

# THEORIE QUANTIQUE DES CHAMPS

1. Symétries d'espace-temps (17 p.)
2. Théorie de champs relativistes classiques (35 p.)
3. Champs scalaires, spinoriels et vectoriels (24 p.)
4. Quantification de champs libres (14 p.)
5. Théorie de Klein-Gordon (27 p.)
6. Théorie de Dirac (24 p.)
7. Théorie de Maxwell (30 p.)
8. Interactions et transitions (51 p.)
9. Quantités observables et cinématique (24 p.)
10. Electrodynamique quantique (29 p.)
11. Exemples d'applications (31 p.)

# 1. SYMETRIES D'ESPACE-TEMPS

## 1.1 Groupe et algèbre de Poincaré

Le groupe de Poincaré est le groupe de transformations affines de coordonnées d'espace-temps  $x^\mu$  qui correspondent à des changements de référentiels inertiels comme spécifiés par la théorie de la relativité restreinte, c'est-à-dire les transformations qui laissent invariant l'intervalle dans l'espace-temps de Minkowski :

$$\|X\|^2 = x^\mu \eta_{\mu\nu} x^\nu \quad (1.1)$$

Les transformations de ce groupe s'écrivent

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu + a^\mu \quad (1.2)$$

avec :

$$\begin{aligned} \Lambda^\mu_\nu : & \text{4-matrice satisfaisant } \eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta = \eta_{\alpha\beta} \\ a^\mu : & \text{4-vecteur constant arbitraire} \end{aligned} \quad (1.3)$$

La loi de composition s'obtient en appliquant deux fois la transformation (1.2) :

$$\begin{aligned} x''^\mu &= \Lambda'^\mu_\nu x'^\nu + a'^\mu = \Lambda'^\mu_\nu (\Lambda^\nu_\rho x^\rho + a^\nu) + a'^\mu \\ &= (\Lambda'\Lambda)^\mu_\rho x^\rho + (a' + \Lambda'a)^\mu \end{aligned}$$

On trouve donc :

$$(A_1, a_1) \circ (A_2, a_2) = (A_1 A_2, a_1 + A_1 a_2) \quad (1.4)$$

On vérifie facilement que :

$$(\mathbb{1}, 0) = \text{élément neutre}$$

$$(A, a)^{-1} = (A^{-1}, -A^{-1}a) = \text{élément inverse} \quad (1.5)$$

Le sous-groupe des transformations de Lorentz est constitué des éléments du type :

$$(A) \equiv (A, 0) \quad (1.6)$$

avec la loi de composition :

$$(A_1) \circ (A_2) = (A_1 A_2) \quad (1.7)$$

Le sous-groupe de translations spatio-temporelles est au contraire constitué des éléments du type :

$$(a) \equiv (\mathbb{1}, a) \quad (1.8)$$

avec la loi de composition :

$$(a_1) \circ (a_2) = (a_1 + a_2) \quad (1.9)$$

Le groupe entier des transformations de Poincaré est le produit semi-direct des sous-groupes des transformations de Lorentz et des translations spatio-temporelles.

Il est possible de déterminer la forme de l'algèbre associée au groupe de Lorentz en considérant son action en termes d'opérateurs différentiels sur l'espace vectoriel de dimension infinie représenté par les fonctions des coordonnées d'espace-temps

Sous une transformation de Lorentz infinitésimale, pour laquelle  $\Lambda^{\mu}_{\nu} \approx \delta^{\mu}_{\nu} + \omega^{\mu}_{\nu}$  avec  $\omega^{\mu}_{\nu} = -\omega_{\nu}^{\mu}$ , on trouve :

$$\begin{aligned}
 \delta \omega f(x^{\mu}) &= f(x'^{\mu}) - f(x^{\mu}) = f(\Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu}) - f(x^{\mu}) \\
 &= f(x^{\mu} + \omega^{\mu}_{\nu} x^{\nu}) - f(x^{\mu}) \\
 &\approx \omega^{\alpha}_{\beta} x^{\beta} \partial_{\alpha} f(x^{\mu}) \\
 &= -\frac{1}{2} \omega^{\alpha\beta} (x_{\alpha} \partial_{\beta} - x_{\beta} \partial_{\alpha}) f(x^{\mu}) \tag{1.10} \\
 &= \frac{i}{2} \omega^{\alpha\beta} L_{\alpha\beta} f(x^{\mu})
 \end{aligned}$$

en fonction des six générateurs

$$L_{\alpha\beta} = i(x_{\alpha} \partial_{\beta} - x_{\beta} \partial_{\alpha}) \tag{1.11}$$

