^{(\mu_1)\dots(\mu_n)}_n (p_1,...,p_n) =$$
$$= \pm\frac{\sqrt{n+1}}{2\pi\sqrt{2p_0}}\eta_{[k][k]}\frac{\lambda^{\mu_p}_{[k]}(p)}{\sqrt{\left|\lambda^{\mu_p}_{[k]}(p)\right|}} f^{*\mu_p}_{[k](i)}(p)\,\phi^{(i)(\mu_1)\dots(\mu_n)}_{n+1}(p,p_1,...,p_n) \quad . \tag{5.140}$$

Per verificare che queste definizioni sono in accordo con l'espansione in modi normali (5.131) e le azioni dei campi, basta dimostrare che

$$\sum_{n=1}^{N}\sum\nolimits_{[k]}\int \widetilde{dp}^{\mu_n}\sqrt{\left|\lambda^{\mu_n}_{[k]}(p)\right|}a^{+\mu_n}_{[k]}(p)\,f^{*\mu_n(i)}_{[k]}(p)\,e^{ipx} \doteq \phi^{+(i)}(x) \quad , \tag{5.141}$$

$$\sum_{n=1}^{N}\sum\nolimits_{[k]}\int \widetilde{dp}^{\mu_n}\sqrt{\left|\lambda^{\mu_n}_{[k]}(p)\right|}a^{\mu_n}_{[k]}(p)\,f^{\mu_n(i)}_{[k]}(p)\,e^{-ipx} \doteq \phi^{-(i)}(x) \quad , \tag{5.142}$$

ove il segno $\doteq$ indica un'uguaglianza rispetto alla classe di equivalenza definita dal prodotto scalare

$$\left|\Phi\right\rangle \doteq \left|\Psi\right\rangle \quad \Longleftrightarrow \quad \left\langle\Pi\right|\Phi-\Psi\rangle = 0 \quad \forall\left|\Pi\right\rangle\in\mathcal{H} \ . \tag{5.143}$$

Si ha, usando le definizioni fatte, $\forall \left|\Phi\right\rangle \in \mathcal{H}$

$$\left(\sum_{l=1}^{N}\sum\nolimits_{[k]}\int\widetilde{dp}^{\mu_l}\sqrt{\left|\lambda_{[k]}^{\mu_l}\left(p\right)\right|}a_{[k]}^{+\mu_l}\left(p\right)f_{[k]}^{*\mu_l(i)}\left(p\right)e^{ipx}\left|\Phi\right\rangle\right)_n^{(\mu_1)...(\mu_n)}\left(p_1,...,p_n\right)=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{m=1}^{n}\sum_{l=1}^{N}\phi_{n-1}^{(\mu_1)...(\mu_{m-1})(\mu_{m+1})...(\mu_n)}\left(p_1,...,p_{m-1},p_{m+1},...,p_n\right)$$
$$\left(\pm\sum\nolimits_{[k]}\eta_{[k][k]}f_{[k]}^{*\mu_l(i)}\left(p_m\right)f_{[k]}^{\mu_l(\mu_m)}\left(p_m\right)\right)e^{ip_mx}\quad, \tag{5.144}$$

$$\left(\sum_{l=1}^{N}\sum\nolimits_{[k]}\int\widetilde{dp}^{\mu_l}\sqrt{\left|\lambda_{[k]}^{\mu_l}\left(p\right)\right|}a_{[k]}^{\mu_l}\left(p\right)f_{[k]}^{\mu_l(i)}\left(p\right)e^{-ipx}\left|\Phi\right\rangle\right)_n^{(\mu_1)...(\mu_n)}\left(p_1,...,p_n\right)=$$
$$=\sqrt{n+1}\sum_{l=1}^{N}\int\widetilde{dp}^{\mu_l}\frac{1}{2\pi\sqrt{2p_0}}\phi_{n+1}^{(j)(\mu_1)...(\mu_n)}\left(p,p_1,...,p_n\right)$$
$$\left(\pm\sum\nolimits_{[k]}\eta_{[k][k]}\lambda_{[k]}^{\mu_l}\left(p\right)f_{[k]}^{\mu_l(i)}\left(p\right)f_{[k](j)}^{*\mu_l}\left(p\right)\right)e^{-ipx}\quad. \tag{5.145}$$

Per cui, $\forall \left|\Phi\right\rangle, \left|\Psi\right\rangle \in \mathcal{H}$ si ha

$$\left\langle\Psi\right|\sum_{l=1}^{N}\sum\nolimits_{[k]}\int\widetilde{dp}^{\mu_l}\sqrt{\left|\lambda_{[k]}^{\mu_l}\left(p\right)\right|}a_{[k]}^{+\mu_l}\left(p\right)f_{[k]}^{*\mu_l(i)}\left(p\right)e^{ipx}\left|\Phi\right\rangle=$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{m=1}^{n}\int\frac{d^3p_1}{\left(2\pi\right)^3}...\int\frac{d^3p_n}{\left(2\pi\right)^3}\psi_n^{*(\mu_1)...(\mu_n)}\left(p_1,...,p_n\right)$$
$$\tilde{W}_{(\mu_1)(\nu_1)}\left(p_1\right)...\tilde{W}_{(\mu_{m-1})(\nu_{m-1})}\left(p_{m-1}\right)\tilde{W}_{(\mu_{m+1})(\nu_{m+1})}\left(p_{m+1}\right)...\tilde{W}_{(\mu_n)(\nu_n)}\left(p_n\right)$$
$$\phi_{n-1}^{(\nu_1)...(\nu_{m-1})(\nu_{m+1})...(\nu_n)}\left(p_1,...,p_{m-1},p_{m+1},...,p_n\right)e^{ip_mx}$$
$$\left(\pm\tilde{W}_{(\mu_m)(\nu_m)}\left(p_m\right)\sum_{l=1}^{N}\sum\nolimits_{[k]}\eta_{[k][k]}f_{[k]}^{*\mu_l(i)}\left(p_m\right)f_{[k]}^{\mu_l(\nu_m)}\left(p_m\right)\right)$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{m=1}^{n}\int\frac{d^3p_1}{\left(2\pi\right)^3}...\int\frac{d^3p_n}{\left(2\pi\right)^3}\psi_n^{*(\mu_1)...(\mu_n)}\left(p_1,...,p_n\right)$$
$$\tilde{W}_{(\mu_1)(\nu_1)}\left(p_1\right)...\tilde{W}_{(\mu_{m-1})(\nu_{m-1})}\left(p_{m-1}\right)\tilde{W}_{(\mu_{m+1})(\nu_{m+1})}\left(p_{m+1}\right)...\tilde{W}_{(\mu_n)(\nu_n)}\left(p_n\right)$$
$$\tilde{W}_{(\mu_m)}{}^{(i)}\left(p_m\right)\phi_{n-1}^{(\nu_1)...(\nu_{m-1})(\nu_{m+1})...(\nu_n)}\left(p_1,...,p_{m-1},p_{m+1},...,p_n\right)e^{ip_mx}$$
$$=\left\langle\Psi\right|\phi^{+(i)}\left(x\right)\left|\Phi\right\rangle\quad, \tag{5.146}$$

$$
\begin{aligned}
&\langle\Psi|\sum_{l=1}^{N}\sum\nolimits_{[k]}\int\widetilde{dp}^{\mu_l}\sqrt{\left|\lambda_{[k]}^{\mu_l}(p)\right|}a_{[k]}^{\mu_l}(p)\,f_{[k]}^{\mu_l(i)}(p)\,e^{-ipx}\,|\Phi\rangle=\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\sqrt{n+1}\int\frac{d^3p_1}{(2\pi)^3}...\int\frac{d^3p_n}{(2\pi)^3}\psi_n^{*(\mu_1)...(\mu_n)}(p_1,...,p_n)\,\tilde{W}_{(\mu_1)(\nu_1)}(p_1)\,...\tilde{W}_{(\mu_n)(\nu_n)}(p_n)\\
&\quad\sum_{l=1}^{N}\int\widetilde{dp}^{\mu_l}\frac{1}{2\pi\sqrt{2p_0}}\phi_{n+1}^{(j)(\nu_1)...(\nu_n)}(p,p_1,...,p_n)\,W^{\mu_l(i)}{}_{(j)}(p)\,e^{-ipx}\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\int\frac{d^3p_1}{(2\pi)^3}...\int\frac{d^3p_n}{(2\pi)^3}\psi_n^{*(\mu_1)...(\mu_n)}(p_1,...,p_n)\,\tilde{W}_{(\mu_1)(\nu_1)}(p_1)\,...\tilde{W}_{(\mu_n)(\nu_n)}(p_n)\\
&\quad\sqrt{n+1}\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\tilde{W}^{(i)}{}_{(j)}(p)\,\phi_{n+1}^{(j)(\nu_1)...(\nu_n)}(p,p_1,...,p_n)\,e^{-ipx}\\
&=\langle\Psi|\,\phi^{-(i)}(x)\,|\Phi\rangle\ ,
\end{aligned}
\tag{5.147}
$$

da cui seguono le (5.141) e (5.142). Queste ultime assicurano poi che $a_{[k]}^{\mu_n}(p)$ e $a_{[k]}^{+\mu_n}(p)$ sono effettivamente l'uno l'aggiunto dell'altro e verificano le regole di commutazione avanzate, come può essere verificato esplicitamente.
Infine, le regole di commutazione degli operatori addolciti $a_{[k]}^{\mu_n}[\varphi]$ e $a_{[k]}^{+\mu_n}[\varphi]$ seguono immediatamente dalle definizioni fatte e sono, $\forall\varphi,\chi\in S\left(R^2\right)$

$$
\left[a_{[k]}^{\mu_m}[\varphi]\,,a_{[l]}^{+\mu_n}[\chi]\right]=\pm\delta^{mn}\eta_{[k][l]}\frac{\left|\lambda_{[k]}^{\mu_m}(p)\right|}{\lambda_{[k]}^{\mu_m}(p)}\int d^2\vec{p}\varphi(p)\,\chi^*(p)\ \ , \tag{5.148}
$$

$$
\left[a_{[k]}^{\mu_m}[\varphi]\,,a_{[l]}^{\mu_n}[\chi]\right]=0\ \ , \tag{5.149}
$$

$$
\left[a_{[k]}^{+\mu_m}[\varphi]\,,a_{[l]}^{+\mu_n}[\chi]\right]=0\ \ . \tag{5.150}
$$

Gli operatori $a_{[k]}^{\mu_n}(p)$ e $a_{[k]}^{+\mu_n}(p)$ definiti soddisfano quindi tutte le proprietà degli operatori di creazione ed annichilazione convenzionali, e le spazio di Fock può essere costruito alternativamente con applicazioni successive dell'operatore di creazione sul vuoto.
Questo ultimo modo di procedere fornisce un metodo sistematico per espandere i campi in modi normali e permette un'analisi limpida del contenuto fisico della teoria.

Capitolo 6

Quantizzazione delle teorie tridimensionali topologicamente massive

In questo capitolo viene impostata la quantizzazione delle versioni tridimensionali topologicamente massive dell'elettrodinamica e della gravità [55]; viene poi analizzato il problema di Cauchy relativo alle funzioni di correlazione a due punti.

6.1 Elettrodinamica

Come già accennato, il caso dell'elettrodinamica non presenta particolari problemi, ma è interessante per la sua analogia con il caso più complicato della gravità.

6.1.1 Quantizzazione

La quantizzazione può essere svolta secondo la procedura canonica convenzionale. Siccome la lagrangiana di partenza è degenere, occorre fissare una condizione di gauge e considerare i vincoli cosi ottenuti; allo scopo di ottenere risultati covarianti viene usata la gauge di Lorentz

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \ . \tag{6.1}$$

La lagrangiana diventa non degenere con il gauge-fixing convenzionale

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{MAX} + \mathcal{L}_{CS} + \mathcal{L}_{GF} \ , \tag{6.2}$$

con

$$\mathcal{L}_{MAX} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \ , \tag{6.3}$$

$$\mathcal{L}_{CS} = \frac{\mu}{2} \mathcal{E}^{\mu\nu\rho} \partial_\mu A_\nu A_\rho \ , \tag{6.4}$$

$$\mathcal{L}_{GF} = -\frac{1}{2\xi} \left(\partial_\mu A^\mu\right)^2 \ . \tag{6.5}$$

Le equazioni del moto diventano

$$\Box A^\mu + (\xi - 1)\, \partial^\mu \partial_\nu A^\nu + \mu \mathcal{E}^{\mu\nu\rho} \partial_\nu A_\rho = 0 \ . \tag{6.6}$$

Agendo con ∂_μ e $\mathcal{E}_{\alpha\beta\mu}\partial^\beta$ nella (6.6) seguono rispettivamente

$$\Box\left(\partial_\mu A^\mu\right) = 0 \ , \tag{6.7}$$

$$\Box\left(\mathcal{E}^{\mu\alpha\beta}\partial_\alpha A_\beta - \mu A^\mu\right) = 0 \ . \tag{6.8}$$

Il momento coniugato a A^μ è

$$\pi^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_0 A_\mu\right)} = F^{\mu 0} + \frac{\mu}{2}\mathcal{E}^{0\mu\nu}A_\nu - \xi\eta^{\mu 0}\partial_\nu A^\nu \tag{6.9}$$

e non produce nessun vincolo; questo conferma che la lagrangiana usata è non degenere.
Le parentesi di Poisson canoniche

$$\left\{A^\mu\left(\vec{x},t\right), A^\nu\left(\vec{y},t\right)\right\} = 0 \ , \tag{6.10}$$

$$\left\{\pi^\mu\left(\vec{x},t\right), \pi^\nu\left(\vec{y},t\right)\right\} = 0 \ , \tag{6.11}$$

$$\left\{A^\mu\left(\vec{x},t\right), \pi^\nu\left(\vec{y},t\right)\right\} = \eta^{\mu\nu}\delta^2\left(\vec{x}-\vec{y}\right) \ , \tag{6.12}$$

sono quindi consistenti, come conseguenza del gauge-fixing.
La quantizzazione della teoria è ottenuta con la prescrizione

$$\{A, B\} \to -i\left[A, B\right] \tag{6.13}$$

e imponendo debolmente il vincolo di gauge (6.1) sugli stati fisici

$$\left(\partial_\mu A^\mu\right)^- |\Phi\rangle = 0 \ . \tag{6.14}$$

6.1.2 Problema di Cauchy per le funzioni a due punti

Il problema di Cauchy per le funzioni a due punti si riconduce in ogni caso a quello relativo alla funzione Δ

$$\Delta^{\mu\nu}\left(x-y\right) = \left\{A^\mu\left(x\right), A^\nu\left(y\right)\right\} \ . \tag{6.15}$$

Per definizione, la funzione Δ deve soddisfare l'equazione del moto (6.6), che è del secondo ordine

$$\Box\Delta^{\mu\nu}\left(z\right) + \left(\xi-1\right)\partial^\mu\partial_\alpha\Delta^{\alpha\nu}\left(z\right) + \mu\mathcal{E}^{\mu\alpha\beta}\partial_\alpha{\Delta_\beta}^\nu\left(z\right) = 0 \ . \tag{6.16}$$

Le due condizioni al contorno necessarie provengono dalle parentesi di Poisson canoniche; infatti, usando la (6.9), le (6.10) e (6.12) forniscono rispettivamente le due condizioni indipendenti

$$\Delta^{\mu\nu}\left(\vec{z},0\right) = 0 \ , \tag{6.17}$$

$$\partial^0\Delta^{\mu\nu}\left(\vec{z},0\right) = \left(\eta^{\mu\nu} + \frac{1-\xi}{\xi}\eta^{\mu 0}\eta^{\nu 0}\right)\delta^2\left(\vec{z}\right) \ , \tag{6.18}$$

mentre la (6.11) produce una condizione ridondante.
Il problema di Cauchy per la funzione Δ è cosi definito e costituito dalle (6.16), (6.17) e (6.18); una volta risolto, esso fornisce la soluzione di tutte le funzioni a due punti.

6.2 Gravità

Come già fatto notare, il caso della gravità presenta alcune difficoltà, e la procedura di quantizzazione canonica convenzionale deve essere generalizzata. Innanzi tutto, è chiaro che ci si deve accontentare di studiare l'approssimazione lineare della teoria; sussistono poi le già citate difficoltà legate alla presenza di derivate di ordine superiore nella lagrangiana e di vincoli complicati.

6.2.1 Quantizzazione

La strada che appare più semplice e limpida consiste nell'effettuare una quantizzazione canonica in uno spazio delle fasi opportunamente ampliato, operando un gauge-fixing convenzionale e trattando i vincoli rimasti con una procedura di Dirac preliminare.
Allo scopo di ottenere risultati covarianti viene usata la gauge di Landau

$$\partial_\mu h^{\mu\nu} = 0 \ . \tag{6.19}$$

La lagrangiana rimane degenere con il gauge-fixing convenzionale

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{EIN} + \mathcal{L}_{CS} + \mathcal{L}_{GF} \ , \tag{6.20}$$

con

$$\mathcal{L}_{EIN} = -\frac{1}{2} h_{\mu\nu} G^{\mu\nu} \ , \tag{6.21}$$

$$\mathcal{L}_{CS} = \frac{1}{2\mu} \mathcal{E}_{\alpha\mu\beta} G^{\alpha\nu} \partial^\mu h_\nu{}^\beta \ , \tag{6.22}$$

$$\mathcal{L}_{GF} = -\frac{1}{2\xi} \left(\partial_\mu h^{\mu\lambda}\right) \left(\partial_\nu h^\nu{}_\lambda\right) \ . \tag{6.23}$$

Le equazioni del moto diventano

$$\begin{aligned} &\Big\{\Box h^{\mu\nu} + \partial^\mu \partial^\nu h + (\xi - 1)\left(\partial^\nu \partial_\alpha h^{\alpha\mu} + \partial^\mu \partial_\alpha h^{\alpha\nu}\right) - \eta^{\mu\nu}\left(\Box h - \partial_\alpha \partial_\beta h^{\alpha\beta}\right) \\ &-\frac{1}{2\mu}\left[\mathcal{E}^{\mu\alpha\beta}\partial_\alpha\left(\Box h_\beta{}^\nu - \partial^\nu \partial_\lambda h^\lambda{}_\beta\right) + \mathcal{E}^{\nu\alpha\beta}\partial_\alpha\left(\Box h_\beta{}^\mu - \partial^\mu \partial_\lambda h^\lambda{}_\beta\right)\right]\Big\} \\ &= 0 \ . \end{aligned} \tag{6.24}$$

Agendo con ∂_μ, $\partial_\mu \partial_\nu$, $\eta_{\mu\nu}$ e $\mathcal{E}_{\alpha\beta\mu}\partial^\beta$ nella (6.24) seguono rispettivamente

$$\Box\left(\partial_\nu h^{\nu\mu}\right) + \partial^\mu\left(\partial_\nu \partial_\tau h^{\nu\tau}\right) = 0 \ , \tag{6.25}$$

$$\Box\left(\partial_\mu \partial_\nu h^{\mu\nu}\right) = 0 \ , \tag{6.26}$$

$$\Box h - (2\xi + 1)\, \partial_\mu \partial_\nu h^{\mu\nu} = 0 \ , \tag{6.27}$$

$$\Box\left(\Box h_\alpha{}^\nu - \partial_\alpha \partial_\tau h^{\tau\nu} - \partial^\nu \partial_\tau h^\tau{}_\alpha + \partial_\alpha \partial^\nu h\right) + \mu \mathcal{E}_{\alpha\rho\mu}\partial^\rho\left(\Box h^{\mu\nu} - \partial^\nu \partial_\tau h^{\tau\mu}\right) = 0 \ . \tag{6.28}$$

Prima di passare al formalismo hamiltoniano, è conveniente operare alcune integrazioni per parti nell'azione, cosa lecita poiché la nuova lagrangiana cosi ottenuta differisce da quella di partenza per una quadridivergenza che non altera le equazioni del moto; cosi facendo, la lagrangiana può essere presa equivalentemente come

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{EIN} + \mathcal{L}_{CS} + \mathcal{L}_{GF} \ , \tag{6.29}$$

con

$$\mathcal{L}_{EIN} = -\frac{1}{4}\left[(\partial_\rho h_{\mu\nu})(\partial^\rho h^{\mu\nu}) - (\partial_\mu h)(\partial^\mu h) + 2(\partial^\nu h)(\partial^\mu h_{\mu\nu}) + 2(\partial^\mu h_{\mu\nu})(\partial_\rho h^{\rho\nu})\right] \ , \tag{6.30}$$

$$\mathcal{L}_{CS} = \frac{1}{4\mu}\mathcal{E}_{\mu\alpha\beta}\left(\partial^\alpha \partial_\nu h_\rho{}^\beta - \partial^\alpha \partial_\rho h_\nu{}^\beta\right)\partial^\nu h^{\mu\rho} \ , \tag{6.31}$$

$$\mathcal{L}_{GF} = -\frac{1}{2\xi}\left(\partial_\mu h^{\mu\lambda}\right)(\partial_\nu h^\nu{}_\lambda) \ . \tag{6.32}$$

In accordo con quanto spiegato nel quarto capitolo, la presenza di derivate seconde nel termine di Chern-Simons costringe ad introdurre una nuova variabile canonica per la derivata temporale del campo. Tuttavia, è facile verificare che non tutte le derivate temporali seconde sono coinvolte nella lagrangiana; infatti, il termine di Chern-Simons si scrive anche

$$\mathcal{L}_{CS} = \frac{1}{4\mu}\mathcal{E}_{ij}\left(\partial^k h^{i0} - \partial^0 h^{ik}\right)\left(\partial^0\right)^2 h_k{}^j \ . \tag{6.33}$$

Quindi, soltanto le componenti spazio-spazio del campo hanno dinamica di ordine superiore, e basta considerare le variabili

$$h^{\mu\nu} \ , \tag{6.34}$$

$$k^{ij} = \partial^0 h^{ij} \ . \tag{6.35}$$

I momenti generalizzati coniugati a queste variabili sono definiti come

$$\pi^{\mu\nu} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0 h_{\mu\nu})} - 2\partial_\rho \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho\partial_0 h_{\mu\nu})} + \partial_0 \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\partial_0 h_{\mu\nu})} \ , \tag{6.36}$$

$$s^{ij} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\partial_0 h_{ij})} \ . \tag{6.37}$$

Si trova

$$\pi^{00} = -\xi\partial_0 h^{00} + \left(\frac{1}{2} - \xi\right)\partial_i h^{i0} \ , \tag{6.38}$$

$$\begin{aligned} \pi^{0i} = &-\frac{1}{2}\left[\xi\partial_0 h^{0i} + (\xi - 1)\partial_j h^{ji} + \frac{1}{2}\partial^i h\right] \\ &-\frac{1}{4\mu}\mathcal{E}_{mn}\left[\partial^m\partial^i h^{0n} - \partial^m\partial^0 h^{in}\right] \\ &-\frac{1}{8\mu}\mathcal{E}_m{}^i\left[\partial_j\partial^0 h^{mj} - \partial^j\partial_j h^{m0}\right] \ , \end{aligned} \tag{6.39}$$

$$\begin{aligned} \pi^{ij} = &-\frac{1}{2}\left[\partial_0 h^{ij} - \eta^{ij}\partial_0 h^k{}_k + \eta^{ij}\partial_k h^{k0}\right] \\ &+\frac{1}{8\mu}\Big[\mathcal{E}_k{}^j\Big(2\partial_0\partial_0 h^{ki} - 2\partial^i\partial_0 h^{k0} - 2\partial^k\partial_0 h^{i0} \\ &\qquad +2\partial^k\partial^i h^{00} + \partial^l\partial_l h^{ki} - \partial^i\partial_l h^{kl}\Big) + (i \leftrightarrow j)\Big] \ , \end{aligned} \tag{6.40}$$

$$s^{ij} = -\frac{1}{8\mu}\left[\mathcal{E}_k{}^j\left(\partial_0 h^{ki} - \partial^i h^{k0}\right) + (i \leftrightarrow j)\right] \ , \tag{6.41}$$

ovvero, in termini delle sole variabili canoniche e delle loro derivate temporali prime

$$\pi^{00} = -\xi\partial_0 h^{00} + \left(\frac{1}{2} - \xi\right)\partial_i h^{i0} \ , \tag{6.42}$$

$$\begin{aligned}\pi^{0i} = &-\frac{1}{2}\left[\xi\partial_0 h^{0i} + (\xi - 1)\,\partial_j h^{ji} + \frac{1}{2}\partial^i h\right]\\ &-\frac{1}{4\mu}\mathcal{E}_{mn}\left[\partial^m\partial^i h^{0n} - \partial^m k^{in}\right]\\ &-\frac{1}{8\mu}\mathcal{E}_m{}^i\left[\partial_j k^{mj} - \partial^j\partial_j h^{m0}\right] \ ,\end{aligned} \tag{6.43}$$

$$\begin{aligned}\pi^{ij} = &-\frac{1}{2}\left[k^{ij} - \eta^{ij}k^l{}_l + \eta^{ij}\partial_k h^{k0}\right]\\ &+\frac{1}{8\mu}\left[\mathcal{E}_k{}^j\left(2\partial_0 k^{ki} - 2\partial^i\partial_0 h^{k0} - 2\partial^k\partial_0 h^{i0}\right.\right.\\ &\left.\left.+2\partial^k\partial^i h^{00} + \partial^l\partial_l h^{ki} - \partial^i\partial_l h^{kl}\right) + (i \leftrightarrow j)\right] \ ,\end{aligned} \tag{6.44}$$

$$s^{ij} = -\frac{1}{8\mu}\left[\mathcal{E}_k{}^j\left(k^{ki} - \partial^i h^{k0}\right) + (i \leftrightarrow j)\right] \ . \tag{6.45}$$

Dalle precedenti espressioni per i momenti derivano vincoli coinvolgenti le sole variabili canoniche, senza derivate temporali

$$\pi^m{}_m = \frac{1}{2}k^l{}_l - \partial_k h^{k0} - \frac{1}{4\mu}\mathcal{E}_{ki}\partial^i\partial_l h^{kl} \ , \tag{6.46}$$

$$s^{ij} = -\frac{1}{8\mu}\left[\mathcal{E}_k{}^j\left(k^{ki} - \partial^i h^{k0}\right) + (i \leftrightarrow j)\right] \ . \tag{6.47}$$

Questo conferma che la lagrangiana rimane degenere nonostante il gauge-fixing, il quale ha permesso di eliminare solo una parte dei vincoli. Come anticipato, i vincoli coinvolgono l'intero spazio delle fasi esteso.
Le parentesi di Poisson canoniche

$$\left\{h^{\mu\nu}(\vec{x},t)\,, h^{\alpha\beta}(\vec{y},t)\right\} = 0 \ , \tag{6.48}$$

$$\left\{k^{ij}(\vec{x},t)\,, k^{mn}(\vec{y},t)\right\} = 0 \ , \tag{6.49}$$

$$\left\{h^{\mu\nu}(\vec{x},t)\,, k^{ij}(\vec{y},t)\right\} = 0 \ , \tag{6.50}$$

$$\left\{\pi^{\mu\nu}(\vec{x},t)\,, \pi^{\alpha\beta}(\vec{y},t)\right\} = 0 \ , \tag{6.51}$$

$$\left\{s^{ij}(\vec{x},t)\,, s^{mn}(\vec{y},t)\right\} = 0 \ , \tag{6.52}$$

$$\left\{\pi^{\mu\nu}(\vec{x},t)\,, s^{ij}(\vec{y},t)\right\} = 0 \ , \tag{6.53}$$

$$\left\{h^{\mu\nu}(\vec{x},t)\,, s^{ij}(\vec{y},t)\right\} = 0 \ , \tag{6.54}$$

$$\left\{k^{ij}(\vec{x},t)\,, \pi^{\mu\nu}(\vec{y},t)\right\} = 0 \ , \tag{6.55}$$

$$\left\{h^{\mu\nu}(\vec{x},t),\pi^{\alpha\beta}(\vec{y},t)\right\}=\frac{1}{2}\left(\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}+\eta^{\mu\beta}\eta^{\nu\alpha}\right)\delta^2(\vec{x}-\vec{y}) \ , \tag{6.56}$$

$$\left\{k^{ij}(\vec{x},t),s^{mn}(\vec{y},t)\right\}=\frac{1}{2}\left(\eta^{im}\eta^{jn}+\eta^{in}\eta^{jm}\right)\delta^2(\vec{x}-\vec{y}) \ , \tag{6.57}$$

sono incompatibili con i vincoli (6.46) e (6.47), come può essere verificato immediatamente; questo è conseguenza del fatto che le parentesi di Poisson canoniche valgono sotto la ipotesi, qui non verificata, che la lagrangiana sia non degenere.
Deve quindi essere applicata la procedura di Dirac con i vincoli primari

$$\Lambda=\pi^l{}_l-\frac{1}{2}k^l{}_l+\partial_k h^{k0}+\frac{1}{4\mu}\mathcal{E}_{ki}\partial^i\partial_l h^{kl}\approx 0 \ , \tag{6.58}$$

$$\mathcal{O}^{ij}=s^{ij}+\frac{1}{8\mu}\left[\mathcal{E}_k{}^j\left(k^{ki}-\partial^i h^{k0}\right)+(i\leftrightarrow j)\right]\approx 0 \ . \tag{6.59}$$

Essi sono in numero di quattro, poiché s^{ij} è simmetrico, e risultano essere tutti di seconda specie, poiché

$$\{\Lambda(\vec{x},t),\Lambda(\vec{y},t)\}=0 \ , \tag{6.60}$$

$$\left\{\mathcal{O}^{ij}(\vec{x},t),\mathcal{O}^{mn}(\vec{y},t)\right\}=-\frac{1}{8\mu}\left[\mathcal{E}^{im}\eta^{jn}+(i\leftrightarrow j)+(m\leftrightarrow n)\right]\delta^2(\vec{x}-\vec{y}) \ , \tag{6.61}$$

$$\left\{\Lambda(\vec{x},t),\mathcal{O}^{ij}(\vec{y},t)\right\}=-\frac{1}{2}\eta^{ij}\delta^2(\vec{x}-\vec{y}) \ . \tag{6.62}$$

Non vi sono vincoli di prima specie, poiché l'invarianza di gauge è stata già fissata nella lagrangiana. Si può verificare che la condizione di compatibilità dinamica non produce ulteriori vincoli secondari.
Indicando i quattro vincoli con

$$\varphi^{[1]}=\mathcal{O}^{11} \ , \tag{6.63}$$

$$\varphi^{[2]}=\mathcal{O}^{22} \ , \tag{6.64}$$

$$\varphi^{[3]}=\mathcal{O}^{12} \ , \tag{6.65}$$

$$\varphi^{[4]}=\Lambda \ , \tag{6.66}$$

la matrice non singolare formata dalle loro parentesi di Poisson è quindi

$$\begin{aligned}M^{[a][b]}(\vec{x},\vec{y},t)&=\left\{\varphi^{[a]}(\vec{x},t),\varphi^{[b]}(\vec{y},t)\right\}\\&=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&0&\frac{1}{2\mu}&-1\\0&0&-\frac{1}{2\mu}&-1\\-\frac{1}{2\mu}&\frac{1}{2\mu}&0&0\\1&1&0&0\end{pmatrix}\delta^2(\vec{x}-\vec{y})\end{aligned} \tag{6.67}$$

e la sua inversa

$$M^{-1}_{[a][b]}(\vec{x},\vec{y},t)=\begin{pmatrix}0&0&-2\mu&1\\0&0&2\mu&1\\2\mu&-2\mu&0&0\\-1&-1&0&0\end{pmatrix}\delta^2(\vec{x}-\vec{y}) \ . \tag{6.68}$$

Per calcolare le parentesi di Dirac è necessario conoscere le parentesi di Poisson delle variabili canoniche con i vincoli; si trova facilmente

$$\left\{\Lambda\left(\vec{x},t\right),h^{00}\left(\vec{y},t\right)\right\}=0\ , \tag{6.69}$$

$$\left\{\mathcal{O}^{ij}\left(\vec{x},t\right),h^{00}\left(\vec{y},t\right)\right\}=0\ , \tag{6.70}$$

$$\left\{\Lambda\left(\vec{x},t\right),h^{0k}\left(\vec{y},t\right)\right\}=0\ , \tag{6.71}$$

$$\left\{\mathcal{O}^{ij}\left(\vec{x},t\right),h^{0k}\left(\vec{y},t\right)\right\}=0\ , \tag{6.72}$$

$$\left\{\Lambda\left(\vec{x},t\right),h^{mn}\left(\vec{y},t\right)\right\}=-\eta^{mn}\delta^{2}\left(\vec{x}-\vec{y}\right)\ , \tag{6.73}$$

$$\left\{\mathcal{O}^{ij}\left(\vec{x},t\right),h^{mn}\left(\vec{y},t\right)\right\}=0\ , \tag{6.74}$$

$$\left\{\Lambda\left(\vec{x},t\right),k^{mn}\left(\vec{y},t\right)\right\}=0\ , \tag{6.75}$$

$$\left\{\mathcal{O}^{ij}\left(\vec{x},t\right),k^{mn}\left(\vec{y},t\right)\right\}=-\frac{1}{2}\left(\eta^{im}\eta^{jn}+\eta^{in}\eta^{jm}\right)\delta^{2}\left(\vec{x}-\vec{y}\right)\ , \tag{6.76}$$

$$\left\{\Lambda\left(\vec{x},t\right),\pi^{00}\left(\vec{y},t\right)\right\}=0\ , \tag{6.77}$$

$$\left\{\mathcal{O}^{ij}\left(\vec{x},t\right),\pi^{00}\left(\vec{y},t\right)\right\}=0\ , \tag{6.78}$$

$$\left\{\Lambda\left(\vec{x},t\right),\pi^{0k}\left(\vec{y},t\right)\right\}=\frac{1}{2}\partial^{k}\delta^{2}\left(\vec{x}-\vec{y}\right)\ , \tag{6.79}$$

$$\left\{\mathcal{O}^{ij}\left(\vec{x},t\right),\pi^{0k}\left(\vec{y},t\right)\right\}=\frac{1}{16\mu}\left(\mathcal{E}^{ik}\partial^{j}+\mathcal{E}^{jk}\partial^{i}\right)\delta^{2}\left(\vec{x}-\vec{y}\right)\ , \tag{6.80}$$

$$\left\{\Lambda\left(\vec{x},t\right),\pi^{mn}\left(\vec{y},t\right)\right\}=\frac{1}{8\mu}\left(\mathcal{E}^{mk}\partial^{n}+\mathcal{E}^{nk}\partial^{m}\right)\partial_{k}\delta^{2}\left(\vec{x}-\vec{y}\right)\ , \tag{6.81}$$

$$\left\{\mathcal{O}^{ij}\left(\vec{x},t\right),\pi^{mn}\left(\vec{y},t\right)\right\}=0\ , \tag{6.82}$$

$$\left\{\Lambda\left(\vec{x},t\right),s^{mn}\left(\vec{y},t\right)\right\}=-\frac{1}{2}\eta^{mn}\delta^{2}\left(\vec{x}-\vec{y}\right)\ , \tag{6.83}$$

$$\left\{\mathcal{O}^{ij}\left(\vec{x},t\right),s^{mn}\left(\vec{y},t\right)\right\}=-\frac{1}{16\mu}\left[\mathcal{E}^{im}\eta^{jn}+(i\leftrightarrow j)+(m\leftrightarrow n)\right]\delta^{2}\left(\vec{x}-\vec{y}\right)\ . \tag{6.84}$$

