

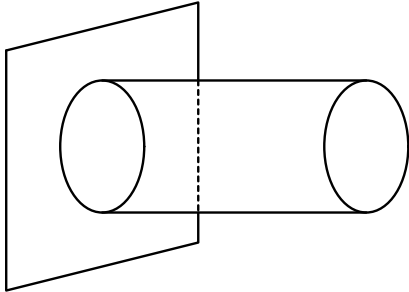
# INVARIANZA DI SCALA IN DINAMICA DELLE D-BRANE

F. Morales, M. Serone, C. A. S. : hep-th/9709063, hep-th/9801183

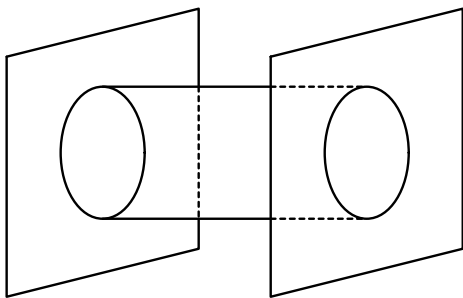
- D-BRANE IN SUPERSTRINGA E LORO DINAMICA.  
TEORIE EFFETTIVE DI SUGRA E SYM A LUNGHE E CORTE  
DISTANZE E RELAZIONI FRA LORO.
- BOUNDARY STATE E SUSY NEL FORMALISMO DI G-S.  
REALIZZAZIONE DELLA SUSY.
- FUNZIONI A UN PUNTO E CAMPI ASINTOTICI.
- INTERAZIONI P-P.  
ROTTURA DI SUSY PER  $v \neq 0$  E OPERATORE DI VERTICE.  
POTENZIALE NEL LIMITE  $v \rightarrow 0$ . SUSY E MODI ZERO.  
INVARIANZA DI SCALA. EFFETTI DI SPIN.
- INTERAZIONI P-P+4.
- RUOLO DI SUSY NELLA CORRISPONDENZA SUGRA  $\Leftrightarrow$  SYM.

## D-BRANE E LORO DINAMICA

Le D-brane sono oggetti non-perturbativi definiti come bordi di world-sheet con condizioni al bordo di **Dirichlet**.



Interazione con stringhe chiuse



Interazione mediante scambio di stringhe chiuse o fluttuazione di stringhe aperte

E' conveniente descrivere le D-brane con uno stato di stringa chiusa  $|B\rangle$  che implementa le condizioni al bordo.

I campi asintotici della brana si possono estrarre dalla correlazione fra  $|B\rangle$  ed il corrispondente stato di stringa chiusa  $|\Psi\rangle$

$$\langle\Psi\rangle = \langle B|\frac{1}{H}|\Psi\rangle$$

L'interazione fra brane è data dalla correlazione

$$\mathcal{A} = \langle B_1|\frac{1}{H}|B_2\rangle$$

L'interazione fra due p-brane // con velocità  $v_{1,2} = \tanh \pi\epsilon_{1,2}$  è (Bachas)

$$\mathcal{A}_{p-p} = \frac{V_p}{8i} (4\pi^2\alpha')^{4-p} \int_0^\infty \frac{dt}{(4\pi\alpha't)^{\frac{8-p}{2}}} e^{-\frac{b^2}{4\pi\alpha't}\eta} \eta^{-9} (2it) \frac{\vartheta_1^4(i\frac{\epsilon}{2}|2it)}{\vartheta_1(i\epsilon|2it)}$$

dove  $\epsilon = \epsilon_1 - \epsilon_2$ ,  $V_p$  è il volume e  $b$  è la distanza trasversa.

A lunghe distanze,  $b \gg l_s$ , domina lo scambio di stringhe chiuse massless

$$\mathcal{A}_{p-p} \sim V_p \frac{\sinh^4 \frac{\pi\epsilon}{2}}{\sinh \pi\epsilon} G_{8-p}(b)$$

dove

$$G_d(r) = \frac{1}{4\pi^{d/2}} \frac{\Gamma(\frac{d-2}{2})}{r^{d-2}}$$

Questa è l'approssimazione eiconale per il phase-shift fra due brane viste come solitoni della SUGRA, con parametro d'impatto  $b$ .

Per  $v \rightarrow 0$ , l'ampiezza è zero per SUSY (saturazione BPS). Per capire la cancellazione, notiamo che

$$\sinh^4 \frac{\pi\epsilon}{2} = \frac{1}{8}(3 + \cosh 2\pi\epsilon - 4 \cosh \pi\epsilon)$$

La cancellazione avviene quindi fra lo scambio attrattivo del dilatone e del gravitone del settore di  $NSNS$  e lo scambio repulsivo della  $(p+1)$ -forma del settore di  $RR$  (multipletto gravitazionale).

A corte distanze,  $b \ll l_s$ , dominano le fluttuazioni di stringhe aperte massless

$$\mathcal{A}_{p-p} \sim V_p \int_0^\infty \frac{dt}{t^{1+\frac{p}{2}}} e^{-\frac{b^2 t}{2\pi\alpha'}} \frac{\sinh^4 \frac{\pi\epsilon t}{2}}{\sinh \pi\epsilon t}$$

Questa è l'azione effettiva ad un loop in un "campo elettrico" costante  $iv$  per la teoria di SYM  $SU(2)$  ridotta da  $d = 10$  e  $d = p + 1$  che descrive le stringhe aperte massless sulle due brane. Per  $b \neq 0$ , la teoria è rotta ad  $U(1)$ , ed i campi che vengono integrati hanno una massa  $m \sim b$ .

Di nuovo, per  $v \rightarrow 0$ , l'ampiezza è zero per SUSY (teorema di non rinormalizzazione). Siccome

$$\sinh^4 \frac{\pi\epsilon t}{2} = \frac{1}{8}(3 + \cosh 2\pi\epsilon t - 4 \cosh \pi\epsilon t)$$

la cancellazione è fra loop di bosoni di spin 0 e 1 e fermioni di spin 1/2 (multipletto vettoriale).

I due limiti di lunghe e corte distanze danno lo stesso risultato. Il motivo è che  $\mathcal{A}_{p-p}$  per  $v \rightarrow 0$  non dipende dalla scala perché i contributi degli oscillatori bosonici e fermionici si cancellano per SUSY, e il potenziale non relativistico è esatto.

$$V_{p-p} \sim \frac{v^4}{r^{7-p}}$$

L'interazione fra una  $p$  e una  $(p+4)$ -brana // è (Lifschytz)

$$\mathcal{A}_{p-p+4} = \frac{V_p}{8i} (4\pi^2 \alpha')^{-\frac{p(4-p)}{2}} \int_0^\infty \frac{dt}{(4\pi \alpha' t)^{\frac{4-p}{2}}} e^{-\frac{b^2}{4\pi \alpha' t} \eta^{-3}} (2it) \frac{\vartheta_1^2(i\frac{\epsilon}{2}|2it) \vartheta_2^2(i\frac{\epsilon}{2}|2it)}{\vartheta_1(i\epsilon|2it) \vartheta_2^2(0|2it)}$$

A lunghe distanze,  $b \gg l_s$ , l'ampiezza

$$\mathcal{A}_{p-p+4} \sim V_p \frac{\cosh^2 \frac{\pi\epsilon}{2} \sinh^2 \frac{\pi\epsilon}{2}}{\sinh \pi\epsilon} G_{4-p}(b)$$

rappresenta l'approssimazione eiconale per il phase-shift in SUGRA.

Siccome

$$\cosh^2 \frac{\pi\epsilon}{2} \sinh^2 \frac{\pi\epsilon}{2} = \frac{1}{4} \sinh^2 \pi\epsilon = \frac{1}{8} (1 - \cosh 2\pi\epsilon)$$

la cancellazione SUSY avviene fra lo scambio repulsivo del dilatone e quello attrattivo del gravitone nel settore di  $NSNS$ , mentre il settore di  $RR$  non contribuisce (multipletto gravitazionale).