Sous une translation infinitésimale, pour laquelle  $a^{\mu} \approx \epsilon^{\mu}$ , on trouve :



$$\begin{aligned}
\delta_\epsilon f(x^\mu) &= f(x'^\mu) - f(x^\mu) = f(x^\mu + \epsilon^\mu) - f(x^\mu) \\
&\approx \epsilon^\alpha \partial_\alpha f(x^\mu) \\
&= i \epsilon^\alpha P_\alpha f(x^\mu)
\end{aligned} \tag{1.12}$$

en fonction des quatre générateurs

$$P_\alpha = -i \partial_\alpha \tag{1.13}$$

En utilisant les représentations différentielles des générateurs  $L_{\alpha\beta}$  et  $P_\alpha$  données par (1.11) et (1.13), on calcule facilement l'algèbre :

$$\begin{aligned}
[L_{\mu\nu}, L_{\rho\sigma}] &= -(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu)(x_\rho \partial_\sigma - x_\sigma \partial_\rho) \\
&\quad + (x_\rho \partial_\sigma - x_\sigma \partial_\rho)(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu) \\
&= -x_\mu \eta_{\nu\rho} \partial_\sigma + x_\nu \eta_{\rho\mu} \partial_\sigma + x_\mu \eta_{\nu\sigma} \partial_\rho - x_\nu \eta_{\mu\sigma} \partial_\rho \\
&\quad + x_\rho \eta_{\sigma\mu} \partial_\nu - x_\sigma \eta_{\rho\mu} \partial_\nu - x_\rho \eta_{\sigma\nu} \partial_\mu + x_\sigma \eta_{\rho\nu} \partial_\mu \\
&= -\eta_{\nu\rho} (x_\mu \partial_\sigma - x_\sigma \partial_\mu) + \eta_{\mu\rho} (x_\nu \partial_\sigma - x_\sigma \partial_\nu) \\
&\quad + \eta_{\nu\sigma} (x_\mu \partial_\rho - x_\rho \partial_\mu) - \eta_{\mu\sigma} (x_\nu \partial_\rho - x_\rho \partial_\nu) \\
&= -i (\eta_{\mu\rho} L_{\nu\sigma} - \eta_{\nu\rho} L_{\mu\sigma} - \eta_{\mu\sigma} L_{\nu\rho} + \eta_{\nu\sigma} L_{\mu\rho}) \tag{1.14}
\end{aligned}$$

$$\cdot [P_\mu, P_\nu] = 0$$

(1.15)

$$\begin{aligned} \cdot [L_{\mu\nu}, P_\rho] &= i(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu) (-i) \partial_\rho \\ &\quad - (-i) \partial_\rho i(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu) \end{aligned}$$

$$= -\eta_{\mu\rho} \partial_\nu + \eta_{\nu\rho} \partial_\mu$$

$$= -i(\eta_{\mu\rho} P_\nu - \eta_{\nu\rho} P_\mu)$$

(1.16)

L'algèbre complète du groupe de Poincaré est donnée par les trois commutateurs (1.14), (1.15) et (1.16) pour les générateurs  $L_{\mu\nu}$  et  $P_\mu$  dans la représentation de dimension infinie sur un espace de fonctions. Etant donné que l'algèbre est une propriété universelle du groupe qui est indépendante de la représentation choisie, les générateurs  $M_{\mu\nu}$  et  $P_\mu$  dans une quelconque représentation doivent donc satisfaire l'algèbre de Poincaré:

$$\left\{ \begin{array}{l} [M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = -i(\eta_{\mu\rho} M_{\nu\sigma} - \eta_{\nu\rho} M_{\mu\sigma} - \eta_{\mu\sigma} M_{\nu\rho} + \eta_{\nu\sigma} M_{\mu\rho}) \\ [P_\mu, P_\nu] = 0 \\ [M_{\mu\nu}, P_\rho] = -i(\eta_{\mu\rho} P_\nu - \eta_{\nu\rho} P_\mu) \end{array} \right. \quad (1.17)$$