Nella notazione introdotta si ha quindi

$$A^{[a]}\left(\vec{x},\vec{y},t\right)=\left\{\varphi^{[a]}\left(\vec{x},t\right),h^{00}\left(\vec{y},t\right)\right\}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\ , \tag{6.85}$$

$$B^{[a]k}\left(\vec{x},\vec{y},t\right)=\left\{\varphi^{[a]}\left(\vec{x},t\right),h^{0k}\left(\vec{y},t\right)\right\}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\ , \tag{6.86}$$

$$C^{[a]mn}(\vec{x},\vec{y},t)=\left\{\varphi^{[a]}(\vec{x},t),h^{mn}(\vec{y},t)\right\}=-\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\eta^{mn}\delta^2(\vec{x}-\vec{y})\quad, \tag{6.87}$$

$$D^{[a]mn}(\vec{x},\vec{y},t)=\left\{\varphi^{[a]}(\vec{x},t),k^{mn}(\vec{y},t)\right\}=-\begin{pmatrix}\eta^{m1}\eta^{n1}\\ \eta^{m2}\eta^{n2}\\ \frac{1}{2}\left(\eta^{m1}\eta^{n2}+\eta^{m2}\eta^{n1}\right)\\ 0\end{pmatrix}\delta^2(\vec{x}-\vec{y})\quad, \tag{6.88}$$

$$E^{[a]}(\vec{x},\vec{y},t)=\left\{\varphi^{[a]}(\vec{x},t),\pi^{00}(\vec{y},t)\right\}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\quad, \tag{6.89}$$

$$F^{[a]k}(\vec{x},\vec{y},t)=\left\{\varphi^{[a]}(\vec{x},t),\pi^{0k}(\vec{y},t)\right\}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\frac{1}{4\mu}\mathcal{E}^{k1}\partial^1\\ \frac{1}{4\mu}\mathcal{E}^{k2}\partial^2\\ \frac{1}{8\mu}\left(\mathcal{E}^{k1}\partial^2+\mathcal{E}^{k2}\partial^1\right)\\ -\partial^k\end{pmatrix}\delta^2(\vec{x}-\vec{y})\quad, \tag{6.90}$$

$$G^{[a]mn}(\vec{x},\vec{y},t)=\left\{\varphi^{[a]}(\vec{x},t),\pi^{mn}(\vec{y},t)\right\}=\frac{1}{8\mu}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\left(\mathcal{E}^{mk}\partial^n+\mathcal{E}^{nk}\partial^m\right)\partial_k\delta^2(\vec{x}-\vec{y})\quad, \tag{6.91}$$

$$\begin{aligned}H^{[a]mn}(\vec{x},\vec{y},t)&=\left\{\varphi^{[a]}(\vec{x},t),s^{mn}(\vec{y},t)\right\}\\ &=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\frac{1}{4\mu}\left(\mathcal{E}^{m1}\eta^{n1}+\mathcal{E}^{n1}\eta^{m1}\right)\\ \frac{1}{4\mu}\left(\mathcal{E}^{m2}\eta^{n2}+\mathcal{E}^{n2}\eta^{m2}\right)\\ \frac{1}{8\mu}\left(\mathcal{E}^{m1}\eta^{n2}+\mathcal{E}^{m2}\eta^{n1}+(m\leftrightarrow n)\right)\\ -\eta^{mn}\end{pmatrix}\delta^2(\vec{x}-\vec{y})\quad.\end{aligned} \tag{6.92}$$

Le parentesi di Dirac sono allora date da

$$\begin{aligned}&\left\{A(\vec{x},t),B(\vec{y},t)\right\}^*=\\ &\quad=\left\{A(\vec{x},t),B(\vec{y},t)\right\}\\ &\quad\quad-\int d^2\vec{z}\int d^2\vec{w}\left\{A(\vec{x},t),\varphi^{[a]}(\vec{z},t)\right\}M^{-1}_{[a][b]}(\vec{z},\vec{w},t)\left\{\varphi^{[b]}(\vec{w},t),B(\vec{y},t)\right\}\quad.\end{aligned} \tag{6.93}$$

Usando le relazioni che legano η^{ij} e $\mathcal{E}^{ij}$, riportate nell'appendice A, e le (6.68) e (6.85-6.92), seguono, con un po' di pazienza, le parentesi di Dirac canoniche

$$\left\{h^{\mu\nu}(\vec{x},t),h^{\alpha\beta}(\vec{y},t)\right\}^*=0\quad, \tag{6.94}$$

$$\left\{k^{ij}(\vec{x},t), k^{mn}(\vec{y},t)\right\}^* = \frac{\mu}{2}\left[\mathcal{E}^{im}\eta^{jn} + (i \leftrightarrow j) + (m \leftrightarrow n)\right]\delta^2(\vec{x}-\vec{y}) \ , \tag{6.95}$$

$$\left\{h^{0\mu}(\vec{x},t), k^{mn}(\vec{y},t)\right\}^* = 0 \ , \tag{6.96}$$

$$\left\{h^{ij}(\vec{x},t), k^{mn}(\vec{y},t)\right\}^* = \eta^{ij}\eta^{mn}\delta^2(\vec{x}-\vec{y}) \ , \tag{6.97}$$

$$\left\{\pi^{00}(\vec{x},t), \pi^{0\mu}(\vec{y},t)\right\}^* = 0 \ , \tag{6.98}$$

$$\left\{\pi^{0i}(\vec{x},t), \pi^{0j}(\vec{y},t)\right\}^* = -\frac{5}{64\mu}\mathcal{E}^{ij}\partial^k\partial_k\delta^2(\vec{x}-\vec{y}) \ , \tag{6.99}$$

$$\left\{\pi^{ij}(\vec{x},t), \pi^{mn}(\vec{y},t)\right\}^* = 0 \ , \tag{6.100}$$

$$\left\{\pi^{00}(\vec{x},t), \pi^{mn}(\vec{y},t)\right\}^* = 0 \ , \tag{6.101}$$

$$\left\{\pi^{0k}(\vec{x},t), \pi^{mn}(\vec{y},t)\right\}^* = \frac{1}{64\mu^2}\mathcal{E}^{ik}\left(\mathcal{E}^{mj}\partial^n + \mathcal{E}^{nj}\partial^m\right)\partial_i\partial_j\delta^2(\vec{x}-\vec{y}) \ , \tag{6.102}$$

$$\left\{s^{ij}(\vec{x},t), s^{mn}(\vec{y},t)\right\}^* = \frac{1}{32\mu}\left[\mathcal{E}^{im}\eta^{jn} + (i \leftrightarrow j) + (m \leftrightarrow n)\right]\delta^2(\vec{x}-\vec{y}) \ , \tag{6.103}$$

$$\left\{\pi^{00}(\vec{x},t), s^{mn}(\vec{y},t)\right\}^* = 0 \ , \tag{6.104}$$

$$\left\{\pi^{0k}(\vec{x},t), s^{mn}(\vec{y},t)\right\}^* = \frac{1}{32\mu}\left(\mathcal{E}^{km}\partial^n + \mathcal{E}^{kn}\partial^m + \eta^{mn}\mathcal{E}^{kj}\partial_j\right)\delta^2(\vec{x}-\vec{y}) \ , \tag{6.105}$$

$$\left\{\pi^{ij}(\vec{x},t), s^{mn}(\vec{y},t)\right\}^* = 0 \ , \tag{6.106}$$

$$\left\{h^{\mu\nu}(\vec{x},t), \pi^{ij}(\vec{y},t)\right\}^* = \frac{1}{2}\left(\eta^{\mu i}\eta^{\nu j} + \eta^{\mu j}\eta^{\nu i}\right)\delta^2(\vec{x}-\vec{y}) \ , \tag{6.107}$$

$$\left\{h^{ij}(\vec{x},t), \pi^{00}(\vec{y},t)\right\}^* = 0 \ , \tag{6.108}$$

$$\left\{h^{ij}(\vec{x},t), \pi^{0k}(\vec{y},t)\right\}^* = \frac{1}{8\mu}\eta^{ij}\mathcal{E}^{km}\partial_m\delta^2(\vec{x}-\vec{y}) \ , \tag{6.109}$$

$$\left\{h^{0\mu}(\vec{x},t), \pi^{0\nu}(\vec{y},t)\right\}^* = \frac{1}{2}\left(\eta^{\mu\nu} + \eta^{\mu 0}\eta^{\nu 0}\right)\delta^2(\vec{x}-\vec{y}) \ , \tag{6.110}$$

$$\left\{k^{ij}(\vec{x},t), s^{mn}(\vec{y},t)\right\}^* = \frac{1}{4}\left(\eta^{im}\eta^{jn} + \eta^{in}\eta^{jm} - \eta^{ij}\eta^{mn}\right)\delta^2(\vec{x}-\vec{y}) \ , \tag{6.111}$$

$$\{h^{\mu\nu}(\vec{x},t), s^{mn}(\vec{y},t)\}^* = 0 \ , \tag{6.112}$$

$$\left\{k^{ij}(\vec{x},t), \pi^{0\mu}(\vec{y},t)\right\}^* = \frac{1}{8}\left(\eta^{\mu i}\partial^j + \eta^{\mu j}\partial^i + 3\eta^{ij}\partial^\mu\right)\delta^2(\vec{x}-\vec{y}) \ , \tag{6.113}$$

$$\left\{k^{ij}(\vec{x},t), \pi^{mn}(\vec{y},t)\right\}^* = -\frac{1}{8\mu}\eta^{ij}\left(\mathcal{E}^{km}\partial^n + \mathcal{E}^{kn}\partial^m\right)\partial_k\delta^2(\vec{x}-\vec{y}) \ . \tag{6.114}$$

La quantizzazione della teoria è ottenuta con la prescrizione

$$\{A, B\}^* \to -i[A, B] \tag{6.115}$$

e imponendo debolmente il vincolo di gauge (6.19) sugli stati fisici

$$(\partial_\mu h^{\mu\nu})^- |\Phi\rangle = 0 \ . \tag{6.116}$$

6.2.2 Problema di Cauchy per le funzioni a due punti

Il problema di Cauchy per le funzioni a due punti si riconduce in ogni caso a quello relativo alla funzione Δ

$$\Delta^{\mu\nu\alpha\beta}(x-y)=\left\{h^{\mu\nu}(x),h^{\alpha\beta}(y)\right\}^{*} \quad . \tag{6.117}$$

Per definizione, la funzione Δ deve soddisfare l'equazione del moto (6.24), che è del secondo ordine

$$\begin{aligned}&\Big\{\Box\Delta^{\mu\nu\alpha\beta}(z)+\partial^{\mu}\partial^{\nu}\Delta^{\rho}{}_{\rho}{}^{\alpha\beta}-\eta^{\mu\nu}\left(\Box\Delta^{\rho}{}_{\rho}{}^{\alpha\beta}(z)-\partial_{\rho}\partial_{\tau}\Delta^{\rho\tau\alpha\beta}(z)\right)\\&+(\xi-1)\left(\partial^{\nu}\partial_{\rho}\Delta^{\mu\rho\alpha\beta}(z)+\partial^{\mu}\partial_{\rho}\Delta^{\rho\nu\alpha\beta}(z)\right)\\&-\frac{1}{2\mu}\left[\mathcal{E}^{\mu\rho\tau}\partial_{\rho}\left(\Box\Delta_{\tau}{}^{\nu\alpha\beta}(z)-\partial^{\nu}\partial_{\lambda}\Delta^{\lambda}{}_{\tau}{}^{\alpha\beta}(z)\right)+\mathcal{E}^{\nu\rho\tau}\partial_{\rho}\left(\Box\Delta^{\mu}{}_{\tau}{}^{\alpha\beta}(z)-\partial^{\mu}\partial_{\lambda}\Delta^{\lambda}{}_{\tau}{}^{\alpha\beta}(z)\right)\right]\Big\}\\&\quad=0 \ .\end{aligned} \tag{6.118}$$

Le condizioni al contorno necessarie provengono dalle parentesi di Dirac canoniche; infatti, usando le (6.35) e (6.38-6.41), le (6.94-6.99), (6.110) e (6.113) forniscono rispettivamente, con un po' di ginnastica indiciale, le condizioni indipendenti

$$\Delta^{\mu\nu\alpha\beta}(\vec{z},0)=0 \ , \tag{6.119}$$

$$\left(\partial^{0}\right)^{2}\Delta^{ijmn}(\vec{z},0)=-\frac{\mu}{2}\left[\mathcal{E}^{im}\eta^{jn}+(i\leftrightarrow j)+(m\leftrightarrow n)\right]\delta^{2}(\vec{z}) \ , \tag{6.120}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\partial^{0}\Delta^{00ij}(\vec{z},0)=0\\ \partial^{0}\Delta^{0kij}(\vec{z},0)=0\end{array}\right. \ , \tag{6.121}$$

$$\partial^{0}\Delta^{ijmn}(\vec{z},0)=-\eta^{ij}\eta^{mn}\delta^{2}(\vec{z}) \ , \tag{6.122}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\left(\partial^{0}\right)^{2}\Delta^{0000}(\vec{z},0)=0\\ \left(\partial^{0}\right)^{2}\Delta^{000k}(\vec{z},0)=-\dfrac{1}{\xi}\partial^{k}\delta^{2}(\vec{z})\end{array}\right. \ , \tag{6.123}$$

$$\left(\partial^{0}\right)^{2}\Delta^{0i0j}(\vec{z},0)=0 \ , \tag{6.124}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\partial^{0}\Delta^{0000}(\vec{z},0)=\dfrac{1}{\xi}\delta^{2}(\vec{z})\\ \partial^{0}\Delta^{0i0j}(\vec{z},0)=\dfrac{1}{\xi}\eta^{ij}\delta^{2}(\vec{z})\\ \partial^{0}\Delta^{000i}(\vec{z},0)=0\\ \partial^{0}\Delta^{0i00}(\vec{z},0)=0\end{array}\right. \ , \tag{6.125}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\left(\partial^{0}\right)^{2}\Delta^{ij00}(\vec{z},0)=0\\ \left(\partial^{0}\right)^{2}\Delta^{ij0k}(\vec{z},0)=\dfrac{1}{\xi}\left(\eta^{ik}\partial^{j}+\eta^{jk}\partial^{i}+\xi\eta^{ij}\partial^{k}\right)\delta^{2}(\vec{z})\end{array}\right. \ , \tag{6.126}$$

mentre le altre parentesi di Dirac canoniche producono condizioni ridondanti.

Quindi, le condizioni al contorno si possono scrivere come

$$\Delta^{\mu\nu\alpha\beta}\left(\vec{z},0\right)=0\ , \tag{6.127}$$

$$\partial^{0}\Delta^{ijmn}\left(\vec{z},0\right)=-\eta^{ij}\eta^{mn}\delta^{2}\left(\vec{z}\right)\ , \tag{6.128}$$

$$\partial^{0}\Delta^{0\mu0\nu}\left(\vec{z},0\right)=\frac{1}{\xi}\eta^{\mu\nu}\delta^{2}\left(\vec{z}\right)\ , \tag{6.129}$$

$$\partial^{0}\Delta^{ij0\mu}\left(\vec{z},0\right)=0\ , \tag{6.130}$$

$$\left(\partial^{0}\right)^{2}\Delta^{ijmn}\left(\vec{z},0\right)=-\frac{\mu}{2}\left[\mathcal{E}^{im}\eta^{jn}+(i\leftrightarrow j)+(m\leftrightarrow n)\right]\delta^{2}\left(\vec{z}\right)\ , \tag{6.131}$$

$$\left(\partial^{0}\right)^{2}\Delta^{ij0\mu}\left(\vec{z},0\right)=\frac{1}{\xi}\left(\eta^{i\mu}\partial^{j}+\eta^{j\mu}\partial^{i}+\xi\eta^{ij}\partial^{\mu}\right)\delta^{2}\left(\vec{z}\right)\ , \tag{6.132}$$

$$\left(\partial^{0}\right)^{2}\Delta^{000\mu}\left(\vec{z},0\right)=-\frac{1}{\xi}\partial^{\mu}\delta^{2}\left(\vec{z}\right)\ , \tag{6.133}$$

$$\left(\partial^{0}\right)^{2}\Delta^{0i0j}\left(\vec{z},0\right)=0\ . \tag{6.134}$$

Il problema di Cauchy per la funzione Δ è cosi definito e costituito dalle (6.118) e (6.127-6.134); una volta risolto, esso fornisce la soluzione di tutte le funzioni a due punti.

Capitolo 7

Funzioni di correlazione a due punti delle teorie tridimensionali topologicamente massive

In questo capitolo vengono determinate le funzioni di correlazione a due punti dell'elettrodinamica e della gravità risolvendo i problemi di Cauchy individuati nel precedente capitolo. Per evitare confusioni con l'unità immaginaria i, viene calcolata prima la funzione classica Δ, alla quale le funzioni di correlazione a due punti risultano legate in modo semplice.

7.1 Forma generale delle funzioni a due punti

Si è visto nel secondo capitolo che sia l'elettrodinamica che la gravità contengono eccitazioni con massa nulla o pari a $|\mu|$; tutte le funzioni a due punti di entrambe le teorie devono quindi avere supporto $V_0^+ \cup V_\mu^+$, e possono essere scritte in funzione delle soluzioni fondamentali delle equazioni scalari a massa nulla o pari a $|\mu|$. Per quanto riguarda la funzione Δ, basta considerare le funzioni fondamentali Δ_0, Δ_{00}, Δ_{000}, Δ_μ, $\Delta_{\mu 0}$, e $\Delta_{\mu 00}$, definite nell'appendice B.

In entrambe le teorie, la funzione Δ è una combinazione tensoriale appropriata di queste funzioni scalari; analogamente, anche tutte le altre funzioni a due punti sono combinazioni tensoriali appropriate di funzioni scalari fondamentali. Questo è assicurato dalla rappresentazione spettrale del prodotto di operatori di campo [46].

7.2 Elettrodinamica

Le funzioni a due punti dell'elettrodinamica sono di determinazione abbastanza facile; infatti, la natura vettoriale del campo si traduce in un numero ridotto di termini da gestire nelle equazioni.

7.2.1 Funzione Δ

Il problema di Cauchy per la funzione Δ dell'elettrodinamica è

$$\Box \Delta^{\mu\nu}(z) + (\xi - 1)\, \partial^\mu \partial_\alpha \Delta^{\alpha\nu}(z) + \mu \mathcal{E}^{\mu\alpha\beta} \partial_\alpha \Delta_\beta{}^\nu(z) = 0 \ , \tag{7.1}$$

$$\Delta^{\mu\nu}(\vec{z},0) = 0 \ , \tag{7.2}$$

$$\partial^0 \Delta^{\mu\nu}(\vec{z},0) = \left(\eta^{\mu\nu} + \frac{1-\xi}{\xi}\eta^{\mu 0}\eta^{\nu 0}\right)\delta^2(\vec{z}) \ . \tag{7.3}$$

In accordo con le proprietà tensoriali e di simmetria che deve avere, la funzione Δ si può prendere nella forma

$$\Delta^{\mu\nu}(z) = \eta^{\mu\nu} f_1(z) + \mathcal{E}^{\mu\nu\rho}\partial_\rho f_2(z) + \partial^\mu\partial^\nu f_3(z) \ , \tag{7.4}$$

ove f_1, f_2 e f_3 sono funzioni scalari, combinazioni lineari reali delle funzioni Δ_0, Δ_{00}, Δ_{000}, Δ_μ, $\Delta_{\mu 0}$, e $\Delta_{\mu 00}$, che, considerati gli ordini differenziali dei vari termini dell'equazione del moto, possono essere prese come

$$f_1(z) = \alpha_1\Delta_0(z) + \alpha_2\Delta_\mu(z) \ , \tag{7.5}$$

$$f_2(z) = \beta_1\Delta_0(z) + \beta_2\Delta_\mu(z) \ , \tag{7.6}$$

$$f_3(z) = \gamma_1\Delta_0(z) + \gamma_2\Delta_\mu(z) + \gamma_3\Delta_{00}(z) \ . \tag{7.7}$$

Sostituendo la forma generale (7.4) nell'equazione del moto (7.1) e nelle condizioni (7.2) e (7.3), si ottiene, dopo alcuni passaggi brevemente descritti nell'appendice C, un sistema lineare completo di equazioni per le costanti introdotte, la cui soluzione è

$$\begin{cases} \alpha_1 = 0 \quad , \quad \alpha_2 = -1 \\ \beta_1 = -\dfrac{1}{\mu} \quad , \quad \beta_2 = \dfrac{1}{\mu} \\ \gamma_1 = \dfrac{1}{\mu^2} \quad , \quad \gamma_2 = -\dfrac{1}{\mu^2} \quad , \quad \gamma_3 = -\dfrac{1}{\xi} \end{cases} \ . \tag{7.8}$$

La funzione Δ è quindi

$$\begin{aligned} \Delta^{\mu\nu}(z) = &-\eta^{\mu\nu}\Delta_\mu(z) - \frac{1}{\mu}\mathcal{E}^{\mu\nu\rho}\partial_\rho\left(\Delta_0(z) - \Delta_\mu(z)\right) \\ &+\partial^\mu\partial^\nu\left[\frac{1}{\mu^2}\left(\Delta_0(z) - \Delta_\mu(z)\right) - \frac{1}{\xi}\Delta_{00}(z)\right] \end{aligned} \tag{7.9}$$

o anche

$$\Delta^{\mu\nu}(z) = -\eta^{\mu\nu}\Delta_\mu(z) - \mu\mathcal{E}^{\mu\nu\rho}\partial_\rho\Delta_{\mu 0}(z) + \partial^\mu\partial^\nu\left[\frac{1}{\mu^2}\Delta_{\mu 0}(z) - \frac{1}{\xi}\Delta_{00}(z)\right] \ . \tag{7.10}$$

Nello spazio dei momenti segue

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}^{\mu\nu}(p) = &-i2\pi\epsilon(p_0)\,\delta(p^2)\left[\frac{i}{\mu}\mathcal{E}^{\mu\nu\rho}p_\rho - \left(\frac{1}{\mu^2} - \frac{1}{\xi}\frac{1}{p^2}\right)p^\mu p^\nu\right] \\ &-i2\pi\epsilon(p_0)\,\delta(p^2-\mu^2)\left[-\left(\eta^{\mu\nu} - \frac{p^\mu p^\nu}{\mu^2}\right) - \frac{i}{\mu}\mathcal{E}^{\mu\nu\rho}p_\rho\right] \ . \end{aligned} \tag{7.11}$$

7.2.2 Funzione di Wightman

La funzione di Wightman si determina facilmente a partire dalla funzione Δ ed è data, sempre nello spazio dei momenti, da

$$\begin{aligned}\tilde{W}^{\mu\nu}(p) = 2\pi\theta(p_0)\,\delta(p^2)\left[\frac{i}{\mu}\mathcal{E}^{\mu\nu\rho}p_\rho - \left(\frac{1}{\mu^2} - \frac{1}{\xi}\frac{1}{p^2}\right)p^\mu p^\nu\right] \\ +2\pi\theta(p_0)\,\delta(p^2-\mu^2)\left[-P^{\mu\nu} - \frac{i}{\mu}\mathcal{E}^{\mu\nu\rho}p_\rho\right]\ ,\end{aligned} \tag{7.12}$$

con

$$P^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - \frac{p^\mu p^\nu}{\mu^2}\ . \tag{7.13}$$

Si noti, in particolare, che la sua forma è effettivamente del tipo avanzato nel precedente capitolo. Inoltre, come verrà fatto vedere, il termine contenente il moltiplicatore di Lagrange non contribuisce a nessun valore di aspettazione, come conseguenza dell'imposizione del vincolo di gauge; questo è anche il motivo per cui non è stato regolarizzato.

7.2.3 Propagatore

Dalla definizione del propagatore segue immediatamente

$$\begin{aligned}\tilde{S}^{\mu\nu}(p) = \frac{i}{p^2+i\epsilon}\left[\frac{1}{\xi}\frac{p^\mu p^\nu}{p^2+i\epsilon}\right] \\ +\frac{i}{p^2-\mu^2+i\epsilon}\left[-\left(\eta^{\mu\nu} - \frac{p^\mu p^\nu}{p^2+i\epsilon}\right) - i\frac{\mu}{p^2+i\epsilon}\mathcal{E}^{\mu\nu\rho}p_\rho\right]\ .\end{aligned} \tag{7.14}$$

Tenuto conto del fatto che il propagatore viene sempre contratto con correnti conservate, la sua forma efficace non dipende dal moltiplicatore di Lagrange e si può scrivere come

$$\tilde{S}^{\mu\nu}(p) = -\frac{i}{p^2-\mu^2+i\epsilon}\left[P^{\mu\nu} + i\frac{\mu}{p^2+i\epsilon}\mathcal{E}^{\mu\nu\rho}p_\rho\right]\ , \tag{7.15}$$

con

$$P^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - \frac{p^\mu p^\nu}{p^2+i\epsilon}\ , \tag{7.16}$$

in accordo con la previsione trovata nel secondo capitolo.

7.3 Gravità

Le funzioni a due punti della gravità sono di determinazione estremamente laboriosa, anche se non difficile; infatti, la natura tensoriale del campo si traduce in un numero enorme di termini da gestire nelle equazioni, e la presenza di derivate del terzo ordine aumenta il numero di condizioni da considerare. Tuttavia, tale determinazione risulta molto simile a quella svolta nel caso semplice dell'elettrodinamica, ed è articolata nello stesso modo.

7.3.1 Funzione Δ

Il problema di Cauchy per la funzione Δ della gravità è

$$
\begin{aligned}
&\Big\{\Box\Delta^{\mu\nu\alpha\beta}(z) + \partial^\mu\partial^\nu\Delta^\rho{}_\rho{}^{\alpha\beta} - \eta^{\mu\nu}\left(\Box\Delta^\rho{}_\rho{}^{\alpha\beta}(z) - \partial_\rho\partial_\tau\Delta^{\rho\tau\alpha\beta}(z)\right) \\
&+(\xi-1)\left(\partial^\nu\partial_\rho\Delta^{\mu\rho\alpha\beta}(z) + \partial^\mu\partial_\rho\Delta^{\rho\nu\alpha\beta}(z)\right) \\
&-\frac{1}{2\mu}\left[\mathcal{E}^{\mu\rho\tau}\partial_\rho\left(\Box\Delta_\tau{}^{\nu\alpha\beta}(z) - \partial^\nu\partial_\lambda\Delta^\lambda{}_\tau{}^{\alpha\beta}(z)\right) + \mathcal{E}^{\nu\rho\tau}\partial_\rho\left(\Box\Delta^\mu{}_\tau{}^{\alpha\beta}(z) - \partial^\mu\partial_\lambda\Delta^\lambda{}_\tau{}^{\alpha\beta}(z)\right)\right]\Big\} \\
&\quad = 0 \ ,
\end{aligned}
\tag{7.17}
$$

$$\Delta^{\mu\nu\alpha\beta}(\vec{z},0) = 0 \ , \tag{7.18}$$

$$\partial^0\Delta^{ijmn}(\vec{z},0) = -\eta^{ij}\eta^{mn}\delta^2(\vec{z}) \ , \tag{7.19}$$

$$\partial^0\Delta^{0\mu0\nu}(\vec{z},0) = \frac{1}{\xi}\eta^{\mu\nu}\delta^2(\vec{z}) \ , \tag{7.20}$$

$$\partial^0\Delta^{ij0\mu}(\vec{z},0) = 0 \ , \tag{7.21}$$

$$\left(\partial^0\right)^2\Delta^{ijmn}(\vec{z},0) = -\frac{\mu}{2}\left[\mathcal{E}^{im}\eta^{jn} + (i\leftrightarrow j) + (m\leftrightarrow n)\right]\delta^2(\vec{z}) \ , \tag{7.22}$$

$$\left(\partial^0\right)^2\Delta^{ij0\mu}(\vec{z},0) = \frac{1}{\xi}\left(\eta^{i\mu}\partial^j + \eta^{j\mu}\partial^i + \xi\eta^{ij}\partial^\mu\right)\delta^2(\vec{z}) \ , \tag{7.23}$$

$$\left(\partial^0\right)^2\Delta^{000\mu}(\vec{z},0) = -\frac{1}{\xi}\partial^\mu\delta^2(\vec{z}) \ , \tag{7.24}$$

$$\left(\partial^0\right)^2\Delta^{0i0j}(\vec{z},0) = 0 \ . \tag{7.25}$$

In accordo con le proprietà tensoriali e di simmetria che deve avere, la funzione Δ si può prendere nella forma

$$
\begin{aligned}
\Delta^{\mu\nu\alpha\beta}(z) = {} & \eta^{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta}f_1(z) + \left(\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta} + \eta^{\mu\beta}\eta^{\nu\alpha}\right)f_2(z) \\
&+\left[\eta^{\mu\alpha}\mathcal{E}^{\nu\beta\sigma} + (\mu\leftrightarrow\nu) + (\alpha\leftrightarrow\beta)\right]\partial_\sigma f_3(z) \\
&+\left(\eta^{\mu\nu}\partial^\alpha\partial^\beta + \eta^{\alpha\beta}\partial^\mu\partial^\nu\right)f_4(z) \\
&+\left[\eta^{\mu\alpha}\partial^\nu\partial^\beta + (\mu\leftrightarrow\nu) + (\alpha\leftrightarrow\beta)\right]f_5(z) \\
&+\left[\mathcal{E}^{\mu\alpha\sigma}\partial^\nu\partial^\beta + (\mu\leftrightarrow\nu) + (\alpha\leftrightarrow\beta)\right]\partial_\sigma f_6(z) \\
&+\partial^\mu\partial^\nu\partial^\alpha\partial^\beta f_7(z) \ ,
\end{aligned}
\tag{7.26}
$$

ove f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6 e f_7 sono funzioni scalari, combinazioni lineari reali delle funzioni Δ_0, Δ_{00}, Δ_{000}, Δ_μ, $\Delta_{\mu0}$, e $\Delta_{\mu00}$, che, considerati gli ordini differenziali dei vari termini dell'equazione del moto, possono essere prese come

$$f_1(z) = \alpha_1\Delta_0(z) + \alpha_2\Delta_\mu(z) \ , \tag{7.27}$$

$$f_2(z) = \beta_1\Delta_0(z) + \beta_2\Delta_\mu(z) \ , \tag{7.28}$$

$$f_3(z) = \gamma_1 \Delta_0(z) + \gamma_2 \Delta_\mu(z) + \gamma_3 \Delta_{00}(z) \quad , \tag{7.29}$$

$$f_4(z) = \delta_1 \Delta_0(z) + \delta_2 \Delta_\mu(z) + \delta_3 \Delta_{00}(z) \quad , \tag{7.30}$$

$$f_5(z) = \epsilon_1 \Delta_0(z) + \epsilon_2 \Delta_\mu(z) + \epsilon_3 \Delta_{00}(z) \quad , \tag{7.31}$$

$$f_6(z) = \varphi_1 \Delta_0(z) + \varphi_2 \Delta_\mu(z) + \varphi_3 \Delta_{00}(z) + \varphi_4 \Delta_{000}(z) \quad , \tag{7.32}$$

$$f_7(z) = \chi_1 \Delta_0(z) + \chi_2 \Delta_\mu(z) + \chi_3 \Delta_{00}(z) + \chi_4 \Delta_{000}(z) \quad . \tag{7.33}$$

Sostituendo la forma generale (7.26) nell'equazione del moto (7.17) e nelle condizioni (7.18-7.25) si ottiene, dopo calcoli laboriosi descritti brevemente nell'appendice C, un sistema lineare completo di equazioni per le costanti introdotti, la cui soluzione è

$$\begin{cases} \alpha_1 = 2 \quad , \quad \alpha_2 = -1 \\ \beta_1 = -1 \quad , \quad \beta_2 = 1 \\ \gamma_1 = \dfrac{1}{2\mu} \quad , \quad \gamma_2 = -\dfrac{1}{2\mu} \quad , \quad \gamma_3 = 0 \\ \delta_1 = \dfrac{1}{\mu^2} \quad , \quad \delta_2 = -\dfrac{1}{\mu^2} \quad , \quad \delta_3 = -2 \\ \epsilon_1 = -\dfrac{1}{\mu^2} \quad , \quad \epsilon_2 = \dfrac{1}{\mu^2} \quad , \quad \epsilon_3 = \dfrac{\xi - 1}{\xi} \\ \varphi_1 = \dfrac{1}{2\mu^3} \quad , \quad \varphi_2 = -\dfrac{1}{2\mu^3} \quad , \quad \varphi_3 = -\dfrac{1}{2\mu} \quad , \quad \varphi_4 = 0 \\ \chi_1 = -\dfrac{1}{\mu^4} \quad , \quad \chi_2 = \dfrac{1}{\mu^4} \quad , \quad \chi_3 = \dfrac{1}{\mu^2} \quad , \quad \chi_4 = \dfrac{3}{\xi} \end{cases} \quad . \tag{7.34}$$

La funzione Δ è quindi

$$\begin{aligned} \Delta^{\mu\nu\alpha\beta}(z) = {} & \eta^{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta}\left(2\Delta_0(z) - \Delta_\mu(z)\right) + \left(\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta} + \eta^{\mu\beta}\eta^{\nu\alpha}\right)\left(\Delta_\mu(z) - \Delta_0(z)\right) \\ & -\frac{1}{2\mu}\left[\eta^{\mu\alpha}\mathcal{E}^{\nu\beta\sigma} + (\mu \leftrightarrow \nu) + (\alpha \leftrightarrow \beta)\right]\partial_\sigma\left(\Delta_\mu(z) - \Delta_0(z)\right) \\ & -\left(\eta^{\mu\nu}\partial^\alpha\partial^\beta + \eta^{\alpha\beta}\partial^\mu\partial^\nu\right)\left[\frac{1}{\mu^2}\left(\Delta_\mu(z) - \Delta_0(z)\right) + 2\Delta_{00}(z)\right] \\ & +\left[\eta^{\mu\alpha}\partial^\nu\partial^\beta + (\mu \leftrightarrow \nu) + (\alpha \leftrightarrow \beta)\right]\left[\frac{1}{\mu^2}\left(\Delta_\mu(z) - \Delta_0(z)\right) + \frac{\xi - 1}{\xi}\Delta_{00}(z)\right] \\ & -\frac{1}{2\mu}\left[\mathcal{E}^{\mu\alpha\sigma}\partial^\nu\partial^\beta + (\mu \leftrightarrow \nu) + (\alpha \leftrightarrow \beta)\right]\partial_\sigma\left[\frac{1}{\mu^2}\left(\Delta_\mu(z) - \Delta_0(z)\right) + \Delta_{00}(z)\right] \\ & +\partial^\mu\partial^\nu\partial^\alpha\partial^\beta\left[\frac{1}{\mu^4}\left(\Delta_\mu(z) - \Delta_0(z)\right) + \frac{1}{\mu^2}\Delta_{00}(z) + \frac{3}{\xi}\Delta_{000}(z)\right] \end{aligned} \tag{7.35}$$

o anche

$$
\begin{aligned}
\Delta^{\mu\nu\alpha\beta}(z) =\; & \eta^{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta}\left(2\Delta_0(z)-\Delta_\mu(z)\right)+\left(\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}+\eta^{\mu\beta}\eta^{\nu\alpha}\right)\left(\Delta_\mu(z)-\Delta_0(z)\right)\\
&+\frac{\mu}{2}\left[\eta^{\mu\alpha}\mathcal{E}^{\nu\beta\sigma}+(\mu\leftrightarrow\nu)+(\alpha\leftrightarrow\beta)\right]\partial_\sigma\left(\Delta_{\mu0}(z)\right)\\
&+\left(\eta^{\mu\nu}\partial^\alpha\partial^\beta+\eta^{\alpha\beta}\partial^\mu\partial^\nu\right)\left(\Delta_{\mu0}(z)-2\Delta_{00}(z)\right)\\
&+\left[\eta^{\mu\alpha}\partial^\nu\partial^\beta+(\mu\leftrightarrow\nu)+(\alpha\leftrightarrow\beta)\right]\left(-\Delta_{\mu0}(z)+\frac{\xi-1}{\xi}\Delta_{00}(z)\right)\\
&-\frac{\mu}{2}\left[\mathcal{E}^{\mu\alpha\sigma}\partial^\nu\partial^\beta+(\mu\leftrightarrow\nu)+(\alpha\leftrightarrow\beta)\right]\partial_\sigma\left(\Delta_{\mu00}(z)\right)\\
&+\partial^\mu\partial^\nu\partial^\alpha\partial^\beta\left[\Delta_{\mu00}(z)+\frac{3}{\xi}\Delta_{000}(z)\right]\quad .
\end{aligned}
\tag{7.36}
$$