A corte distanze,  $b \ll l_s$ , si trova

$$\mathcal{A}_{p-p} \sim V_p \int_0^\infty \frac{dt}{t^{1+\frac{p+4}{2}}} e^{-\frac{b^2 t}{2\pi \alpha'}} \frac{\sinh^2 \frac{\pi\epsilon t}{2}}{\sinh \pi\epsilon t}$$

Questa è l'azione effettiva per la teoria di SYM ridotta da  $d = 6$  e  $d = p + 1$ .

Inoltre, usando

$$\sinh^2 \frac{\pi\epsilon t}{2} = \frac{1}{2} (1 - \cosh \pi\epsilon t)$$

si vede che la cancellazione SUSY è fra loop di bosoni di spin 0 e fermioni di spin 1/2 (iper-multipletto).

Analogamente al caso di p-p, i due limiti di lunghe e corte distanze coincidono. Il contributo dominante a  $\mathcal{A}_{p-p+4}$  per  $v \rightarrow 0$  non dipende dalla scala, ed il potenziale non relativistico è esatto

$$V_{p-p+4} \sim \frac{v^2}{r^{3-p}}$$

Questi potenziali danno solo la parte universale dell'interazione. Facendo trasformazioni di SUSY, si generano tutte le possibili interazioni, ottenendo

$$V_{p-p} \sim \sum_{k=0}^4 \frac{v^{4-k}}{r^{7-p+k}} \quad , \quad V_{p-p+4} \sim \sum_{k=0}^2 \frac{v^{2-k}}{r^{3-p+k}}$$

Nel formalismo di Green-Schwarz è possibile implementare questo programma e capire l'invarianza di scala delle interazione non relativistiche studiando l'effetto della SUSY.

## BOUNDARY STATE NEL FORMALISMO DI G-S

Consideriamo la teoria di tipo II nella light-cone gauge.  $X^+ = x^+ + p^+\tau$  mentre  $X^-$  è completamente determinata dai campi trasversi e dopo aver fissato la  $\kappa$ -simmetria, rimangono due spinori left e right,  $S^a$  e  $\tilde{S}^a$ , nella rappresentazione  $\mathbf{8}_s$  di  $SO(8)$ .

Lo spazio di Fock viene costruito sul vuoto che rappresenta l'algebra di  $S_0^a$  e  $\tilde{S}_0^a$ . La rappresentazione è  $\mathbf{8}_v \oplus \mathbf{8}_c$  sia per la parte left che per quella right, e

$$S_0^a|i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\gamma_{aa}^i|\dot{a}\rangle \quad , \quad S_0^a|\dot{a}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\gamma_{aa}^i|i\rangle$$

$$\tilde{S}_0^a|\tilde{i}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\gamma_{aa}^i|\tilde{\dot{a}}\rangle \quad , \quad \tilde{S}_0^a|\tilde{\dot{a}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\gamma_{aa}^i|\tilde{i}\rangle$$

Le coordinate light-cone  $X^\pm$  soddisfano condizioni di Dirichlet. Le condizioni al bordo per le  $X^i$ ,  $i = 1, 2, \dots, 8$ , si possono invece scegliere liberamente.

E' possibile definire una configurazione simile ad una p-brana scegliendo condizioni di Neumann per  $\mu = 1, 2, \dots, p+1$  e di Dirichlet per  $I = p+2, \dots, 8-p$ . Il "tempo" viene identificato con la direzione 1.

Per recuperare la descrizione covariante, sarà sufficiente fare una doppia continuazione analitica  $0 \leftrightarrow i$  1 nei risultati finali.

Le 32 cariche di SUSY sono

$$Q^a = \sqrt{2p^+} \oint d\sigma S^a \quad , \quad Q^{\dot{a}} = \frac{1}{\sqrt{p^+}} \gamma_{aa}^i \oint d\sigma \partial X^i S^a$$

$$\tilde{Q}^a = \sqrt{2p^+} \oint d\sigma \tilde{S}^a \quad , \quad \tilde{Q}^{\dot{a}} = \frac{1}{\sqrt{p^+}} \gamma_{aa}^i \oint d\sigma \bar{\partial} X^i \tilde{S}^a$$

e soddisfano l'algebra di SUSY  $N = 2$ .

Il boundary state che descrive la brana deve soddisfare determinate condizioni al bordo bosoniche e preservare una combinazione di SUSY left e right. Le condizioni al bordo fermioniche sono determinate dalla SUSY.

Introducendo le generiche combinazioni

$$Q_{\pm}^a = \frac{1}{\sqrt{2}} (Q^a \pm i M_{ab} \tilde{Q}^b)$$

$$Q_{\pm}^{\dot{a}} = \frac{1}{\sqrt{2}} (Q^{\dot{a}} \pm i M_{\dot{a}\dot{b}} \tilde{Q}^{\dot{b}})$$

che soddisfano l'algebra

$$\{Q_+^a, Q_-^b\} = 2p^+ \delta^{ab} \quad , \quad \{Q_+^{\dot{a}}, Q_-^{\dot{b}}\} = P^- \delta^{\dot{a}\dot{b}}$$

$$\{Q_+^a, Q_-^{\dot{a}}\} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\gamma_{a\dot{a}}^i P^i + (M \gamma^i M^T)_{a\dot{a}} \tilde{P}^i)$$

imponiamo le condizioni BPS

$$Q_+^a |B\rangle = 0 \quad , \quad Q_+^{\dot{a}} |B\rangle = 0 \Rightarrow Q_+^a, Q_+^{\dot{a}} \text{ preservate}$$

$$Q_-^a |B\rangle \neq 0 \quad , \quad Q_-^{\dot{a}} |B\rangle \neq 0 \Rightarrow Q_-^a, Q_-^{\dot{a}} \text{ rotte}$$

Le condizioni al bordo per i bosoni sono

$$(\alpha_n^i + M_{ij} \tilde{\alpha}_{-n}^j) |B\rangle = 0$$

con

$$M_{ij} = \begin{pmatrix} -I_{p+1} & 0 \\ 0 & I_{7-p} \end{pmatrix}$$

Per le condizioni al bordo dei fermioni, facciamo l'ansatz

$$(S_n^a + i M_{ab} \tilde{S}_{-n}^b) |B\rangle = 0$$

La consistenza con la condizione BPS implica

$$(M M^T)_{ab} = \delta_{ab}$$

$$(M \gamma^i M^T)_{a\dot{a}} = M_{ij} \gamma_{a\dot{a}}^j$$

che danno

$$M_{ab} = (\gamma^1 \gamma^2 \dots \gamma^{p+1})_{ab}$$

$$M_{\dot{a}\dot{b}} = (\gamma^1 \gamma^2 \dots \gamma^{p+1})_{\dot{a}\dot{b}}$$

La soluzione per il boundary state è

$$|B\rangle = \exp \sum_{n>0} \left( \frac{1}{n} M_{ij} \alpha_{-n}^i \tilde{\alpha}_{-n}^j - i M_{ab} S_{-n}^a \tilde{S}_{-n}^b \right) |B_0\rangle$$

con la parte di modo zero

$$|B_0\rangle = M_{ij} |i\rangle |j\rangle - i M_{\dot{a}\dot{b}} |\dot{a}\rangle |\dot{b}\rangle$$

Il boundary state completo nello spazio delle configurazioni è

$$\begin{aligned} |B, \vec{x}\rangle &= (2\pi\sqrt{\alpha'})^{4-p} \delta^{(9-p)}(\vec{x}_0 - \vec{x}) |B\rangle \otimes |\vec{0}\rangle \\ &= (2\pi\sqrt{\alpha'})^{4-p} \int \frac{d^{9-p}q}{(2\pi)^{9-p}} e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}} |B\rangle \otimes |\vec{q}\rangle \end{aligned}$$

Essendo stati BPS, le brane sono in supermultipletti su cui è realizzata la metà di SUSY che rompono. Implementando una arbitraria trasformazione di SUSY rotta su  $|B\rangle$  si ottengono informazioni sugli accoppiamenti di qualunque componente del multipletto.