## 1.2 Représentations du groupe et de l'algèbre de Poincaré

Etant donné que le groupe de Poincaré représente les transformations de symétrie d'espace-temps permises par la relativité, toute théorie physique doit être décrite en termes d'objets qui sont des représentations bien définies de ce groupe. Comme l'algèbre du groupe contient l'information relative aux transformations infinitésimales connexes à l'identité, elle doit elle aussi être réalisée de façon bien définie par les objets décrivant la théorie. En particulier, les générateurs  $M_{\mu\nu}$  et  $P_\mu$  des transformations de Lorentz et des translations doivent avoir une action bien définie.

Dans une théorie quantique, les objets de base sont des champs, c'est-à-dire des fonctions  $\phi^\alpha(x^\mu)$  des coordonnées d'espace-temps  $x^\mu$ . Sous une transformation de Lorentz, les différentes composantes des champs, correspondant à des valeurs différentes de l'index  $\alpha$ , se mélangent, et l'argument des champs change lui aussi. Au contraire, sous translations, seul l'argument de chaque composante change.

La collection de champs  $\phi^\alpha(x^\mu)$  forme donc une représentation de dimension finie du groupe de Lorentz en tout point de l'espace-temps  $x^\mu$ , qui est étendue à une représentation de dimension infinie du groupe de Poincaré grâce à la dépendance fonctionnelle des coordonnées  $x^\mu$ . Les générateurs  $P_\mu$  et  $M_{\mu\nu}$  ont donc la forme générale:

$$\left. \begin{aligned} P_\mu &= -i\partial_\mu \\ (M_{\mu\nu})^\alpha_\beta &= i(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu)\delta^\alpha_\beta + (S_{\mu\nu})^\alpha_\beta \end{aligned} \right\} \quad (1.18)$$

Pour caractériser ces représentations, on note que l'algèbre (1.17) a deux opérateurs de Casimir. Le premier est construit à partir du 4-vecteur  $P^\mu$  en prenant sa norme carrée  $P^\mu P_\mu$ . En effet, on a

$$\begin{aligned} \cdot [P^2, P_\mu] &= 0 \\ \cdot [P^2, M_{\mu\nu}] &= P^\rho [P_\rho, M_{\mu\nu}] + [P_\rho, M_{\mu\nu}] P^\rho \\ &= i P^\rho (\eta_{\mu\rho} P_\nu - \eta_{\nu\rho} P_\mu) + i (\eta_{\mu\rho} P_\nu - \eta_{\nu\rho} P_\mu) P^\rho \\ &= 2i (P_\mu P_\nu - P_\nu P_\mu) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Le deuxième est basé sur le vecteur de Pauli-Lobanski:

$$W_\mu = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} P^\nu M^{\rho\sigma} \quad (1.19)$$

On calcule d'abord:

$$\begin{aligned}
 [W_\mu, P_\nu] &= \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\alpha\beta\gamma} [P^\alpha M^{\beta\gamma}, P_\nu] \\
 &= \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\alpha\beta\gamma} \left( \cancel{[P^\alpha, P_\nu]} M^{\beta\gamma} + P^\alpha [M^{\beta\gamma}, P_\nu] \right) \\
 &= \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\alpha\beta\gamma} P^\alpha (-i) (\eta^\beta{}_\nu P^\gamma - \eta^\gamma{}_\nu P^\beta) \\
 &= -\frac{i}{2} \epsilon_{\mu\alpha\beta\gamma} P^\alpha P^\gamma + \frac{i}{2} \epsilon_{\mu\alpha\beta\nu} P^\alpha P^\beta \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Ensuite, on a:

$$\begin{aligned}
 [W_\mu, M_{\nu\beta}] &= \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\alpha\beta\gamma} [P^\alpha M^{\beta\gamma}, M_{\nu\beta}] \\
 &= \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\alpha\beta\gamma} \left( [P^\alpha, M_{\nu\beta}] M^{\beta\gamma} + P^\alpha [M^{\beta\gamma}, M_{\nu\beta}] \right) \\
 &= \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\alpha\beta\gamma} \left\{ i(\delta_\nu{}^\alpha P_\beta - \delta_\beta{}^\alpha P_\nu) M^{\beta\gamma} \right. \\
 &\quad \left. - i P^\alpha (\delta^\beta{}_\nu M^{\gamma\beta} - \delta^\gamma{}_\nu M^{\beta\beta} - \delta^\beta{}_\beta M^{\gamma\nu} + \delta^\gamma{}_\beta M^{\beta\nu}) \right\} \\
 &= \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\alpha\beta\gamma} \left\{ (\delta_\nu{}^\alpha P_\beta - \delta_\beta{}^\alpha P_\nu) M^{\beta\gamma} - 2 P^\alpha (\delta^\beta{}_\nu M^{\gamma\beta} - \delta^\beta{}_\beta M^{\gamma\nu}) \right\} \\
 &= \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\alpha\beta\gamma} \left\{ (\delta_\nu{}^\alpha P_\beta - \delta_\beta{}^\alpha P_\nu) M^{\beta\gamma} + 2 P^\beta (\delta^\alpha{}_\nu M^{\gamma\beta} - \delta^\alpha{}_\beta M^{\gamma\nu}) \right\} \\
 &= \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\alpha\beta\gamma} \left\{ \delta_\nu{}^\alpha (P_\beta M^{\beta\gamma} + 2 P^\beta M^{\gamma\beta}) - \delta_\beta{}^\alpha (P_\nu M^{\beta\gamma} + 2 P^\beta M^{\gamma\nu}) \right\} \\
 &= \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\beta\gamma} (P_\beta M^{\beta\gamma} + P^\beta M^{\gamma\beta} + P^\gamma M_{\beta\beta}) \\
 &\quad - \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\beta\gamma\nu} (P_\nu M^{\beta\gamma} + P^\beta M^{\gamma\nu} + P^\gamma M_{\nu\beta})
 \end{aligned}$$

Pour réexprimer ce résultat en terme de  $W_\mu$ , on utilise la relation inverse de (1.19) :

$$\begin{aligned} \epsilon^{\alpha\beta\gamma\mu} W_\mu &= \frac{1}{2} \epsilon^{\alpha\beta\gamma\mu} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} P^{\nu M \rho\sigma} \\ &= \frac{1}{2} \left( \delta_\nu^\alpha \delta_\rho^\beta \delta_\sigma^\gamma + \delta_\nu^\beta \delta_\rho^\gamma \delta_\sigma^\alpha + \delta_\nu^\gamma \delta_\rho^\alpha \delta_\sigma^\beta \right. \\ &\quad \left. - \delta_\nu^\alpha \delta_\rho^\sigma \delta_\beta^\gamma - \delta_\nu^\beta \delta_\rho^\sigma \delta_\alpha^\gamma - \delta_\nu^\gamma \delta_\rho^\sigma \delta_\alpha^\beta \right) P^{\nu M \rho\sigma} \\ &= P^{\alpha M \beta\gamma} + P^{\beta M \gamma\alpha} + P^{\gamma M \alpha\beta} \end{aligned}$$

Donc :

$$P^{\alpha M \beta\gamma} + P^{\beta M \gamma\alpha} + P^{\gamma M \alpha\beta} = \epsilon^{\alpha\beta\gamma\mu} W_\mu$$