Nello spazio dei momenti segue

$$
\begin{aligned}
\tilde{\Delta}^{\mu\nu\alpha\beta}(p) =\; & -i2\pi\epsilon(p_0)\,\delta\left(p^2\right)\Big\{2\eta^{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta}-\left(\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}+\eta^{\mu\beta}\eta^{\nu\alpha}\right)\\
&\quad-\frac{i}{2\mu}\left[\eta^{\mu\alpha}\mathcal{E}^{\nu\beta\sigma}+(\mu\leftrightarrow\nu)+(\alpha\leftrightarrow\beta)\right]p_\sigma\\
&\quad-\left(\frac{1}{\mu^2}+\frac{2}{p^2}\right)\left(\eta^{\mu\nu}p^\alpha p^\beta+\eta^{\alpha\beta}p^\mu p^\nu\right)\\
&\quad+\left(\frac{1}{\mu^2}+\frac{\xi-1}{\xi}\frac{1}{p^2}\right)\left[\eta^{\mu\alpha}p^\nu p^\beta+(\mu\leftrightarrow\nu)+(\alpha\leftrightarrow\beta)\right]\\
&\quad+\frac{i}{2\mu}\left(\frac{1}{\mu^2}+\frac{1}{p^2}\right)\left[\mathcal{E}^{\mu\alpha\sigma}p^\nu p^\beta+(\mu\leftrightarrow\nu)+(\alpha\leftrightarrow\beta)\right]p_\sigma\\
&\quad-\left(\frac{1}{\mu^4}+\frac{1}{\mu^2p^2}-\frac{3}{\xi}\frac{1}{p^4}\right)p^\mu p^\nu p^\alpha p^\beta\Big\}\\
&-i2\pi\epsilon(p_0)\,\delta\left(p^2-\mu^2\right)\Big\{-\left(\eta^{\mu\nu}-\frac{p^\mu p^\nu}{\mu^2}\right)\left(\eta^{\alpha\beta}-\frac{p^\alpha p^\beta}{\mu^2}\right)\\
&\quad+\left[\left(\eta^{\mu\alpha}-\frac{p^\mu p^\alpha}{\mu^2}\right)\left(\eta^{\nu\beta}-\frac{p^\nu p^\beta}{\mu^2}\right)+(\alpha\leftrightarrow\beta)\right]\\
&\quad+\frac{i}{2\mu}\left[\mathcal{E}^{\mu\alpha\sigma}\left(\eta^{\nu\beta}-\frac{p^\nu p^\beta}{\mu^2}\right)+(\mu\leftrightarrow\nu)+(\alpha\leftrightarrow\beta)\right]p_\sigma\Big\}\quad .
\end{aligned}
\tag{7.37}
$$

7.3.2 Funzione di Wightman

La funzione di Wightman si determina facilmente a partire dalla funzione Δ ed è data, sempre nello spazio dei momenti, da

$$
\begin{aligned}
\tilde{W}^{\mu\nu\alpha\beta}(p) = 2\pi\theta(p_0)\,\delta(p^2)\Big\{ & 2\eta^{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta} - \left(\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta} + \eta^{\mu\beta}\eta^{\nu\alpha}\right) \\
& -\frac{i}{2\mu}\left[\eta^{\mu\alpha}\mathcal{E}^{\nu\beta\sigma} + (\mu \leftrightarrow \nu) + (\alpha \leftrightarrow \beta)\right] p_\sigma \\
& -\left(\frac{1}{\mu^2} + \frac{2}{p^2}\right)\left(\eta^{\mu\nu}p^\alpha p^\beta + \eta^{\alpha\beta}p^\mu p^\nu\right) \\
& +\left(\frac{1}{\mu^2} + \frac{\xi - 1}{\xi}\frac{1}{p^2}\right)\left[\eta^{\mu\alpha}p^\nu p^\beta + (\mu \leftrightarrow \nu) + (\alpha \leftrightarrow \beta)\right] \\
& +\frac{i}{2\mu}\left(\frac{1}{\mu^2} + \frac{1}{p^2}\right)\left[\mathcal{E}^{\mu\alpha\sigma}p^\nu p^\beta + (\mu \leftrightarrow \nu) + (\alpha \leftrightarrow \beta)\right] p_\sigma \\
& -\left(\frac{1}{\mu^4} + \frac{1}{\mu^2 p^2} - \frac{3}{\xi}\frac{1}{p^4}\right)p^\mu p^\nu p^\alpha p^\beta\Big\} \\
+2\pi\theta(p_0)\,\delta(p^2 - \mu^2)\Big\{ & -P^{\mu\nu}P^{\alpha\beta} + \left(P^{\mu\alpha}P^{\nu\beta} + P^{\mu\beta}P^{\nu\alpha}\right) \\
& +\frac{i}{2\mu}\left[\mathcal{E}^{\mu\alpha\sigma}P^{\nu\beta} + (\mu \leftrightarrow \nu) + (\alpha \leftrightarrow \beta)\right] p_\sigma\Big\} \quad ,
\end{aligned}
\tag{7.38}
$$

con

$$
P^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - \frac{p^\mu p^\nu}{\mu^2} \quad . \tag{7.39}
$$

Si noti, in particolare, che la sua forma è effettivamente del tipo avanzato nel precedente capitolo. Inoltre, come verrà fatto vedere, i termini contenenti il moltiplicatore di Lagrange non contribuiscono a nessun valore di aspettazione, come conseguenza dell'imposizione del vincolo di gauge; questo è anche il motivo per cui non sono stati regolarizzati.

7.3.3 Propagatore

Dalla definizione del propagatore segue immediatamente

$$
\begin{aligned}
\tilde{S}^{\mu\nu\alpha\beta}(p) = \frac{i}{p^2+i\epsilon} & \left\{ 2\left(\eta^{\mu\nu} - \frac{p^\mu p^\nu}{p^2+i\epsilon}\right)\left(\eta^{\alpha\beta} - \frac{p^\alpha p^\beta}{p^2+i\epsilon}\right) \right. \\
& - \left[\left(\eta^{\mu\alpha} - \frac{p^\mu p^\alpha}{p^2+i\epsilon}\right)\left(\eta^{\nu\beta} - \frac{p^\nu p^\beta}{p^2+i\epsilon}\right) + (\alpha \leftrightarrow \beta)\right] \\
& \left. -\frac{1}{\xi}\left[\eta^{\mu\alpha}\frac{p^\nu p^\beta}{p^2+i\epsilon} + (\mu \leftrightarrow \nu) + (\alpha \leftrightarrow \beta)\right] + \frac{3}{\xi}\frac{p^\mu p^\nu p^\alpha p^\beta}{(p^2+i\epsilon)^2} \right\} \\
+ \frac{i}{p^2-\mu^2+i\epsilon} & \left\{ -\left(\eta^{\mu\nu} - \frac{p^\mu p^\nu}{p^2+i\epsilon}\right)\left(\eta^{\alpha\beta} - \frac{p^\alpha p^\beta}{p^2+i\epsilon}\right) \right. \\
& + \left[\left(\eta^{\mu\alpha} - \frac{p^\mu p^\alpha}{p^2+i\epsilon}\right)\left(\eta^{\nu\beta} - \frac{p^\nu p^\beta}{p^2+i\epsilon}\right) + (\alpha \leftrightarrow \beta)\right] \\
& + \frac{i\mu}{2(p^2+i\epsilon)}\left[\mathcal{E}^{\mu\alpha\sigma}\left(\eta^{\nu\beta} - \frac{p^\nu p^\beta}{p^2+i\epsilon}\right)\right. \\
& \left.\left. + (\mu \leftrightarrow \nu) + (\alpha \leftrightarrow \beta)\right] p_\sigma \right\} \quad .
\end{aligned}
\tag{7.40}
$$

Tenuto conto del fatto che il propagatore viene sempre contratto con tensori energia-impulso conservati, la sua forma efficace non dipende dal moltiplicatore di Lagrange e si può scrivere come

$$
\begin{aligned}
\tilde{S}^{\mu\nu\alpha\beta}(p) = & -\frac{i}{p^2+i\epsilon}\left[\left(P^{\mu\alpha}P^{\nu\beta} + P^{\mu\beta}P^{\nu\alpha}\right) - 2P^{\mu\nu}P^{\alpha\beta}\right] \\
& -\frac{i}{p^2-\mu^2+i\epsilon}\left[P^{\mu\nu}P^{\alpha\beta} - \left(P^{\mu\alpha}P^{\nu\beta} + P^{\mu\alpha}P^{\nu\beta}\right)\right. \\
& \left. -i\frac{\mu}{2}\frac{p_\sigma}{p^2+i\epsilon}\left(\mathcal{E}^{\mu\alpha\sigma}P^{\beta\nu} + \mathcal{E}^{\nu\alpha\sigma}P^{\beta\mu} + \mathcal{E}^{\mu\beta\sigma}P^{\alpha\nu} + \mathcal{E}^{\nu\beta\sigma}P^{\alpha\mu}\right)\right] \quad ,
\end{aligned}
\tag{7.41}
$$

con

$$
P^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - \frac{p^\mu p^\nu}{p^2+i\epsilon} \quad , \tag{7.42}
$$

in accordo con la previsione trovata nel secondo capitolo.

Capitolo 8

Realizzazione dell'algebra di Weyl per le teorie tridimensionali topologicamente massive

In questo capitolo vengono analizzate le rappresentazioni esplicite dell'algebra di Weyl per l'elettrodinamica e la gravità e isolate le loro eccitazioni fisiche.

8.1 Elettrodinamica

La realizzazione esplicita dello spazio degli stati e degli operatori di campo dell'elettrodinamica procede esattamente nel modo illustrato nel quinto capitolo. L'isolamento delle eccitazioni fisiche viene eseguito analizzando gli autovalori della funzione di Wightman e costruendo operatori di creazione ed annichilazione per gli stati fisici.

8.1.1 Spazio degli stati e operatori di campo

Data la natura vettoriale delle teoria, lo spazio degli stati $\mathcal{H}$

$$\mathcal{H} = \{|\Phi\rangle\} \tag{8.1}$$

è costituito dalle sequenze

$$|\Phi\rangle = \{\phi_0, \phi_1^{\mu_1}(p_1), \phi_2^{\mu_1\mu_2}(p_{1,}p_2), ..., \phi_n^{\mu_1\cdots\mu_n}(p_1, ..., p_n), ...\} \quad , \tag{8.2}$$

ove

$$\phi_n^{\mu_1\cdots\mu_n}(p_1, ..., p_n) \in S\left(R^{3n}\right) \tag{8.3}$$

indica un tensore completamente simmetrico rispetto allo scambio

$$(\mu_i, p_i) \leftrightarrow (\mu_j, p_j) \quad . \tag{8.4}$$

Lo spazio $\mathcal{H}$ cosi definito costituisce lo spazio di Fock, e le funzioni $\phi_n^{\mu_1\cdots\mu_n}(p_1, ..., p_n)$ rappresentano le componenti ad n particelle del generico stato. Ogni stato rappresenta un sistema di particelle, ognuna delle quali ha potenzialmente tre polarizzazioni distinte; uno stato ad n particelle ha quindi $3n$ gradi di libertà funzionali.

Il prodotto scalare è definito, $\forall \left|\Phi\right\rangle, \left|\Psi\right\rangle \in \mathcal{H}$, come

$$\begin{aligned} \left\langle\Phi\right|\left.\Psi\right\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \int \frac{d^3p_1}{(2\pi)^3} ... \int \frac{d^3p_n}{(2\pi)^3} \\ \phi^{*n}_{\mu_1...\mu_n}(p_1,..,p_n)\, \tilde{W}^{\mu_1}{}_{\nu_1}(p_1) ... \tilde{W}^{\mu_n}{}_{\nu_n}(p_n)\, \psi_n^{\nu_1...\nu_n}(p_1,..,p_n) \quad . \end{aligned} \tag{8.5}$$

Si definiscono poi $\forall\varphi \in S\left(R^3\right)$ gli operatori di campo addolciti

$$A^\mu[\varphi] = \int d^3x A^\mu(x)\,\varphi(x) = (A^\mu, \varphi) \quad , \tag{8.6}$$

$$A^{+\mu}[\varphi] = \int d^3x A^{+\mu}(x)\,\varphi(x) = \left(A^{+\mu}, \varphi\right) \quad , \tag{8.7}$$

$$A^{-\mu}[\varphi] = \int d^3x A^{-\mu}(x)\,\varphi(x) = \left(A^{-\mu}, \varphi\right) \quad , \tag{8.8}$$

con le seguenti azioni in $\mathcal{H}$

$$\begin{aligned} &\left(A^{+\mu}[\varphi]\left|\Phi\right\rangle\right)_n^{\mu_1...\mu_n}(p_1,...,p_n) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{m=1}^{n} \phi_{n-1}^{\mu_1...\mu_{m-1}\mu_{m+1}...\mu_n}(p_1,...,p_{m-1},p_{m+1},...,p_n)\,\eta^{\mu\mu_m}\tilde{\varphi}(p_m) \quad , \end{aligned} \tag{8.9}$$

$$\begin{aligned} &\left(A^{-\mu}[\varphi]\left|\Phi\right\rangle\right)_n^{\mu_1...\mu_n}(p_1,...,p_n) = \\ &= \sqrt{n+1} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \tilde{W}^{\mu}{}_{\nu}(p)\, \phi_{n+1}^{\nu\mu_1...\mu_n}(p,p_1,...,p_n)\,\tilde{\varphi}(-p) \quad , \end{aligned} \tag{8.10}$$

$$\begin{aligned} &\left(A^{\mu}[\varphi]\left|\Phi\right\rangle\right)_n^{\mu_1...\mu_n}(p_1,...,p_n) = \\ &= \left(A^{+\mu}[\varphi]\left|\Phi\right\rangle\right)_n^{\mu_1...\mu_n}(p_1,...,p_n) + \left(A^{-\mu}[\varphi]\left|\Phi\right\rangle\right)_n^{\mu_1...\mu_n}(p_1,...,p_n) \quad . \end{aligned} \tag{8.11}$$

Segue

$$\begin{aligned} &\left(A^{+\mu}(x)\left|\Phi\right\rangle\right)_n^{\mu_1...\mu_n}(p_1,...,p_n) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{m=1}^{n} \phi_{n-1}^{\mu_1...\mu_{m-1}\mu_{m+1}...\mu_n}(p_1,...,p_{m-1},p_{m+1},...,p_n)\,\eta^{\mu\mu_m} e^{ip_m x} \quad , \end{aligned} \tag{8.12}$$

$$\begin{aligned} &\left(A^{-\mu}(x)\left|\Phi\right\rangle\right)_n^{\mu_1...\mu_n}(p_1,...,p_n) = \\ &= \sqrt{n+1} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \tilde{W}^{\mu}{}_{\nu}(p)\, \phi_{n+1}^{\nu\mu_1...\mu_n}(p,p_1,...,p_n)\, e^{-ipx} \quad , \end{aligned} \tag{8.13}$$

$$\begin{aligned} &\left(A^{\mu}(x)\left|\Phi\right\rangle\right)_n^{\mu_1...\mu_n}(p_1,...,p_n) = \\ &= \left(A^{+\mu}(x)\left|\Phi\right\rangle\right)_n^{\mu_1...\mu_n}(p_1,...,p_n) + \left(A^{-\mu}(x)\left|\Phi\right\rangle\right)_n^{\mu_1...\mu_n}(p_1,...,p_n) \quad . \end{aligned} \tag{8.14}$$

Valgono tutte le dimostrazioni fatte nel quinto capitolo e la realizzazione definita soddisfa quindi tutti i requisiti necessari.

8.1.2 Stati fisici

Gli stati fisici devono soddisfare la condizione di gauge

$$(\partial_\mu A^\mu(x))^- |\Phi_f\rangle = 0 \ . \tag{8.15}$$

Deve poi essere verificato che essi abbiano norma positiva.
La funzione di Wightman è

$$\begin{aligned}\tilde{W}^{\alpha\beta}(p) &= 2\pi\theta(p_0)\,\delta(p^2)\,W^{(0)\alpha\beta}(p) \\ &\quad +2\pi\theta(p_0)\,\delta(p^2-\mu^2)\,W^{(\mu)\alpha\beta}(p) \ ,\end{aligned} \tag{8.16}$$

con

$$W^{(0)\alpha\beta}(p) = \frac{i}{\mu}\mathcal{E}^{\alpha\beta\rho}p_\rho - \left(\frac{1}{\mu^2} - \frac{1}{\xi}\frac{1}{p^2}\right)p^\alpha p^\beta \ , \tag{8.17}$$

$$W^{(\mu)\alpha\beta}(p) = -P^{\alpha\beta} - \frac{i}{\mu}\mathcal{E}^{\alpha\beta\rho}p_\rho \ , \tag{8.18}$$

$$P^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta} - \frac{p^\alpha p^\beta}{\mu^2} \ . \tag{8.19}$$

Come conseguenza della sua forma e della definizione del prodotto scalare, tutti gli stati con norma non nulla hanno supporto contenuto in $V_0^+ \cup V_\mu^+$.
Il vuoto del sistema è del tipo

$$|\Phi_0\rangle = \{a, 0, 0, 0, ...\} \ , \tag{8.20}$$

con

$$a \in \mathbb{C} \ . \tag{8.21}$$

La condizione di gauge (8.15) è identicamente soddisfatta; inoltre, la norma del vuoto (8.20) è

$$\langle\Phi_0|\,\Phi_0\rangle = |a|^2 > 0 \ . \tag{8.22}$$

Il vuoto fisico è quindi

$$|\Phi_{f0}\rangle = \{a, 0, 0, 0, ...\} \ , \tag{8.23}$$

con a complesso tale che

$$|a|^2 = 1 \ . \tag{8.24}$$

Esso costituisce il sottospazio $\mathcal{H}_{f0}$ di $\mathcal{H}$, a norma definita positiva, degli stati fisici vuoti.
Si consideri poi uno stato ad una particella del tipo

$$|\Phi_1\rangle = \left\{0, \phi^\alpha_{(0)}(p) + \phi^\alpha_{(\mu)}(p), 0, 0, 0, ...\right\} \ , \tag{8.25}$$

con

$$\phi^\alpha_{(0)}(p) \in S\left(V_0^+\right) \ , \tag{8.26}$$

$$\phi^\alpha_{(\mu)}(p) \in S\left(V_\mu^+\right) \ . \tag{8.27}$$

La sua norma è data da

$$\begin{aligned}\langle\Phi_1|\,\Phi_1\rangle &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\left(\phi_{(0)}+\phi_{(\mu)}\right)^{*\alpha}(p)\,\tilde{W}_{\alpha\beta}(p)\left(\phi_{(0)}+\phi_{(\mu)}\right)^{\beta}(p)\\ &= \int \widetilde{dp}^0\,\frac{1}{2\pi\sqrt{2p_0}}\phi^{*\alpha}_{(0)}(p)\,W^{(0)}_{\alpha\beta}(p)\,\phi^{\beta}_{(0)}(p)\\ &\quad+\int \widetilde{dp}^\mu\,\frac{1}{2\pi\sqrt{2p_0}}\phi^{*\alpha}_{(\mu)}(p)\,W^{(\mu)}_{\alpha\beta}(p)\,\phi^{\beta}_{(\mu)}(p)\ .\end{aligned} \tag{8.28}$$

La condizione di gauge (8.15) fornisce la condizione

$$\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}p_\mu\tilde{W}^\mu{}_\nu(p)\left(\phi_{(0)}+\phi_{(\mu)}\right)^{v}(p)\,e^{-ipx}=0\ . \tag{8.29}$$

Si consideri dapprima la parte a massa zero dello stato (8.25)

$$\left|\Phi_{(0)1}\right\rangle=\left\{0,\phi^{\alpha}_{(0)}(p)\,,0,0,0,...\right\}\ , \tag{8.30}$$

con

$$\phi^{\alpha}_{(0)}(p)\in S\left(V_0^+\right)\ . \tag{8.31}$$

La condizione di gauge impone la restrizione

$$\int \widetilde{dp}^0\,\frac{1}{2\pi\sqrt{2p_0}}p_\alpha W^{(0)\alpha}{}_\beta(p)\,\phi^{\beta}_{(0)}(p)\,e^{-ipx}=0\ , \tag{8.32}$$

che implica

$$p_\alpha W^{(0)\alpha}{}_\beta(p)\,\phi^{\beta}_{(0)}(p)=0\ . \tag{8.33}$$

Usando la (8.17) si ottiene allora

$$\frac{1}{\xi}p_\beta\phi^{\beta}_{(0)}(p)=0\ , \tag{8.34}$$

da cui segue

$$p_\alpha\phi^{\alpha}_{(0)}(p)=0\ . \tag{8.35}$$

È facile a questo punto verificare che la norma dello stato (8.30) è nulla come conseguenza della (8.35); infatti si ha

$$\begin{aligned}\left\langle\Phi_{(0)1}\right|\left.\Phi_{(0)1}\right\rangle &= \int \widetilde{dp}^0\,\frac{1}{2\pi\sqrt{2p_0}}\phi^{*\alpha}_{(0)}(p)\,W^{(0)}_{\alpha\beta}(p)\,\phi^{\beta}_{(0)}(p)\\ &= \frac{i}{\mu}\int \widetilde{dp}^0\,\frac{1}{2\pi\sqrt{2p_0}}\phi^{*\alpha}_{(0)}(p)\,\mathcal{E}_{\alpha\beta\rho}p^\rho\phi^{\beta}_{(0)}(p)\ .\end{aligned} \tag{8.36}$$

Esplicitando le componenti si ottiene poi

$$\begin{aligned}&\phi^{*\alpha}_{(0)}(p)\,\mathcal{E}_{\alpha\beta\rho}p^\rho\phi^{\beta}_{(0)}(p)=\\ &\quad= p_0\left(\phi^{*1}_{(0)}(p)\,\phi^{2}_{(0)}(p)-\phi^{1}_{(0)}(p)\,\phi^{*2}_{(0)}(p)\right)\\ &\qquad+p^1\left(\phi^{*2}_{(0)}(p)\,\phi^{0}_{(0)}(p)-\phi^{2}_{(0)}(p)\,\phi^{*0}_{(0)}(p)\right)\\ &\qquad+p^2\left(\phi^{*0}_{(0)}(p)\,\phi^{1}_{(0)}(p)-\phi^{0}_{(0)}(p)\,\phi^{*1}_{(0)}(p)\right)\ .\end{aligned} \tag{8.37}$$

Dalla (8.35) segue poi, per $\vec{p} \neq 0$

$$\phi^0_{(0)}(p) = \frac{p^1}{p_0}\phi^1_{(0)}(p) + \frac{p^2}{p_0}\phi^2_{(0)}(p) \quad , \tag{8.38}$$

per cui

$$\begin{aligned} &\phi^{*\alpha}_{(0)}(p)\,\mathcal{E}_{\alpha\beta\rho}p^\rho\phi^\beta_{(0)}(p) = \\ &\quad = \frac{(p)^2}{p_0}\left(\phi^{*1}_{(0)}(p)\,\phi^2_{(0)}(p) - \phi^1_{(0)}(p)\,\phi^{*2}_{(0)}(p)\right) \quad . \end{aligned} \tag{8.39}$$

Ma su V_0^+ è

$$p^2 = 0 \tag{8.40}$$

e quindi, per $\vec{p} \neq 0$

$$\phi^{*\alpha}_{(0)}(p)\,\mathcal{E}_{\alpha\beta\rho}p^\rho\phi^\beta_{(0)}(p) = 0 \quad . \tag{8.41}$$

Segue, poiché $\phi^\alpha_{(0)}(p) \in S\left(V_0^+\right)$ ed è quindi regolare

$$\begin{aligned} \left\langle \Phi_{(0)1} \middle| \Phi_{(0)1} \right\rangle &= \frac{i}{8\pi^2\mu}\lim_{\epsilon\to 0}\int\limits_{|\vec{p}|<\epsilon} d^2\vec{p}\phi^{*\alpha}_{(0)}(p)\,\mathcal{E}_{\alpha\beta\rho}\frac{p^\rho}{p_0}\phi^\beta_{(0)}(p) \\ &= \frac{i}{8\pi^2\mu}\mathcal{E}_{\alpha\beta\rho}\lim_{\epsilon\to 0}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^\epsilon d\,|\vec{p}|\,p^\rho\phi^{*\alpha}_{(0)}(p)\,\phi^\beta_{(0)}(p) \\ &= 0 \quad . \end{aligned} \tag{8.42}$$

Si può quindi concludere che non ci sono stati fisici ad una particella con massa zero.
Si consideri ora la parte a massa $|\mu|$ dello stato (8.25)

$$\left|\Phi_{(\mu)1}\right\rangle = \left\{0, \phi^\alpha_{(\mu)}(p), 0, 0, 0, ...\right\} \quad , \tag{8.43}$$

con

$$\phi^\alpha_{(\mu)}(p) \in S\left(V_\mu^+\right) \quad . \tag{8.44}$$

La condizione di gauge è identicamente soddisfatta, poiché la parte a massa $|\mu|$ della funzione di Wightman è trasversale, e non costituisce quindi nessuna restrizione.
La norma dello stato (8.43) è

$$\begin{aligned} \left\langle \Phi_{(\mu)1} \middle| \Phi_{(\mu)1} \right\rangle &= \int \widetilde{dp}^\mu \frac{1}{2\pi\sqrt{2p_0}}\phi^{*\alpha}_{(\mu)}(p)\,W^{(\mu)}_{\alpha\beta}(p)\,\phi^\beta_{(\mu)}(p) \\ &= \int \widetilde{dp}^\mu \frac{1}{2\pi\sqrt{2p_0}}\phi^*_{(\mu)\alpha}(p)\left[-P^{\alpha\beta} - \frac{i}{\mu}\mathcal{E}^{\alpha\beta\rho}p_\rho\right]\phi_{(\mu)\beta}(p) \quad . \end{aligned} \tag{8.45}$$

Per determinare il segno di quest'ultima devono essere analizzati gli autovalori del tensore $W^{(\mu)}_{\alpha\beta}(p)$; dato che gli indici assumono tre valori distinti, tale tensore può essere visto come una matrice hermitiana 3×3, che risulta avere autovalori

$$\begin{cases} \lambda_{[1]}(p) = 2\left(\dfrac{p_0}{\mu}\right)^2 > 0 \\ \lambda_{[2]}(p) = \lambda_{[3]}(p) = 0 \end{cases} \tag{8.46}$$

e autovettori non covarianti definiti come

$$\sum\nolimits_{\beta} W^{(\mu)}_{\alpha\beta}(p)\, f^{\beta}_{[i]}(p) = \lambda_{[i]}(p)\, f^{\alpha}_{[i]}(p) \quad , \tag{8.47}$$

$$\sum\nolimits_{\alpha} f^{*\alpha}_{[i]}(p)\, f^{\alpha}_{[j]}(p) = \delta_{[i][j]} \quad . \tag{8.48}$$

Per trovare la soluzione del problema agli autovalori covariante relativo al tensore $W^{(\mu)}_{\alpha\beta}(p)$, si osservi che anch'esso deve avere un solo autovalore non nullo; questo suggerisce che esso sia proporzionale ad un proiettore. Infatti, usando il fatto che su V^{+}_{μ} risulta

$$p^2 = \mu^2 \quad , \tag{8.49}$$

si trova facilmente

$$W^{(\mu)}_{\alpha\rho}(p)\, W^{(\mu)\rho}{}_{\beta}(p) = -2W^{(\mu)}_{\alpha\beta}(p) \quad , \tag{8.50}$$

per cui il tensore $W^{(\mu)}_{\alpha\beta}(p)$ si può scrivere come

$$W^{(\mu)}_{\alpha\beta}(p) = -2P^{(\mu)}_{\alpha\beta}(p) \quad , \tag{8.51}$$

ove $P^{(\mu)}_{\alpha\beta}(p)$ è il proiettore

$$P^{(\mu)\alpha\beta}(p) = \frac{1}{2}\left(P^{\alpha\beta} + \frac{i}{\mu}\mathcal{E}^{\alpha\beta\rho}p_{\rho}\right) \quad , \tag{8.52}$$

$$P^{(\mu)}_{\alpha\rho}(p)\, P^{(\mu)\rho}{}_{\beta}(p) = P^{(\mu)}_{\alpha\beta}(p) \quad , \tag{8.53}$$

$$P^{(\mu)}_{\alpha\beta}(p) = P^{*(\mu)}_{\beta\alpha}(p) \quad . \tag{8.54}$$

È evidente che $P^{(\mu)}_{\alpha\beta}(p)$ ha un solo autovalore non nullo pari a 1

$$\begin{cases} \lambda_{[0]}(p) = 1 \\ \lambda_{[1]}(p) = \lambda_{[2]}(p) = 0 \end{cases} \tag{8.55}$$

e autovettori covarianti definiti come

$$P^{(\mu)}_{\alpha\beta}(p)\, f^{\beta}_{[\rho]}(p) = \lambda_{[\rho]}(p)\, f_{\alpha[\rho]}(p) \tag{8.56}$$

che, come verrà mostrato, possono essere normalizzati a

$$f^{*\alpha}_{[\rho]}(p)\, f_{\alpha[\tau]}(p) = -\eta_{[\rho][\tau]} \quad . \tag{8.57}$$

Segue subito che $W^{(\mu)}_{\alpha\beta}(p)$ ha un solo autovalore non nullo pari a -2 e autovettori covarianti coincidenti con quelli di $P^{(\mu)}_{\alpha\beta}(p)$.
Dalla completezza degli autovettori su V^{+}_{μ} segue che la funzione $\phi^{\alpha}_{(\mu)}(p)$ si può scrivere del tutto in generale come

$$\phi^{\alpha}_{(\mu)}(p) = \sum\nolimits_{[\rho]} a_{[\rho]}(p)\, f^{\alpha}_{[\rho]}(p) \quad , \tag{8.58}$$

ove le $a_{[\rho]}(p)$ sono funzioni scalari arbitrarie con supporto V^{+}_{μ}.

La norma dello stato (8.43) si riduce allora a

$$\begin{aligned}
\left\langle \Phi_{(\mu)1} \middle| \, \Phi_{(\mu)1} \right\rangle &= \int \widetilde{dp}^{\mu} \frac{1}{2\pi\sqrt{2p_0}} \phi^{*\alpha}_{(\mu)} \left(p\right) W^{(\mu)}_{\alpha\beta} \left(p\right) \phi^{\beta}_{(\mu)} \left(p\right) \\
&= \int d^2\vec{p} \frac{1}{\left(2\pi\right)^2 p_0} \left| a_{[0]} \left(p\right) \right|^2 \\
&> 0 \ .
\end{aligned} \tag{8.59}$$

Si può quindi concludere che solo uno dei tre gradi di libertà funzionali a massa $|\mu|$ contribuisce positivamente alla norma ed è quindi fisico; si noti che a tale conclusione si poteva giungere anche usando la soluzione non covariante del problema agli autovalori relativo al tensore $W^{(\mu)}_{\alpha\beta}\left(p\right)$ visto come matrice. Gli stati fisici ad una particella sono quindi composti da una sola eccitazione a massa $|\mu|$ e polarizzazione corrispondente all'autovettore non banale di $P^{(\mu)}_{\alpha\beta}\left(p\right)$, indicato semplicemente con $f^{\mu}\left(p\right)$.
Il generico stato fisico ad una particella si scrive quindi

$$\left|\Phi_{f1}\right\rangle = \left\{0, 2\pi\sqrt{p_0} a\left(p\right) f^{\alpha}\left(p\right), 0, 0, 0, ...\right\} \ , \tag{8.60}$$

con $a\left(p\right)$ funzione scalare arbitraria con supporto V^{+}_{μ} e tale che

$$\int d^2\vec{p} \left|a\left(p\right)\right|^2 = 1 \ . \tag{8.61}$$

Esso costituisce il sottospazio $\mathcal{H}_{f1}$ di $\mathcal{H}$, a norma definita positiva, degli stati fisici ad una particella.
Si consideri infine uno stato ad n particelle del tipo

$$\left|\Phi_n\right\rangle = \left\{0, 0, ..., \phi^{\alpha_1 ... \alpha_n}_{(0)}\left(p_1 ..., p_n\right) + \phi^{\alpha_1 ... \alpha_n}_{(\mu)}\left(p_1 ..., p_n\right), 0, 0, 0, ...\right\} \ , \tag{8.62}$$

con

$$\phi^{\alpha_1 ... \alpha_n}_{(0)}\left(p_1 ..., p_n\right) \in S\left(\left(V^{+}_{0}\right)^n\right) \ , \tag{8.63}$$

$$\phi^{\alpha_1 ... \alpha_n}_{(\mu)}\left(p_1 ..., p_n\right) \in S\left(\left(V^{+}_{\mu}\right)^n\right) \ . \tag{8.64}$$

Date le proprietà di simmetria a cui devono soddisfare, le funzioni $\phi^{\alpha_1 ... \alpha_n}_{(0)}\left(p_1 ..., p_n\right)$ e $\phi^{\alpha_1 ... \alpha_n}_{(\mu)}\left(p_1 ..., p_n\right)$ possono essere scritte come

$$\phi^{\alpha_1 ... \alpha_n}_{(0)}\left(p_1 ..., p_n\right) = a_{(0)}\left(p_1 ..., p_n\right) \phi^{\alpha_1}_{(0)}\left(p_1\right) ... \phi^{\alpha_n}_{(0)}\left(p_n\right) \ , \tag{8.65}$$

$$\phi^{\alpha_1 ... \alpha_n}_{(\mu)}\left(p_1 ..., p_n\right) = a_{(\mu)}\left(p_1 ..., p_n\right) \phi^{\alpha_1}_{(\mu)}\left(p_1\right) ... \phi^{\alpha_n}_{(\mu)}\left(p_n\right) \ , \tag{8.66}$$

ove $a_{(0)}\left(p_1 ..., p_n\right)$ e $a_{(\mu)}\left(p_1 ..., p_n\right)$ sono funzioni scalari, simmetriche nelle variabili, con supporti $\left(V^{+}_{0}\right)^n$ e $\left(V^{+}_{\mu}\right)^n$. Questo equivale ad asserire che il sottospazio ad n particelle è il prodotto cartesiano simmetrizzato di n sottospazi ad una particella.
Come conseguenza delle (8.65) e (8.66), e dalla definizione del prodotto scalare, segue subito che l'unico contributo non nullo alla norma dello stato (8.62) è positivo e proviene da uno solo dei gradi di libertà funzionali a massa $|\mu|$, corrispondente alla polarizzazione associata all'autovettore $f^{\alpha}\left(p\right)$.