Lo stato

$$|B, \eta\rangle = e^{\eta Q^-} |B\rangle = \sum_{m=0}^{16} \frac{1}{m!} (\eta Q^-)^m |B\rangle$$

dà l'accoppiamento con stati di stringa chiusa di una corrente semiclassica formata da una brana “in” e una “out” ( $\eta = (\eta_a, \tilde{\eta}_{\dot{a}})$  e  $Q^- = (Q_a^-, Q_{\dot{a}}^-)$ ).

La somma è uno sviluppo di multipolo, e termini con un numero pari o dispari di  $Q^-$  rappresentano correnti bosoniche e fermioniche che si accoppiano a bosoni e fermioni rispettivamente.

Questo è analogo a quanto succede in SUGRA. Il background di p-brana ha uno spinore di Killing e le trasformazioni di SUSY dipendono da una proiezione del parametro  $\eta$ .



$$\begin{aligned}
\langle \Psi_B | B \rangle &= \begin{array}{c} B_B \\ \diagdown \\ \diagup \\ B_B \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \Psi_B \\
\langle \Psi_F | Q^- | B \rangle &= \begin{array}{c} B_B \\ \diagdown \\ \text{---} \\ B_F \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \Psi_F \\
\langle \Psi_B | Q^- Q^- | B \rangle &= \begin{array}{c} B_F \\ \text{---} \\ \text{---} \\ B_F \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \Psi_B
\end{aligned}$$

Per scattering elastici, basta considerare un numero pari di  $Q^-$ . Inoltre, in ogni

$$(\epsilon Q^-)^2 = (\eta_a Q_a^- + \tilde{\eta}_{\dot{a}} Q_{\dot{a}}^-)^2$$

basta considerare coppie  $\eta_a Q_a^- \tilde{\eta}_{\dot{a}} Q_{\dot{a}}^-$ , perché le altre ricostruiscono semplicemente il risultato covariante.

Consideriamo quindi l'inserzione dell'operatore

$$V_\eta = \eta_a Q_a^- \tilde{\eta}_{\dot{a}} Q_{\dot{a}}^-$$

che produce  $|B\rangle_{(n)}$  corrispondente a  $2n$  trasformazioni di SUSY

$$|B\rangle_{(n)} = V_\eta^n |B\rangle$$

In questo modo, il boundary state  $|B, \eta\rangle$  per una corrente bosonica è

$$|B, \eta\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{V_\eta^n}{(2n)!} |B\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2} |B\rangle_{(n)}$$

Per la parte di modo zero,  $n \leq 4$  ( $Q_0^{-a} \sim S_0^{-a}$ ,  $Q_0^{-\dot{a}} \sim p^i \gamma_{\dot{a}a}^i S_0^{-a}$ ) e si ottiene

$$|B_0\rangle_{(n)} = q_{i_1} \dots q_{i_n} \left[ \eta_{[a_1} (\tilde{\eta} \gamma^{i_1})_{a_2} \dots \eta_{a_{2n-1}} (\tilde{\eta} \gamma^{i_n})_{a_{2n}} \right] S_0^{-a_1} \dots S_0^{-a_{2n}} |B_0\rangle$$

Usando le condizioni al bordo implementate da  $|B_0\rangle$  e l'antisimmetria di [...], tutti gli  $S_0^-$  possono essere convertiti in  $S_0$ , tutti left.

Gli  $S_0$  soddisfano l'identità di Fiertz

$$S_0^a S_0^b = \frac{1}{2} \delta^{ab} + \frac{1}{4} \gamma_{ab}^{ij} R_0^{ij}$$

in termini dei generatori di  $SO(8)$

$$R_0^{ij} = \frac{1}{4} S_0^a \gamma_{ab}^{ij} S_0^b$$

Usando questa proprietà,  $|B_0\rangle_{(n)} = V_{\eta_0}^n |B_0\rangle$  con

$$V_{\eta_0}^n = q_{i_1} \dots q_{i_n} \omega_{j_1 \dots j_{2n}}^{i_1 \dots i_n} (\eta) R_0^{j_1 j_2} \dots R_0^{j_{2n-1} j_{2n}}$$

e

$$\omega_{j_1 \dots j_{2n}}^{i_1 \dots i_n} (\eta) = \frac{1}{2^n} \left[ \eta_{[a_1} (\tilde{\eta} \gamma^{i_1})_{a_2} \dots \eta_{a_{2n-1}} (\tilde{\eta} \gamma^{i_n})_{a_{2n}} \right] \gamma_{a_1 a_2}^{j_1 j_2} \dots \gamma_{a_{2n-1} a_{2n}}^{j_{2n-1} j_{2n}}$$

L'azione di  $R_0^{ij}$  nelle rappresentazioni  $\mathbf{8}_v$  e  $\mathbf{8}_c$  è

$$R_0^{mn} |i\rangle = (\delta^{ni} \delta^{mj} - \delta^{mi} \delta^{nj}) |j\rangle$$

$$R_0^{mn} |\dot{a}\rangle = -\frac{1}{2} \gamma_{\dot{a}\dot{b}}^{mn} |\dot{b}\rangle$$

e finalmente

$$|B_0\rangle_{(n)} = M_{ij}^{(n)} |i\rangle |\tilde{j}\rangle - i M_{\dot{a}\dot{b}}^{(n)} |\dot{a}\rangle |\tilde{b}\rangle$$

con

$$M_{ij}^{(n)} = 2^n q_{i_1} \dots q_{i_n} \omega_{i k_1 k_1 \dots k_{n-1} k_{n-1} k_n}^{i_1 \dots i_n} (\eta) M_{k_n j}$$

$$M_{\dot{a}\dot{b}}^{(n)} = \frac{1}{2^n} q_{i_1} \dots q_{i_n} \omega_{j_1 \dots j_{2n}}^{i_1 \dots i_n} (\eta) (\gamma^{j_1 j_2} \dots \gamma^{j_{2n-1} j_{2n}} M)_{\dot{a}\dot{b}}$$

Per gli oscillatori tutto è più difficile.

La generalizzazione al caso di una brana in movimento si ottiene con una trasformazione di Lorentz. Supponendo che il “tempo” sia nella direzione 1, il boundary state per una brana che si muove lungo la direzione 8 è

$$|B, \eta, \epsilon\rangle_{(n)} = e^{-i\pi\epsilon J^{18}} |B, \eta\rangle_{(n)}$$

Per la parte di modo zero, il momento angolare è dato da

$$J_{ij} = x_0^i p^j - x_0^j p^i - 2iR_0^{ij}$$

La parte bosonica, cambia lo spettro in momenti, mentre la parte fermionica agisce su  $|B_0\rangle_{(n)}$ . L'effetto netto su  $|B_0\rangle_{(n)}$  è

$$M_{ij}^{(n)} \rightarrow M_{ij}^{(n)}(\epsilon) = (\Sigma(\epsilon) M^{(n)} \Sigma^T(\epsilon))_{ij}$$

$$M_{\dot{a}\dot{b}}^{(n)} \rightarrow M_{\dot{a}\dot{b}}^{(n)}(\epsilon) = (\Sigma(\epsilon) M^{(n)} \Sigma^T(\epsilon))_{\dot{a}\dot{b}}$$

dove  $\Sigma(\epsilon)$  è la rappresentazione appropriata della rotazione  $SO(8)$

$$\Sigma_{ij}(\epsilon) = \begin{pmatrix} \cos \pi\epsilon & 0 & -\sin \pi\epsilon \\ 0 & I_6 & 0 \\ \sin \pi\epsilon & 0 & \cos \pi\epsilon \end{pmatrix}$$

$$\Sigma_{\dot{a}\dot{b}}(\epsilon) = \cos\left(\frac{\pi\epsilon}{2}\right) \delta_{\dot{a}\dot{b}} - \sin\left(\frac{\pi\epsilon}{2}\right) \gamma_{\dot{a}\dot{b}}^{18}$$

Per gli oscillatori, si procede similmente.