En substituant dans l'expression pour le commutateur on trouve :

$$\begin{aligned} [W_\mu, M_{\nu\rho}] &= \frac{i}{2} \epsilon_{\mu\nu\beta\gamma} \epsilon^{\beta\gamma\rho\sigma} W_\sigma \\ &\quad - \frac{i}{2} \epsilon_{\mu\beta\gamma\rho} \epsilon^{\beta\gamma\nu\sigma} W_\sigma \\ &= \frac{i}{2} \epsilon_{\mu\nu\beta\gamma} \epsilon^{\beta\gamma\rho\sigma} W_\sigma - \frac{i}{2} \epsilon_{\mu\beta\gamma\rho} \epsilon^{\beta\gamma\nu\sigma} W_\sigma \\ &= \frac{i}{2} (-2) (\eta_{\mu\beta} \delta_\nu^\sigma - \delta_\mu^\sigma \eta_{\beta\nu}) W_\sigma - \frac{i}{2} (-2) (\eta_{\mu\nu} \delta_\rho^\sigma - \delta_\mu^\sigma \eta_{\rho\nu}) W_\sigma \\ &= -i \eta_{\mu\beta} W_\nu + i \eta_{\mu\nu} W_\beta \\ &= -i (\eta_{\mu\nu} W_\beta - \eta_{\mu\beta} W_\nu) \end{aligned}$$

Finalement :

$$\begin{aligned}
 [W_\mu, W_\nu] &= \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\alpha\beta\gamma} [P^\alpha M^{\beta\gamma}, W_\nu] \\
 &= \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\alpha\beta\gamma} \left( \cancel{[P^\alpha, W_\nu]} M^{\beta\gamma} + P^\alpha [M^{\beta\gamma}, W_\nu] \right) \\
 &= -\frac{i}{2} \epsilon_{\mu\alpha\beta\gamma} P^\alpha (\delta_\nu^\beta W^\gamma - \delta_\nu^\gamma W^\beta) \\
 &= -\frac{i}{2} \epsilon_{\mu\alpha\nu\gamma} P^\alpha W^\gamma + \frac{i}{2} \epsilon_{\mu\alpha\beta\nu} P^\alpha W^\beta \\
 &= i \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} P^\alpha W^\beta
 \end{aligned}$$

Donc, en récapitulant :

$$\left\{ \begin{array}{l} [W_\mu, P_\nu] = 0 \\ [W_\mu, M^{\nu\sigma}] = -i (\eta_{\mu\nu} W^\sigma - \eta_{\mu\sigma} W^\nu) \\ [W_\mu, W_\nu] = i \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} P^\alpha W^\beta \end{array} \right. \quad (1.20)$$

Le vecteur de Pauli-Lubanski se transforme donc essentiellement comme un vecteur, mais ses composantes ne commutent pas entre elles. Le scalaire  $W_\mu W^\mu$  devrait donc être un invariant. En effet, on trouve :

$$[W^2, P^\mu] = 0$$

$$\begin{aligned}
 [W^2, M^{\mu\nu}] &= W^\rho [W_\rho, M^{\mu\nu}] + [W_\rho, M^{\mu\nu}] W^\rho \\
 &= -i W^\rho (\eta_{\rho\mu} W^\nu - \eta_{\rho\nu} W^\mu) + i (\eta_{\rho\mu} W^\nu - \eta_{\rho\nu} W^\mu) W^\rho \\
 &= -i (\cancel{W_\mu W^\nu} - \cancel{W_\nu W^\mu}) + i (\cancel{W_\nu W^\mu} - \cancel{W_\mu W^\nu}) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Les deux Casimirs du groupe de Poincaré sont donc :

$$P^2 = \eta_{\mu\nu} P^\mu P^\nu$$

$$W^2 = \eta_{\mu\nu} W^\mu W^\nu \quad ; \quad \text{Casimirs} \quad (1.21)$$

Il est à remarquer que  $P_\mu$  représente 4 composantes indépendantes, mais  $W_\mu$  n'en donne que 3 autres, car :

$$P^\mu W_\mu = 0 \quad (1.22)$$

Les représentations du groupe de Poincaré sont indexées par les valeurs propres de  $P^2$  et  $W^2$ . La valeur de  $P^2$  n'est pas quantifiée, vu que les composantes  $P_\mu$  commutent entre elles, mais la valeur de  $W^2$  est au contraire quantifiée, car les composantes  $W_\mu$  ne commutent pas entre elles.