Il generico stato fisico ad n particelle è quindi dato da

$$|\Phi_{fn}\rangle = \{0,0,...,(2\pi\sqrt{p_0})^n\, a\,(p_1,...,p_n)\, f^{\alpha_1}(p_1)\,...f^{\alpha_n}(p_n)\,,0,0,0,...\} \quad , \tag{8.67}$$

con $a\,(p_1,...,p_n)$ funzione scalare arbitraria con supporto $\left(V_\mu^+\right)^n$, simmetrica nelle variabili e tale che

$$\int d^2\vec{p}_1...\int d^2\vec{p}_n\,|a\,(p_1,...,p_n)|^2 = 1 \ . \tag{8.68}$$

Esso costituisce il sottospazio $\mathcal{H}_{fn}$ di $\mathcal{H}$, a norma definita positiva, degli stati fisici ad n particelle.
Alla luce di quanto visto, tutti gli stati fisici con un numero finito di particelle hanno un solo grado di libertà a massa $|\mu|$ e norma positiva, e lo spazio degli stati fisici è quindi dato dal completamento unico del prodotto dei sottospazi $\mathcal{H}_{fn}$.
Il generico stato fisico è

$$\begin{aligned} |\Phi_f\rangle = \Big\{&a_0, 2\pi\sqrt{(p_1)_0}a_1(p_1)\,f^{\alpha_1}(p_1)\,,...\\ &,2\pi\sqrt{(p_1)_0}...2\pi\sqrt{(p_n)_0}a_n(p_1,...,p_n)\,f^{\alpha_1}(p_1)\,...f^{\alpha_n}(p_n)\,,...\Big\} \quad , \end{aligned} \tag{8.69}$$

con $a_n\,(p_1,...,p_n)$ funzioni scalari arbitrarie con supporto $\left(V_\mu^+\right)^n$, simmetriche nelle variabili, e tali che

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int d^2\vec{p}_1...\int d^2\vec{p}_n\,|a_n\,(p_1,...,p_n)|^2 = 1 \ . \tag{8.70}$$

Esso costituisce il sottospazio $\mathcal{H}_f$ di $\mathcal{H}$, a norma definita positiva, degli stati fisici.
Il ruolo del tensore $f^{\alpha_1}(p_1)\,...f^{\alpha_n}(p_n)$ consiste nel selezionare la polarizzazione fisica dei fotoni, capace di contribuire ai valori di aspettazione.

8.1.3 Vettore di polarizzazione

Il vettore di polarizzazione $f^\mu(p)$ può essere calcolato esplicitamente.
Deve essere

$$P^{(\mu)}_{\alpha\beta}(p)\,f^\beta(p) = f_\alpha(p) \quad . \tag{8.71}$$

Da questa, essendo $P^{(\mu)}_{\alpha\beta}(p)$ trasversale, segue subito

$$p_\mu f^\mu(p) = 0 \ . \tag{8.72}$$

Con l'aiuto di quest'ultima, la (8.71) diventa

$$f^\alpha(p) + \frac{i}{\mu}\mathcal{E}^{\alpha\rho\tau}p_\rho f_\tau(p) = 0 \ . \tag{8.73}$$

Segue, esplicitando le componenti

$$\begin{cases} i\mu f^0(p) + p^2 f^1(p) - p^1 f^2(p) = 0\\ p^2 f^0(p) + i\mu f^1(p) - p^0 f^2(p) = 0\\ p^1 f^0(p) - p^0 f^1(p) - i\mu f^2(p) = 0 \end{cases} \quad , \tag{8.74}$$

la cui soluzione è

$$\begin{cases} f^0(p) = \alpha(p)\left(\mu^2 - p_0^2\right) \\ f^1(p) = \alpha(p)\left(i\mu p^2 - p^0 p^1\right) \\ f^2(p) = -\alpha(p)\left(i\mu p^1 + p^0 p^2\right) \end{cases} , \tag{8.75}$$

con $\alpha(p)$ arbitraria; quest'ultima viene ridotta ad una fase dalla condizione di normalizzazione

$$f^{*\alpha}(p) f_\alpha(p) = -1 , \tag{8.76}$$

che implica

$$|\alpha(p)|^2 = \frac{1}{2\mu^2\left(p_0^2 - \mu^2\right)} . \tag{8.77}$$

Questa dimostra in particolare che la condizione (8.57) ha il segno giusto. Scegliendo

$$\alpha(p) = \frac{1}{\sqrt{2\mu^2\left(p_0^2 - \mu^2\right)}} e^{i\beta(p)} , \tag{8.78}$$

la forma esplicita cercata è

$$f^\mu(p) = \frac{1}{\sqrt{2\mu^2\left(p_0^2 - \mu^2\right)}} \begin{pmatrix} \mu^2 - p_0^2 \\ i\mu p^2 - p^0 p^1 \\ -i\mu p^1 - p^0 p^2 \end{pmatrix} e^{i\beta(p)} . \tag{8.79}$$

La fase $\beta(p)$ non è completamente arbitraria. Infatti, pur non incidendo sulle proprietà di definizione del vettore di polarizzazione, essa influenza il suo comportamento infrarosso. Nel limite in cui $|\vec{p}| \to 0$ si ha

$$f^\mu(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -i\frac{\mu}{|\mu|} \end{pmatrix} e^{i \lim_{|\vec{p}| \to 0} \left(\beta(p) - \frac{\mu}{|\mu|}\theta(p)\right)} , \tag{8.80}$$

con

$$\theta(p) = \arctan\left(\frac{p^2}{p^1}\right) . \tag{8.81}$$

Siccome quest'ultima funzione è singolare nell'origine

$$\lim_{|\vec{p}| \to 0} \theta(p) = \nexists \tag{8.82}$$

si deve scegliere

$$\beta(p) = \frac{\mu}{|\mu|}\theta(p) + \gamma(p) , \tag{8.83}$$

con $\gamma(p)$ funzione arbitraria ma regolare.

Soltanto in questo modo la fase arbitraria, rappresentata a questo punto da $\gamma(p)$, diventa completamente ininfluente, e può quindi essere posta uguale a zero, ottenendo

$$f^\mu(p) = \frac{1}{\sqrt{2\mu^2\left(p_0^2 - \mu^2\right)}} \begin{pmatrix} \mu^2 - p_0^2 \\ i\mu p^2 - p^0 p^1 \\ -i\mu p^1 - p^0 p^2 \end{pmatrix} e^{i\frac{\mu}{|\mu|}\theta(p)} . \tag{8.84}$$

Per quanto visto, il vettore di polarizzazione soddisfa, indipendentemente dalla scelta della sua fase di normalizzazione, le importanti proprietà

$$f^{\mu}(p) + \frac{i}{\mu}\mathcal{E}^{\mu\alpha\beta}p_{\alpha}f_{\beta}(p) = 0 \ , \tag{8.85}$$

$$p_{\mu}f^{\mu}(p) = 0 \ , \tag{8.86}$$

$$f^{\mu}(p)\, f^{*\nu}(p) = -P^{(\mu)\mu\nu}(p) \ , \tag{8.87}$$

mentre con la fase scelta, le sue derivate soddisfano l'altrettanto importante proprietà

$$f^{*\mu}(p)\overleftrightarrow{\partial_i} f_{\mu}(p) = 2i\frac{p_0 - |\mu|}{\mu}\mathcal{E}^{i}{}_{j}\frac{p^j}{p^k p_k} \ . \tag{8.88}$$

Si osservi che questa è regolare nell'infrarosso, come lo è il vettore di polarizzazione scelto; una scelta di fase diversa dalla (8.83) produce invece inevitabilmente una divergenza infrarossa, come può essere facilmente verificato.

8.1.4 Operatori di creazione ed annichilazione

In accordo con quanto spiegato nel quinto capitolo, è possibile espandere il campo in modi normali

$$A^{\mu}(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^2}\sqrt{2p_0}\left[\tilde{W}^{\mu\nu}(p)\, a_{\nu}(p)\, e^{-ipx} + \tilde{W}^{\mu\nu}(p)\, a^{+}_{\nu}(p)\, e^{ipx}\right] \ . \tag{8.89}$$

Si è visto che tutti gli stati fisici hanno massa $|\mu|$ e polarizzazione $f^{\mu}(p)$; come conseguenza, anche il campo fisico, ovvero la parte rilevante del campo nei valori di aspettazione su stati fisici, ha massa $|\mu|$ e polarizzazione $f^{\mu}(p)$, e può essere scritto, secondo quanto illustrato nel quinto capitolo, come

$$A^{\mu}_{f}(x) = \sqrt{2}\int \widetilde{dp}^{\mu}\left[a(p)\, f^{\mu}(p)\, e^{-ipx} + a^{+}(p)\, f^{*\mu}(p)\, e^{ipx}\right] \ . \tag{8.90}$$

Dalle proprietà del vettore $f^{\mu}(p)$ segue che il campo fisico soddisfa i vincoli previsti nel secondo capitolo

$$A^{\mu}_{f}(x) - \frac{1}{\mu}\mathcal{E}^{\mu\alpha\beta}\partial_{\alpha}A_{f\beta}(x) = 0 \ , \tag{8.91}$$

$$\partial_{\mu}A^{\mu}_{f}(x) = 0 \ , \tag{8.92}$$

e la sua equazione del moto si riduce a

$$\left(\Box + \mu^2\right)A^{\mu}_{f}(x) = 0 \ . \tag{8.93}$$

Come conseguenza delle dimostrazioni generali fatte nel quinto capitolo, gli operatori $a^{+}(p)$ e $a(p)$ sono operatori di creazione ed annichilazione per gli stati fisici e soddisfano le regole di commutazione convenzionali

$$\left[a(p), a^{+}(q)\right] = \delta^2(\vec{p} - \vec{q}) \ , \tag{8.94}$$

$$\left[a(p), a(q)\right] = 0 \ , \tag{8.95}$$

$$\left[a^+(p), a^+(q)\right] = 0 \ . \tag{8.96}$$

Gli operatori addolciti, $\forall \varphi \in S\left(R^2\right)$

$$a[\varphi] = \int d^2\vec{p} a(p) \varphi(p) = (a, \varphi) \ , \tag{8.97}$$

$$a^+[\varphi] = \int d^2\vec{p} a^+(p) \varphi^*(p) = \left(a^+, \varphi^*\right) \ , \tag{8.98}$$

soddisfano le regole di commutazione, $\forall \varphi, \chi \in S\left(R^2\right)$

$$\left[a[\varphi], a^+[\chi]\right] = \int d^2\vec{p} \varphi(p) \chi^*(p) \ , \tag{8.99}$$

$$\left[a[\varphi], a[\chi]\right] = 0 \ , \tag{8.100}$$

$$\left[a^+[\varphi], a^+[\chi]\right] = 0 \ , \tag{8.101}$$

e hanno le seguenti azioni, in accordo con quelle del campo fisico

$$\begin{aligned}
&\left(a^+[\varphi]|\Phi\rangle\right)_n^{\mu_1...\mu_n}(p_1, ..., p_n) = \\
&= -\frac{2\pi\sqrt{p_0}}{\sqrt{n}} \sum_{m=1}^{n} \phi_{n-1}^{\mu_1...\mu_{m-1}\mu_{m+1}...\mu_n}(p_1, ..., p_{m-1}, p_{m+1}, ..., p_n) \\
&f^{\mu_m}(p_m) \varphi^*(p_m) \ ,
\end{aligned} \tag{8.102}$$

$$\begin{aligned}
&\left(a[\varphi]|\Phi\rangle\right)_n^{\mu_1...\mu_n}(p_1, ..., p_n) = \\
&= \sqrt{n+1} \int \widetilde{dp}^{\mu} \sqrt{2} f_\nu^*(p) \phi_{n+1}^{\nu\mu_1...\mu_n}(p, p_1, ..., p_n) \varphi(p) \ .
\end{aligned} \tag{8.103}$$

Segue

$$\begin{aligned}
&\left(a^+(p)|\Phi\rangle\right)_n^{\mu_1...\mu_n}(p_1, ..., p_n) = \\
&= -\frac{2\pi\sqrt{p_0}}{\sqrt{n}} \sum_{m=1}^{n} \phi_{n-1}^{\mu_1...\mu_{m-1}\mu_{m+1}...\mu_n}(p_1, ..., p_{m-1}, p_{m+1}, ..., p_n) \\
&f^{\mu_m}(p_m) \delta^2(\vec{p} - \vec{p}_m) \ ,
\end{aligned} \tag{8.104}$$

$$\begin{aligned}
&\left(a(p)|\Phi\rangle\right)_n^{\mu_1...\mu_n}(p_1, ..., p_n) = \\
&= \frac{\sqrt{n+1}}{2\pi\sqrt{p_0}} f_\nu^*(p) \phi_{n+1}^{\nu\mu_1...\mu_n}(p, p_1, ..., p_n) \ .
\end{aligned} \tag{8.105}$$

Il sottospazio fisico $\mathcal{H}_f$ di $\mathcal{H}$ viene generato da successive applicazioni dell'operatore di creazione sul vuoto, e il generico stato fisico (8.69) si può scrivere come

$$|\Phi_f\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n!}} \int d^2\vec{p}_1 ... \int d^2\vec{p} a_n(p_1, ..., p_n) a^+(p_1) ... a^+(p_n) |\Phi_{f0}\rangle \ , \tag{8.106}$$

con $a_n(p_1, ..., p_n)$ funzioni arbitrarie, simmetriche nelle variabili, e tali che

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int d^2\vec{p}_1 ... \int d^2\vec{p}_n \left|a_n(p_1, ..., p_n)\right|^2 = 1 \ . \tag{8.107}$$

Va infine notato che l'espressione fisica del campo ottenuta è utilizzabile solo in elementi di matrice che non contengano stati intermediari non fisici, ovvero elementi di matrice di prodotti normali di campi, quali sono tutte le osservabili.

8.2 Gravità

La realizzazione esplicita dello spazio degli stati e degli operatori di campo della gravità procede esattamente nello stesso modo che nel caso dell'elettrodinamica e non presenta difficoltà aggiuntive. L'isolamento delle eccitazioni fisiche viene eseguito analizzando gli autovalori della funzione di Wightman e costruendo operatori di creazione ed annichilazione per gli stati fisici.

8.2.1 Spazio degli stati e operatori di campo

Data la natura tensoriale delle teoria, lo spazio degli stati $\mathcal{H}$

$$\mathcal{H} = \{|\Phi\rangle\} \tag{8.108}$$

è costituito dalle sequenze

$$|\Phi\rangle = \{\phi_0, \phi_1^{\mu_1\nu_1}(p_1), \phi_2^{\mu_1\nu_1\mu_2\nu_2}(p_1,p_2), ..., \phi_n^{\mu_1\nu_1...\mu_n\nu_n}(p_1,...,p_n), ...\} \quad , \tag{8.109}$$

ove

$$\phi_n^{\mu_1\nu_1...\mu_n\nu_n}(p_1,...,p_n) \in S\left(R^{3n}\right) \tag{8.110}$$

indica un tensore completamente simmetrico rispetto agli scambi

$$\mu_i \leftrightarrow \nu_i \quad , \tag{8.111}$$

$$(\mu_i\nu_i, p_i) \leftrightarrow (\mu_j\nu_j, p_j) \quad . \tag{8.112}$$

Lo spazio $\mathcal{H}$ cosi definito costituisce lo spazio di Fock, e le funzioni $\phi_n^{\mu_1\nu_1...\mu_n\nu_n}(p_1,...,p_n)$ rappresentano le componenti ad n particelle del generico stato. Ogni stato rappresenta un sistema di particelle, ognuna delle quali ha potenzialmente sei polarizzazioni distinte; uno stato ad n particelle ha quindi $6n$ gradi di libertà funzionali.
Il prodotto scalare è definito, $\forall\, |\Phi\rangle, |\Psi\rangle \in \mathcal{H}$, come

$$\begin{aligned}\langle\Phi|\,\Psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}\int\frac{d^3p_1}{(2\pi)^3}...\int\frac{d^3p_n}{(2\pi)^3}\\ \phi^{*n}_{\mu_1\nu_1...\mu_n\nu_n}(p_1,..,p_n)\,\tilde{W}^{\mu_1\nu_1}{}_{\rho_1\tau_1}(p_1)...\tilde{W}^{\mu_n\nu_n}{}_{\rho_n\tau_n}(p_n)\,\psi_n^{\rho_1\tau_1...\rho_n\tau_n}(p_1,..,p_n) \quad .\end{aligned} \tag{8.113}$$

Si definiscono poi $\forall\varphi \in S\left(R^3\right)$ gli operatori di campo addolciti

$$h^{\mu\nu}[\varphi] = \int d^3x h^{\mu\nu}(x)\,\varphi(x) = (h^{\mu\nu}, \varphi) \quad , \tag{8.114}$$

$$h^{+\mu\nu}[\varphi] = \int d^3x h^{+\mu\nu}(x)\,\varphi(x) = (h^{+\mu\nu}, \varphi) \quad , \tag{8.115}$$

$$h^{-\mu\nu}[\varphi] = \int d^3x h^{-\mu\nu}(x)\,\varphi(x) = (h^{-\mu\nu}, \varphi) \quad , \tag{8.116}$$

con le seguenti azioni in $\mathcal{H}$

$$\begin{aligned}&\left(h^{+\mu\nu}[\varphi]\,|\Phi\rangle\right)_n^{\mu_1\nu_1...\mu_n\nu_n}(p_1,...,p_n) = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{n}}\sum_{m=1}^{n}\phi_{n-1}^{\mu_1\nu_1...\mu_{m-1}\nu_{m-1}\mu_{m+1}\nu_{m+1}...\mu_n\nu_n}(p_1,...,p_{m-1},p_{m+1},...,p_n) \\ &\quad\left(\eta^{\mu\mu_m}\eta^{\nu\nu_m} + \eta^{\mu\nu_m}\eta^{\nu\mu_m}\right)\tilde{\varphi}(p_m) \quad ,\end{aligned} \tag{8.117}$$

$$\begin{aligned}&\left(h^{-\mu\nu}\left[\varphi\right]|\Phi\rangle\right)_n^{\mu_1\nu_1...\mu_n\nu_n}\left(p_1,...,p_n\right)=\\&=\sqrt{n+1}\int\frac{d^3p}{\left(2\pi\right)^3}\tilde{W}^{\mu\nu}{}_{\rho\tau}\left(p\right)\phi_{n+1}^{\rho\tau\mu_1\nu_1...\mu_n\nu_n}\left(p,p_1,...,p_n\right)\tilde{\varphi}\left(-p\right)\quad,\end{aligned}\tag{8.118}$$

$$\begin{aligned}&\left(h^{\mu\nu}\left[\varphi\right]|\Phi\rangle\right)_n^{\mu_1\nu_1...\mu_n\nu_n}\left(p_1,...,p_n\right)=\\&=\left(h^{+\mu\nu}\left[\varphi\right]|\Phi\rangle\right)_n^{\mu_1\nu_1...\mu_n\nu_n}\left(p_1,...,p_n\right)+\left(h^{-\mu\nu}\left[\varphi\right]|\Phi\rangle\right)_n^{\mu_1\nu_1...\mu_n\nu_n}\left(p_1,...,p_n\right)\quad.\end{aligned}\tag{8.119}$$

Segue

$$\begin{aligned}&\left(h^{+\mu\nu}\left(x\right)|\Phi\rangle\right)_n^{\mu_1\nu_1...\mu_n\nu_n}\left(p_1,...,p_n\right)=\\&=\frac{1}{2\sqrt{n}}\sum_{m=1}^{n}\phi_{n-1}^{\mu_1\nu_1...\mu_{m-1}\nu_{m-1}\mu_{m+1}\nu_{m+1}...\mu_n\nu_n}\left(p_1,...,p_{m-1},p_{m+1},...,p_n\right)\\&\quad\left(\eta^{\mu\mu_m}\eta^{\nu\nu_m}+\eta^{\mu\nu_m}\eta^{\nu\mu_m}\right)e^{ip_mx}\quad,\end{aligned}\tag{8.120}$$

$$\begin{aligned}&\left(h^{-\mu\nu}\left(x\right)|\Phi\rangle\right)_n^{\mu_1\nu_1...\mu_n\nu_n}\left(p_1,...,p_n\right)=\\&=\sqrt{n+1}\int\frac{d^3p}{\left(2\pi\right)^3}\tilde{W}^{\mu\nu}{}_{\rho\tau}\left(p\right)\phi_{n+1}^{\rho\tau\mu_1\nu_1...\mu_n\nu_n}\left(p,p_1,...,p_n\right)e^{-ipx}\quad,\end{aligned}\tag{8.121}$$

$$\begin{aligned}&\left(h^{\mu\nu}\left(x\right)|\Phi\rangle\right)_n^{\mu_1\nu_1...\mu_n\nu_n}\left(p_1,...,p_n\right)=\\&=\left(h^{+\mu\nu}\left(x\right)|\Phi\rangle\right)_n^{\mu_1\nu_1...\mu_n\nu_n}\left(p_1,...,p_n\right)+\left(h^{-\mu\nu}\left(x\right)|\Phi\rangle\right)_n^{\mu_1\nu_1...\mu_n\nu_n}\left(p_1,...,p_n\right)\quad.\end{aligned}\tag{8.122}$$

Valgono tutte le dimostrazioni fatte nel quinto capitolo e la realizzazione definita soddisfa quindi tutti i requisiti necessari.

8.2.2 Stati fisici

Gli stati fisici devono soddisfare la condizione di gauge

$$\left(\partial_\mu h^{\mu\nu}\left(x\right)\right)^-|\Phi_f\rangle=0\quad.\tag{8.123}$$

Deve poi essere verificato che essi abbiano norma positiva.
La funzione di Wightman è

$$\begin{aligned}\tilde{W}^{\mu\nu\alpha\beta}\left(p\right)&=2\pi\theta\left(p_0\right)\delta\left(p^2\right)W^{(0)\mu\nu\alpha\beta}\left(p\right)\\&\quad+2\pi\theta\left(p_0\right)\delta\left(p^2-\mu^2\right)W^{(\mu)\mu\nu\alpha\beta}\left(p\right)\quad,\end{aligned}\tag{8.124}$$

con

$$\begin{aligned}\tilde{W}^{(0)\mu\nu\alpha\beta}\left(p\right)=&\,2\eta^{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta}-\left(\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}+\eta^{\mu\beta}\eta^{\nu\alpha}\right)\\&-\frac{i}{2\mu}\left[\eta^{\mu\alpha}\mathcal{E}^{\nu\beta\sigma}+\left(\mu\leftrightarrow\nu\right)+\left(\alpha\leftrightarrow\beta\right)\right]p_\sigma\\&-\left(\frac{1}{\mu^2}+\frac{2}{p^2}\right)\left(\eta^{\mu\nu}p^\alpha p^\beta+\eta^{\alpha\beta}p^\mu p^\nu\right)\\&+\left(\frac{1}{\mu^2}+\frac{\xi-1}{\xi}\frac{1}{p^2}\right)\left[\eta^{\mu\alpha}p^\nu p^\beta+\left(\mu\leftrightarrow\nu\right)+\left(\alpha\leftrightarrow\beta\right)\right]\\&+\frac{i}{2\mu}\left(\frac{1}{\mu^2}+\frac{1}{p^2}\right)\left[\mathcal{E}^{\mu\alpha\sigma}p^\nu p^\beta+\left(\mu\leftrightarrow\nu\right)+\left(\alpha\leftrightarrow\beta\right)\right]p_\sigma\\&-\left(\frac{1}{\mu^4}+\frac{1}{\mu^2p^2}-\frac{3}{\xi}\frac{1}{p^4}\right)p^\mu p^\nu p^\alpha p^\beta\quad,\end{aligned}\tag{8.125}$$

$$W^{(\mu)\mu\nu\alpha\beta}(p) = -P^{\mu\nu}P^{\alpha\beta} + \left(P^{\mu\alpha}P^{\nu\beta} + P^{\mu\beta}P^{\nu\alpha}\right)$$
$$+\frac{i}{2\mu}\left[\mathcal{E}^{\mu\alpha\sigma}P^{\nu\beta} + (\mu \leftrightarrow \nu) + (\alpha \leftrightarrow \beta)\right] p_\sigma \ , \tag{8.126}$$

$$P^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta} - \frac{p^\alpha p^\beta}{\mu^2} \ . \tag{8.127}$$

Come conseguenza della sua forma e della definizione del prodotto scalare, tutti gli stati con norma non nulla hanno supporto contenuto in $V_0^+ \cup V_\mu^+$.
Il vuoto del sistema è del tipo

$$|\Phi_0\rangle = \{a, 0, 0, 0, ...\} \ , \tag{8.128}$$

con

$$a \in \not{C} \ . \tag{8.129}$$

La condizione di gauge (8.123) è identicamente soddisfatta; inoltre, la norma del vuoto (8.128) è

$$\langle\Phi_0|\ \Phi_0\rangle = |a|^2 > 0 \ . \tag{8.130}$$

Il vuoto fisico è quindi

$$|\Phi_{f0}\rangle = \{a, 0, 0, 0, ...\} \ , \tag{8.131}$$

con a complesso tale che

$$|a|^2 = 1 \ . \tag{8.132}$$

Esso costituisce il sottospazio $\mathcal{H}_{f0}$ di $\mathcal{H}$, a norma definita positiva, degli stati fisici vuoti.
Si consideri poi uno stato ad una particella del tipo

$$|\Phi_1\rangle = \left\{0, \phi^{\alpha\beta}_{(0)}(p) + \phi^{\alpha\beta}_{(\mu)}(p), 0, 0, 0, ...\right\} \ , \tag{8.133}$$

con

$$\phi^{\alpha\beta}_{(0)}(p) \in S\left(V_0^+\right) \ , \tag{8.134}$$

$$\phi^{\alpha\beta}_{(\mu)}(p) \in S\left(V_\mu^+\right) \ . \tag{8.135}$$

La sua norma è data da

$$\langle\Phi_1|\ \Phi_1\rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\left(\phi_{(0)} + \phi_{(\mu)}\right)^{*\mu\nu}(p)\,\tilde{W}_{\mu\nu\alpha\beta}(p)\left(\phi_{(0)} + \phi_{(\mu)}\right)^{\alpha\beta}(p)$$
$$= \int \widetilde{dp}^0 \frac{1}{2\pi\sqrt{2p_0}}\phi^{*\mu\nu}_{(0)}(p)\,W^{(0)}_{\mu\nu\alpha\beta}(p)\,\phi^{\alpha\beta}_{(0)}(p) \tag{8.136}$$
$$+\int \widetilde{dp}^\mu \frac{1}{2\pi\sqrt{2p_0}}\phi^{*\mu\nu}_{(\mu)}(p)\,W^{(\mu)}_{\mu\nu\alpha\beta}(p)\,\phi^{\alpha\beta}_{(\mu)}(p) \ .$$

La condizione di gauge (8.123) fornisce la condizione

$$\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}p_\mu \tilde{W}^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta}(p)\left(\phi_{(0)} + \phi_{(\mu)}\right)^{\alpha\beta}(p)\,e^{-ipx} = 0 \ . \tag{8.137}$$

Si consideri dapprima la parte a massa zero dello stato (8.133)

$$\left|\Phi_{(0)1}\right\rangle = \left\{0, \phi^{\alpha\beta}_{(0)}(p), 0, 0, 0, ...\right\} \ , \tag{8.138}$$

con

$$\phi^{\alpha\beta}_{(0)}(p) \in S\left(V_0^+\right) \quad . \tag{8.139}$$

La condizione di gauge impone la restrizione

$$\int \widetilde{dp}^0 \frac{1}{2\pi\sqrt{2p_0}} p_\mu W^{(0)\mu\nu}{}_{\alpha\beta}(p)\,\phi^{\alpha\beta}_{(0)}(p)\,e^{-ipx} = 0 \quad , \tag{8.140}$$

che implica

$$p_\mu W^{(0)\mu\nu}{}_{\alpha\beta}(p)\,\phi^{\alpha\beta}_{(0)}(p) = 0 \ . \tag{8.141}$$

Usando la (8.125) si ottiene allora

$$\frac{1}{\xi}\left[2p_\mu\phi^{\mu\alpha}_{(0)}(p) - p^\alpha\frac{p_\mu p_\nu}{p^2}\phi^{\mu\nu}_{(0)}(p)\right] = 0 \ , \tag{8.142}$$

da cui segue

$$p_\mu\phi^{\mu\nu}_{(0)}(p) = 0 \ . \tag{8.143}$$

È facile a questo punto verificare che la norma dello stato (8.138) è nulla come conseguenza della (8.143); infatti si ha

$$\begin{aligned}
\left\langle \Phi_{(0)1}\middle|\, \Phi_{(0)1}\right\rangle &= \int \widetilde{dp}^0 \frac{1}{2\pi\sqrt{2p_0}}\phi^{*\mu\nu}_{(0)}(p)\,W^{(0)}_{\mu\nu\alpha\beta}(p)\,\phi^{\alpha\beta}_{(0)}(p) \\
&= \int \widetilde{dp}^0 \frac{1}{2\pi\sqrt{2p_0}}\phi^{*}_{(0)\mu\nu}(p) \\
&\quad \Big\{2\eta^{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta} - \left(\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta} + \eta^{\mu\beta}\eta^{\nu\alpha}\right) \\
&\quad -\frac{i}{2\mu}\left[\eta^{\mu\alpha}\mathcal{E}^{\nu\beta\sigma} + (\mu\leftrightarrow\nu) + (\alpha\leftrightarrow\beta)\right]p_\sigma\Big\} \\
&\quad \phi_{(0)\alpha\beta}(p) \quad .
\end{aligned} \tag{8.144}$$

Esplicitando le componenti si ha poi

$$\begin{aligned}
&\phi^{*\mu\nu}_{(0)}(p)\left[2\eta_{\mu\nu}\eta_{\alpha\beta} - (\eta_{\mu\alpha}\eta_{\nu\beta} + \eta_{\mu\beta}\eta_{\nu\alpha})\right]\phi^{\alpha\beta}_{(0)}(p) = \\
&\quad = 2\left[\phi^{*\mu}_{(0)\mu}(p)\,\phi^{\nu}_{(0)\nu}(p) - \phi^{*\mu\nu}_{(0)}(p)\,\phi_{(0)\mu\nu}(p)\right] \\
&\quad = 2\left[2\left|\phi^{01}_{(0)}(p)\right|^2 - \left(\phi^{*00}_{(0)}(p)\,\phi^{11}_{(0)}(p) + \phi^{00}_{(0)}(p)\,\phi^{*11}_{(0)}(p)\right)\right. \\
&\qquad +2\left|\phi^{02}_{(0)}(p)\right|^2 - \left(\phi^{*00}_{(0)}(p)\,\phi^{22}_{(0)}(p) + \phi^{00}_{(0)}(p)\,\phi^{*22}_{(0)}(p)\right) \\
&\qquad \left. -2\left|\phi^{12}_{(0)}(p)\right|^2 + \left(\phi^{*11}_{(0)}(p)\,\phi^{22}_{(0)}(p) + \phi^{11}_{(0)}(p)\,\phi^{*22}_{(0)}(p)\right)\right] \quad ,
\end{aligned} \tag{8.145}$$

$$\begin{aligned}
&\phi^{*\mu\nu}_{(0)}(p)\left[\eta_{\mu\alpha}\mathcal{E}_{\nu\beta\sigma} + (\mu\leftrightarrow\nu) + (\alpha\leftrightarrow\beta)\right]p^\sigma\phi^{\alpha\beta}_{(0)}(p) = \\
&\quad = 4\left[p_0\left(\phi^{*1\lambda}_{(0)}(p)\,\phi^{2}_{(0)\lambda}(p) - \phi^{1\lambda}_{(0)}(p)\,\phi^{*2}_{(0)\lambda}(p)\right)\right. \\
&\qquad +p^1\left(\phi^{*2\lambda}_{(0)}(p)\,\phi^{0}_{(0)\lambda}(p) - \phi^{2\lambda}_{(0)}(p)\,\phi^{*0}_{(0)\lambda}(p)\right) \\
&\qquad \left. +p^2\left(\phi^{*0\lambda}_{(0)}(p)\,\phi^{1}_{(0)\lambda}(p) - \phi^{0\lambda}_{(0)}(p)\,\phi^{*1}_{(0)\lambda}(p)\right)\right] \quad .
\end{aligned} \tag{8.146}$$

Dalla (8.143) segue inoltre, per $\vec{p} \neq 0$

$$\begin{cases} \phi^{00}_{(0)}(p) = \dfrac{p^1}{p_0}\phi^{01}_{(0)}(p) + \dfrac{p^2}{p_0}\phi^{02}_{(0)}(p) \\ \phi^{11}_{(0)}(p) = \dfrac{p_0}{p^1}\phi^{01}_{(0)}(p) - \dfrac{p^2}{p^1}\phi^{12}_{(0)}(p) \\ \phi^{22}_{(0)}(p) = \dfrac{p_0}{p^2}\phi^{02}_{(0)}(p) - \dfrac{p^1}{p^2}\phi^{12}_{(0)}(p) \end{cases} \quad , \tag{8.147}$$

$$\phi^{0\lambda}_{(0)}(p) = \frac{p^1}{p_0}\phi^{1\lambda}_{(0)}(p) + \frac{p^2}{p_0}\phi^{2\lambda}_{(0)}(p) \quad , \tag{8.148}$$

che usate rispettivamente nelle (8.145) e (8.146) forniscono

$$\begin{aligned} &\phi^{*\mu\nu}_{(0)}(p)\left[2\eta_{\mu\nu}\eta_{\alpha\beta} - (\eta_{\mu\alpha}\eta_{\nu\beta} + \eta_{\mu\beta}\eta_{\nu\alpha})\right]\phi^{\alpha\beta}_{(0)}(p) = \\ &= 2\,(p)^2\left[\frac{1}{p^1p^2}\left(\phi^{*01}_{(0)}(p)\,\phi^{02}_{(0)}(p) + \phi^{01}_{(0)}(p)\,\phi^{*02}_{(0)}(p)\right)\right. \\ &\qquad -\frac{1}{p_0p^1}\left(\phi^{*02}_{(0)}(p)\,\phi^{12}_{(0)}(p) + \phi^{02}_{(0)}(p)\,\phi^{*12}_{(0)}(p)\right) \\ &\qquad \left. -\frac{1}{p_0p^2}\left(\phi^{*01}_{(0)}(p)\,\phi^{12}_{(0)}(p) + \phi^{01}_{(0)}(p)\,\phi^{*12}_{(0)}(p)\right)\right] \quad , \end{aligned} \tag{8.149}$$

$$\begin{aligned} &\phi^{*\mu\nu}_{(0)}(p)\left[\eta_{\mu\alpha}\mathcal{E}_{\nu\beta\sigma} + (\mu \leftrightarrow \nu) + (\alpha \leftrightarrow \beta)\right]p^\sigma\phi^{\alpha\beta}_{(0)}(p) = \\ &= 4\frac{(p)^2}{p_0}\left(\phi^{*1\lambda}_{(0)}(p)\,\phi^{2}_{(0)\lambda}(p) - \phi^{1\lambda}_{(0)}(p)\,\phi^{*2}_{(0)\lambda}(p)\right) \quad . \end{aligned} \tag{8.150}$$