Lavorare a tutti gli ordini in  $v$  maschera il ruolo della SUSY. E' preferibile sviluppare il boost per  $v \rightarrow 0$ , inserendo l'operatore

$$V_\epsilon = -i\pi\epsilon J^{18}$$

la cui parte di modi zero fermionici è

$$V_{\epsilon 0} = -2\pi\epsilon R_0^{18}$$

In questo modo

$$|B, \eta, \epsilon\rangle = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{V_\epsilon^m}{m!} |B, \eta\rangle$$

## FUNZIONI A UN PUNTO

Per calcolare i campi generati da una generica brana, calcoliamo la funzione a un punto del corrispondente stato  $|\Psi\rangle$  con il boundary state  $|B_0\rangle_{(n)}$

$$\Psi_{(n)} = \langle \Psi | \frac{1}{H} | B_0 \rangle_{(n)}$$

I stati bosonici sono

$$|\Psi_{NSNS}\rangle = \xi_{mn} |m\rangle |\tilde{n}\rangle \quad , \quad \xi_{mn} \sim \delta_{mn} \phi + g_{mn} + b_{mn}$$

$$|\Psi_{RR}\rangle = C_{\dot{a}\dot{b}} |\dot{a}\rangle |\tilde{\dot{b}}\rangle \quad , \quad C_{\dot{a}\dot{b}} \sim \sum_k \frac{1}{k!} C_{(k)}^{m_1 \dots m_k} \gamma_{\dot{a}\dot{b}}^{m_1 \dots m_k}$$

Si trova, normalizzazioni a parte

$$\Psi_{(n)}^{NSNS} = \frac{1}{q^2} q_{i_1} \dots q_{i_n} \xi^{ij} \omega_{i k_1 k_1 \dots k_{n-1} k_{n-1} k_n}^{i_1 \dots i_n}(\eta) M_{k_n j}$$

$$\Psi_{(n)}^{RR} = \frac{1}{q^2} q_{i_1} \dots q_{i_n} \sum_k \frac{1}{k!} C_{(k)}^{m_1 \dots m_k} \omega_{j_1 \dots j_{2n}}^{i_1 \dots i_n}(\eta) \text{Tr}_S[\gamma^{m_1 \dots m_k} \gamma^{j_1 j_2} \dots \gamma^{j_{2n-1} j_{2n}} M]$$

Da queste si possono leggere tutti gli accoppiamenti, organizzati in uno sviluppo di multipolo ( $n = 0, 1, \dots, 4$ ).

Se  $\mu =$  Neumann e  $I =$  Dirichlet, usando le proprietà di simmetria di  $\omega_{j_1 \dots j_{2n}}^{i_1 \dots i_n}(\eta)$  si trovano

$$\Psi_{(n)}^{NSNS} \Rightarrow \begin{cases} \phi, g_{\mu\nu}, g_{IJ}, b_{\mu I} \quad , \quad n \text{ pari} \\ g_{\mu I}, b_{\mu\nu}, b_{IJ} \quad , \quad n \text{ dispari} \end{cases}$$

nel settore di  $NSNS$  e

$$\Psi_{(n)}^{RR} \Rightarrow C_{(k)}^{I_1 \dots I_{p+1} \mu_1 \dots \mu_{k-p-1}} \quad , \quad k = p + 1 - 2n, \dots, p + 1 + 2n$$

nel settore di  $RR$ .

## n=0 (universale)

$$\Psi_{(0)}^{NSNS} = \frac{1}{q^2} \xi_{ij} M^{ij}$$

$$\Psi_{(0)}^{RR} = \frac{1}{q^2} \sum_k \frac{1}{k!} C_{(k)}^{m_1 \dots m_k} \text{Tr}_S[\gamma^{m_1 \dots m_k} M]$$

Queste si possono covariantizzare introducendo  $M^{\mu\nu}$  con entrata  $-1$  per le direzioni Neumann e  $+1$  per quelle Dirichlet, e  $\mathcal{M} = \Gamma^0 \dots \Gamma^p$ .

$$\Psi_{(0)}^{NSNS} = \frac{1}{q^2} \xi_{\mu\nu} M^{\mu\nu}$$

$$\Psi_{(0)}^{RR} = \frac{1}{q^2} \sum_k \frac{1}{k!} C_{\mu_1 \dots \mu_k}^{(k)} \text{Tr}_S[\gamma^{\mu_1 \dots \mu_k} \mathcal{M}]$$

## n=1 (dipolo)

$$\Psi_{(1)}^{NSNS} = \frac{1}{q^2} \xi_{ik} M_{kj} (\eta \gamma^{ijl} \tilde{\eta}) q_l$$

$$\Psi_{(1)}^{RR} = \frac{1}{q^2} \sum_k \frac{1}{k!} C_{(k)}^{m_1 \dots m_k} \text{Tr}_S[\gamma^{m_1 \dots m_k} \gamma^{ij} M] (\eta \gamma^{ijl} \tilde{\eta}) q_l$$

Per covariantizzare, introduciamo  $\psi$  di Majorana-Weyl associato alle SUSY rotte. In una rappresentazione chirale,  $\psi = \begin{pmatrix} \epsilon \\ 0 \end{pmatrix}$  con  $\epsilon = \begin{pmatrix} \eta^a \\ \tilde{\eta}^{\dot{a}} \end{pmatrix}$ . Definendo

$$J^{\mu\nu\rho} = \bar{\psi} \Gamma^{\mu\nu\rho} \psi$$

si trova

$$\Psi_{(1)}^{NSNS} = \frac{1}{q^2} \xi_{\mu\sigma} M^\sigma{}_\nu J^{\mu\nu\rho} q_\rho$$

$$\Psi_{(1)}^{RR} = \frac{1}{q^2} \sum_k \frac{1}{k!} C_{\mu_1 \dots \mu_k}^{(k)} \text{Tr}_S[\Gamma^{\mu_1 \dots \mu_k} \Gamma_{\mu\nu} \mathcal{M}] J^{\mu\nu\rho} q_\rho$$

## n=2 (quadrupolo)

$$\Psi_{(2)}^{NSNS} = \frac{1}{q^2} \xi_{\mu\sigma} M^\sigma{}_\nu J^{\mu\rho\alpha} J^\nu{}_\rho q_\alpha q_\beta$$

$$\Psi_{(2)}^{RR} = \frac{1}{q^2} \sum_k \frac{1}{k!} C_{\mu_1 \dots \mu_k}^{(k)} \text{Tr}_S[\Gamma^{\mu_1 \dots \mu_k} \Gamma_{\nu_1 \nu_2} \Gamma_{\nu_3 \nu_4} \mathcal{M}] J^{\nu_1 \nu_2 \alpha} J^{\nu_3 \nu_4 \beta} q_\alpha q_\beta$$

## INTERAZIONE P-P

Il phase-shift fra due p-brane // con parametri  $\eta_i, \epsilon_i$  è

$$\mathcal{A}_{p-p} = \frac{1}{16} \int_0^\infty dt \langle B_p, \eta_1, \epsilon_1, \vec{x}_1 | e^{-2\pi\alpha' t p^+ (P^- - p^-)} | B_p, \eta_2, \epsilon_2, \vec{x}_2 \rangle$$

dove

$$P^- = \frac{1}{2p^+} \left[ (p^i)^2 + \frac{1}{\alpha'} \sum_{n=1}^\infty (\alpha_{-n}^i \alpha_n^i + \tilde{\alpha}_{-n}^i \tilde{\alpha}_n^i + n S_{-n}^a S_n^a + n \tilde{S}_{-n}^a \tilde{S}_n^a) \right]$$

Questa si può scrivere anche come ( $\epsilon = \epsilon_1 - \epsilon_2, \vec{b} = \vec{x}_1 - \vec{x}_2$ )

$$\mathcal{A}_{p-p} = \frac{V_p (4\pi^2 \alpha')^{4-p}}{16 \sinh \pi \epsilon} \int_0^\infty dt \int \frac{d^{8-p} q}{(2\pi)^{8-p}} e^{i\vec{q} \cdot \vec{b}} e^{-\pi\alpha' t \vec{q}^2} Z_0(\eta_i, \epsilon_i) Z_{osc}(t, \eta_i, \epsilon_i)$$

dove

$$Z_0(\eta_i, \epsilon_i) = \langle B_{p0}, \eta_1, \epsilon_1 | B_{p0}, \eta_2, \epsilon_2 \rangle$$

$$Z_{osc}(t, \eta_i, \epsilon_i) = \langle B_p, \eta_1, \epsilon_1 | e^{-2\pi\alpha' t p^+ P^-} | B_p, \eta_2, \epsilon_2 \rangle_{osc}$$

Caso  $\eta_i = 0$  e  $\epsilon_i = 0$

Il sistema delle due p-brane preserva ancora 1/2 della SUSY e rimane BPS.