1)  $P^2 > 0$  (de genre temps)

Par une transformation de Lorentz, il est toujours possible de trouver un référentiel où :

$$P^\mu = (p, 0, 0, 0) \quad (1.23)$$

Le groupe de transformations qui préserve ce choix, le petit groupe, est celui des rotations  $SO(3)$ .



Le vecteur de Pauli Lubański a la forme :

$$W_\mu = (0, \omega_1, \omega_2, \omega_3) \quad (1.24)$$

En appliquant la définition on trouve :

$$\begin{aligned} W_\mu &= \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\sigma\alpha} p^\nu M^{\sigma\alpha} \\ &= \frac{p}{2} \epsilon_{\mu 0 \rho\sigma} M^{\rho\sigma} \\ &= -\frac{p}{2} \epsilon_{0\mu\rho\sigma} M^{\rho\sigma} \end{aligned}$$

Il suit que :

$$\omega_i = -\frac{p}{2} \epsilon_{ijk} M_{jk} = -p \cdot J_i$$

(1.25)

La sous-algèbre des  $W_\mu$ ,

$$[W_\mu, W_\nu] = i \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} p^\alpha W^\beta$$

dérivent alors celle de  $SO(3)$  :

$$[J_i, J_j] = i \epsilon_{ijk} J_k$$

(1.26)

Par conséquent, le Casimir  $W^2 = -p^2 J^2$  doit donc avoir la forme :

$$W^2 = -p^2 j(j+1), \quad j: \text{spin demi-entier} \quad (1.27)$$

2)  $p^2 = 0$  (genre lumière)

Dans ce cas, on peut choisir un référentiel ou :

$$p^\mu = (p, 0, 0, p) \quad (1.28)$$

Le petit groupe est dans ce cas nous s'identifie à déterminer. On trouve ISO(2), le groupe des translations et rotations en deux dimensions.

Le vecteur de Pauli-Lubanski a la forme :

$$W_\mu = (w, 0, v, w) \quad (1.29)$$

On calcule :

$$\begin{aligned} W_\mu &= \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} p^\nu M^{\rho\sigma} \\ &= \frac{p}{2} \epsilon_{\mu 0 \rho\sigma} M^{\rho\sigma} + \frac{p}{2} \epsilon_{\mu 3 \rho\sigma} M^{\rho\sigma} \\ &= -\frac{p}{2} \epsilon_{0\mu\rho\sigma} M^{\rho\sigma} - \frac{p}{2} \epsilon_{3\mu\rho\sigma} M^{\rho\sigma} \end{aligned}$$

Ceci donne :

$$w = -\frac{p}{2} \epsilon_{3ij} M^{ij} = -p J_3 = -p R$$

$$u = -\frac{p}{2} \epsilon_{1ij} M^{ij} + p M_{02} = p (K_2 + J_1) = p T_2$$

$$v = -\frac{p}{2} \epsilon_{2ij} M^{ij} - p M_{01} = -p (K_1 + J_2) = -p T_1$$

l'algèbre des  $W_\mu$ ,

$$[W_\mu, W_\nu] = i \epsilon_{\mu\nu\sigma} p^\sigma W^\sigma$$

donne dans ce cas l'algèbre de  $ISO(2)$ .

$$[T_1, T_2] = 0$$

$$[R, T_1] = iT_2$$

(1.30)

$$[R, T_2] = -iT_1$$

Les représentations de cette algèbre dépendent en général d'un paramètre continu. En effet,  $T_{1,2}$  et  $R$  peuvent être représentés comme translations et rotations dans le plan bidimensionnel. Il est alors clair qu'en partant d'une certaine représentation avec  $T_{1,2}$  et  $R$  on peut en construire un nombre infini d'autres en appliquant une rotation  $e^{i\theta R}$  à tous, avec  $T_i' = (e^{i\theta R} T_i e^{-i\theta R})$ ; et  $R' = (e^{i\theta R} R e^{-i\theta R}) = R$ .