Ma su V_0^+ è

$$p^2 = 0 \tag{8.151}$$

e quindi, per $\vec{p} \neq 0$

$$\phi^{*\mu\nu}_{(0)}(p)\left[2\eta_{\mu\nu}\eta_{\alpha\beta} - (\eta_{\mu\alpha}\eta_{\nu\beta} + \eta_{\mu\beta}\eta_{\nu\alpha})\right]\phi^{\alpha\beta}_{(0)}(p) = 0 \quad , \tag{8.152}$$

$$\phi^{*\mu\nu}_{(0)}(p)\left[\eta_{\mu\alpha}\mathcal{E}_{\nu\beta\sigma} + (\mu \leftrightarrow \nu) + (\alpha \leftrightarrow \beta)\right]p^\sigma\phi^{\alpha\beta}_{(0)}(p) = 0 \quad . \tag{8.153}$$

Segue, poiché $\phi^{\alpha\beta}_{(0)}(p) \in S\left(V_0^+\right)$ ed è quindi regolare

$$
\begin{aligned}
\left\langle \Phi_{(0)1} \middle| \Phi_{(0)1} \right\rangle &= \frac{1}{8\pi^2} \lim_{\epsilon \to 0} \int\limits_{|\vec{p}|<\epsilon} d^2\vec{p} \frac{1}{p_0} \phi^*_{(0)\mu\nu}(p) \\
&\qquad \Big\{ 2\eta^{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta} - \left(\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta} + \eta^{\mu\beta}\eta^{\nu\alpha}\right) \\
&\qquad - \frac{i}{2\mu}\left[\eta^{\mu\alpha}\mathcal{E}^{\nu\beta\sigma} + (\mu \leftrightarrow \nu) + (\alpha \leftrightarrow \beta)\right] p_\sigma \Big\} \\
&\qquad \phi_{(0)\alpha\beta}(p) \\
&= \frac{1}{8\pi^2} \lim_{\epsilon \to 0} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\epsilon} d|\vec{p}|\, \phi^*_{(0)\mu\nu}(p) \\
&\qquad \Big\{ 2\eta^{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta} - \left(\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta} + \eta^{\mu\beta}\eta^{\nu\alpha}\right) \\
&\qquad - \frac{i}{2\mu}\left[\eta^{\mu\alpha}\mathcal{E}^{\nu\beta\sigma} + (\mu \leftrightarrow \nu) + (\alpha \leftrightarrow \beta)\right] p_\sigma \Big\} \\
&\qquad \phi_{(0)\alpha\beta}(p) \\
&= 0 \ .
\end{aligned} \tag{8.154}
$$

Si può quindi concludere che non ci sono stati fisici ad una particella con massa zero.
Si consideri ora la parte a massa $|\mu|$ dello stato (8.133)

$$
\left| \Phi_{(\mu)1} \right\rangle = \left\{ 0, \phi^{\alpha\beta}_{(\mu)}(p), 0, 0, 0, ... \right\} \ , \tag{8.155}
$$

con

$$
\phi^{\alpha\beta}_{(\mu)}(p) \in S\left(V_\mu^+\right) \ . \tag{8.156}
$$

La condizione di gauge è identicamente soddisfatta, poiché la parte a massa $|\mu|$ della funzione di Wightman è trasversale, e non costituisce quindi nessuna restrizione.
La norma dello stato (8.155) è

$$
\begin{aligned}
\left\langle \Phi_{(\mu)1} \middle| \Phi_{(\mu)1} \right\rangle &= \int \widetilde{dp}^{\mu} \frac{1}{2\pi\sqrt{2p_0}} \phi^{*\mu\nu}_{(\mu)}(p)\, W^{(\mu)}_{\mu\nu\alpha\beta}(p)\, \phi^{\alpha\beta}_{(\mu)}(p) \\
&= \int \widetilde{dp}^{\mu} \frac{1}{2\pi\sqrt{2p_0}} \phi^*_{(\mu)\mu\nu}(p) \\
&\qquad \Big\{ \left(P^{\mu\alpha}P^{\nu\beta} + P^{\mu\beta}P^{\nu\alpha}\right) - P^{\mu\nu}P^{\alpha\beta} \\
&\qquad + \frac{i}{2\mu}\left[\mathcal{E}^{\mu\alpha\sigma}P^{\nu\beta} + (\mu \leftrightarrow \nu) + (\alpha \leftrightarrow \beta)\right] p_\sigma \Big\} \\
&\qquad \phi_{(\mu)\alpha\beta}(p) \ .
\end{aligned} \tag{8.157}
$$

Per determinare il segno di quest'ultima devono essere analizzati gli autovalori del tensore $W^{(\mu)}_{\mu\nu\alpha\beta}(p)$; dato che la coppia di indici simmetrici $\alpha\beta$ assume sei valori distinti, tale tensore può essere visto come una matrice hermitiana 6×6, che risulta avere autovalori

$$
\begin{cases}
\lambda_{[1]}(p) = 4\left(\dfrac{p_0}{\mu}\right)^4 > 0 \\
\lambda_{[2]}(p) = \lambda_{[3]}(p) = \lambda_{[4]}(p) = \lambda_{[5]}(p) = \lambda_{[6]}(p) = 0
\end{cases} \tag{8.158}
$$

e autovettori non covarianti definiti come

$$\sum_{\alpha,\beta} W^{(\mu)}_{\mu\nu\alpha\beta}(p)\, f^{\alpha\beta}_{[i]}(p) = \lambda_{[i]}(p)\, f^{\mu\nu}_{[i]}(p) \quad , \tag{8.159}$$

$$\sum_{\alpha,\beta} f^{*\alpha\beta}_{[i]}(p)\, f^{\alpha\beta}_{[j]}(p) = \delta_{[i][j]} \quad . \tag{8.160}$$

Per trovare la soluzione al problema agli autovalori covariante relativo al tensore $W^{(\mu)}_{\mu\nu\alpha\beta}(p)$, si osservi che anch'esso deve avere un solo autovalore non nullo; questo suggerisce che esso sia proporzionale ad un proiettore. Infatti, usando il fatto che su V^+_μ risulta

$$p^2 = \mu^2 \tag{8.161}$$

si trova facilmente

$$W^{(\mu)}_{\mu\nu\rho\tau}(p)\, W^{(\mu)\rho\tau}{}_{\alpha\beta}(p) = 4W^{(\mu)}_{\mu\nu\alpha\beta}(p) \quad , \tag{8.162}$$

per cui il tensore $W^{(\mu)}_{\mu\nu\alpha\beta}(p)$ si può scrivere come

$$W^{(\mu)}_{\mu\nu\alpha\beta}(p) = 4P^{(\mu)}_{\mu\nu\alpha\beta}(p) \quad , \tag{8.163}$$

ove $P^{(\mu)}_{\mu\nu\alpha\beta}(p)$ è il proiettore

$$\begin{aligned} P^{(\mu)\mu\nu\alpha\beta}(p) = \frac{1}{4}\Big\{ &\Big(P^{\mu\alpha}P^{\nu\beta} + P^{\mu\beta}P^{\nu\alpha}\Big) - P^{\mu\nu}P^{\alpha\beta} \\ &+ \frac{i}{2\mu}\Big[\mathcal{E}^{\mu\alpha\sigma}P^{\nu\beta} + (\mu \leftrightarrow \nu) + (\alpha \leftrightarrow \beta)\Big]p_\sigma \Big\} \quad , \end{aligned} \tag{8.164}$$

$$P^{(\mu)}_{\mu\nu\rho\tau}(p)\, P^{(\mu)\rho\tau}{}_{\alpha\beta}(p) = P^{(\mu)}_{\mu\nu\alpha\beta}(p) \quad , \tag{8.165}$$

$$P^{(\mu)}_{\mu\nu\alpha\beta}(p) = P^{*(\mu)}_{\alpha\beta\mu\nu}(p) \quad . \tag{8.166}$$

È evidente che $P^{(\mu)}_{\mu\nu\alpha\beta}(p)$ ha un solo autovalore non nullo pari a 1

$$\begin{cases} \lambda_{[0][0]}(p) = 1 \\ \lambda_{[0][1]}(p) = \lambda_{[0][2]}(p) = \lambda_{[1][1]}(p) = \lambda_{[2][2]}(p) = \lambda_{[1][2]}(p) = 0 \end{cases} \tag{8.167}$$

e autovettori covarianti definiti come

$$P^{(\mu)}_{\mu\nu\alpha\beta}(p)\, f^{\alpha\beta}_{[\rho][\tau]}(p) = \lambda_{[\rho][\tau]}(p)\, f_{\mu\nu[\rho][\tau]}(p) \tag{8.168}$$

che, come verrà mostrato, possono essere normalizzati a

$$f^{*\alpha\beta}_{[\rho][\tau]}(p)\, f_{\alpha\beta[\lambda][\sigma]}(p) = \frac{1}{2}\Big(\eta_{[\rho][\lambda]}\eta_{[\tau][\sigma]} + \eta_{[\rho][\sigma]}\eta_{[\tau][\lambda]}\Big) \quad . \tag{8.169}$$

Segue subito che $W^{(\mu)}_{\mu\nu\alpha\beta}(p)$ ha un solo autovalore non nullo pari a 4 e autovettori covarianti coincidenti con quelli di $P^{(\mu)}_{\mu\nu\alpha\beta}(p)$.
Dalla completezza degli autovettori su V^+_μ segue che la funzione $\phi^{\alpha\beta}_{(\mu)}(p)$ si può scrivere del tutto in generale come

$$\phi^{\alpha\beta}_{(\mu)}(p) = \sum_{[\rho],[\tau]} a_{[\rho][\tau]}(p)\, f^{\alpha\beta}_{[\rho][\tau]}(p) \quad , \tag{8.170}$$

ove le $a_{[\rho][\tau]}\left(p\right)$ sono funzioni scalari arbitrarie con supporto V_μ^+.
La norma dello stato (8.155) si riduce allora a

$$\begin{aligned}\left\langle \Phi_{(\mu)1}\right| \left.\Phi_{(\mu)1}\right\rangle &= \int \widetilde{dp}^\mu \frac{1}{2\pi\sqrt{2p_0}} \phi^{*\mu\nu}_{(\mu))}\left(p\right) W^{(\mu)}_{\mu\nu\alpha\beta}\left(p\right) \phi^{\alpha\beta}_{(\mu)}\left(p\right) \\ &= \int d^2\vec{p} \frac{1}{2\pi^2 p_0} \left| a_{[0][0]}\left(p\right)\right|^2 \\ &> 0 \ .\end{aligned} \tag{8.171}$$

Si può quindi concludere che solo uno dei sei gradi di libertà funzionali a massa $|\mu|$ contribuisce positivamente alla norma ed è quindi fisico; si noti che a tale conclusione si poteva giungere anche usando la soluzione non covariante del problema agli autovalori relativo al tensore $W^{(\mu)}_{\mu\nu\alpha\beta}\left(p\right)$ visto come matrice. Gli stati fisici ad una particella sono quindi composti da una sola eccitazione a massa $|\mu|$ e polarizzazione corrispondente all'autovettore non banale di $P^{(\mu)}_{\mu\nu\alpha\beta}\left(p\right)$, indicato semplicemente con $f^{\mu\nu}\left(p\right)$.
Il generico stato fisico ad una particella si scrive quindi

$$|\Phi_{f1}\rangle = \left\{0, \pi\sqrt{2p_0} a\left(p\right) f^{\alpha\beta}\left(p\right), 0, 0, 0, ...\right\} \ , \tag{8.172}$$

con $a\left(p\right)$ funzione scalare arbitraria con supporto V_μ^+ e tale che

$$\int d^2\vec{p} |a\left(p\right)|^2 = 1 \ . \tag{8.173}$$

Esso costituisce il sottospazio $\mathcal{H}_{f1}$ di $\mathcal{H}$, a norma definita positiva, degli stati fisici ad una particella.
Si consideri infine uno stato ad n particelle del tipo

$$|\Phi_n\rangle = \left\{0, 0, ..., \phi^{\alpha_1\beta_1...\alpha_n\beta_n}_{(0)}\left(p_1..., p_n\right) + \phi^{\alpha_1\beta_1...\alpha_n\beta_n}_{(\mu)}\left(p_1..., p_n\right), 0, 0, 0, ...\right\} \ , \tag{8.174}$$

con

$$\phi^{\alpha_1\beta_1...\alpha_n\beta_n}_{(0)}\left(p_1..., p_n\right) \in S\left(\left(V_0^+\right)^n\right) \ , \tag{8.175}$$

$$\phi^{\alpha_1\beta_1...\alpha_n\beta_n}_{(\mu)}\left(p_1..., p_n\right) \in S\left(\left(V_\mu^+\right)^n\right) \ . \tag{8.176}$$

Date le proprietà di simmetria a cui devono soddisfare, le funzioni $\phi^{\alpha_1\beta_1...\alpha_n\beta_n}_{(0)}\left(p_1..., p_n\right)$ e $\phi^{\alpha_1\beta_1...\alpha_n\beta_n}_{(\mu)}\left(p_1..., p_n\right)$ possono essere scritte come

$$\phi^{\alpha_1\beta_1...\alpha_n\beta_n}_{(0)}\left(p_1..., p_n\right) = a_{(0)}\left(p_1..., p_n\right) \phi^{\alpha_1\beta_1}_{(0)}\left(p_1\right) ... \phi^{\alpha_n\beta_n}_{(0)}\left(p_n\right) \ , \tag{8.177}$$

$$\phi^{\alpha_1\beta_1...\alpha_n\beta_n}_{(\mu)}\left(p_1..., p_n\right) = a_{(\mu)}\left(p_1..., p_n\right) \phi^{\alpha_1\beta_1}_{(\mu)}\left(p_1\right) ... \phi^{\alpha_n\beta_n}_{(\mu)}\left(p_n\right) \ , \tag{8.178}$$

ove $a_{(0)}\left(p_1..., p_n\right)$ e $a_{(\mu)}\left(p_1..., p_n\right)$ sono funzioni scalari, simmetriche nelle variabili, con supporti $\left(V_0^+\right)^n$ e $\left(V_\mu^+\right)^n$. Questo equivale ad asserire che il sottospazio ad n particelle è il prodotto cartesiano simmetrizzato di n sottospazi ad una particella.
Come conseguenza delle (8.177) e (8.178), e dalla definizione del prodotto scalare, segue subito che l'unico contributo non nullo alla norma dello stato (8.174) è positivo e proviene

da uno solo dei gradi di libertà funzionali a massa $|\mu|$, corrispondente alla polarizzazione associata all'autovettore $f^{\alpha\beta}(p)$.
Il generico stato fisico ad n particelle è quindi dato da

$$|\Phi_{fn}\rangle = \left\{0,0,...,\left(\pi\sqrt{2p_0}\right)^n a(p_1,...,p_n)\, f^{\alpha_1\beta_1}(p_1)...f^{\alpha_n\beta_n}(p_n)\,,0,0,0,...\right\} \quad , \tag{8.179}$$

con $a(p_1,...,p_n)$ funzione scalare arbitraria con supporto $\left(V_\mu^+\right)^n$, simmetrica nelle variabili e tale che

$$\int d^2\vec{p}_1 ... \int d^2\vec{p}_n \left|a(p_1,...,p_n)\right|^2 = 1 \ . \tag{8.180}$$

Esso costituisce il sottospazio $\mathcal{H}_{fn}$ di $\mathcal{H}$, a norma definita positiva, degli stati fisici ad n particelle.
Alla luce di quanto visto, tutti gli stati fisici con un numero finito di particelle hanno un solo grado di libertà a massa $|\mu|$ e norma positiva, e lo spazio degli stati fisici è quindi dato dal completamento unico del prodotto dei sottospazi $\mathcal{H}_{fn}$.
Il generico stato fisico è

$$\begin{aligned}|\Phi_f\rangle = \Big\{ & a_0, \pi\sqrt{2(p_1)_0}a_1(p_1)\, f^{\alpha_1}(p_1), ... \\ & , \pi\sqrt{2(p_1)_0}...\pi\sqrt{2(p_n)_0}a_n(p_1,...,p_n)\, f^{\alpha_1\beta_1}(p_1)...f^{\alpha_n\beta_n}(p_n), ...\Big\} \quad ,\end{aligned} \tag{8.181}$$

con $a_n(p_1,...,p_n)$ funzioni scalari arbitrarie con supporto $\left(V_\mu^+\right)^n$, simmetriche nelle variabili, e tali che

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int d^2\vec{p}_1 ... \int d^2\vec{p}_n \left|a_n(p_1,...,p_n)\right|^2 = 1 \ . \tag{8.182}$$

Esso costituisce il sottospazio $\mathcal{H}_f$ di $\mathcal{H}$, a norma definita positiva, degli stati fisici.
Il ruolo del tensore $f^{\alpha_1\beta_1}(p_1)...f^{\alpha_n\beta_n}(p_n)$ consiste nel selezionare la polarizzazione fisica dei gravitoni, capace di contribuire ai valori di aspettazione.

8.2.3 Tensore di polarizzazione

Il tensore di polarizzazione $f^{\mu\nu}(p)$ può essere calcolato esplicitamente.
Deve essere

$$P^{(\mu)}_{\mu\nu\alpha\beta}(p)\, f^{\alpha\beta}(p) = f_{\mu\nu}(p) \ . \tag{8.183}$$

Da questa, essendo $P^{(\mu)}_{\mu\nu\alpha\beta}(p)$ trasversale e tale che $P^{(\mu)\mu}{}_{\mu\alpha\beta} = 0$, segue subito

$$p_\mu f^{\mu\nu}(p) = 0 \ , \tag{8.184}$$

$$f^\mu{}_\mu(p) = 0 \ . \tag{8.185}$$

Con l'aiuto di quest'ultime, la (8.183) diventa

$$f^{\alpha\beta}(p) + \frac{i}{2\mu}\left[\mathcal{E}^{\alpha\rho\tau}p_\rho f^\beta_\tau(p) + \mathcal{E}^{\beta\rho\tau}p_\rho f_\tau{}^\alpha(p)\right] = 0 \ . \tag{8.186}$$

Segue, esplicitando le componenti

$$\begin{cases} i\mu f^{00}(p) + p^2 f^{01}(p) - p^1 f^{02}(p) = 0 \\ p^2 f^{00}(p) + 2i\mu f^{01}(p) - p^0 f^{02}(p) + p^2 f^{11}(p) - p^1 f^{12}(p) = 0 \\ p^1 f^{00}(p) - p^0 f^{01}(p) + 2i\mu f^{02}(p) - p^1 f^{22}(p) + p^2 f^{12}(p) = 0 \\ p^2 f^{01}(p) + i\mu f^{11}(p) - p^0 f^{12}(p) = 0 \\ p^1 f^{01}(p) + p^2 f^{02}(p) - p^0 f^{11}(p) - p^0 f^{22}(p) + 2i\mu f^{12}(p) = 0 \\ p^1 f^{02}(p) + i\mu f^{22}(p) - p^0 f^{12}(p) = 0 \end{cases} , \tag{8.187}$$

la cui soluzione è

$$\begin{cases} f^{00}(p) = \alpha(p)\left(p_0^2 - \mu^2\right) \\ f^{01}(p) = \alpha(p)\left(p^0 p^1 - i\mu p^2\right) \\ f^{02}(p) = \alpha(p)\left(p^0 p^2 + i\mu p^1\right) \\ f^{11}(p) = \alpha(p)\dfrac{\left(p^0 p^1 - i\mu p^2\right)^2}{p_0^2 - \mu^2} \\ f^{22}(p) = \alpha(p)\dfrac{\left(p^0 p^2 + i\mu p^1\right)^2}{p_0^2 - \mu^2} \\ f^{12}(p) = \alpha(p)\dfrac{\left(p^0 p^1 - i\mu p^2\right)\left(p^0 p^2 + i\mu p^1\right)}{p_0^2 - \mu^2} \end{cases} , \tag{8.188}$$

con $\alpha(p)$ arbitraria; quest'ultima viene ridotta ad una fase dalla condizione di normalizzazione

$$f^{*\alpha\beta}(p)\, f_{\alpha\beta}(p) = 1 \ , \tag{8.189}$$

che implica

$$|\alpha(p)|^2 = \frac{1}{4\mu^4} \ . \tag{8.190}$$

Questa dimostra in particolare che la condizione (8.169) ha il segno giusto. Scegliendo

$$\alpha(p) = \frac{1}{2\mu^2} e^{i\beta(p)} \ , \tag{8.191}$$

la forma esplicita cercata è

$$f^{\mu\nu}(p) = \frac{1}{2\mu^2}\begin{pmatrix} p_0^2 - \mu^2 & p^0 p^1 - i\mu p^2 & p^0 p^2 + i\mu p^1 \\ p^0 p^1 - i\mu p^2 & \dfrac{\left(p^0 p^1 - i\mu p^2\right)^2}{p_0^2 - \mu^2} & \dfrac{\left(p^0 p^1 - i\mu p^2\right)\left(p^0 p^2 + i\mu p^1\right)}{p_0^2 - \mu^2} \\ p^0 p^2 + i\mu p^1 & \dfrac{\left(p^0 p^1 - i\mu p^2\right)\left(p^0 p^2 + i\mu p^1\right)}{p_0^2 - \mu^2} & \dfrac{\left(p^0 p^2 + i\mu p^1\right)^2}{p_0^2 - \mu^2} \end{pmatrix} e^{i\beta(p)} \ . \tag{8.192}$$

Anche in questo caso, la fase $\beta(p)$ non è completamente arbitraria. Infatti, pur non incidendo sulle proprietà di definizione del tensore di polarizzazione, essa influenza il suo comportamento infrarosso. Nel limite in cui $|\vec{p}| \to 0$ si ha

$$f^{\mu\nu}(0) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & i\frac{\mu}{|\mu|} \\ 0 & i\frac{\mu}{|\mu|} & -1 \end{pmatrix} e^{i \lim_{|\vec{p}|\to 0} \left(\beta(p) - 2\frac{\mu}{|\mu|}\theta(p)\right)} \quad , \tag{8.193}$$

con

$$\theta(p) = \arctan\left(\frac{p^2}{p^1}\right) \quad . \tag{8.194}$$

Ricordando che quest'ultima funzione è singolare nell'origine

$$\lim_{|\vec{p}|\to 0} \theta(p) = \nexists \tag{8.195}$$

si deve scegliere

$$\beta(p) = 2\frac{\mu}{|\mu|}\theta(p) + \gamma(p) \quad , \tag{8.196}$$

con $\gamma(p)$ funzione arbitraria ma regolare.
Soltanto in questo modo la fase arbitraria, rappresentata a questo punto da $\gamma(p)$, diventa completamente ininfluente, e può quindi essere posta uguale a zero, ottenendo

$$f^{\mu\nu}(p) = \frac{1}{2\mu^2} \begin{pmatrix} p_0^2 - \mu^2 & p^0p^1 - i\mu p^2 & p^0p^2 + i\mu p^1 \\ p^0p^1 - i\mu p^2 & \frac{\left(p^0p^1 - i\mu p^2\right)^2}{p_0^2 - \mu^2} & \frac{\left(p^0p^1 - i\mu p^2\right)\left(p^0p^2 + i\mu p^1\right)}{p_0^2 - \mu^2} \\ p^0p^2 + i\mu p^1 & \frac{\left(p^0p^1 - i\mu p^2\right)\left(p^0p^2 + i\mu p^1\right)}{p_0^2 - \mu^2} & \frac{\left(p^0p^2 + i\mu p^1\right)^2}{p_0^2 - \mu^2} \end{pmatrix} e^{i2\frac{\mu}{|\mu|}\theta(p)} \quad . \tag{8.197}$$

Per quanto visto, il tensore di polarizzazione soddisfa, indipendentemente dalla scelta della sua fase di normalizzazione, le importanti proprietà

$$f^{\mu\nu}(p) + \frac{i}{2\mu}\left[\mathcal{E}^{\mu\alpha\beta}p_\alpha f_\beta{}^\nu(p) + \mathcal{E}^{\nu\alpha\beta}p_\alpha f_\beta{}^\mu(p)\right] = 0 \quad , \tag{8.198}$$

$$p_\mu f^{\mu\nu}(p) = 0 \quad , \tag{8.199}$$

$$f^\mu{}_\mu(p) = 0 \quad , \tag{8.200}$$

$$f^{\mu\nu}(p) f^{*\alpha\beta}(p) = P^{(\mu)\mu\nu\alpha\beta}(p) \quad , \tag{8.201}$$

mentre con la fase scelta, le sue derivate soddisfano l'altrettanto importante proprietà

$$f^{*\mu\nu}(p) \overleftrightarrow{\partial_i} f_{\mu\nu}(p) = -4i\frac{p_0 - |\mu|}{\mu}\mathcal{E}^i{}_j \frac{p^j}{p^k p_k} \quad . \tag{8.202}$$

Si osservi che questa è regolare nell'infrarosso, come lo è il vettore di polarizzazione scelto; una scelta di fase diversa dalla (8.196) produce invece inevitabilmente una divergenza infrarossa, come può essere facilmente verificato.

8.2.4 Operatori di creazione ed annichilazione

In accordo con quanto spiegato nel quinto capitolo, è possibile espandere il campo in modi normali

$$h^{\mu\nu}(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^2} \sqrt{2p_0} \left[\tilde{W}^{\mu\nu\alpha\beta}(p)\, a_{\alpha\beta}(p)\, e^{-ipx} + \tilde{W}^{\mu\nu\alpha\beta}(p)\, a^{+}_{\alpha\beta}(p)\, e^{ipx} \right] \ . \tag{8.203}$$

Si è visto che tutti gli stati fisici hanno massa $|\mu|$ e polarizzazione $f^{\mu\nu}(p)$; come conseguenza, anche il campo fisico, ovvero la parte rilevante del campo nei valori di aspettazione su stati fisici, ha massa $|\mu|$ e polarizzazione $f^{\mu\nu}(p)$, e può essere scritto, secondo quanto illustrato nel quinto capitolo, come

$$h_f^{\mu\nu}(x) = 2 \int \widetilde{dp}^{\mu} \left[a(p)\, f^{\mu\nu}(p)\, e^{-ipx} + a^{+}(p)\, f^{*\mu\nu}(p)\, e^{ipx} \right] \ . \tag{8.204}$$

Dalle proprietà del tensore $f^{\mu\nu}(p)$ segue che il campo fisico soddisfa i vincoli previsti nel secondo capitolo

$$h_f^{\mu\nu}(p) - \frac{1}{2\mu} \left[\mathcal{E}^{\mu\alpha\beta} \partial_\alpha h_{f\beta}{}^{\nu}(x) + \mathcal{E}^{\nu\alpha\beta} \partial_\alpha h_{f\beta}{}^{\mu}(x) \right] = 0 \ , \tag{8.205}$$

$$\partial_\mu h_f^{\mu\nu}(x) = 0 \ , \tag{8.206}$$

$$h^{\mu}_{f\mu}(x) = 0 \ , \tag{8.207}$$

e la sua equazione del moto si riduce a

$$\left(\Box + \mu^2 \right) h_f^{\mu\nu}(x) = 0 \ . \tag{8.208}$$

Come conseguenza delle dimostrazioni generali fatte nel quinto capitolo, gli operatori $a^{+}(p)$ e $a(p)$ sono operatori di creazione ed annichilazione per gli stati fisici e soddisfano le regole di commutazione convenzionali

$$\left[a(p), a^{+}(q) \right] = \delta^2 (\vec{p} - \vec{q}) \ , \tag{8.209}$$

$$\left[a(p), a(q) \right] = 0 \ , \tag{8.210}$$

$$\left[a^{+}(p), a^{+}(q) \right] = 0 \ . \tag{8.211}$$

Gli operatori addolciti, $\forall \varphi \in S\left(R^2\right)$

$$a[\varphi] = \int d^2\vec{p} a(p)\, \varphi(p) = (a, \varphi) \ , \tag{8.212}$$

$$a^{+}[\varphi] = \int d^2\vec{p} a^{+}(p)\, \varphi^{*}(p) = \left(a^{+}, \varphi^{*}\right) \ , \tag{8.213}$$

soddisfano le regole di commutazione, $\forall \varphi, \chi \in S\left(R^2\right)$

$$\left[a[\varphi], a^{+}[\chi] \right] = \int d^2\vec{p} \varphi(p)\, \chi^{*}(p) \ , \tag{8.214}$$

$$\left[a[\varphi], a[\chi] \right] = 0 \ , \tag{8.215}$$

$$\left[a^{+}[\varphi], a^{+}[\chi] \right] = 0 \ , \tag{8.216}$$

e hanno le seguenti azioni, in accordo con quelle del campo fisico

$$\left(a^{+}\left[\varphi\right]\left|\Phi\right\rangle\right)_{n}^{\mu_{1}\nu_{1}...\mu_{n}\nu_{n}}\left(p_{1},...,p_{n}\right)=$$
$$=\frac{\pi\sqrt{2p_{0}}}{\sqrt{n}}\sum_{m=1}^{n}\phi_{n-1}^{\mu_{1}\nu_{1}...\mu_{m-1}\nu_{m-1}\mu_{m+1}\nu_{m+1}...\mu_{n}\nu_{n}}\left(p_{1},...,p_{m-1},p_{m+1},...,p_{n}\right) \tag{8.217}$$
$$f^{\mu_{m}\nu_{m}}\left(p_{m}\right)\varphi^{*}\left(p_{m}\right)\quad ,$$

$$\left(a\left[\varphi\right]\left|\Phi\right\rangle\right)_{n}^{\mu_{1}\nu_{1}...\mu_{n}\nu_{n}}\left(p_{1},...,p_{n}\right)=$$
$$=\sqrt{n+1}\int\widetilde{dp}^{\mu}2f_{\rho\tau}^{*}\left(p\right)\phi_{n+1}^{\rho\tau\mu_{1}\nu_{1}...\mu_{n}\nu_{n}}\left(p,p_{1},...,p_{n}\right)\varphi\left(p\right)\quad . \tag{8.218}$$

Segue

$$\left(a^{+}\left(p\right)\left|\Phi\right\rangle\right)_{n}^{\mu_{1}\nu_{1}...\mu_{n}\nu_{n}}\left(p_{1},...,p_{n}\right)=$$
$$=\frac{\pi\sqrt{2p_{0}}}{\sqrt{n}}\sum_{m=1}^{n}\phi_{n-1}^{\mu_{1}\nu_{1}...\mu_{m-1}\nu_{m-1}\mu_{m+1}\nu_{m+1}...\mu_{n}\nu_{n}}\left(p_{1},...,p_{m-1},p_{m+1},...,p_{n}\right) \tag{8.219}$$
$$f^{\mu_{m}\nu_{m}}\left(p_{m}\right)\delta^{2}\left(\vec{p}-\vec{p}_{m}\right)\quad ,$$

$$\left(a\left(p\right)\left|\Phi\right\rangle\right)_{n}^{\mu_{1}...\mu_{n}}\left(p_{1},...,p_{n}\right)=$$
$$=\frac{\sqrt{n+1}}{\pi\sqrt{2p_{0}}}f_{\rho\tau}^{*}\left(p\right)\phi_{n+1}^{\rho\tau\mu_{1}\nu_{1}...\mu_{n}\nu_{n}}\left(p,p_{1},...,p_{n}\right)\quad . \tag{8.220}$$

Il sottospazio fisico $\mathcal{H}_f$ di $\mathcal{H}$ viene generato da successive applicazioni dell'operatore di creazione sul vuoto, e il generico stato fisico (8.181) si può scrivere come

$$\left|\Phi_{f}\right\rangle=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n!}}\int d^{2}\vec{p}_{1}...\int d^{2}\vec{p}a_{n}\left(p_{1},...,p_{n}\right)a^{+}\left(p_{1}\right)...a^{+}\left(p_{n}\right)\left|\Phi_{f0}\right\rangle\quad , \tag{8.221}$$

con $a_n\left(p_1,...,p_n\right)$ funzioni arbitrarie, simmetriche nelle variabili, e tali che

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int d^{2}\vec{p}_{1}...\int d^{2}\vec{p}_{n}\left|a_{n}\left(p_{1},...,p_{n}\right)\right|^{2}=1\quad . \tag{8.222}$$

Va infine ricordato che, anche in questo caso, l'espressione fisica del campo ottenuta è utilizzabile solo in elementi di matrice che non contengano stati intermediari non fisici, ovvero elementi di matrice di prodotti normali di campi, quali sono tutte le osservabili.

8.3 Analogie fra elettrodinamica e gravità linearizzata

Dall'analisi dei gradi di libertà fisici dell'elettrodinamica e della gravità linearizzata appare chiara la grande similitudine che le lega; il motivo fisico di tale somiglianza risiede nel fatto che le due teorie prese in esame sono entrambi versioni abeliane topologicamente massive della teoria di Klein-Gordon, che, come verrà verificato, corrispondono a spin 1 e 2. Le equazioni ed i vincoli delle due teorie hanno esattamente la stessa struttura, e il legame che intercorre fra i loro gradi di libertà fisici può essere concretizzato notando che i tensori di polarizzazione definiti sono legati dalla relazione

$$f^{\mu\nu}\left(p\right)=f^{\mu}\left(p\right)f^{\nu}\left(p\right)\quad . \tag{8.223}$$

Matematicamente, questo è conseguenza del fatto che su V_μ^+ risulta

$$P^{(\mu)\mu\nu\alpha\beta}(p) = \frac{1}{2}\left(P^{(\mu)\mu\alpha}(p)\, P^{(\mu)\nu\beta}(p) + P^{(\mu)\mu\beta}(p)\, P^{(\mu)\nu\alpha}(p)\right) \quad . \tag{8.224}$$

Fisicamente, le due teorie sono differenziate essenzialmente dalla rappresentazione di spin a cui corrispondono; dalla (8.223) e dal fatto che in tre dimensioni lo spin è scalare, segue in particolare che la gravità ha spin doppio rispetto all'elettrodinamica e che le due rappresentazioni sono legate da un prodotto tensoriale.

Capitolo 9

Osservabili delle teorie tridimensionali topologicamente massive

In questo capitolo vengono analizzati gli operatori corrispondenti a quantità conservate osservabili; in particolare, viene verificato che la struttura dei generatori del gruppo di Poincaré soddisfa i criteri fisici e geometrici necessari alla loro identificazione con le costanti del moto convenzionali. Tale analisi non essendo stata mai fatta in modo rigoroso, i conseguenti risultati assumono particolare rilevanza.