Come conseguenza

$$Z_0 = \text{Tr}_V[\mathbb{1}] - \text{Tr}_S[\mathbb{1}] = 8 - 8 = 0$$

$$Z_{osc}(t) = \prod_{n=1}^\infty \frac{(1 - e^{-2\pi t n})^8}{(1 - e^{-2\pi t n})^8} = 1$$

Integrando sul momento trasverso ed il modulo si trova

$$\mathcal{A}_{p-p} = 2 V_{p+1} T_p^2 (1 - 1) G_{9-p}(b)$$

dove  $T_p = \sqrt{\pi} (4\pi^2 \alpha')^{(3-p)/2}$ . Questa è zero ma esatta in  $\alpha'$ .

Caso  $\eta_i = 0$  ma  $\epsilon_i \neq 0$

$$\begin{aligned} Z_0(\epsilon) &= \text{Tr}_V[M^T(\epsilon_2)M(\epsilon_1)] - \text{Tr}_S[M^T(\epsilon_2)M(\epsilon_1)] \\ &= 16 \sin^4 \frac{\pi\epsilon}{2} \sim v^4 \end{aligned}$$

$$Z_{osc}(t, \epsilon) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{|1 - e^{i\pi\epsilon/2} e^{-2\pi tn}|^8}{|1 - e^{i\pi\epsilon} e^{-2\pi tn}|^2 (1 - e^{-2\pi tn})^6} \sim 1$$

L'ampiezza dopo la continuazione analitica  $\epsilon \rightarrow i\epsilon$  è

$$\mathcal{A}_{p-p} = \frac{V_p}{8i} (4\pi^2 \alpha')^{4-p} \int_0^\infty \frac{dt}{(4\pi\alpha't)^{\frac{8-p}{2}}} e^{-\frac{b^2}{4\pi\alpha't} \eta}^{-9} (2it) \frac{\vartheta_1^4(i\frac{\epsilon}{2}|2it)}{\vartheta_1(i\epsilon|2it)}$$

Il comportamento di  $\mathcal{A}_{p-p}$  per  $v \rightarrow 0$  è determinato dalla SUSY.

Notiamo che  $Z_0(\epsilon)$  si può riscrivere come una traccia in una teoria di tipo I

$$Z_0(\epsilon) = \text{Tr}_{S_0}[e^{V_{\epsilon 0}}]$$

Questo è l'analogo dell'integrazione sui modi zero fermionici nell'integrale funzionale per il loop di stringhe aperte. Qui  $V_{\epsilon 0} = -2\pi\epsilon_i R_0^{1i}$ .

La traccia è 0 finchè non si inseriscono almeno 8 modi zero. La prima  $\neq 0$  è

$$\begin{aligned} t^{i_1 \dots i_8} &= \text{Tr}_{S_0}[R_0^{i_1 i_2} R_0^{i_3 i_4} R_0^{i_5 i_6} R_0^{i_7 i_8}] \\ &= -\frac{1}{2} \epsilon^{i_1 \dots i_8} - \frac{1}{2} [\delta^{i_1 i_4} \delta^{i_2 i_3} \delta^{i_5 i_8} \delta^{i_6 i_7} + \text{perm.}] \\ &\quad + \frac{1}{2} [\delta^{i_2 i_3} \delta^{i_4 i_5} \delta^{i_6 i_7} \delta^{i_8 i_1} + \text{perm.}] \end{aligned}$$

dove "perm." indica le permutazioni su tutte le coppie  $(i_{2n-1} i_{2n})$ .

Ogni  $V_{\epsilon 0}$  porta 2 modi zero e un  $\epsilon$ , e sviluppando si vede che  $Z_0(\epsilon) \sim |v|^4$ .

Sviluppiamo  $e^{V_\epsilon}$  in serie di potenze

$$\begin{aligned} Z_0(\epsilon) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \text{Tr}_{S_0}[V_{\epsilon 0}^m] \\ Z_{osc}(t, \epsilon) &= \sum_{q=0}^{\infty} \frac{1}{q!} \langle B_p | V_\epsilon^q e^{-2\pi\alpha' t p^+ P^-} | B_p \rangle_{osc} \end{aligned}$$

Tralascio invece l'effetto del boost sui modi zero bosonici.

Si vede che il primo ordine in  $\epsilon$  non nullo in  $Z(t, \epsilon) = Z_0(\epsilon)Z_{osc}(t, \epsilon)$  riceve un unico contributo con  $m = 4$  e  $q = 0$  ( $\Leftrightarrow Z_{osc}(t, \eta_{1,2}, \epsilon) = 1$ ).

Quindi  $Z(t, \epsilon \rightarrow 0) = |v|^4$  è indipendente da  $t$  e solo gli stati BPS (massless) contribuiscono. L'ampiezza non relativistica si riduce a

$$\mathcal{A}_{p-p} = \frac{|v|^4}{4} V_{p+1} T_p^2 G_{9-p}(r)$$

ed è esatta in  $\alpha'$ , cioè “invariante di scala”.

Caso  $\eta_i \neq 0$  e  $\epsilon_i \neq 0$

Possiamo applicare la stessa strategia per la dipendenza dai parametri di SUSY  $\eta_i$ . Sviluppando sia in  $\eta_{1,2}$  che in  $\epsilon$  si trova

$$Z_0(\eta_{1,2}, \epsilon) = \sum_{n_1+n_2 \leq 4} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(n_1!)^2 (n_2!)^2 m!} \text{Tr}_{S_0} [V_{\eta_1 0}^{n_1} V_{\eta_2 0}^{n_2} V_{\epsilon 0}^m]$$

$$Z_{osc}(t, \eta_{1,2}, \epsilon) = \sum_{p_1+p_2 \leq 8} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{1}{(p_1!)^2 (p_2!)^2 q!} \langle B_p | V_{\eta_1}^{p_1} V_{\eta_2}^{p_2} V_{\epsilon}^q e^{-2\pi\alpha' t p^+ P^-} | B_p \rangle_{osc}$$

Per avere  $Z_0(\eta_{1,2}, \epsilon) \neq 0$  è necessario che  $n_1 + n_2 + m \geq 4$ . E' chiaro quindi che a fissati  $n_1$  e  $n_2$ , l'andamento dominante per  $v \rightarrow 0$  si ottiene prendendo  $n_1 + n_2 + m = 4$  e  $p_1, p_2, q = 0$  ( $\Leftrightarrow Z_{osc}(t, \eta_{1,2}, \epsilon) = 1$ ) ed è indipendente dal modulo  $t$ . Ogni  $V_{\eta_0}$  porta anche un momento  $q$  che produce una derivata sul propagatore  $G_{9-p}$ . L'andamento è quindi

$$\mathcal{A}_{p-p}^{n_1, n_2} \sim \eta_1^{2n_1} \eta_2^{2n_2} |v|^{4-n_1-n_2} \partial^{n_1+n_2} G_{9-p}(r) \sim \frac{\eta_1^{2n_1} \eta_2^{2n_2} |v|^{4-n_1-n_2}}{r^{7-p+n_1+n_2}}$$

Tutte queste interazioni sono esatte in  $\alpha'$ , cioè “invarianti di scala”. Sono date intermini di  $t^{i_1 \dots i_8}$  e del tensore  $\omega_{j_1 \dots j_{2n}}^{i_1 \dots i_n}(\eta)$ .