Le casimir est donné par :

$$W^2 = -p^2 T^2 < 0$$

Ces représentations avec un nombre quantique continu ne semblent pas être réalisées en nature.

Il existe toutefois un cas particulier qui est très important pour la physique : c'est le cas des représentations avec

$$W^2 = 0 \quad (1.31)$$

Dans ce cas,  $T_1$  et  $T_2$  sont nuls et en appliquant une rotation on ne génère pas de nouvelle représentation.

Dans ce cas,  $u, v = 0$  dans la (1.29) et par conséquent  $W_\mu$  est proportionnel à  $P_\mu$  :

$$W_\mu = \lambda P_\mu, \quad \lambda = \text{hélicité} \quad (1.32)$$

L'hélicité  $\lambda$  correspond à la projection du spin le long de l'impulsion. En effet, la (1.32) implique que  $\vec{W} = \lambda \vec{P}$ , et donc  $\lambda = \frac{\vec{P} \cdot \vec{W}}{P^2}$ . Mais dans ce cas  $\vec{P} \cdot \vec{W} = p \vec{P} \cdot \vec{J}$ , et on a donc  $\lambda = \frac{\vec{P} \cdot \vec{J}}{|\vec{P}|}$ .

D'un point de vue algébrique,  $\lambda$  peut être un nombre réel quelconque. Toutefois, on obtient des représentations topologiquement bien définies du groupe de Poincaré seulement si  $\lambda$  est demi-entier :

$$\lambda = 0, \pm \frac{1}{2}, \pm 1, \pm \frac{3}{2}, \dots \quad (1.33)$$

Enfin, on note que l'opération de parité agit avec des signes opposés sur  $\vec{p}$  et  $\vec{W}$ , et change donc le signe de l'hélicité :

$$P: \lambda \rightarrow -\lambda$$

Il suit que toutes les représentations qui sont invariantes sous parité doivent nécessairement contenir des paires d'états à hélicités opposées.

### 1.3 Particules quantiques et leurs propriétés

Une particule quantique peut être caractérisée de façon abstraite en l'associant à une représentation irréductible et unitaire du groupe de Poincaré, qui réalise automatiquement les symétries requises par la relativité.

Les Casimirs correspondent à des propriétés intrinsèques de la particule :

#### 1) masse $m$

La masse  $m$  d'une particule est définie à partir du premier casimir  $P^2$  comme :

$$P^2 = m^2$$

(1.34)

La valeur de  $P^2$  dépend de l'action des translations, et est un paramètre qui peut être varié continuellement dans la théorie.

2) spin  $s$

Le spin  $s$  d'une particule est défini à partir du deuxième Casimir  $W^2$  comme

$$W^2 = \begin{cases} -m^2 s(s+1) & , \text{ si } m \neq 0 \\ 0 \text{ mais } W^\mu = s P^\mu & , \text{ si } m = 0 \end{cases} \quad (1.35)$$

La valeur de  $W^2$  dépend de la partie matérielle à dimension finie de l'action des transformations de Lorentz, c'est-à-dire de la matrice  $(S^{\mu\nu})^\alpha_\beta$  seulement, et peut donc être choisie seulement dans un ensemble restreint de possibilités.

Les générateurs correspondent au contraire à des quantités conservées par la dynamique de la particule. En particulier :

- 1)  $P^0$  : énergie
- 2)  $P^i$  : quantité de mouvement
- 3)  $M^{0i}$  : moment "temporel"
- 4)  $M^{ij}$  : moment cinétique

## 2 THEORIES DE CHAMPS RELATIVISTES CLASSIQUES

### 2.1 Motivations générales

Nous savons qu'il est possible de formuler l'électrodynamique comme une théorie d'ondes manifestement relativiste, et que la généralisation relativiste de la mécanique quantique a elle aussi la forme d'une théorie d'ondes relativistes. Nous allons voir que ces deux types de théories peuvent en réalité être incorporés dans un seul et même contexte et être interprétées comme des théories de champs relativistes classiques décrivant des particules quantiques mais isolées, et se différencient par la masse et le spin de ces particules.