9.1 Gruppo di Poincaré

L'associazione di determinati operatori alle rispettive osservabili viene effettuata con criteri di teoria dei gruppi. Si richiede che il quadrimpulso sia il generatore delle traslazioni spazio-temporali e che il momento angolare totale sia il generatore delle rotazioni spaziali.
I generatori del gruppo di Poincaré devono soddisfare le regole di commutazione

$$[P^\mu, P^\nu] = 0 \ , \tag{9.1}$$

$$[M^{\mu\nu},\ P^\alpha] = -i\left(\eta^{\mu\alpha}P^\nu - \eta^{\nu\alpha}P^\mu\right) \ , \tag{9.2}$$

$$\left[M^{\mu\nu}, M^{\alpha\beta}\right] = -i\left(\eta^{\mu\alpha}M^{\nu\beta} - \eta^{\nu\alpha}M^{\mu\beta} - \eta^{\mu\beta}M^{\nu\alpha} + \eta^{\nu\beta}M^{\mu\alpha}\right) \ . \tag{9.3}$$

Si può dimostrare che le rappresentazioni tridimensionali dell'algebra di cui sopra sono classificate dallo spin e che quest'ultimo è scalare, come il momento angolare; più precisamente, indicando con p^μ gli autovalori di P^μ, tali che $p^2 = \mu^2$, lo scalare di Pauli-Lubansky

$$W = \frac{1}{2}\mathcal{E}_{\alpha\mu\nu}P^\alpha M^{\mu\nu} \tag{9.4}$$

è un invariante di Casimir e

$$W = |\mu|\, S \ , \tag{9.5}$$

ove S indica lo spin.
Una volta determinati gli operatori identificabili con i generatori, il quadrimpulso, il momento angolare e lo spin rimangono individuati.

Il quadrimpulso è dato semplicemente da P^{μ} mentre il momento angolare è dato da

$$J = \frac{1}{2}\mathcal{E}_{ij}M^{ij} = M \quad . \tag{9.6}$$

Il fatto che lo spin sia

$$S = \frac{1}{|\mu|}W \tag{9.7}$$

è poi confermato dal fatto che nel sistema di riferimento a riposo, esso coincide con il momento angolare totale; infatti si ha

$$\begin{aligned} S_R &= \frac{1}{|\mu|}W_R \\ &= \frac{1}{2\,|\mu|}\mathcal{E}_{\alpha\mu\nu}P_R^{\alpha}M_R^{\mu\nu} \\ &= \frac{1}{2\,|\mu|}\mathcal{E}_{0\mu\nu}\,|\mu|\,M_R^{\mu\nu} \\ &= \frac{1}{2}\mathcal{E}_{ij}M_R^{ij} \\ &= J_R \quad . \end{aligned} \tag{9.8}$$

È importante osservare che nel caso tridimensionale, lo spin è continuo; infatti, la sua natura scalare è responsabile dell'assenza di regole di commutazione interne capaci di quantizzarne gli autovalori. Lo stesso ragionamento vale per il momento angolare orbitale.
I candidati migliori per i generatori del gruppo di Poincaré sono ovviamente le cariche di Noether associate all'invarianza della teoria rispetto a quest'ultimo; tuttavia, deve comunque essere verificata la validità dell'algebra di Poincaré individuata dalle (9.1), (9.2) e (9.3).

9.2 Elettrodinamica

L'analisi del contenuto fisico dell'elettrodinamica procede secondo i schemi convenzionali; i generatori del gruppo di Poincaré sono le cariche corrispondenti ai tensori canonici conservati che discendono dalla covarianza relativistica della teoria.

9.2.1 Generatori del gruppo di Poincaré

La matrice di spin del campo vettoriale A^{μ} è

$$(\Sigma^{\mu\nu})^{\rho\tau} = \eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\tau} - \eta^{\mu\tau}\eta^{\nu\rho} \quad . \tag{9.9}$$

I tensori energia-impulso e del momento angolare canonici sono

$$T^{\mu\nu} = \pi^{\rho(\mu)}\partial^{\nu}A_{\rho} - \eta^{\mu\nu}\mathcal{L} \quad , \tag{9.10}$$

$$M^{\mu\alpha\beta} = x^{\alpha}T^{\mu\beta} - x^{\beta}T^{\mu\alpha} + \pi^{\rho(\mu)}\left(\Sigma^{\alpha\beta}\right)_{\rho\tau}A^{\tau} \quad , \tag{9.11}$$

e le loro cariche

$$P^{\mu} = \int d^2\vec{x} : \left(\pi^{\rho}(x)\,\partial^{\mu}A_{\rho}(x) - \eta^{\mu 0}\mathcal{L}(x)\right) : \; , \tag{9.12}$$

$$M^{\mu\nu} = \int d^2\vec{x} : \Big[x^\mu \Big(\pi^\rho (x) \partial^\nu A_\rho (x) - \eta^{\nu 0} \mathcal{L} (x)\Big) - x^\nu \Big(\pi^\rho (x) \partial^\mu A_\rho (x) - \eta^{\mu 0} \mathcal{L} (x)\Big)$$
$$+\pi^\rho (x) (\Sigma^{\mu\nu})_{\rho\tau} A^\tau (x)\Big] : \quad . \tag{9.13}$$

Si osservi ora che i valori di aspettazione di bilineari nei campi in ordine normale non contengono, in senso ovvio, stati intermedi, ma dipendono solo dalla parte distruttiva dei campi; questo assicura che nei valori di aspettazione di quest'ultimi su stati fisici, tutti i vincoli possono essere imposti in maniera forte.
Usando i vincoli soddisfatti dal campo fisico, le parti fisiche del momento canonico e della lagrangiana, ovvero quelle che contribuiscono nei valori di aspettazione su stati fisici, si possono scrivere come

$$\pi^\mu_f = \frac{1}{2} F^{\mu 0} \ , \tag{9.14}$$

$$\mathcal{L}_f = 0 \ , \tag{9.15}$$

ed i generatori fisici come

$$P^0_f = \frac{1}{2} \int d^2\vec{x} : \Big(A^\mu_f (x) \partial_\mu \partial^0 A_{f0} (x) - \partial^0 A^\mu_f (x) \partial_0 A_{f\mu} (x)\Big) : \ , \tag{9.16}$$

$$P^i_f = -\frac{1}{2} \int d^2\vec{x} : \Big[\Big(\partial^0 A^\mu_f (x) + \partial^\mu A^0_f (x)\Big) \partial^i A_{f\mu} (x)\Big] : \ , \tag{9.17}$$

$$\begin{aligned} M^{ij}_f = -\frac{1}{2} \mathcal{E}^{ij} \int d^2\vec{x} : \Big[&\Big(\partial^0 A^\mu_f (x) + \partial^\mu A^0_f (x)\Big) \mathcal{E}_{mn} x^m \partial^n A_{f\mu} (x) \\ &+ \frac{1}{\mu} \Big(\partial^0 A^k_f (x) \partial_0 A_{fk} (x) - \partial^k A^0_f (x) \partial_k A_{f0} (x)\Big)\Big] : \ , \end{aligned} \tag{9.18}$$

$$\begin{aligned} M^{0i}_f = t P^i_f + \frac{1}{2} \int d^2\vec{x} : \Big[&-x^i \Big(A^\mu_f (x) \partial_\mu \partial^0 A_{f0} (x) - \partial^0 A^\mu_f (x) \partial_0 A_{f\mu} (x)\Big) \\ &+ \Big(2\partial^0 A^i_f (x) - \partial^i A^0_f (x)\Big) A^0_f (x) - \partial^0 A^0_f (x) A^i_f (x)\Big] : \ . \end{aligned} \tag{9.19}$$

Per capire quale sia la loro azione sugli stati fisici, è conveniente esprimere i generatori in termini degli operatori di creazione ed annichilazione; usando l'espansione in modi normali e le proprietà del vettore di polarizzazione si trova, dopo conti piuttosto lunghi

$$P^\mu_f = \int d^2\vec{p} p^\mu a^+ (p) a (p) \ , \tag{9.20}$$

$$M^{ij}_f = \mathcal{E}^{ij} \int d^2\vec{p} \left[a^+ (p) \left(-\frac{i}{2} \overleftrightarrow{\frac{\partial}{\partial\theta}}\right) a (p) + \frac{\mu}{|\mu|} a^+ (p) a (p)\right] \ , \tag{9.21}$$

$$M^{0i}_f = t P^i_f + \int d^2\vec{p} \left[a^+ (p) \left(\overleftrightarrow{\frac{i}{2} p^0 \partial^i}\right) a (p) + \frac{\mu}{|\mu|} \frac{1}{|\mu| + p^0} \mathcal{E}^i{}_k p^k a^+ (p) a (p)\right] \ , \tag{9.22}$$

con

$$\theta (p) = \arctan \left(\frac{p^2}{p^1}\right) \ . \tag{9.23}$$

Con un po' di pazienza si verifica che questi generatori soddisfano effettivamente l'algebra di Poincaré.

9.2.2 Osservabili

Dalla conoscenza dei generatori seguono gli operatori corrispondenti alle osservabili; si trova

$$P_f^\mu = \int d^2\vec{p}p^\mu a^+(p)\, a(p) \quad , \tag{9.24}$$

$$J_f = \int d^2\vec{p} \left[a^+(p) \left(-\frac{i}{2}\overleftrightarrow{\frac{\partial}{\partial\theta}} \right) a(p) + \frac{\mu}{|\mu|} a^+(p)\, a(p) \right] \quad , \tag{9.25}$$

$$\begin{aligned} S_f = \int d^2\vec{p} \int d^2\vec{q} \Bigg[& \frac{1}{|\mu|} \left(p^0 q^m - q^0 p^m \right) a^+(p)\, a(p)\, a^+(q) \left(\frac{i}{2} \mathcal{E}_{mn} \overleftrightarrow{\partial^n} \right) a(q) \\ & + \frac{\mu}{|\mu|} \frac{q^0 + \dfrac{p^\mu q_\mu}{|\mu|}}{p^0 + |\mu|} a^+(p)\, a(p)\, a^+(q)\, a(q) \Bigg] \quad . \end{aligned} \tag{9.26}$$

Su uno stato fisico puro ad una particella

$$|\Phi_{f1}(k)\rangle = a^+(k)\, |\Phi_{f0}\rangle \tag{9.27}$$

segue

$$\langle \Phi_{f1}(k)| \, P_f^\mu \, |\Phi_{f1}(k)\rangle = k^\mu \quad , \tag{9.28}$$

$$\langle \Phi_{f1}(k)| \, J_f \, |\Phi_{f1}(k)\rangle = \frac{\mu}{|\mu|} \quad , \tag{9.29}$$

$$\langle \Phi_{f1}(k)| \, S_f \, |\Phi_{f1}(k)\rangle = \frac{\mu}{|\mu|} \quad . \tag{9.30}$$

Quindi, l'operatore $a^+(k)$ crea un fotone di massa $|\mu|$, quadrimpulso k^μ e spin $\frac{\mu}{|\mu|}$.
Su un pacchetto d'onda fisico ad una particella

$$\begin{aligned} |\Phi_{f1}[\varphi]\rangle &= a^+[\varphi^*]\, |\Phi_{f0}\rangle \\ &= \int d^2\vec{k}\varphi(k)\, a^+(k)\, |\Phi_{f0}\rangle \\ &= \int d^2\vec{k}\varphi(k)\, |\Phi_{f1}(k)\rangle \end{aligned} \tag{9.31}$$

si ha invece

$$\langle \Phi_{f1}[\varphi]| \, P_f^\mu \, |\Phi_{f1}[\varphi]\rangle = \int d^2\vec{k}\varphi^*(k)\, (k^\mu)\, \varphi(k) \quad , \tag{9.32}$$

$$\langle \Phi_{f1}[\varphi]| \, J_f \, |\Phi_{f1}[\varphi]\rangle = \int d^2\vec{k}\varphi^*(k) \left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\mu}{|\mu|} \right) \varphi(k) \quad , \tag{9.33}$$

$$\langle \Phi_{f1}[\varphi]| \, S_f \, |\Phi_{f1}[\varphi]\rangle = \int d^2\vec{k}\varphi^*(k) \left(\frac{\mu}{|\mu|} \right) \varphi(k) \quad . \tag{9.34}$$

Questi valori valori di aspettazione possono essere verificati usando i campi completi, confermando cosi che la procedura usata per isolare la parte fisica del campo è giusta.
La forma delle (9.32), (9.33) e (9.34) conferma che, come anticipato, la funzione φ gioca il ruolo di funzione d'onda ad una particella; inoltre, le osservabili possono essere viste, come

in meccanica quantistica, come operatori agenti sulle funzioni d'onda. Dalle precedenti segue, nello spazio degli impulsi

$$\tilde{P}_f^\mu = p^\mu \ , \tag{9.35}$$

$$\tilde{L}_f = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\theta} \ , \tag{9.36}$$

$$\tilde{S}_f = \frac{\mu}{|\mu|} \ , \tag{9.37}$$

$$\tilde{J}_f = \tilde{L}_f + \tilde{S}_f = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\mu}{|\mu|} \ . \tag{9.38}$$

9.3 Gravità

Nell'analisi del contenuto fisico della gravità intervengono particolarità dovute alla presenza di derivate di ordine superiore nella lagrangiana. I generatori del gruppo di Poincaré sono le cariche corrispondenti ai tensori canonici conservati che discendono dalla covarianza relativistica della teoria, sviluppati nel quarto capitolo.

9.3.1 Generatori del gruppo di Poincaré

Le matrici di spin dei campi tensoriali $h^{\mu\nu}$ e k^{ij} sono

$$(\Sigma^{\mu\nu})^{\rho\tau\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left[\eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\alpha}\eta^{\tau\beta} + \eta^{\mu\tau}\eta^{\nu\beta}\eta^{\rho\alpha} + (\alpha\leftrightarrow\beta) - (\mu\leftrightarrow\nu)\right] \ , \tag{9.39}$$

$$\left(\Sigma^{\mu\nu0\lambda}\right)^{ij\alpha\beta} = (\Sigma^{\mu\nu})^{ij\alpha\beta}\eta^{\lambda 0} - \frac{1}{2}\left(\eta^{\mu 0}\eta^{\nu\lambda} - \eta^{\nu 0}\eta^{\mu\lambda}\right)\left(\eta^{i\alpha}\eta^{j\beta} + \eta^{i\beta}\eta^{j\alpha}\right) \ . \tag{9.40}$$

I tensori energia-impulso e del momento angolare canonici sono

$$T^{\mu\nu} = \pi^{\rho\tau(\mu)}\partial^\nu h_{\rho\tau} + s^{ij(\mu)}\partial^\nu k_{ij} - \eta^{\mu\nu}\mathcal{L} \ , \tag{9.41}$$

$$M^{\mu\alpha\beta} = x^\alpha T^{\mu\beta} - x^\beta T^{\mu\alpha} + \pi^{\rho\tau(\mu)}\left(\Sigma^{\alpha\beta}\right)_{\rho\tau}{}^{\lambda\sigma} h_{\lambda\sigma} + s^{ij(\mu)}\left(\Sigma^{\alpha\beta 0\lambda}\right)_{ij}{}^{\rho\tau}\partial_\lambda h_{\rho\tau} \ , \tag{9.42}$$

e le loro cariche

$$P^\mu = \int d^2\vec{x} : \left(\pi^{\rho\tau}(x)\,\partial^\mu h_{\rho\tau}(x) + s^{ij}(x)\,\partial^\mu k_{ij}(x) - \eta^{\mu 0}\mathcal{L}(x)\right) : \ , \tag{9.43}$$

$$\begin{aligned} M^{\mu\nu} = \int d^2\vec{x} : \Big[& x^\mu\left(\pi^{\rho\tau}(x)\,\partial^\nu h_{\rho\tau}(x) + s^{ij}(x)\,\partial^\nu k_{ij}(x) - \eta^{\nu 0}\mathcal{L}(x)\right) \\ & - x^\nu\left(\pi^{\rho\tau}(x)\,\partial^\mu h_{\rho\tau}(x) + s^{ij}(x)\,\partial^\mu k_{ij}(x) - \eta^{\mu 0}\mathcal{L}(x)\right) \\ & + \pi^{\rho\tau}(x)\,(\Sigma^{\mu\nu})_{\rho\tau}{}^{\lambda\sigma} h_{\lambda\sigma}(x) + s^{ij}(x)\left(\Sigma^{\alpha\beta 0\lambda}\right)_{ij}{}^{\rho\tau}\partial_\lambda h_{\rho\tau}(x)\Big] : \ . \end{aligned} \tag{9.44}$$

Ancora una volta, i valori di aspettazione di bilineari nei campi in ordine normale non contengono, in senso ovvio, stati intermedi, ma dipendono solo dalla parte distruttiva dei campi; questo assicura che nei valori di aspettazione di quest'ultimi su stati fisici, tutti i vincoli possono essere imposti in maniera forte.

Usando i vincoli soddisfatti dal campo fisico, le parti fisiche dei momenti canonici e della lagrangiana, ovvero quelle che contribuiscono nei valori di aspettazione su stati fisici, si possono scrivere come

$$\pi_f^{00} = -\frac{1}{2}\partial^0 h^{00} \ , \tag{9.45}$$

$$\pi_f^{0i} = -\frac{1}{8}\left(\partial^0 h^{0i} + 3\partial^i h^{00}\right) \ , \tag{9.46}$$

$$\pi_f^{ij} = -\frac{1}{8}\left(2\eta^{ij}\partial^0 h^{00} + 3\partial^i h^{0j} + +3\partial^j h^{0i}\right) \ , \tag{9.47}$$

$$\pi_f^{ij} = -\frac{1}{4}\left(\eta^{ij} h^{00} + h^{ij}\right) \ , \tag{9.48}$$

$$\mathcal{L}_f = -\frac{1}{4}\left(\partial_\alpha h_{\mu\nu}\right)\left(\partial^\nu h^{\mu\alpha}\right) \ , \tag{9.49}$$

ed i generatori fisici come

$$P_f^0 = \frac{1}{4}\int d^2\vec{x} : \left(\partial^0 h_f^{0\mu}(x)\,\partial_0 h_{f0\mu}(x) - h_f^{0k}(x)\,\partial_0\partial_0 h_{f0k}(x) - h_f^{mn}(x)\,\partial_0\partial_0 h_{fmn}(x)\right) : \ , \tag{9.50}$$

$$P_f^i = \frac{1}{4}\int d^2\vec{x} : \left(\partial^0 h_f^{\mu\nu}(x)\,\partial^i h_{f\mu\nu}(x)\right) : \ , \tag{9.51}$$

$$\begin{aligned} M_f^{ij} = \frac{1}{4}\mathcal{E}^{ij}\int d^2\vec{x} : \Big[&\partial^0 h_f^{\mu\nu}(x)\,\mathcal{E}_{mn}x^m\partial^n h_{f\mu\nu}(x) \\ &+2\mu\left(h_f^{\mu\nu}(x)\,h_{f\mu\nu}(x) - 2h_f^{\mu 0}(x)\,h_{f\mu 0}(x)\right)\Big] : \ , \end{aligned} \tag{9.52}$$

$$\begin{aligned} M_f^{0i} = tP_f^i + \frac{1}{4}\int d^2\vec{x} : \Big[&-x^i\Big(\partial^0 h_f^{0\mu}(x)\,\partial_0 h_{f0\mu}(x) - h_f^{0k}(x)\,\partial_0\partial_0 h_{f0k}(x) \\ &-h_f^{mn}(x)\,\partial_0\partial_0 h_{fmn}(x)\Big) \\ &+3h_f^{\mu i}(x)\,\partial^0 h_{f\mu 0}(x) - h_{f\mu 0}(x)\,\partial^0 h_f^{\mu i}(x)\Big] : \ . \end{aligned} \tag{9.53}$$

Per capire quale sia la loro azione sugli stati fisici, è conveniente esprimere i generatori in termini degli operatori di creazione ed annichilazione; usando l'espansione in modi normali e le proprietà del tensore di polarizzazione si trova, dopo conti molto lunghi

$$P_f^\mu = \int d^2\vec{p}\, p^\mu a^+(p)\, a(p) \ , \tag{9.54}$$

$$M_f^{ij} = \mathcal{E}^{ij}\int d^2\vec{p}\left[a^+(p)\left(\overleftrightarrow{-\frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial\theta}}\right)a(p) + 2\frac{\mu}{|\mu|}a^+(p)\,a(p)\right] \ , \tag{9.55}$$

$$M_f^{0i} = tP_f^i + \int d^2\vec{p}\left[a^+(p)\left(\overleftrightarrow{\frac{i}{2}p^0\partial^i}\right)a(p) + 2\frac{\mu}{|\mu|}\frac{1}{|\mu| + p^0}\mathcal{E}^i{}_k p^k a^+(p)\,a(p)\right] \ , \tag{9.56}$$

con

$$\theta(p) = \arctan\left(\frac{p^2}{p^1}\right) \ . \tag{9.57}$$

Con un po' di pazienza si verifica che questi generatori soddisfano effettivamente l'algebra di Poincaré.

9.3.2 Osservabili

Dalla conoscenza dei generatori seguono gli operatori corrispondenti alle osservabili; si trova

$$P_f^\mu = \int d^2\vec{p} p^\mu a^+ (p)\, a (p) \quad , \tag{9.58}$$

$$J_f = \int d^2\vec{p} \left[a^+ (p) \left(-\frac{i}{2} \overleftrightarrow{\frac{\partial}{\partial\theta}} \right) a (p) + 2\frac{\mu}{|\mu|} a^+ (p)\, a (p) \right] \quad , \tag{9.59}$$

$$\begin{aligned} S_f = \int d^2\vec{p} \int d^2\vec{q} \Bigg[& \frac{1}{|\mu|} \left(p^0 q^m - q^0 p^m \right) a^+ (p)\, a (p)\, a^+ (q) \left(\frac{i}{2} \overleftrightarrow{\mathcal{E}_{mn} \partial^n} \right) a (q) \\ & + 2\frac{\mu}{|\mu|} \frac{q^0 + \frac{p^\mu q_\mu}{|\mu|}}{p^0 + |\mu|} a^+ (p)\, a (p)\, a^+ (q)\, a (q) \Bigg] \quad . \end{aligned} \tag{9.60}$$

Su uno stato fisico puro ad una particella

$$|\Phi_{f1} (k)\rangle = a^+ (k) |\Phi_{f0}\rangle \tag{9.61}$$

segue

$$\langle \Phi_{f1} (k)| P_f^\mu |\Phi_{f1} (k)\rangle = k^\mu \quad , \tag{9.62}$$

$$\langle \Phi_{f1} (k)| J_f |\Phi_{f1} (k)\rangle = 2\frac{\mu}{|\mu|} \quad , \tag{9.63}$$

$$\langle \Phi_{f1} (k)| S_f |\Phi_{f1} (k)\rangle = 2\frac{\mu}{|\mu|} \quad . \tag{9.64}$$

Quindi, l'operatore $a^+ (k)$ crea un gravitone di massa $|\mu|$, quadrimpulso k^μ e spin $2\frac{\mu}{|\mu|}$.
Su un pacchetto d'onda fisico ad una particella

$$\begin{aligned} |\Phi_{f1} [\varphi]\rangle &= a^+ [\varphi^*] |\Phi_{f0}\rangle \\ &= \int d^2\vec{k} \varphi (k)\, a^+ (k) |\Phi_{f0}\rangle \\ &= \int d^2\vec{k} \varphi (k) |\Phi_{f1} (k)\rangle \end{aligned} \tag{9.65}$$

si ha invece

$$\langle \Phi_{f1} [\varphi]| P_f^\mu |\Phi_{f1} [\varphi]\rangle = \int d^2\vec{k} \varphi^* (k) (k^\mu) \varphi (k) \quad , \tag{9.66}$$

$$\langle \Phi_{f1} [\varphi]| J_f |\Phi_{f1} [\varphi]\rangle = \int d^2\vec{k} \varphi^* (k) \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial\theta} + 2\frac{\mu}{|\mu|} \right) \varphi (k) \quad , \tag{9.67}$$

$$\langle \Phi_{f1} [\varphi]| S_f |\Phi_{f1} [\varphi]\rangle = \int d^2\vec{k} \varphi^* (k) \left(2\frac{\mu}{|\mu|} \right) \varphi (k) \quad . \tag{9.68}$$

Questi valori valori di aspettazione possono essere verificati usando i campi completi, confermando cosi che la procedura usata per isolare la parte fisica del campo è giusta.
La forma delle (9.66), (9.67) e (9.68) conferma che, come anticipato, la funzione φ gioca il ruolo di funzione d'onda ad una particella; inoltre, le osservabili possono essere viste, come

in meccanica quantistica, come operatori agenti sulle funzioni d'onda. Dalle precedenti segue, nello spazio degli impulsi

$$\tilde{P}_f^{\mu} = p^{\mu} \ , \tag{9.69}$$

$$\tilde{L}_f = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\theta} \ , \tag{9.70}$$

$$\tilde{S}_f = 2\frac{\mu}{|\mu|} \ , \tag{9.71}$$

$$\tilde{J}_f = \tilde{L}_f + \tilde{S}_f = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\theta} + 2\frac{\mu}{|\mu|} \ . \tag{9.72}$$

9.4 Anomalie

In entrambe le teorie prese in esame, i generatori del gruppo di Poincaré sono le cariche di Noether associate alla covarianza relativistica della teoria. La chiusura dell'algebra è stata dimostrata solo sugli stati fisici; questo basta per assicurare la covarianza relativistica delle previsioni fisiche della teoria, ovvero dei valori di aspettazione su stati fisici.
I generatori ottenuti differiscono in entrambi i casi da quelli relativi al campo di Klein-Gordon con spin zero per termini che mettono in chiara evidenza lo spin. Il fatto che l'elettrodinamica e le gravità, nonché la teoria di Klein-Gordon, abbiano generatori dello stesso tipo e della forma

$$P_f^{\mu} = \int d^2\vec{p} p^{\mu} a^+ (p)\, a\, (p) \ , \tag{9.73}$$

$$M_f^{ij} = \mathcal{E}^{ij} \int d^2\vec{p} \left[a^+ (p) \left(-\frac{i}{2}\overleftrightarrow{\frac{\partial}{\partial\theta}} \right) a\, (p) + S a^+ (p)\, a\, (p) \right] \ , \tag{9.74}$$

$$M_f^{0i} = tP_f^i + \int d^2\vec{p} \left[a^+ (p) \left(\overleftrightarrow{\frac{i}{2} p^0 \partial^i} \right) a\, (p) + \frac{S}{|\mu| + p^0} \mathcal{E}^i{}_k p^k a^+ (p)\, a\, (p) \right] \ , \tag{9.75}$$

non è un caso, e conferma che la loro analogia formale trova radice nella teoria dei gruppi. Infatti, qualunque rappresentazione tridimensionale dell'algebra di Poincaré risulta essere unitariamente equivalente a quella ottenuta; inoltre, si intuisce che queste sono tutte e sole quelle ottenute lasciando arbitraria la fase di normalizzazione nei tensori di polarizzazione. Questa proprietà non è banale ed è correlata ad alcune sottigliezze provenienti essenzialmente dal comportamento infrarosso delle teorie tridimensionali; in particolare, vale la pena analizzare le conseguenze di una scelta di fase non regolare, tale quella scartata con criteri di regolarità.
Non è difficile vedere che conservando una fase arbitraria aggiuntiva $S\gamma\,(p)$ nei tensori di polarizzazione usati, i generatori diventano

$$P_f^{\mu} = \int d^2\vec{p} p^{\mu} a^+ (p)\, a\, (p) \ , \tag{9.76}$$

$$M_f^{ij} = \mathcal{E}^{ij} \int d^2\vec{p} \left[a^+ (p) \left(-\frac{i}{2}\overleftrightarrow{\frac{\partial}{\partial\theta}} \right) a\, (p) + S \left(1 + \frac{\partial}{\partial\theta}\gamma\,(p) \right) a^+ (p)\, a\, (p) \right] \ , \tag{9.77}$$

$$M_f^{0i} = tP_f^i + \int d^2\vec{p} \left[a^+(p) \left(\frac{i}{2} \overleftrightarrow{p^0 \partial^i} \right) a(p) + S \left(\frac{\mathcal{E}^i{}_k p^k}{|\mu| + p^0} - p^0 \partial^i \gamma(p) \right) a^+(p)\, a(p) \right] \quad . \tag{9.78}$$

Contemplando il caso generale di una fase irregolare, l'algebra di Poincaré acquista una anomalia nel commutatore di due boost

$$\left[M_f^{0i}, M_f^{0j} \right] = -i \left(M_f^{ij} - \mathcal{E}^{ij} \Delta \right) \quad , \tag{9.79}$$

con

$$\Delta = -\mu S \int d^2\vec{p} p^0 \mathcal{E}^{mn} \partial_m \partial_n \gamma(p)\, a^+(p)\, a(p) \quad . \tag{9.80}$$

Se la funzione $\gamma(p)$ è regolare in tutto R^2, ovvero $\gamma(p) \in S(R^2)$, vale il teorema di Schwartz e l'algebra si chiude; la rappresentazione ottenuta è unitariamente equivalente a quella di partenza, poiché ottenibile con una ridefinizione di fase regolare degli operatori di creazione ed annichilazione

$$a(p) \to a(p)\, e^{iS\gamma(p)} \quad , \tag{9.81}$$

$$a^+(p) \to a^+(p)\, e^{-iS\gamma(p)} \quad . \tag{9.82}$$

Tuttavia, i termini aggiuntivi nei generatori rispetto al caso di spin zero non hanno più la forma semplice che avevano in partenza; questo dimostra in particolare che non è lecito dedurre lo spin della teoria dalla sola forma dei generatori, ma deve invece essere usato in ogni caso lo scalare di Pauli-Lubansky, che ovviamente fornisce il valore S indipendentemente dalla fase scelta. L'unico effetto di una ridefinizione di fase regolare è quindi quello di cambiare il sito funzionale del momento angolare orbitale e di spin negli stati.
Se la fase $\gamma(p)$ non è regolare, $\gamma(p) \notin S(R^2)$, non vale il teorema di Schwartz e l'algebra non è soddisfatta. Questo conferma che il criterio di regolarità del tensore di polarizzazione è plausibile, e mette in evidenza il fatto che una ridefinizione di fase non regolare non può essere considerata come una trasformazione unitaria.
Infine, è immediato ma interessante analizzare le conseguenze dell'uso dei tensori di polarizzazione non regolari nell'infrarosso, scartati nell'ottavo capitolo; essi si ottengono con la fase

$$\gamma(p) = -\theta(p) \quad . \tag{9.83}$$

I generatori diventano

$$P_f^\mu = \int d^2\vec{p} p^\mu a^+(p)\, a(p) \quad , \tag{9.84}$$

$$M_f^{ij} = \mathcal{E}^{ij} \int d^2\vec{p} a^+(p) \left(-\frac{i}{2} \overleftrightarrow{\frac{\partial}{\partial\theta}} \right) a(p) \quad , \tag{9.85}$$

$$M_f^{0i} = tP_f^i + \int d^2\vec{p} \left[a^+(p) \left(\frac{i}{2} \overleftrightarrow{p^0 \partial^i} \right) a(p) + \frac{S}{p^m p_m} \mathcal{E}^i{}_k p^k a^+(p)\, a(p) \right] \quad . \tag{9.86}$$

Usando le equazioni di Cauchy-Riemann si trova poi [43][44][35]

$$\mathcal{E}^{mn} \partial_m \partial_n \theta(p) = 2\pi \delta^2(\vec{p}) \quad , \tag{9.87}$$

e l'anomalia è

$$\Delta = 2\pi \mu^2 S a^+(0)\, a(0) \quad . \tag{9.88}$$

Si vede che, come conseguenza della non regolarità infrarossa iniziale del tensore di polarizzazione, l'algebra contiene divergenze e anomalie, anche loro infrarosse. Inoltre, qualsiasi argomentazione mirata ad una regolarizzazione a posteriori della singolarità è ingiustificabile, poiché tutti gli integrandi che compaiono nei generatori producono integrali convergenti nell'infrarosso in due dimensioni. Si può quindi concludere definitivamente che le teorie topologicamente massive sono finite nell'infrarosso, anche se tridimensionali.
Infine, come ulteriore conferma del fatto che le possibili anomalie siano matematiche e non fisiche, ovvero che la rappresentazione dell'algebra contenente l'ambiguità infrarossa debba essere scartata in primo luogo su base matematica, si può verificare che lo scalare di Pauli-Lubansky fornisce il valore S per lo spin anche con fasi irregolari, quali quella appena presa in esame.