**Caso**  $n_1 + n_2 = 1$

$$\mathcal{A}_{p-p}^{(1,0)} = \frac{V_{p+1}}{4} T_p^2 v_{m_1} v_{m_2} v_{m_3} t^{i_1 i_2 1 m_1 1 m_2 1 m_3} \omega_{i_1 i_2}^{j_1}(\eta_1) \partial_{j_1} G_{9-p}(r)$$

**Caso**  $n_1 + n_2 = 2$

$$\mathcal{A}_{p-p}^{(2,0)} = \frac{V_{p+1}}{4} T_p^2 v_{m_1} v_{m_2} t^{i_1 \dots i_4 1 m_1 1 m_2} \omega_{i_1 \dots i_4}^{j_1 j_2}(\eta_1) \partial_{j_1} \partial_{j_2} G_{9-p}(r)$$

$$\mathcal{A}_{p-p}^{(1,1)} = \frac{V_{p+1}}{4} T_p^2 v_{m_1} v_{m_2} t^{i_1 \dots i_4 1 m_1 1 m_2} \omega_{i_1 i_2}^{j_1}(\eta_1) \omega_{i_3 i_4}^{j_2}(\eta_2) \partial_{j_1} \partial_{j_2} G_{9-p}(r)$$

**Caso**  $n_1 + n_2 = 3$

$$\mathcal{A}_{p-p}^{(3,0)} = \frac{V_{p+1}}{4} T_p^2 v_{m_1} t^{i_1 \dots i_6 1 m_1} \omega_{i_1 \dots i_6}^{j_1 j_2 j_3}(\eta_1) \partial_{j_1} \partial_{j_2} \partial_{j_3} G_{9-p}(r)$$

$$\mathcal{A}_{p-p}^{(2,1)} = \frac{V_{p+1}}{4} T_p^2 v_{m_1} t^{i_1 \dots i_6 1 m_1} \omega_{i_1 \dots i_4}^{j_1 j_2}(\eta_1) \omega_{i_5 i_6}^{j_3}(\eta_2) \partial_{j_1} \partial_{j_2} \partial_{j_3} G_{9-p}(r)$$

**Caso**  $n_1 + n_2 = 4$

$$\mathcal{A}_{p-p}^{(4,0)} = \frac{V_{p+1}}{4} T_p^2 t^{i_1 \dots i_8} \omega_{i_1 \dots i_8}^{j_1 \dots j_4}(\eta_1) \partial_{j_1} \partial_{j_2} \partial_{j_3} \partial_{j_4} G_{9-p}(r)$$

$$\mathcal{A}_{p-p}^{(3,1)} = \frac{V_{p+1}}{4} T_p^2 t^{i_1 \dots i_8} \omega_{i_1 \dots i_6}^{j_1 j_2 j_3}(\eta_1) \omega_{i_7 i_8}^{j_4}(\eta_2) \partial_{j_1} \partial_{j_2} \partial_{j_3} \partial_{j_4} G_{9-p}(r)$$

$$\mathcal{A}_{p-p}^{(2,2)} = \frac{V_{p+1}}{4} T_p^2 t^{i_1 \dots i_8} \omega_{i_1 \dots i_4}^{j_1 j_2}(\eta_1) \omega_{i_5 \dots i_8}^{j_3 j_4}(\eta_2) \partial_{j_1} \partial_{j_2} \partial_{j_3} \partial_{j_4} G_{9-p}(r)$$

Queste espressioni si possono esplicitare e covariantizzare. Per esempio

$$\mathcal{A}_{p-p}^{(1,0)} = \frac{V_{p+1}}{32} T_p^2 |v|^2 v_i J_0^{ij} \partial_j G_{9-p}(r)$$

$$\mathcal{A}_{p-p}^{(2,0)} = \frac{V_{p+1}}{192} T_p^2 |v|^2 (2J^{m0q} J_{0q}^n - J^{mpq} J_{pq}^n + 4J^{m\rho} J_{\rho j}^n \hat{v}^i \hat{v}^j) \partial_m \partial_n G_{9-p}(r)$$

...

## INTERAZIONE P-P+4

Il phase-shift fra una p e una (p+4)-brana // con parametri  $\eta_i, \epsilon_i$  è

$$\mathcal{A}_{p-p+4} = \frac{1}{16} \int_0^\infty dt \langle B_p, \eta_1, \epsilon_1, \vec{x}_1 | e^{-2\pi\alpha' t p^+ (P^- - p^-)} | B_{p+4}, \eta_2, \epsilon_2, \vec{x}_2 \rangle$$

Come prima, questa si può riscrivere come

$$\mathcal{A}_{p-p+4} = \frac{V_p (4\pi^2 \alpha')^{-\frac{p(4-p)}{2}}}{16 \sinh \pi \epsilon} \int_0^\infty dt \int \frac{d^{4-p} q}{(2\pi)^{4-p}} e^{i\vec{q}\cdot\vec{b}} e^{-\pi\alpha' t \vec{q}^2} Z_0(\eta_i, \epsilon_i) Z_{osc}(t, \eta_i, \epsilon_i)$$

con

$$Z_0(\eta_i, \epsilon_i) = \langle B_{p0}, \eta_1, \epsilon_1 | B_{p+40}, \eta_2, \epsilon_2 \rangle$$

$$Z_{osc}(t, \eta_i, \epsilon_i) = \langle B_p, \eta_1, \epsilon_1 | e^{-2\pi\alpha' t p^+ P^-} | B_{p+4}, \eta_2, \epsilon_2 \rangle_{osc}$$

Caso  $\eta_i = 0$  e  $\epsilon_i = 0$

Il sistema di una p e una (p+4)-brana parallele preserva ancora 1/4 della SUSY e rimane BPS. Come conseguenza

$$Z_0 = \text{Tr}_V[N] - \text{Tr}_S[N] = (4 - 4) - 0 = 0$$

dove

$$N^{ij} = (M_p^T M_{p+4})^{ij} = \begin{pmatrix} I_{p+1} & 0 & 0 \\ 0 & -I_4 & 0 \\ 0 & 0 & I_{3-p} \end{pmatrix}$$

$$N_{\dot{a}\dot{b}} = (M_p^T M_{p+4})_{\dot{a}\dot{b}} = (\gamma^{p+2} \dots \gamma^{p+5})_{\dot{a}\dot{b}}$$

e

$$Z_{osc}(t) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - e^{-2\pi t n})^4 (1 + e^{-2\pi t n})^4}{(1 - e^{-2\pi t n})^4 (1 + e^{-2\pi t n})^4} = 1$$

Integrando sul momento trasverso ed il modulo si trova

$$\mathcal{A}_{p-p+4} = V_{p+1} T_p T_{p+4} (1 - 1) G_{5-p}(b)$$

Caso  $\eta_i = 0$  ma  $\epsilon_i \neq 0$

$$\begin{aligned} Z_0(\epsilon) &= \text{Tr}_V[M_p^T(\epsilon_2)M_{p+4}(\epsilon_1)] - \text{Tr}_S[M_p^T(\epsilon_2)M_{p+4}(\epsilon_1)] \\ &= 16 \cos^2 \frac{\pi\epsilon}{2} \sin^2 \frac{\pi\epsilon}{2} \sim v^2 \\ Z_{osc}(t, \epsilon) &= \prod_{n=1}^{\infty} \frac{|1 - e^{i\pi\epsilon/2} e^{-2\pi tn}|^4 |1 + e^{i\pi\epsilon/2} e^{-2\pi tn}|^4}{|1 - e^{i\pi\epsilon} e^{-2\pi tn}|^2 (1 - e^{-2\pi tn})^2 (1 + e^{-2\pi tn})^4} \sim 1 \end{aligned}$$

Dopo la continuazione analitica  $\epsilon \rightarrow i\epsilon$

$$\mathcal{A}_{p-p+4} = \frac{V_p}{8i} (4\pi^2 \alpha')^{-\frac{p(4-p)}{2}} \int_0^\infty \frac{dt}{(4\pi\alpha't)^{\frac{4-p}{2}}} e^{-\frac{b^2}{4\pi\alpha't} \eta^{-3}} (2it) \frac{\vartheta_1^2(i\frac{\epsilon}{2}|2it)\vartheta_2^2(i\frac{\epsilon}{2}|2it)}{\vartheta_1(i\epsilon|2it)\vartheta_2^2(0|2it)}$$

Di nuovo, il comportamento di  $\mathcal{A}_{p-p+4}$  per  $v \rightarrow 0$  è determinato dalla SUSY.

$Z_0(\epsilon)$  si può riscrivere come una traccia di tipo I, ma con soli 4 modi zero

$$Z_0(\epsilon) = \text{Tr}'_{S_0}[e^{V_{\epsilon 0}}]$$

La traccia è 0 finchè non si inseriscono almeno 4 modi zero. La prima  $\neq 0$  è

$$\begin{aligned} t^{i_1 \dots i_4} &= \text{Tr}'_{S_0} R_0^{i_1 i_2} R_0^{i_3 i_4} \\ &= 2 \epsilon^{i_1 \dots i_4 p+2 \dots p+5} \\ &\quad + 2 \left( \delta^{i_1 p+2} \delta^{i_2 p+3} \delta^{i_3 p+4} \delta^{i_4 p+5} + N^{i_2 i_4} \delta^{i_1 i_3} + \text{perm.} \right) \end{aligned}$$

Ogni  $V_{\epsilon 0}$  porta 2 modi zero e un  $\epsilon$ , e sviluppando si vede che  $Z_0(\epsilon) \sim |v|^2$ .

Sviluppando  $e^{V_\epsilon}$  in serie di potenze

$$\begin{aligned} Z_0(\epsilon) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \text{Tr}'_{S_0}[V_{\epsilon 0}^m] \\ Z_{osc}(t, \epsilon) &= \sum_{q=0}^{\infty} \frac{1}{q!} \langle B_p | V_\epsilon^q e^{-2\pi\alpha't p^+ P^-} | B_{p+4} \rangle_{osc} \end{aligned}$$

si vede che il primo ordine in  $\epsilon$  non nullo in  $Z(t, \epsilon) = Z_0(\epsilon)Z_{osc}(t, \epsilon)$  riceve un unico contributo con  $m = 2$  e  $q = 0$  ( $\Leftrightarrow Z_{osc}(t, \eta_{1,2}, \epsilon) = 1$ ).

Quindi  $Z(t, \epsilon \rightarrow 0) = |v|^2$  è indipendente da  $t$  e solo gli stati BPS (massless) contribuiscono. L'ampiezza non relativistica si riduce a

$$\mathcal{A}_{p-p+4} = \frac{|v|^2}{4} V_{p+1} T_p T_{p+4} G_{5-p}(r)$$

ed è esatta in  $\alpha'$ , cioè “invariante di scala”.

**Caso**  $\eta_i \neq 0$  e  $\epsilon_i \neq 0$

Sviluppando sia in  $\eta_{1,2}$  che in  $\epsilon$

$$Z_0(\eta_{1,2}, \epsilon) = \sum_{n_1+n_2 \leq 12} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(n_1!)^2 (n_2!)^2 m!} \text{Tr}'_{S_0} [V_{\eta_1 0}^{n_1} V_{\eta_2 0}^{n_2} V_{\epsilon 0}^m]$$

$$Z_{osc}(t, \eta_{1,2}, \epsilon) = \sum_{p_1+p_2 \leq 8} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{1}{(p_1!)^2 (p_2!)^2 q!} \langle B_p | V_{\eta_1}^{p_1} V_{\eta_2}^{p_2} V_{\epsilon}^q e^{-2\pi\alpha' t p^+ P^-} | B_{p+4} \rangle_{osc}$$

Per avere  $Z_0(\eta_{1,2}, \epsilon) \neq 0$  è necessario che  $n_1 + n_2 + m \geq 2$ . Fissati  $n_1$  e  $n_2$ , con  $n_1 + n_2 \leq 2$ , l'andamento dominante per  $v \rightarrow 0$  si ottiene prendendo  $n_1 + n_2 + m = 2$  e  $p_1, p_2, q = 0$  ( $\Leftrightarrow Z_{osc}(t, \eta_{1,2}, \epsilon) = 1$ ) ed è indipendente da  $t$ . Come prima, ogni  $V_{\eta_0}$  porta anche un momento  $q$  che produce una derivata sul propagatore  $G_{5-p}$ . L'andamento è quindi

$$\mathcal{A}_{p-p+4}^{n_1, n_2} \sim \eta_1^{2n_1} \eta_2^{2n_2} |v|^{2-n_1-n_2} \partial^{n_1+n_2} G_{5-p}(r) \sim \frac{\eta_1^{2n_1} \eta_2^{2n_2} |v|^{2-n_1-n_2}}{r^{3-p+n_1+n_2}}$$

Tutte queste interazioni sono esatte in  $\alpha'$ , cioè “invarianti di scala”. Sono date in termini di  $t^{i_1 \dots i_4}$  e del tensore  $\omega_{j_1 \dots j_{2n}}^{i_1 \dots i_n}(\eta)$

**Caso**  $n_1 + n_2 = 1$

$$\mathcal{A}_{p-p+4}^{(1,0)} = \frac{V_{p+1}}{4} T_p T_{p+4} v_{m_1} t^{i_1 i_2 i_3 i_4} \omega_{i_1 i_2}^{j_1}(\eta_1) \partial_{j_1} G_{5-p}(r)$$

**Caso**  $n_1 + n_2 = 2$

$$\mathcal{A}_{p-p+4}^{(2,0)} = \frac{V_{p+1}}{4} T_p T_{p+4} t^{i_1 \dots i_4} \omega_{i_1 \dots i_4}^{j_1 j_2}(\eta_1) \partial_{j_1} \partial_{j_2} G_{5-p}(r)$$

$$\mathcal{A}_{p-p+4}^{(1,1)} = \frac{V_{p+1}}{4} T_p T_{p+4} t^{i_1 \dots i_4} \omega_{i_1 i_2}^{j_1}(\eta_1) \omega_{i_3 i_4}^{j_2}(\eta_2) \partial_{j_1} \partial_{j_2} G_{5-p}(r)$$

# INTERPRETAZIONE DI TEORIA DEI CAMPI

Dalle funzione a un punto si leggono i campi asintotici

$$\xi^{\mu\nu} = \kappa^2 \left[ A_0 M^{\mu\nu} \frac{1}{q^2} + A_1 J^{\mu\sigma\alpha} M_\sigma^\nu \frac{q_\alpha}{q^2} + A_2 J^{\mu\alpha\rho} J_{\rho}^{\sigma\beta} M_\sigma^\nu \frac{q_\alpha q_\beta}{q^2} + \dots \right]$$

$$C_{(k)}^{\mu_1 \dots \mu_k} = \frac{\kappa^2}{k!} \left[ B_0 \text{Tr}_S[\Gamma^{\mu_1 \dots \mu_k} \mathcal{M}] \frac{1}{q^2} + B_1 \text{Tr}_S[\Gamma^{\mu_1 \dots \mu_k} \Gamma_{\nu_1 \nu_2} \mathcal{M}] J^{\nu_1 \nu_2 \alpha} \frac{q_\alpha}{q^2} \right. \\ \left. + B_2 \text{Tr}_S[\Gamma^{\mu_1 \dots \mu_k} \Gamma_{\nu_1 \nu_2} \Gamma_{\nu_3 \nu_4} \mathcal{M}] J^{\nu_1 \nu_2 \alpha} J^{\nu_3 \nu_4 \beta} \frac{q_\alpha q_\beta}{q^2} + \dots \right]$$

dove  $\kappa^2$  è la costante di Plank in  $d = 10$  e  $A_0, A_1, A_2, B_0, B_1, B_2$  costanti da fissare.