Capitolo 10

Conclusione

Lo scopo di questo lavoro, probabilmente raggiunto, era di presentare una quantizzazione delle teorie tridimensionali topologicamente massive che fosse sistematica, rigorosa e capace di determinare accuratamente le caratteristiche degli stati fisici. Dalle varie analisi condotte sono emerse alcune peculiarità che acquistano una notevole importanza, essenzialmente per il fatto che puntualizzano alcune sottigliezze caratteristiche delle teorie abeliane topologicamente massive, finora oggetto di parecchie controversie; inoltre, è stato sviluppato un nuovo metodo del tutto generale per affrontare la quantizzazione canonica di teorie di gauge abeliane comunque complicate in modo limpido, estendendo e conciliando alcune tecniche già note.
I risultati ottenuti nella quantizzazione dell'elettrodinamica e della gravità topologicamente massive sono in accordo con quanto trovato nella letteratura [15], nella quale il contenuto fisico delle teorie prese in esame viene derivato con altri metodi più semplici, ma forse meno convincenti. Il procedimento utilizzato presenta tuttavia il vantaggio di fornire risultati covarianti e direttamente interpretabili, nonché di fornire una descrizione, completa ed accurata dal punto di vista matematico, degli stati delle teorie libere. Lo spin è stato determinato in modo rigoroso calcolando il valore medio dello scalare di Pauli-Lubansky. Sono stati ottenuti stati fisici regolari nell'infrarosso introducendo una opportuna fase che regolarizza il comportamento dei tensori di polarizzazione; infine, è stato mostrato che tale scelta di fase conduce all'unica rappresentazione dell'algebra di Weyl che permetta la chiusura dell'algebra di Poincaré, e gli stati ottenuti sono quindi gli unici a poter essere utilizzati in applicazioni della teoria interagente.
L'elettrodinamica contiene una eccitazione fisica a massa $|\mu|$ e spin $\frac{\mu}{|\mu|}$, convenientemente descritta dal vettore di polarizzazione regolare nell'infrarosso

$$f^{\mu}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\mu^2\left(p_0^2 - \mu^2\right)}} \begin{pmatrix} \mu^2 - p_0^2 \\ i\mu p^2 - p^0 p^1 \\ -i\mu p^1 - p^0 p^2 \end{pmatrix} e^{i\frac{\mu}{|\mu|}\theta(p)} \quad . \tag{10.1}$$

Il propagatore è

$$\tilde{S}^{\mu\nu}(p) = -\frac{i}{p^2 - \mu^2 + i\epsilon}\left[P^{\mu\nu} + i\frac{\mu}{p^2 + i\epsilon}\mathcal{E}^{\mu\nu\rho}p_{\rho}\right] \quad , \tag{10.2}$$

con

$$P^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - \frac{p^{\mu}p^{\nu}}{p^2 + i\epsilon} \quad . \tag{10.3}$$

Procedendo come nell'ottavo capitolo, si può vedere che il polo a massa zero viene cancellato in virtù della conservazione delle correnti con le quali è contratto il propagatore. Il contributo dominante è quindi dettato dal polo a massa $|\mu|$ e si può scrivere come

$$\tilde{S}^{\mu\nu}(p) = -\frac{2i}{p^2 - \mu^2 + i\epsilon} P^{(\mu)\mu\nu}(p) \tag{10.4}$$

in termini del proiettore esaminato nell'ottavo capitolo

$$P^{(\mu)\mu\nu}(p) = \frac{1}{2}\left(P^{\mu\nu} + \frac{i}{\mu}\mathcal{E}^{\mu\nu\rho}p_\rho\right) \quad , \tag{10.5}$$

$$P^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - \frac{p^\mu p^\nu}{\mu^2} \quad . \tag{10.6}$$

L'interazione avviene quindi tramite tre fotoni a massa $|\mu|$ e coinvolge solo una proiezione delle correnti

$$\hat{J}^\mu(p) = P^{(\mu)\mu\nu}(p) J_\nu(p) \quad . \tag{10.7}$$

Infatti, l'integrale di interazione è

$$\begin{aligned} I &= -\frac{e^2}{4i}\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} J_\mu(-p)\tilde{S}^{\mu\nu}(p) J_\nu(p) \\ &= \frac{e^2}{2}\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\hat{J}_\mu(-p)\frac{1}{p^2-\mu^2+i\epsilon}\hat{J}^\mu(p) \quad . \end{aligned} \tag{10.8}$$

La gravità contiene anch'essa una eccitazione fisica a massa $|\mu|$ e spin $2\frac{\mu}{|\mu|}$, convenientemente descritta dal tensore di polarizzazione regolare nell'infrarosso

$$f^{\mu\nu}(p) = \frac{1}{2\mu^2}\begin{pmatrix} p_0^2-\mu^2 & p^0p^1 - i\mu p^2 & p^0p^2 + i\mu p^1 \\ p^0p^1 - i\mu p^2 & \frac{(p^0p^1 - i\mu p^2)^2}{p_0^2-\mu^2} & \frac{(p^0p^1 - i\mu p^2)(p^0p^2 + i\mu p^1)}{p_0^2-\mu^2} \\ p^0p^2 + i\mu p^1 & \frac{(p^0p^1 - i\mu p^2)(p^0p^2 + i\mu p^1)}{p_0^2-\mu^2} & \frac{(p^0p^2 + i\mu p^1)^2}{p_0^2-\mu^2} \end{pmatrix} e^{i2\frac{\mu}{|\mu|}\theta(p)} \quad . \tag{10.9}$$

Il propagatore è

$$\begin{aligned} \tilde{S}^{\mu\nu\alpha\beta}(p) = &-\frac{i}{p^2+i\epsilon}\left[\left(P^{\mu\alpha}P^{\nu\beta} + P^{\mu\beta}P^{\nu\alpha}\right) - 2P^{\mu\nu}P^{\alpha\beta}\right] \\ &-\frac{i}{p^2-\mu^2+i\epsilon}\left[P^{\mu\nu}P^{\alpha\beta} - \left(P^{\mu\alpha}P^{\nu\beta} + P^{\mu\alpha}P^{\nu\beta}\right)\right. \\ &\left. -i\frac{\mu}{2}\frac{p_\sigma}{p^2+i\epsilon}\left(\mathcal{E}^{\mu\alpha\sigma}P^{\beta\nu} + \mathcal{E}^{\nu\alpha\sigma}P^{\beta\mu} + \mathcal{E}^{\mu\beta\sigma}P^{\alpha\nu} + \mathcal{E}^{\nu\beta\sigma}P^{\alpha\mu}\right)\right] \quad , \end{aligned} \tag{10.10}$$

con

$$P^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - \frac{p^\mu p^\nu}{p^2+i\epsilon} \quad . \tag{10.11}$$

Anche in questo caso, procedendo come nell'ottavo capitolo, si può vedere che il polo a massa zero viene cancellato in virtù della conservazione dei tensori energia-impulso con i quali è contratto il propagatore. Il contributo dominante è quindi dettato dal polo a massa $|\mu|$ e si può scrivere come

$$\tilde{S}^{\mu\nu\alpha\beta}(p) = \frac{4i}{p^2 - \mu^2 + i\epsilon} P^{(\mu)\mu\nu}(p) \tag{10.12}$$

in termini del proiettore esaminato nell'ottavo capitolo

$$\begin{aligned} P^{(\mu)\mu\nu\alpha\beta}(p) = \frac{1}{4}\Big\{ & \Big(P^{\mu\alpha}P^{\nu\beta} + P^{\mu\beta}P^{\nu\alpha}\Big) - P^{\mu\nu}P^{\alpha\beta} \\ & + \frac{i}{2\mu}\Big[\mathcal{E}^{\mu\alpha\sigma}P^{\nu\beta} + (\mu\leftrightarrow\nu) + (\alpha\leftrightarrow\beta)\Big]p_\sigma\Big\} \ , \end{aligned} \tag{10.13}$$

$$P^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - \frac{p^\mu p^\nu}{\mu^2} \ . \tag{10.14}$$

L'interazione avviene quindi tramite sei gravitoni a massa $|\mu|$ e coinvolge solo una proiezione dei tensori energia-impulso

$$\hat{T}^{\mu\nu}(p) = P^{(\mu)\mu\nu\alpha\beta}(p)\, T_{\alpha\beta}(p) \ . \tag{10.15}$$

Infatti, l'integrale di interazione è

$$\begin{aligned} I &= -\frac{k^2}{8i}\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} T_{\mu\nu}(-p)\, \tilde{S}^{\mu\nu\alpha\beta}(p)\, T_{\alpha\beta}(p) \\ &= -\frac{k^2}{2}\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \hat{T}_{\mu\nu}(-p)\, \frac{1}{p^2-\mu^2+i\epsilon} \hat{T}^{\mu\nu}(p) \ . \end{aligned} \tag{10.16}$$

Per entrambe le teorie, è stato determinato quanto necessario per impostare un'approssimazione perturbativa dell'interazione con un campo di materia; in particolare, è stata stabilita definitivamente la conseguenza dell'ambiguità infrarossa sulla forma degli stati attraverso la fase aggiunta.
È particolarmente interessante delineare un parallelo fra le tecniche di indagine usate finora in letteratura e il modo di procedere del presente lavoro. Nel lavoro di Deser, Jackiw e Templeton [15], lo spin delle teorie prese in esame viene determinato dalla sola analisi della forma dei termini aggiuntivi presenti nei generatori del gruppo di Poincaré, determinati peraltro in modo diverso, dopo aver eseguito una trasformazione di fase che rimuove le divergenze e anomalie infrarosse. Per quanto spiegato nel precedente capitolo, è evidente che la presenza di problemi nell'infrarosso, nonché la necessità di effettuare una ridefinizione di fase non regolare per chiudere l'algebra, sono subordinate ad una decomposizione sin dall'inizio non regolare del campo nelle sue parti fisiche e non fisiche, e non hanno nulla a che vedere con lo spin delle teorie, né con il loro comportamento infrarosso reale.
Le decomposizioni del campo usate nel lavoro di cui sopra sono direttamente correlate ai tensori di polarizzazione ottenuti; infatti, questi ultimi corrispondono, nello spazio dei momenti, ad operatori differenziali che, omettendo la fase di regolarizzazione infrarossa, sono

$$f^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}\mu\sqrt{-\nabla^2}} \begin{pmatrix} \nabla^2 \\ -\mu\partial^2 + \sqrt{\mu^2-\nabla^2}\,\partial^1 \\ \mu\partial^1 + \sqrt{\mu^2-\nabla^2}\,\partial^2 \end{pmatrix} \ , \tag{10.17}$$

$$f^{\mu\nu} = \frac{1}{2\mu^2} \begin{pmatrix} -\nabla^2 & \mu\partial^2 - \sqrt{\mu^2-\nabla^2}\partial^1 & -\mu\partial^1 - \sqrt{\mu^2-\nabla^2}\partial^2 \\ \mu\partial^2 - \sqrt{\mu^2-\nabla^2}\partial^1 & \frac{\left(\mu\partial^2 - \sqrt{\mu^2-\nabla^2}\partial^1\right)^2}{-\nabla^2} & \frac{\left(\mu\partial^2 - \sqrt{\mu^2-\nabla^2}\partial^1\right)\left(-\mu\partial^1 - \sqrt{\mu^2-\nabla^2}\partial^2\right)}{-\nabla^2} \\ -\mu\partial^1 - \sqrt{\mu^2-\nabla^2}\partial^2 & \frac{\left(\mu\partial^2 - \sqrt{\mu^2-\nabla^2}\partial^1\right)\left(-\mu\partial^1 - \sqrt{\mu^2-\nabla^2}\partial^2\right)}{-\nabla^2} & \frac{\left(-\mu\partial^1 - \sqrt{\mu^2-\nabla^2}\partial^2\right)^2}{-\nabla^2} \end{pmatrix} . \tag{10.18}$$

I campi fisici si possono allora scrivere, nello spazio delle configurazioni, come

$$A_f^\mu(x) = f^\mu \varphi(x) \quad , \tag{10.19}$$

$$h_f^{\mu\nu}(x) = f^{\mu\nu}\varphi(x) = f^\mu f^\nu \varphi(x) \quad , \tag{10.20}$$

con

$$\varphi(x) = \int \widetilde{dp}^\mu \left(a(p)\,e^{-ipx} + a^+(p)\,e^{ipx}\right) \quad , \tag{10.21}$$

ovvero, usando le (10.17) e (10.18)

$$\begin{cases} A_f^0 = \dfrac{1}{\sqrt{2}\mu}\sqrt{-\nabla^2}\varphi \\ A_f^i = \dfrac{1}{\sqrt{2}\mu}\left(\sqrt{\mu^2-\nabla^2}\hat{\partial}^i + \mu\mathcal{E}^i{}_k\hat{\partial}^k\right)\varphi \end{cases} , \tag{10.22}$$

$$\begin{cases} h_f^{00} = -\dfrac{1}{2\mu^2}\nabla^2\varphi \\ h_f^{0i} = \dfrac{1}{2\mu^2}\left(\sqrt{\mu^2-\nabla^2}\partial^i + \mu\mathcal{E}^i{}_k\partial^k\right)\varphi \\ h_f^{ij} = \dfrac{1}{2\mu^2}\left(\sqrt{\mu^2-\nabla^2}\hat{\partial}^i + \mu\mathcal{E}^i{}_k\hat{\partial}^k\right)\left(\sqrt{\mu^2-\nabla^2}\hat{\partial}^j + \mu\mathcal{E}^j{}_k\hat{\partial}^k\right)\varphi \end{cases} , \tag{10.23}$$

con

$$\hat{\partial}^i = \frac{\partial^i}{\sqrt{-\nabla^2}} \quad . \tag{10.24}$$

Chiaramente, una volta note le precedenti decomposizioni, l'analisi del contenuto fisico delle due teorie diventa facile, poiché in entrambi i casi si ottiene

$$\mathcal{L}_f = -\frac{1}{2}\varphi\left(\Box + \mu^2\right)\varphi \ , \tag{10.25}$$

$$\mathcal{H}_f = \frac{1}{2}\left[\left(\partial^0\varphi\right)^2 + \left(\vec{\nabla}\varphi\right)^2 + \mu^2\varphi^2\right] \ , \tag{10.26}$$

e

$$P_f^\mu = \int d^2\vec{p} p^\mu a^+(p)\, a(p) \quad , \tag{10.27}$$

$$M_f^{ij} = \mathcal{E}^{ij} \int d^2\vec{p} a^+(p) \left(-\frac{i}{2} \overleftrightarrow{\frac{\partial}{\partial\theta}} \right) a(p) \quad , \tag{10.28}$$

$$M_f^{0i} = tP_f^i + \int d^2\vec{p} \left[a^+(p) \left(\overleftrightarrow{\frac{i}{2} p^0 \partial^i} \right) a(p) + \frac{S}{p^m p_m} \mathcal{E}^i{}_k p^k a^+(p)\, a(p) \right] \quad . \tag{10.29}$$

Tuttavia, questo modo di procedere, pur essendo del tutto equivalente a quello usato, non è sistematico poiché presuppone la conoscenza della decomposizione. Inoltre, esso maschera totalmente il fatto che la decomposizione è ambigua nell'infrarosso senza la ridefinizione di fase e porta alla versione anomala dei generatori del gruppo di Poincaré, rendendo necessaria una correzione a posteriori.
Dalle puntualizzazioni appena fatte emerge chiaramente che i problemi sottolineati diventano difficilmente individuabili nello spazio delle configurazione, poiché in questo caso la fase aggiuntiva corrisponde all'operatore non locale

$$e^{iS\frac{\mu}{|\mu|}\arctan\left(\frac{\partial^1}{\partial^2}\right)} \quad . \tag{10.30}$$

Le prospettive offerte dai risultati del lavoro riguardano sia l'elettrodinamica che la gravità, poiché in entrambi i casi i risultati prodotti dalla teoria dipendono direttamente dalla struttura dello stato.
Nel caso dell'elettrodinamica, la considerazione del vettore di polarizzazione trovato potrebbe, per alcuni dei tanti sviluppi già effettuati nell'ambito della teoria accoppiata a materia fermionica, portare a risultati diversi; per esempio, il potenziale effettivo ad un loop per l'effetto Compton [56] contiene una fase ambigua nell'infrarosso molto simile a quelle trattate, la quale viene sicuramente alterata o addirittura eliminata dalla considerazione della fase giusta nel vettore di polarizzazione.
Nel caso della gravità, la principale prospettiva rimane il confronto con una simile analisi della versione del primo ordine, analisi che peraltro non sembra impossibile poiché il metodo usato dovrebbe essere applicabile anche in presenza di una simmetria BRS.
Infine, dalla costatazione del forte legame intercorrente fra elettrodinamica e gravità linearizzata possono sicuramente prendere spunto approfondimenti interessanti.

Appendix A

Notazioni e definizioni matematiche

In questo appendice vengono date alcune definizioni matematiche di grande utilità per il lavoro.

A.1 Tensori tridimensionali

La metrica di Minkowski viene definita come

$$\eta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \ , \tag{A.1}$$

ed il simbolo $\mathcal{E}^{\alpha\beta\gamma}$ dalla condizione

$$\mathcal{E}^{012} = 1 \ . \tag{A.2}$$

Valgono le seguenti relazioni

$$\mathcal{E}^{ij}\partial^k = \mathcal{E}^{ik}\partial^j - \mathcal{E}^{jk}\partial^i \ , \tag{A.3}$$

$$\mathcal{E}^{ik}\partial_k\eta^{mn} = \frac{1}{2}\left[\mathcal{E}^{im}\partial^n + \eta^{im}\mathcal{E}^{nk}\partial_k + (m \leftrightarrow n)\right] \ , \tag{A.4}$$

$$\mathcal{E}^{m1}\eta^{n1} + \mathcal{E}^{n1}\eta^{m1} = \left(\eta^{m1}\eta^{n2} + \eta^{m2}\eta^{n1}\right) \ , \tag{A.5}$$

$$\mathcal{E}^{m2}\eta^{n2} + \mathcal{E}^{n2}\eta^{m2} = -\left(\eta^{m1}\eta^{n2} + \eta^{m2}\eta^{n1}\right) \ , \tag{A.6}$$

$$\mathcal{E}^{m2}\eta^{n2} - \mathcal{E}^{m1}\eta^{n1} + (m \leftrightarrow n) = -2\left(\eta^{m1}\eta^{n2} + \eta^{m2}\eta^{n1}\right) \ , \tag{A.7}$$

$$\mathcal{E}^{m1}\eta^{n2} + \mathcal{E}^{m2}\eta^{n1} + (m \leftrightarrow n) = 2\left(\eta^{m2}\eta^{n2} - \eta^{m1}\eta^{n1}\right) \ . \tag{A.8}$$

A.2 Derivata covariante

La derivata covariante viene definita nel seguente modo

$$\mathcal{D}_\mu \phi = \partial_\mu \phi \ , \tag{A.9}$$

$$\mathcal{D}_\mu V^\alpha = \partial_\mu V^\alpha + \Gamma^\alpha{}_{\mu\nu} V^\nu \ , \tag{A.10}$$

$$\mathcal{D}_\mu V_\alpha = \partial_\mu V_\alpha - \Gamma^\nu{}_{\mu\alpha} V_\nu \ , \tag{A.11}$$

$$\mathcal{D}_\mu T^{\alpha\beta} = \partial_\mu T^{\alpha\beta} + \Gamma^\alpha{}_{\mu\nu} T^{\nu\beta} + \Gamma^\beta{}_{\mu\nu} T^{\alpha\nu} \ , \tag{A.12}$$

$$\mathcal{D}_\mu T^\alpha{}_\beta = \partial_\mu T^\alpha{}_\beta + \Gamma^\alpha{}_{\mu\nu} T^\nu{}_\beta - \Gamma^\nu{}_{\mu\beta} T^\alpha{}_\nu \ , \tag{A.13}$$

$$\mathcal{D}_\mu T_{\alpha\beta} = \partial_\mu T_{\alpha\beta} - \Gamma^\nu{}_{\mu\alpha} T_{\nu\beta} - \Gamma^\nu{}_{\mu\beta} T_{\alpha\nu} \ , \tag{A.14}$$

$$\ldots \ ,$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\mu T^{\alpha\beta\ldots}{}_{\rho\tau\ldots} = \partial_\mu T^{\alpha\beta\ldots}{}_{\rho\tau\ldots} & \\ +\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu} T^{\nu\beta\ldots}{}_{\rho\tau\ldots} + \Gamma^\beta{}_{\mu\nu} T^{\alpha\nu\ldots}{}_{\rho\tau\ldots} + \ldots & \\ -\Gamma^\nu{}_{\mu\rho} T^{\alpha\beta\ldots}{}_{\nu\tau\ldots} - \Gamma^\nu{}_{\mu\tau} T^{\alpha\beta\ldots}{}_{\rho\nu\ldots} - \ldots & \ , \end{aligned} \tag{A.15}$$

e soddisfa le seguenti regole di commutazione

$$\left[\mathcal{D}_\mu, \mathcal{D}_\nu\right] \phi = 0 \ , \tag{A.16}$$

$$\left[\mathcal{D}_\mu, \mathcal{D}_\nu\right] V^\alpha = R^\alpha{}_{\lambda\mu\nu} V^\lambda \ , \tag{A.17}$$

$$\left[\mathcal{D}_\mu, \mathcal{D}_\nu\right] T^{\alpha\beta} = R^\alpha{}_{\lambda\mu\nu} T^{\lambda\beta} + R_\lambda{}^\beta{}_{\mu\nu} T^{\alpha\lambda} \ , \tag{A.18}$$

$$\ldots \ . \tag{A.19}$$

A.3 Derivata funzionale e variazionale

La derivata funzionale è definita dalla relazione

$$\frac{\delta^* f\left(\vec{x}, t\right)}{\delta^* f\left(\vec{y}, t\right)} = \delta^2\left(\vec{x} - \vec{y}\right) \ . \tag{A.20}$$

Con le usuali regole di differenziazione si ottiene

$$\begin{aligned} &\frac{\delta^*}{\delta^* g\left(\vec{y}, t\right)} f\left[g\left(\vec{x}, t\right), \partial^\mu g\left(\vec{x}, t\right), \partial^\mu \partial^\nu g\left(\vec{x}, t\right), \ldots\right] = \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial g}\left(\vec{x}, t\right) + \frac{\partial f}{\partial\left(\partial^i g\right)}\left(\vec{x}, t\right) \partial^i_x + \frac{\partial f}{\partial\left(\partial^i \partial^j g\right)}\left(\vec{x}, t\right) \partial^i_x \partial^j_x + \ldots\right) \frac{\delta^* g\left(\vec{x}, t\right)}{\delta^* g\left(\vec{y}, t\right)} \\ &\doteq \left(\frac{\partial f}{\partial g} - \partial^i \frac{\partial f}{\partial\left(\partial^i g\right)} + \partial^i \partial^j \frac{\partial f}{\partial\left(\partial^i \partial^j g\right)} - \ldots\right)\left(\vec{x}, t\right) \delta^2\left(\vec{x} - \vec{y}\right) \ , \end{aligned} \tag{A.21}$$

$$\begin{aligned} &\frac{\delta^*}{\delta^*\left(\partial^0 g\left(\vec{y}, t\right)\right)} f\left[g\left(\vec{x}, t\right), \partial^\mu g\left(\vec{x}, t\right), \partial^\mu \partial^\nu g\left(\vec{x}, t\right), \ldots\right] = \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial\left(\partial^0 g\right)}\left(\vec{x}, t\right) + 2\frac{\partial f}{\partial\left(\partial^i \partial^0 g\right)}\left(\vec{x}, t\right) \partial^i_x + 3\frac{\partial f}{\partial\left(\partial^i \partial^j \partial^0 g\right)}\left(\vec{x}, t\right) \partial^i_x \partial^j_x + \ldots\right) \frac{\delta^* g\left(\vec{x}, t\right)}{\delta^* g\left(\vec{y}, t\right)} \\ &\doteq \left(\frac{\partial f}{\partial\left(\partial^0 g\right)} - 2\partial^i \frac{\partial f}{\partial\left(\partial^i \partial^0 g\right)} + 3\partial^i \partial^j \frac{\partial f}{\partial\left(\partial^i \partial^j \partial^0 g\right)} - \ldots\right)\left(\vec{x}, t\right) \delta^2\left(\vec{x} - \vec{y}\right) \ , \end{aligned} \tag{A.22}$$

$$\frac{\delta^*}{\delta^*\left(\partial^0\partial^0 g\left(\vec{y},t\right)\right)} f\left[g\left(\vec{x},t\right),\partial^\mu g\left(\vec{x},t\right),\partial^\mu\partial^\nu g\left(\vec{x},t\right),...\right] = ...$$
$$\doteq\left(\frac{\partial f}{\partial\left(\partial^0\partial^0 g\right)} - 3\partial^i\frac{\partial f}{\partial\left(\partial^i\partial^0\partial^0 g\right)} + 4\partial^i\partial^j\frac{\partial f}{\partial\left(\partial^i\partial^j\partial^0\partial^0 g\right)} - ...\right)\left(\vec{x},t\right)\delta^2\left(\vec{x}-\vec{y}\right) \quad , \tag{A.23}$$

$$\cdots \; ,$$

$$\frac{\delta^*}{\delta^*\left(\left(\partial^0\right)^m g\left(\vec{y},t\right)\right)} f\left[g\left(\vec{x},t\right),\partial^\mu g\left(\vec{x},t\right),\partial^\mu\partial^\nu g\left(\vec{x},t\right),...\right] = ...$$
$$\begin{aligned}\doteq&\left(\frac{\partial f}{\partial\left(\left(\partial^0\right)^m g\right)} - \left(m+1\right)\partial^i\frac{\partial f}{\partial\left(\partial^i\left(\partial^0\right)^m g\right)}\right.\\ &\left.+\left(m+2\right)\partial^i\partial^j\frac{\partial f}{\partial\left(\partial^i\partial^j\left(\partial^0\right)^m g\right)} - ...\right)\left(\vec{x},t\right)\delta^2\left(\vec{x}-\vec{y}\right) \quad .\end{aligned} \tag{A.24}$$

Analogamente, la derivata variazionale è definita dalla relazione

$$\frac{\delta f\left(x\right)}{\delta f\left(y\right)} = \delta^3\left(x-y\right) \quad . \tag{A.25}$$

Con le usuali regole di differenziazione si ottiene

$$\begin{aligned}&\frac{\delta}{\delta g\left(y\right)} f\left[g\left(x\right),\partial^\mu g\left(x\right),\partial^\mu\partial^\nu g\left(x\right),...\right] =\\ &\quad= \left(\frac{\partial f}{\partial g}\left(x\right) + \frac{\partial f}{\partial\left(\partial^\mu g\right)}\left(x\right)\partial^\mu_x + \frac{\partial f}{\partial\left(\partial^\mu\partial^\nu g\right)}\left(x\right)\partial^\mu_x\partial^\nu_x + ...\right)\frac{\delta g\left(x\right)}{\delta g\left(y\right)}\\ &\quad\doteq \left(\frac{\partial f}{\partial g} - \partial^\mu\frac{\partial f}{\partial\left(\partial^\mu g\right)} + \partial^\mu\partial^\nu\frac{\partial f}{\partial\left(\partial^\mu\partial^\nu g\right)} - ...\right)\left(x\right)\delta^3\left(x-y\right) \quad ,\end{aligned} \tag{A.26}$$

$$\begin{aligned}&\frac{\delta}{\delta\left(\partial^0 g\left(y\right)\right)} f\left[g\left(x\right),\partial^\mu g\left(x\right),\partial^\mu\partial^\nu g\left(x\right),...\right] =\\ &= \left[\frac{\partial f}{\partial\left(\partial^0 g\right)}\left(x\right) + \left(2\frac{\partial f}{\partial\left(\partial^i\partial^0 g\right)}\left(x\right)\partial^i_x + \frac{\partial f}{\partial\left(\partial^0\partial^0 g\right)}\left(x\right)\partial^0_x\right)\right.\\ &\quad + \left(3\frac{\partial f}{\partial\left(\partial^i\partial^j\partial^0 g\right)}\left(x\right)\partial^i_x\partial^j_x + 3\frac{\partial f}{\partial\left(\partial^i\partial^0\partial^0 g\right)}\left(x\right)\partial^i_x\partial^0_x\right.\\ &\quad\quad \left.\left.+\frac{\partial f}{\partial\left(\partial^0\partial^0\partial^0 g\right)}\left(x\right)\partial^0_x\partial^0_x\right) + ...\right]\frac{\delta g\left(x\right)}{\delta g\left(y\right)}\\ &\doteq \left[\left(\frac{\partial f}{\partial\left(\partial^0 g\right)} - 2\partial^i\frac{\partial f}{\partial\left(\partial^i\partial^0 g\right)} + 3\partial^i\partial^j\frac{\partial f}{\partial\left(\partial^i\partial^j\partial^0 g\right)} - ...\right)\right.\\ &\quad -\partial^0\left(\frac{\partial f}{\partial\left(\partial^0\partial^0 g\right)} - 3\partial^i\frac{\partial f}{\partial\left(\partial^i\partial^0\partial^0 g\right)} + ...\right)\\ &\quad \left.+\partial^0\partial^0\left(\frac{\partial f}{\partial\left(\partial^0\partial^0\partial^0 g\right)} - 4\partial^i\frac{\partial f}{\partial\left(\partial^i\partial^0\partial^0\partial^0 g\right)} + ...\right) - ...\right]\left(x\right)\delta^3\left(x-y\right) \quad ,\end{aligned} \tag{A.27}$$

$$\cdots \; .$$

Le derivate funzionali e variazionali sono poi legate dalle seguenti proprietà

$$\frac{\delta f\left(x\right)}{\delta g\left(y\right)} = \left(\frac{\delta^* f\left(x\right)}{\delta^* g\left(y\right)} - \partial^0\frac{\delta^* f\left(x\right)}{\delta^*\left(\partial^0 g\left(y\right)\right)} + \partial^0\partial^0\frac{\delta^* f\left(x\right)}{\delta^*\left(\partial^0\partial^0 g\left(y\right)\right)} - ...\right)\delta\left(x^0-y^0\right) \quad , \tag{A.28}$$

$$\frac{\delta f(x)}{\delta\left(\partial^0 g(y)\right)}=\left(\frac{\delta^* f(x)}{\delta^*\left(\partial^0 g(y)\right)}-\partial^0\frac{\delta^* f(x)}{\delta^*\left(\partial^0\partial^0 g(y)\right)}+\partial^0\partial^0\frac{\delta^* f(x)}{\delta^*\left(\partial^0\partial^0\partial^0 g(y)\right)}-...\right)\delta\left(x^0-y^0\right)\quad , \tag{A.29}$$

$$\cdots\ ,$$

$$\begin{aligned}\frac{\delta f(x)}{\delta\left(\left(\partial^0\right)^m g(y)\right)}=&\left(\frac{\delta^* f(x)}{\delta^*\left(\left(\partial^0\right)^m g(y)\right)}-\partial^0\frac{\delta^* f(x)}{\delta^*\left(\left(\partial^0\right)^{m+1} g(y)\right)}\right.\\&\left.+\partial^0\partial^0\frac{\delta^* f(x)}{\delta^*\left(\left(\partial^0\right)^{m+2} g(y)\right)}-...\right)\delta\left(x^0-y^0\right)\quad .\end{aligned} \tag{A.30}$$

Appendix B

Soluzioni fondamentali delle equazioni scalari a massa 0 e μ

In questo appendice vengono presentate le funzioni fondamentali associate ad alcune equazioni scalari a massa 0 e μ.

B.1 Funzioni di Wightman fondamentali

Si considerino le funzioni fondamentali Δ_0, Δ_{00}, Δ_{000}, Δ_μ, $\Delta_{\mu 0}$, e $\Delta_{\mu 00}$, definite come soluzioni dei seguenti problemi di Cauchy

$$\begin{cases} \Box \Delta_0 (z) = 0 \\ \Delta_0 (\vec{z}, 0) = 0 \\ \partial^0 \Delta_0 (\vec{z}, 0) = -\delta^2 (\vec{z}) \end{cases} , \tag{B.1}$$

$$\begin{cases} (\Box + \mu^2) \Delta_\mu (z) = 0 \\ \Delta_\mu (\vec{z}, 0) = 0 \\ \partial^0 \Delta_\mu (\vec{z}, 0) = -\delta^2 (\vec{z}) \end{cases} , \tag{B.2}$$

$$\begin{cases} \Box^2 \Delta_{00} (z) = 0 \\ \Delta_{00} (\vec{z}, 0) = 0 \\ \partial^0 \Delta_{00} (\vec{z}, 0) = 0 \\ (\partial^0)^2 \Delta_{00} (\vec{z}, 0) = 0 \\ (\partial^0)^3 \Delta_{00} (\vec{z}, 0) = -\delta^2 (\vec{z}) \end{cases} , \tag{B.3}$$

$$\begin{cases} (\Box + \mu^2) \Box \Delta_{\mu 0} (z) = 0 \\ \Delta_{\mu 0} (\vec{z}, 0) = 0 \\ \partial^0 \Delta_{\mu 0} (\vec{z}, 0) = 0 \\ (\partial^0)^2 \Delta_{\mu 0} (\vec{z}, 0) = 0 \\ (\partial^0)^3 \Delta_{\mu 0} (\vec{z}, 0) = -\delta^2 (\vec{z}) \end{cases} , \tag{B.4}$$

$$
\begin{cases}
\Box^3 \Delta_{000}(z) = 0 \\
\Delta_{000}(\vec{z}, 0) = 0 \\
\partial^0 \Delta_{000}(\vec{z}, 0) = 0 \\
(\partial^0)^2 \Delta_{000}(\vec{z}, 0) = 0 \\
(\partial^0)^3 \Delta_{000}(\vec{z}, 0) = 0 \\
(\partial^0)^4 \Delta_{000}(\vec{z}, 0) = 0 \\
(\partial^0)^5 \Delta_{000}(\vec{z}, 0) = -\delta^2(\vec{z})
\end{cases} \quad , \tag{B.5}
$$

$$
\begin{cases}
(\Box + \mu^2) \Box^2 \Delta_{\mu 00}(z) = 0 \\
\Delta_{\mu 00}(\vec{z}, 0) = 0 \\
\partial^0 \Delta_{\mu 00}(\vec{z}, 0) = 0 \\
(\partial^0)^2 \Delta_{\mu 00}(\vec{z}, 0) = 0 \\
(\partial^0)^3 \Delta_{\mu 00}(\vec{z}, 0) = 0 \\
(\partial^0)^4 \Delta_{\mu 00}(\vec{z}, 0) = 0 \\
(\partial^0)^5 \Delta_{\mu 00}(\vec{z}, 0) = -\delta^2(\vec{z})
\end{cases} \quad . \tag{B.6}
$$

Esse sono legate dalle equazioni

$$\Box \Delta_{00}(z) = \Delta_0(z) \quad , \tag{B.7}$$

$$\Box \Delta_{\mu 0}(z) = \Delta_\mu(z) \quad , \tag{B.8}$$

$$\Box \Delta_{000}(z) = \Delta_{00}(z) \quad , \tag{B.9}$$

$$\Box \Delta_{\mu 00}(z) = \Delta_{\mu 0}(z) \quad , \tag{B.10}$$

$$\Box^2 \Delta_{000}(z) = \Delta_0(z) \quad , \tag{B.11}$$

$$\Box^2 \Delta_{\mu 00}(z) = \Delta_\mu(z) \quad , \tag{B.12}$$

e dalle relazioni

$$\Delta_{\mu 0}(z) = \frac{1}{\mu^2} \left(\Delta_0(z) - \Delta_\mu(z) \right) \quad , \tag{B.13}$$

$$\Delta_{\mu 00}(z) = \frac{1}{\mu^2} \left(\Delta_{00}(z) - \Delta_{\mu 0}(z) \right) = \frac{1}{\mu^2} \left[\Delta_{00}(z) - \frac{1}{\mu^2} \left(\Delta_0(z) - \Delta_\mu(z) \right) \right] \quad . \tag{B.14}$$

Non è difficile verificare che la loro forma esplicita è

$$\Delta_0(z) = -i \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} 2\pi \epsilon(p_0) \, \delta\left(p^2\right) e^{-ipz} \quad , \tag{B.15}$$

$$\Delta_\mu(z) = -i \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} 2\pi \epsilon(p_0) \, \delta\left(p^2 - \mu^2\right) e^{-ipz} \quad , \tag{B.16}$$

$$\Delta_{00}(z) = -i \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} 2\pi \epsilon(p_0) \, \delta\left(p^4\right) e^{-ipz} \quad , \tag{B.17}$$

$$\Delta_{\mu 0}(z) = -i \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} 2\pi\epsilon(p_0) \frac{1}{\mu^2} \left[\delta\left(p^2\right) - \delta\left(p^2 - \mu^2\right)\right] e^{-ipz} \ , \tag{B.18}$$

$$\Delta_{000}(z) = -i \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} 2\pi\epsilon(p_0)\, \delta\left(p^6\right) e^{-ipz} \ , \tag{B.19}$$

$$\Delta_{\mu 00}(z) = -i \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} 2\pi\epsilon(p_0) \frac{1}{\mu^2} \left[\delta\left(p^4\right) - \frac{1}{\mu^2}\left(\delta\left(p^2\right) - \delta\left(p^2 - \mu^2\right)\right)\right] e^{-ipz} \ . \tag{B.20}$$

B.2 Proprietà

È banale verificare che le derivate in $z_0 = 0$ delle funzioni appena definite soddisfano le seguenti proprietà

$$\begin{cases} \partial^\alpha \Delta_0(\vec{z},0) = \partial^\alpha \Delta_\mu(\vec{z},0) = -\eta^{\alpha 0}\delta^2(\vec{z}) \\ \partial^\alpha\partial^\beta\left(\Delta_\mu(\vec{z},0) - \Delta_0(\vec{z},0)\right) = 0 \\ \partial^\alpha\partial^\beta\partial^\gamma\left(\Delta_\mu(\vec{z},0) - \Delta_0(\vec{z},0)\right) = \mu^2\eta^{\alpha 0}\eta^{\beta 0}\eta^{\gamma 0}\delta^2(\vec{z}) \end{cases} , \tag{B.21}$$

$$\begin{cases} \partial^\alpha \Delta_{00}(\vec{z},0) = \partial^\alpha \Delta_{\mu 0}(\vec{z},0) = 0 \\ \partial^\alpha\partial^\beta \Delta_{00}(\vec{z},0) = \partial^\alpha\partial^\beta \Delta_{\mu 0}(\vec{z},0) = 0 \\ \partial^\alpha\partial^\beta\partial^\gamma \Delta_{00}(\vec{z},0) = \partial^\alpha\partial^\beta\partial^\gamma \Delta_{\mu 0}(\vec{z},0) = -\eta^{\alpha 0}\eta^{\beta 0}\eta^{\gamma 0}\delta^2(\vec{z}) \\ \partial^\alpha\partial^\beta\partial^\gamma\partial^\delta\left(\Delta_{\mu 0}(\vec{z},0) - \Delta_{00}(\vec{z},0)\right) = 0 \\ \partial^\alpha\partial^\beta\partial^\gamma\partial^\delta\partial^\epsilon\left(\Delta_{\mu 0}(\vec{z},0) - \Delta_{00}(\vec{z},0)\right) = \mu^2\eta^{\alpha 0}\eta^{\beta 0}\eta^{\gamma 0}\eta^{\delta 0}\eta^{\epsilon 0}\delta^2(\vec{z}) \end{cases} , \tag{B.22}$$

$$\begin{cases} \partial^\alpha \Delta_{000}(\vec{z},0) = \partial^\alpha \Delta_{\mu 00}(\vec{z},0) = 0 \\ \partial^\alpha\partial^\beta \Delta_{000}(\vec{z},0) = \partial^\alpha\partial^\beta \Delta_{\mu 00}(\vec{z},0) = 0 \\ \partial^\alpha\partial^\beta\partial^\gamma \Delta_{000}(\vec{z},0) = \partial^\alpha\partial^\beta\partial^\gamma \Delta_{\mu 00}(\vec{z},0) = 0 \\ \partial^\alpha\partial^\beta\partial^\gamma\partial^\delta \Delta_{000}(\vec{z},0) = \partial^\alpha\partial^\beta\partial^\gamma\partial^\delta \Delta_{\mu 00}(\vec{z},0) = 0 \\ \partial^\alpha\partial^\beta\partial^\gamma\partial^\delta\partial^\epsilon \Delta_{000}(\vec{z},0) = \partial^\alpha\partial^\beta\partial^\gamma\partial^\delta\partial^\epsilon \Delta_{\mu 00}(\vec{z},0) = -\eta^{\alpha 0}\eta^{\beta 0}\eta^{\gamma 0}\eta^{\delta 0}\eta^{\epsilon 0}\delta^2(\vec{z}) \\ \partial^\alpha\partial^\beta\partial^\gamma\partial^\delta\partial^\epsilon\partial^\zeta\left(\Delta_{\mu 0}(\vec{z},0) - \Delta_{00}(\vec{z},0)\right) = 0 \\ \partial^\alpha\partial^\beta\partial^\gamma\partial^\delta\partial^\epsilon\partial^\zeta\partial^\eta\left(\Delta_{\mu 0}(\vec{z},0) - \Delta_{00}(\vec{z},0)\right) = \mu^2\eta^{\alpha 0}\eta^{\beta 0}\eta^{\gamma 0}\eta^{\delta 0}\eta^{\epsilon 0}\eta^{\zeta 0}\eta^{\eta 0}\delta^2(\vec{z}) \end{cases} , \tag{B.23}$$

$$\begin{cases} (\partial_0)^5\left(\Delta_\mu(\vec{z},0) - \Delta_0(\vec{z},0)\right) = -\mu^2\left[2\left(\partial^0\right)^3\Delta_0(\vec{z},0) + \mu^2\delta^2(\vec{z})\right] \\ (\partial_0)^5\Delta_{00}(\vec{z},0) = 2(\partial_0)^3\Delta_0(\vec{z},0) \end{cases} . \tag{B.24}$$

Appendix C

Passaggi fondamentali per il calcolo delle funzioni a due punti delle teorie tridimensionali topologicamente massive

In questo appendice vengono riportati alcuni passaggi relativi alla risoluzione del pro-blema di Cauchy per le funzioni a due punti dell'elettrodinamica e della gravità tridimensionali topologicamente massive che completano il settimo capitolo.