Per la 0-brana ( $M_0^0 = -1, M_j^i = \delta_j^i$  e  $\mathcal{M} = \Gamma^0$ ) si trova

$$\phi = \frac{3}{2} \kappa^2 M G_9(r) + \frac{1}{4} \kappa^2 C J^{mpq} J_{pq}^n \partial_m \partial_n G_9(r) + \dots$$

$$\left\{ \begin{array}{l} h_{00} = \kappa^2 M G_9(r) + \kappa^2 C J^{m0q} J_{0q}^n \partial_m \partial_n G_9(r) + \dots \\ h_{ij} = \delta_{ij} \kappa^2 M G_9(r) + \kappa^2 C J_i^{m\rho} J_{j\rho}^n \partial_m \partial_n G_9(r) + \dots \\ h_{0i} = 2\kappa^2 A J_{0i}^m \partial_m G_9(r) + \dots \\ b_{ij} = \kappa^2 A J_{ij}^m \partial_m G_9(r) + \dots \\ b_{0i} = 2\kappa^2 C J_{0q}^m J_i^{nq} \partial_m \partial_n G_9(r) + \dots \end{array} \right.$$

nel settore di  $RR$  e

$$\left\{ \begin{array}{l} C_0 = 2\kappa^2 Q G_9(r) + \kappa^2 D J^{m\rho\tau} J_{\rho\tau}^n \partial_m \partial_n G_9(r) + \dots \\ C_i = 2\kappa^2 B J_{0i}^m \partial_m G_9(r) + \dots \\ C_{0ij} = \kappa^2 B J_{ij}^m \partial_m G_9(r) + \dots \\ C_{ijk} = 2\kappa^2 D J_{0[i}^m J_{jk]}^n \partial_m \partial_n G_9(r) + \dots \end{array} \right.$$

nel settore di  $NSNS$ . Le costanti sono state ridefinite  $M, A, B, Q, C, D$ .

Vediamo che

$$M, Q = \text{massa e carica} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{Q}{M}$$

$$2AJ_{0ij}, BJ_{0ij} = \text{momento angolare e magnetico} \quad \Rightarrow \quad g = \frac{MB}{QA}$$

$$CJ^{\dots}J^{\dots}, DJ^{\dots}J^{\dots} = \text{momenti di quadrupolo} \quad \Rightarrow \quad \tilde{g} = 4\frac{MD}{QC}$$

Questi rapporti possono essere fissati imponendo le cancellazioni trovate nelle ampiezze.

Usiamo l'azione effettiva di una 0-brana scalare

$$\mathcal{S} = -M \int d\tau e^{-\phi} \sqrt{-g_{\mu\nu} \dot{X}^\mu \dot{X}^\nu} - Q \int d\tau C_\mu \dot{X}^\mu$$

Per campi deboli,  $\kappa \rightarrow 0$ , questa si riduce a

$$\mathcal{S}_0 = \int d\tau \left( (M\phi + \frac{1}{2}Mh_{\mu\nu}\dot{X}^\mu\dot{X}^\nu - QC_\mu\dot{X}^\mu) \right)$$

Segue la parte universale dei campi per una sorgente statica  $X^0 = \tau, X^i = 0$ .

Per calcolare l'interazione fra una 0-brana scalare ed una con spin, si valuta l'azione effettiva di quella scalare con  $X^0 = \cosh \pi\epsilon\tau, X^i = \hat{v}^i \sinh \pi\epsilon\tau$  nel background di quella con spin. Sviluppando per  $v \rightarrow 0$  si trova

$$\mathcal{S} = \int d\tau \sum_{n \geq 0} v^n V_n$$

Possiamo confrontare con l'ampiezza non relativistica

$$V_{p-p} = \mathcal{A}_{p-p}^{(0,0)} + \mathcal{A}_{p-p}^{(1,0)} + \mathcal{A}_{p-p}^{(2,0)} + \dots$$

In particolare

$$V_{0,2}|_G = 0 \quad \Rightarrow \quad M = Q \quad \Rightarrow \quad \alpha = 1$$

$$V_1|_{\partial G} = 0 \quad \Rightarrow \quad MA = QB \quad \Rightarrow \quad g = 1$$

$$V_0|_{\partial^2 G} = 0 \quad \Rightarrow \quad MC = 4QD \quad \Rightarrow \quad \tilde{g} = 1$$

Inoltre vengo le strutture tensoriali giuste.

Per calcolare l'ampiezza di scattering fra due 0-brane con spin è necessaria l'azione effettiva completa e SUSY per una 0-brana con spin

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 + \mathcal{S}_{\eta^2} + \mathcal{S}_{\eta^4} + \dots$$

La parte di dipolo dei campi per una sorgente statica si può ottenere da

$$\mathcal{S}_{\eta^2} = \int d\tau \left( -\partial_i h_{0j} J^{0ij} + \frac{1}{4} \partial_i b_{jk} J^{ijk} + \partial_i C_j J^{0ij} - \frac{1}{4} \partial_i C_{0jk} J^{ijk} \right)$$

La generalizzazione per  $\dot{X}^\mu$  arbitrario è

$$\mathcal{S}_{\eta^2} = \int d\tau \left( \Gamma^\rho_{\sigma\mu} \dot{X}^\mu \dot{X}^\nu J_{\rho\nu}^\sigma + \frac{g}{12} F_{\mu\nu\rho\sigma} \dot{X}^\mu J^{\nu\rho\sigma} + \frac{1}{12} H_{\mu\nu\rho} J^{\mu\nu\rho} + \frac{g}{2} F_{\mu\nu} \dot{X}^\rho J^{\mu\nu\rho} \right)$$

dove  $F_{\mu\nu} = 2\partial_{[\mu} C_{\nu]}$ ,  $F_{\mu\nu\rho\sigma} = 4\partial_{[\mu} C_{\nu\rho\sigma]}$  e  $H_{\mu\nu\rho} = 3\partial_{[\mu} b_{\nu\rho]}$ .

Usando questa azione si può verificare che non c'è contributo statico a  $\mathcal{A}_{p-p}^{(1,1)}$ .

Se  $g = 1$ ,  $\mathcal{S}_{\eta^2}$  è la riduzione Kaluza-Klein ( $\dot{X}^{11} = 1$  e  $J^{MN11} = 0$ ) da  $d = 11$  a  $d = 10$  di

$$\mathcal{S}_{\eta^2}^{(11)} = \int d\tau \left( \Gamma_{SM}^R \dot{X}^M \dot{X}^N J_{RN}^S + \frac{1}{12} F_{MNR S} \dot{X}^M J^{NRS} \right)$$

con  $g_{\mu\nu} = G_{\mu\nu}$ ,  $C_\mu = G_{\mu 11}$ ,  $b_{\mu\nu} = G_{\mu\nu}$ .

## CONCLUSIONI

- INVARIANZA DI SCALA NELLA DINAMICA DELLE D-BRANE PER  $v \rightarrow 0$ .
- EQUIVALENZA SUGRA  $\Leftrightarrow$  SYM AD UN LOOP DETTATA DALLA SUSY. CHECK NON BANALE SOLO A DUE LOOPS.
- EFFETTI DI SPIN CALCOLABILI IN SUPERSTRINGA. ANALOGO PROBLEMA IN SUGRA PIU' DIFFICILE.
- INVARIANZA DI SCALA ANCHE NELLA PARTE MAGNETICA DELL'INTERAZIONE P-(6-P).