C.1 Elettrodinamica

Sostituendo la forma generale (7.4) nell'equazione del moto (7.1) si ottiene

$$\begin{aligned} &\{\eta^{\mu\nu}\left(\Box f_1(z) + \mu\Box f_2(z)\right) \\ &+\mathcal{E}^{\mu\nu\rho}\partial_\rho\left(-\mu f_1(z) + \Box f_2(z)\right) \\ &+\partial^\mu\partial^\nu\left[(\xi-1)\, f_1(z) - \mu f_2(z) + \xi\Box f_3(z)\right]\} \\ &\quad = 0 \ . \end{aligned} \tag{C.1}$$

Questa implica

$$\begin{cases} \Box f_1(z) + \mu\Box f_2(z) = 0 \\ \mu f_1(z) - \Box f_2(z) = 0 \\ (\xi-1)\, f_1(z) - \mu f_2(z) + \xi\Box f_3(z) = 0 \end{cases} , \tag{C.2}$$

ovvero

$$\begin{cases} (\alpha_2 + \mu\beta_2)\,\Delta_\mu(z) = 0 \\ \alpha_1\Delta_0(z) + (\alpha_2 + \mu\beta_2)\,\Delta_\mu(z) = 0 \\ ((\xi-1)\,\alpha_1 - \mu\beta_1 + \xi\gamma_3)\,\Delta_0(z) + ((\xi-1)\,\alpha_2 - \mu\beta_2 - \mu^2\xi\gamma_2)\,\Delta_\mu(z) = 0 \end{cases} . \tag{C.3}$$

Segue

$$\begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 + \mu\beta_2 = 0 \\ \beta_2 + \mu\gamma_2 = 0 \\ \mu\beta_1 - \xi\gamma_3 = 0 \end{cases} . \tag{C.4}$$

Le condizioni (7.2) e (7.3) forniscono invece

$$-\left(\beta_1 + \beta_2\right) \mathcal{E}^{\mu\nu 0} \delta^2\left(\vec{z}\right) + \left(\gamma_1 + \gamma_2\right) \partial^\mu \partial^\nu \Delta_0\left(\vec{z}, 0\right) = 0 \ , \tag{C.5}$$

$$\begin{aligned} &\left\{\left[-\left(\alpha_2 + 1\right) \eta^{\mu\nu} + \left(\mu^2\gamma_2 - \gamma_3 + \frac{\xi - 1}{\xi}\right) \eta^{\mu 0}\eta^{\nu 0}\right] \delta^2\left(\vec{z}\right)\right. \\ &\left.+\mathcal{E}^{\mu\nu\rho}\left(\gamma_1 + \gamma_2\right) \partial_\rho \partial_0 \Delta_0\left(\vec{z}, 0\right)\right\} \\ &\quad = 0 \ , \end{aligned} \tag{C.6}$$

da cui segue

$$\begin{cases} \beta_1 + \beta_2 = 0 \\ \gamma_1 + \gamma_2 = 0 \\ \alpha_2 = -1 \\ \mu^2\gamma_2 - \gamma_3 = \dfrac{1 - \xi}{\xi} \end{cases} . \tag{C.7}$$

Il sistema lineare completo per le costanti introdotte è quindi

$$\begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = -1 \\ \alpha_2 + \mu\beta_2 = 0 \\ \beta_2 + \mu\gamma_2 = 0 \\ \beta_2 = -\beta_1 \\ \gamma_2 = -\gamma_1 \\ \gamma_3 = \dfrac{\mu}{\xi}\beta_1 = \dfrac{\xi - 1}{\xi} \ + \mu^2\gamma_2 \end{cases} . \tag{C.8}$$

C.2 Gravità

Sostituendo la forma generale (7.26) nell'equazione del moto (7.17) si ottiene, dopo un calcolo laborioso

$$
\begin{aligned}
&\Big\{\eta^{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta}\left(-\Box f_1(z)-2\Box f_2(z)+\frac{2}{\mu}\Box^2 f_3(z)\right)\\
&+\frac{1}{4}\left(\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}+\eta^{\mu\beta}\eta^{\nu\alpha}\right)\left(\Box f_2(z)-\frac{2}{\mu}\Box^2 f_3(z)\right)\\
&+\frac{1}{2}\left(\eta^{\mu\nu}\partial^\alpha\partial^\beta+\eta^{\alpha\beta}\partial^\mu\partial^\nu\right)\left[(2\xi+1)\,f_1(z)+4f_2(z)-\frac{4}{\mu}\Box f_3(z)+(2\xi-1)\,\Box f_4(z)\right]\\
&-\frac{1}{2}\left(\eta^{\mu\nu}\partial^\alpha\partial^\beta-\eta^{\alpha\beta}\partial^\mu\partial^\nu\right)\left[(2\xi+1)\,f_1(z)+(2\xi+1)\,\Box f_4(z)\right]\\
&+\left[\eta^{\mu\alpha}\partial^\nu\partial^\beta+(\mu\leftrightarrow\nu)+(\alpha\leftrightarrow\beta)\right]\left[(\xi-1)\,f_2(z)+\frac{2}{\mu}\Box f_3(z)+\xi\Box f_5(z)\right]\\
&+\partial^\mu\partial^\nu\partial^\alpha\partial^\beta\left[-\frac{2}{\mu}f_3(z)+(2\xi+1)\,f_4(z)+4\xi f_5(z)+2\xi\Box f_7(z)\right]\\
&+\left[\eta^{\mu\alpha}\mathcal{E}^{\nu\beta\sigma}+(\mu\leftrightarrow\nu)+(\alpha\leftrightarrow\beta)\right]\partial_\sigma\left(\frac{1}{2\mu}\Box f_2(z)+\Box f_3(z)\right)\\
&+\left[\mathcal{E}^{\mu\alpha\sigma}\partial^\nu\partial^\beta+(\mu\leftrightarrow\nu)+(\alpha\leftrightarrow\beta)\right]\partial_\sigma\left[-\frac{1}{2\mu}f_2(z)+(\xi-1)\,f_3(z)+\xi\Box f_6(z)\right]\Big\}\\
&\quad=0\ .
\end{aligned}
\tag{C.9}
$$

Questa implica

$$
\begin{cases}
\Box f_1(z)+\Box f_2(z)=0\\
\Box f_3(z)+\dfrac{1}{\mu^2}\Box^2 f_3(z)=0\\
\dfrac{1}{\mu}\Box f_2(z)+2\Box f_3(z)=0\\
(2\xi+1)\,f_1(z)+4f_2(z)+\dfrac{2}{\mu^2}\Box f_2(z)+(2\xi-1)\,\Box f_4(z)=0\\
2f_2(z)+\dfrac{1}{\mu^2}\Box f_2(z)-\Box f_4(z)=0\\
(\xi-1)\,f_2(z)-\dfrac{1}{\mu^2}\Box f_2(z)+\xi\Box f_5(z)=0\\
\dfrac{1}{\mu}f_2(z)-2\,(\xi-1)\,f_3(z)-2\xi\Box f_6(z)=0\\
\dfrac{2}{\mu}f_3(z)-(2\xi+1)\,f_4(z)-4\xi f_5(z)-2\xi\Box f_7(z)=0
\end{cases}
,
\tag{C.10}
$$

ovvero

$$\begin{cases} (\alpha_2+\beta_2)\,\Delta_\mu(z)=0 \\ \gamma_3\Delta_0(z)=0 \\ 2\gamma_3\Delta_0(z)-\mu\,(\beta_2+2\mu\gamma_2)\,\Delta_\mu(z)=0 \\ \left[(2\xi+1)\,\alpha_1+4\beta_1+(2\xi-1)\,\delta_3\right]\Delta_0(z) \\ +\left[(2\xi+1)\,\alpha_2+2\beta_2-\mu^2\,(2\xi-1)\,\delta_2\right]\Delta_\mu(z)=0 \\ (2\beta_1-\delta_3)\,\Delta_0(z)+\left(\beta_2+\mu^2\delta_2\right)\Delta_\mu(z)=0 \\ \left[(\xi-1)\,\beta_1+\xi\epsilon_3\right]\Delta_0(z)+\xi\left(\beta_2-\mu^2\epsilon_2\right)\Delta_\mu(z)=0 \\ \left[\dfrac{1}{\mu}\beta_1-2\,(\xi-1)\,\gamma_1-2\xi\varphi_3\right]\Delta_0(z) \\ +\left[\dfrac{1}{\mu}\beta_2-2\,(\xi-1)\,\gamma_2+2\xi\mu^2\varphi_2\right]\Delta_\mu(z) \\ -\left[2\,(\xi-1)\,\gamma_3+2\xi\varphi_4\right]\Delta_{00}(z)=0 \\ \left[\dfrac{2}{\mu}\gamma_1-(2\xi+1)\,\delta_1-4\xi\epsilon_1-2\xi\chi_3\right]\Delta_0(z) \\ +\left[\dfrac{2}{\mu}\gamma_2-(2\xi+1)\,\delta_2-4\xi\epsilon_2+2\xi\mu^2\chi_2\right]\Delta_\mu(z) \\ +\left[\dfrac{2}{\mu}\gamma_3-(2\xi+1)\,\delta_3-4\xi\epsilon_3-2\xi\chi_4\right]\Delta_{00}(z)=0 \end{cases} . \tag{C.11}$$

Segue

$$\begin{cases} \alpha_1+2\beta_1=0 \\ \alpha_2+\beta_2=0 \\ \alpha_2-2\mu\gamma_2=0 \\ \alpha_2-\mu^2\delta_2=0 \\ \alpha_2+\mu^2\epsilon_2=0 \\ \alpha_2-2\mu^3\varphi_2=0 \\ \alpha_2+\mu^4\chi_2=0 \\ \gamma_3=0 \\ \alpha_1+\delta_3=0 \\ (\xi-1)\,\alpha_1-2\xi\epsilon_3=0 \\ \alpha_1-4\mu\,(1-\xi)\,\gamma_1+4\mu\xi\varphi_3=0 \\ 2\gamma_1-\mu\,(2\xi+1)\,\delta_1-4\mu\xi\epsilon_1-2\mu\xi\chi_3=0 \\ \varphi_4=0 \\ 3\alpha_1-2\xi\chi_4=0 \end{cases} . \tag{C.12}$$

Le condizioni (7.18-7.25) forniscono invece

$$
\begin{aligned}
&\Big\{-\left(\gamma_1+\gamma_2\right)\Big[\eta^{\mu\alpha}\mathcal{E}^{\nu\beta 0}+(\mu\leftrightarrow\nu)+(\alpha\leftrightarrow\beta)\Big]\,\delta^2\left(\vec{z}\right)\\
&-\left(-\mu^2\varphi_2+\varphi_3\right)\Big[\eta^{\mu 0}\eta^{\alpha 0}\mathcal{E}^{\nu\beta 0}+(\mu\leftrightarrow\nu)+(\alpha\leftrightarrow\beta)\Big]\,\delta^2\left(\vec{z}\right)\\
&+\left(\delta_1+\delta_2\right)\Big(\eta^{\mu\nu}\partial^\alpha\partial^\beta+\eta^{\alpha\beta}\partial^\mu\partial^\nu\Big)\,\Delta_0\left(\vec{z},0\right)\\
&+\left(\epsilon_1+\epsilon_2\right)\Big[\eta^{\mu\alpha}\partial^\nu\partial^\beta+(\mu\leftrightarrow\nu)+(\alpha\leftrightarrow\beta)\Big]\,\Delta_0\left(\vec{z},0\right)\\
&+\left(\varphi_1+\varphi_2\right)\Big[\mathcal{E}^{\mu\alpha\sigma}\partial^\nu\partial^\beta+(\mu\leftrightarrow\nu)+(\alpha\leftrightarrow\beta)\Big]\,\partial_\sigma\Delta_0\left(\vec{z},0\right)\\
&+\chi_1\partial^\mu\partial^\nu\partial^\alpha\partial^\beta\Delta_0\left(\vec{z},0\right)+\chi_2\partial^\mu\partial^\nu\partial^\alpha\partial^\beta\Delta_\mu\left(\vec{z},0\right)+\chi_3\partial^\mu\partial^\nu\partial^\alpha\partial^\beta\Delta_{00}\left(\vec{z},0\right)\Big\}\\
&\qquad=0\ ,
\end{aligned}
\tag{C.13}
$$

$$
\begin{aligned}
&\left\{\left[1-\alpha_1-\alpha_2\right]\eta^{ij}\eta^{mn}\delta^2\left(\vec{z}\right)\right.\\
&-\left(\beta_1+\beta_2\right)\left(\eta^{im}\eta^{jn}+\eta^{in}\eta^{jm}\right)\delta^2\left(\vec{z}\right)\\
&+\left(\delta_1+\delta_2\right)\left(\eta^{ij}\partial^m\partial^n+\eta^{mn}\partial^i\partial^j\right)\partial^0\Delta_0\left(\vec{z},0\right)\\
&-\left(\epsilon_1+\epsilon_2\right)\left[\eta^{im}\partial^j\partial^n+(i\leftrightarrow j)+(m\leftrightarrow n)\right]\delta^2\left(\vec{z}\right)\\
&\left.+\left(\chi_1+\chi_2\right)\partial^i\partial^j\partial^m\partial^n\partial^0\Delta_0\left(\vec{z},0\right)\right\}\\
&\qquad=0\ ,
\end{aligned}
\tag{C.14}
$$

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\Big\{-\Big(\beta_1+\beta_2-\mu^2\epsilon_2+\epsilon_3+\frac{1}{\xi}\Big)\,\eta^{ij}\delta^2\left(\vec{z}\right)\\
&+\left(\epsilon_1+\epsilon_2\right)\eta^{ij}\left(\partial^0\right)^3\Delta_0\left(\vec{z},0\right)\\
&+\left(\epsilon_1+\epsilon_2-\mu^2\chi_2+\chi_3\right)\partial^i\partial^j\partial^0\Delta_0\left(\vec{z},0\right)\\
&+\left(\chi_1+\chi_2\right)\partial^i\partial^j\left(\partial^0\right)^3\Delta_0\left(\vec{z},0\right)\Big\}\\
&\qquad=0\\
&\Big\{-\Big(\alpha_1+\alpha_2+2\beta_1+2\beta_2-2\mu^2\delta_2+2\delta_3-4\mu^2\epsilon_2+4\epsilon_3+\mu^4\chi_2+\chi_4+\frac{1}{\xi}\Big)\,\delta^2\left(\vec{z}\right)\\
&+\left(2\delta_1+2\delta_2+4\epsilon_1+4\epsilon_2-2\mu^2\chi_2+2\chi_3\right)\left(\partial^0\right)^3\Delta_0\left(\vec{z},0\right)\\
&+\left(\chi_1+\chi_2\right)\left(\partial^0\right)^5\Delta_0\left(\vec{z},0\right)\Big\}\\
&\qquad=0\\
&\mathcal{E}^{ik}\partial_k\Big[\left(\gamma_1+\gamma_2-\mu^2\varphi_2+\varphi_3\right)\partial^0\Delta_0\left(\vec{z},0\right)+\left(\varphi_1+\varphi_2\right)\left(\partial^0\right)^3\Delta_0\left(\vec{z},0\right)\Big]=0
\end{aligned}
\right. ,
\tag{C.15}
$$

$$\begin{cases} \{-\left(\alpha_1+\alpha_2-\mu^2\delta_2+\delta_3\right)\eta^{ij}\delta^2\left(\vec{z}\right) \\ +\left(\delta_1+\delta_2\right)\eta^{ij}\left(\partial^0\right)^3\Delta_0\left(\vec{z},0\right) \\ +\left(\delta_1+\delta_2-\mu^2\chi_2+\chi_3\right)\partial^i\partial^j\partial^0\Delta_0\left(\vec{z},0\right) \\ +\left(\chi_1+\chi_2\right)\partial^i\partial^j\left(\partial^0\right)^3\Delta_0\left(\vec{z},0\right)\Big\} \\ \qquad =0 \\ \Big\{-\left(\gamma_1+\gamma_2\right)\left(\eta^{ik}\mathcal{E}^{jm}+\eta^{jk}\mathcal{E}^{im}\right)\partial_m\partial^0\Delta_0\left(\vec{z},0\right) \\ +\left(\mathcal{E}^{ik}\partial^j+\mathcal{E}^{jk}\partial^i\right)\left[\left(-\mu^2\varphi_2+\varphi_3\right)\partial^0\Delta_0\left(\vec{z},0\right)+\left(\varphi_1+\varphi_2\right)\left(\partial^0\right)^3\Delta_0\left(\vec{z},0\right)\right] \\ -\left(\varphi_1+\varphi_2\right)\left(\mathcal{E}^{im}\partial^j+\mathcal{E}^{jm}\partial^i\right)\partial^k\partial_m\partial^0\Delta_0\left(\vec{z},0\right)\Big\} \\ \qquad =0 \end{cases} , \tag{C.16}$$

$$\begin{aligned} &\Big\{-\left(-\mu^2\gamma_2+\gamma_3-\frac{\mu}{2}\right)\left[\eta^{im}\mathcal{E}^{jn}+(i\leftrightarrow j)+(m\leftrightarrow n)\right]\delta^2\left(\vec{z}\right) \\ &+\left(\gamma_1+\gamma_2\right)\left[\eta^{im}\mathcal{E}^{jn}+(i\leftrightarrow j)+(m\leftrightarrow n)\right]\left(\partial^0\right)^3\Delta_0\left(\vec{z},0\right) \\ &+\left[\mathcal{E}^{im}\partial^j\partial^n+(i\leftrightarrow j)+(m\leftrightarrow n)\right]\left[\left(-\mu^2\varphi_2+\varphi_3\right)\partial^0\Delta_0\left(\vec{z},0\right)+\left(\varphi_1+\varphi_2\right)\left(\partial^0\right)^3\Delta_0\left(\vec{z},0\right)\right]\Big\} \\ &\quad =0\ , \end{aligned} \tag{C.17}$$

$$\begin{aligned} &\Big\{-\left(-\mu^2\delta_2+\delta_3+1\right)\eta^{ij}\partial^k\delta^2\left(\vec{z}\right) \\ &+\left(\delta_1+\delta_2\right)\eta^{ij}\partial^k\left(\partial^0\right)^3\Delta_0\left(\vec{z},0\right) \\ &-\left(-\mu^2\epsilon_2+\epsilon_3+\frac{1}{\xi}\right)\left(\eta^{ik}\partial^j+\eta^{jk}\partial^i\right)\delta^2\left(\vec{z}\right) \\ &+\left(\epsilon_1+\epsilon_2\right)\left(\eta^{ik}\partial^j+\eta^{jk}\partial^i\right)\left(\partial^0\right)^3\Delta_0\left(\vec{z},0\right) \\ &-\left(-\mu^2\chi_2+\chi_3\right)\partial^i\partial^j\partial^k\delta^2\left(\vec{z}\right) \\ &+\left(\chi_1+\chi_2\right)\partial^i\partial^j\partial^k\left(\partial^0\right)^3\Delta_0\left(\vec{z},0\right)\Big\} \\ &\quad =0\ , \end{aligned} \tag{C.18}$$

$$\begin{aligned} &\left\{\left(-\mu^2\delta_2+\delta_3-2\mu^2\epsilon_2+2\epsilon_3+\mu^4\chi_2+\chi_4-\frac{1}{\xi}\right)\partial^i\partial^0\Delta_0\left(\vec{z},0\right)\right. \\ &+\left(\delta_1+\delta_2+2\epsilon_1+2\epsilon_2-2\mu^2\chi_2+2\chi_3\right)\partial^i\left(\partial^0\right)^3\Delta_0\left(\vec{z},0\right) \\ &\left.+\left(\chi_1+\chi_2\right)\partial^i\left(\partial^0\right)^5\Delta_0\left(\vec{z},0\right)\right\} \\ &\quad =0\ , \end{aligned} \tag{C.19}$$

$$\begin{aligned} &\{-\left(-\mu^2\gamma_2+\gamma_3+\mu^4\varphi_2+\varphi_4\right)\mathcal{E}^{ij}\delta^2\left(\vec{z}\right) \\ &+\left(\gamma_1+\gamma_2-3\mu^2\varphi_2+3\varphi_3\right)\mathcal{E}^{ij}\left(\partial^0\right)^3\Delta_0\left(\vec{z},0\right) \\ &+2\left(\varphi_1+\varphi_2\right)\mathcal{E}^{ij}\left(\partial^0\right)^5\Delta_0\left(\vec{z},0\right)\Big\} \\ &\quad =0\ , \end{aligned} \tag{C.20}$$

da cui segue

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \\ \beta_1 + \beta_2 = 0 \\ \gamma_1 + \gamma_2 = 0 \\ \delta_1 + \delta_2 = 0 \\ \epsilon_1 + \epsilon_2 = 0 \\ \varphi_1 + \varphi_2 = 0 \\ \chi_1 + \chi_2 = 0 \\ \mu^2\gamma_2 - \gamma_3 = -\dfrac{\mu}{2} \\ \mu^2\delta_2 - \delta_3 = 1 \\ \mu^2\epsilon_2 - \epsilon_3 = \dfrac{1}{\xi} \\ \mu^2\varphi_2 - \varphi_3 = 0 \\ \mu^2\chi_2 - \chi_3 = 0 \\ \mu^4\varphi_2 + \varphi_4 = -\dfrac{\mu}{2} \\ \mu^4\chi_2 + \chi_4 = \dfrac{\xi + 3}{\xi} \end{cases} \quad . \tag{C.21}$$

Il sistema lineare completo per le costanti introdotte è quindi

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\alpha_1 + 2\beta_1 = 0 \\
\alpha_2 + \beta_2 = 0 \\
\alpha_2 = 1 - \alpha_1 \\
\beta_2 = -\beta_1 \\
\gamma_2 = -\gamma_1 = \dfrac{1}{2\mu}\alpha_2 \\
\delta_2 = -\delta_1 = \dfrac{1}{\mu^2}\alpha_2 \\
\epsilon_2 = -\epsilon_1 = -\dfrac{1}{\mu^2}\alpha_2 \\
\varphi_2 = -\varphi_1 = \dfrac{1}{2\mu^3}\alpha_2 \\
\chi_2 = -\chi_1 = -\dfrac{1}{\mu^4}\alpha_2 \\
\gamma_3 = 0 = \mu^2\gamma_2 + \dfrac{\mu}{2} \\
\delta_3 = -\alpha_1 = \mu^2\delta_2 - 1 \\
\epsilon_3 = \dfrac{\xi - 1}{2\xi}\alpha_1 = \mu^2\epsilon_2 - \dfrac{1}{\xi} \\
\varphi_3 = -\dfrac{1}{4\mu\xi}\alpha_1 + \dfrac{1-\xi}{\xi}\gamma_1 = \mu^2\varphi_2 \\
\chi_3 = \dfrac{1}{\mu\xi}\gamma_1 - \dfrac{2\xi + 1}{2\xi}\delta_1 - 2\epsilon_1 = \mu^2\chi_2 \\
\varphi_4 = 0 = -\mu^4\varphi_2 - \dfrac{\mu}{2} \\
\chi_4 = \dfrac{3}{2\xi}\alpha_1 = -\mu^4\chi_2 + \dfrac{\xi + 3}{\xi}
\end{array}
\right. . \tag{C.22}
$$

Bibliography

[1] A. Einstein, *Ann. Phys.* **49** (1916) 769.

[2] Per un recente riepilogo dei problemi di rinormalizzazione della gravità si veda M. Yu. Kalmykov e P. I. Pronin, *"Ambiguity of the one loop calculations in a nonrenormalizable quantum gravity"*, preprint, hep-th/9503215 (1994).

[3] Per una recente rassegna dei problemi della gravità quantistica si veda C. J. Isham, *"Conceptual and geometrical problems in quantum gravity"*, lezioni presentate nella *1991 Schladming Winter School.*

[4] T. Kaluza, *Sitz. Ber. Preuss. Akad.*, *Phys. Rev. Math. Kl.* (1921) 966.

[5] O. Klein, *Z. Phys.* **37** (1929) 895.

[6] P. Van Nieuwehnuizen, *Phys. Rep.***68** (1981) 189.

[7] L. Castellani, R. D'Auria e P. Fré, *"Superstrings and supergravity: a geometric perspective"*, World-Scientific, Singapore (1991).

[8] M. Green, J. Schwartz e E. Witten, *"String theory"*, Cambridge University Press (1987).

[9] R. Arnowitt, S. Deser e C. W. Misner, *"Gravitation: an introduction to current research"*, L. Witten ed., Wiley-Sons, New York (1962).

[10] A. Ashtekar, *Phys. Rev. Lett.* **57** (1986) 2244; *Phys. Rev.* **D36** (1986) 1587; *"Lectures on nonperturbative canonical gravity"*, World-Scientific, Singapore (1991).

[11] J. Schwinger, *Phys. Rev.* **128** (1962) 2425.

[12] R. Jackiw e C. Teitelboim in *"Quantum theory of gravity"*, S. Christensen ed.,Adam-Higler, Bristol (1984) e rispettivamente in *Nucl. Phys.* **B252**, (1985) 343 e *Phys. Lett.* **B126** (1983) 41.

[13] J. Weber e J. Wheeler, *Rev. Mod. Phys.* **29** (1957) 509; L. Marder in *"Recent developpments in general relativity"*, PWN Warsaw-Pergamon, New York (1962) e *Proc. Roy. Soc. London Ser.* **A224** (1958) 524 e **A252** (1959) 45; A. Staruszkiewicz, *Acta Phys. Polon.* **24** (1980) 734; J. Levin, tesi di dottorato, Univeristà di Brandeis, Waltham (1964); S. Deser, R. Jackiw e G. t'Hooft, *Ann. Phys.* **152** (1984) 220; J. R. Gott III e M. Alpert, *Gen. Rel. Grav.* **16** (1984) 243; S. Giddings, J. Abbott e K. Kuchar, *Gen. Rel. Grav.* **16** (1984) 751.

[14] S. Weinberg, *"Gravitation and cosmology"*, Wiley-Sons, New York (1972).

[15] S. Deser, R. Jackiw e S. Templeton, *Ann. Phys. (N. Y.)* **140** (1982) 372.

[16] S. Chern, *"Complex Manifold without potential theory"*, Springer-Verlag, Berlin (1979).

[17] S. B. Treiman, R. Jackiw, B. Zumino e E. Witten, *"Current algebra and anomalies"*, Princeton University Press, New Jersey (1986).

[18] A. Palatini, *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo* **43** (1919) 203.

[19] E. Witten, *Nucl. Phys.* **B311** (1988) 46.

[20] S. Carlip, *"Lectures on (2+1)-dimensional gravity"*, preprint UCD-95-6 gr-qc/9503024 (1995).

[21] C. W. Misner, K. S. Thorne e J. A. Wheeler, *"Gravitation"*, W. H. Freeman and Co., New York (1973).

[22] E. Schrödinger, *"Space-time structure"*, Cambridge University Press, Cambridge U. K. (1950).

[23] D. Hilbert, *Kongl. Gesell. d. Wiss. Göttingen Nachr, Math. Phys. Kl.* **53** (1917).

[24] G. Grignani e G. Nardelli, *Nucl. Phys.* **B370** (1992) 491, *Phys. Rev.* **D45** (1992) 2719.

[25] D. Kabat e M. E. Ortiz, *Phys. Rev.* **D49** (1994) 1684.

[26] J. Schoenfeld, *Nucl. Phys.* **B185** (1981) 157.

[27] A. N. Redlich, *Phys. Rev. Lett.* **52** (1984) 18; *Phys. Rev.* **D29** (1984) 2366.

[28] M. A. Goñi e M. A. Valle, *Phys. Rev.* **D34** (1986) 648.

[29] J. Bell e R. Jackiw, *Nuovo Cim.* **A60** (1969); S. Adler, *Phys. Rev.* **177** (1969) 2426.

[30] F. Wilczek, *"Fractional statistics and anyons superconductivity"*, World-Scientific, Singapore (1990).

[31] F. Wilczek e A. Zee, *Phys. Rev. Lett.* **51** (1983) 2250; G. W. Semenoff, *Phys. Rev. Lett.* **61** (1988) 517; T. Matsuyama, *Phys. Lett.* **B228** (1989) 99; G. W. Semenoff e P. Sodano, *Nucl. Phys.* **B328** (1989) 753; S. Forte e T. Jolicoeur, *Nucl. Phys.* **B350** (1991) 589.

[32] S. Deser, *Phys. Rev. Lett.* **64** (1990) 611; S. Deser e J. G. McCarthy, *Nucl. Phys.* **B334** (1990) 747.

[33] J. Schwartz, *Phys. Rep.* **89** (1982) 223.

[34] S. M. Girving in *"The quantum Hall effect"*, S. M. Girving e R. E. Prange eds., Springer-Verlag, Berlin (1987).

[35] Commento di C. R. Hagen, *Phys. Rev. Lett.* **66** (1991) 2681 al lavoro di R. Jackiw e S. Y. Pi, *Phys. Rev. Lett.* **64** (1990) 2969 che rispondono in *Phys. Rev. Lett.* **66** (1991) 2682.

[36] P. A. M. Dirac, *"Lectures on quantum mechanics"*, Belfer Graduate School of Science, Yeshiva University, New York (1964).

[37] A. Hanson, T. Regge e C. Teitelboim, *"Constrained hamiltonian systems"*, Accademia Nazionale dei Lincei, Roma (1976).

[38] Sandermeyer, *"Constrained dynamics"*, Spring-Verlag, Berlin (1982).

[39] H. Goldstein, *"Meccanica classica"*, Zanichelli, Bologna (1971).

[40] E. T. Whittaker, *"A treatise on the analytical dynamics of particles and rigid bodies"*, Cambridge University Press, Cambridge (1959).

[41] C. A. P. Galvão e N. A. Lemos, *J. Math. Phys.* **29** (1988) 1588.

[42] S. Hamamoto, *"Higher derivative and canonical formalism"*, preprint, IF-UFRJ-21-94, hep-th/9503177 (1995).

[43] V. S. Vladimirov, *"Le distribuzioni nella fisica matematica"*, Mir, Mosca (1979).

[44] V. S. Vladimirov, *"Equazioni della fisica matematica"*, Mir, Mosca (1987).

[45] I. M. Gel'Fand e G. E. Shilov, *"Generalised functions"*, Volume I, Academic Press, New York (1966).

[46] J. D. Bjorken e S. D. Drell, *"Relativistic quantum fields"*, McGraw-Hill (1965).

[47] F. Mandl e G. Shaw, *"Quantum field theory"*, Wiley-Sons, New York (1984).

[48] C. Itzykson e J. B. Zuber, *"Quantum field theory"*, McGraw-Hill (1985).

[49] T. P. Cheng e L. F. Li, *"Gauge theory of elementary particle physics"*, Oxford University Press, Oxford (1984).

[50] P. Ramond, *"Field theory: a modern primer"*, Addison-Wesley (1990).

[51] M. Henneaux e C. Teitelboim, *"Quantization of gauge systems"*, Princeton University Press, New Jersey (1992).

[52] N. N. Bogolubov, A. A. Logunov e I. T. Todorov, *"Introduction to axiomatic quantum field theory"*, Benjamin (1975).

[53] F. Strocchi, *"Elements of quantum maccanics of infinite systems"*, World-Scientific, Singapore (1985).

[54] H. Umezawa, H. Matsumoto e M. Tachiki, *"Thermo field dynamics and condensed states"*, North-Holland, Amsterdam (1982).

[55] J. Barcelos-Neto e T. G. Dargam, *"Constrained analisis of topologically massive gravity"*, preprint, IF-UFRJ-21-94, hep-th/9408045 (1994).

[56] M. I. Dobroliubov, D Eliezer, I. I. Kogan, G. W. Semenoff e R. J. Szabo, *Mod. Phys. Lett.* **A8** (1993) 2177.