La formulation lagrangienne de ce type de théories permet de classifier et d'étudier de façon très efficace les propriétés de symétrie. En effet, la condition nécessaire et suffisante afin qu'une théorie réalise une certaine symétrie et que l'action soit invariante sous cette symétrie. Les champs locaux qui paramétrisent la théorie auront des règles de transformations définies sous la symétrie. En d'autres termes, ils formeront des représentations de toute symétrie requise pour la théorie. Enfin, il est possible de démontrer de façon très générale dans ce contexte que toute symétrie implique l'existence d'un courant satisfaisant une équation de continuité et donc d'une charge conservée.

En passant à une formulation Hamiltonienne de la théorie, il est possible de montrer que les charges conservées associées aux symétries de la théorie représentent en fait les générateurs de l'algèbre de symétrie, dans le formalisme des parenthèses de Poisson.

Toute théorie de champs relativiste doit en particulier être covariante sous transformations de Poincaré. Les champs locaux doivent donc former des représentations du groupe de Poincaré qui sont physiquement acceptables. Nous avons vu que ces représentations sont caractérisées par une masse  $m$ , qui peut avoir une valeur arbitraire mais réelle, et un spin  $s$ , qui peut avoir seulement des valeurs quantifiées en demi-entiers :  $0, \frac{1}{2}, 1, \dots$

Il existe donc un nombre discret de théories correspondant chacune à un spin  $s$  déterminé, mais pouvant avoir une masse  $m$  arbitraire. Les plus pertinentes sont en fait les trois premières : la théorie de Klein-Gordon, basée sur un champ scalaire, la théorie de Dirac, basée sur un champ spinoriel, et la théorie de Proca-Maxwell, basée sur un champ vectoriel.



Une théorie de champs peut aussi avoir d'autres symétries internes, celles-ci peuvent être soit globales, c'est-à-dire dépendre de paramètres qui sont limités à être constants dans l'espace-temps, ou locales, c'est-à-dire dépendre de paramètres qui peuvent dépendre des coordonnées de l'espace-temps. Ces dernières symétries ont un rôle très important en ce qui concerne les interactions fondamentales, et généralisent la symétrie de jauge rencontrée dans l'électrodynamique.

## 2.2 Formulation Lagrangienne

Considérons un ensemble de champs locaux  $\phi_A(x)$ , où  $A$  est l'indice d'une représentation du groupe de Lorentz. Ces champs pourraient être la partie d'onde d'une théorie quantique, et satisfont une équation différentielle locale et linéaire. Il est alors possible de traiter cette équation du mouvement comme un système dynamique classique. En particulier, on peut considérer une action

$$S = \int d^4x \mathcal{L}[\phi_A(x), \partial_\mu \phi_A(x)] \quad (2.1)$$

et réaliser les équations du mouvement comme équations d'Euler-Lagrange impliquées par un principe de moindre action. Les équations sont facilement dérivées en variant (2.1)

On trouve :

$$\begin{aligned}
 \delta S &= \int d^4x \delta \mathcal{L} [\phi_A, \partial_\mu \phi_A] \\
 &= \int d^4x \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_A} \delta \phi_A + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_A)} \delta (\partial_\mu \phi_A) \right] \\
 &= \int d^4x \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_A} \delta \phi_A + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_A)} \partial_\mu \delta \phi_A \right] \\
 &= \int d^4x \left[ \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_A} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_A)} \right) \delta \phi_A \right. \\
 &\quad \left. + \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_A)} \delta \phi_A \right) \right]
 \end{aligned}$$

En assumant que les champs et leurs variations tendent à zéro à l'infini, on peut négliger la dérivée totale dans la deuxième ligne. La stationnarité de  $S$ ,  $\delta S = 0$ , est alors équivalente à l'équation d'Euler-Lagrange :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_A} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_A)} = 0 \quad (2.2)$$

### 2.3 Symétries et charges conservées.

Supposons que l'action  $S$  soit invariante sous une certaine transformation infinitésimale combinée des coordonnées et des champs :

$$\begin{cases} x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu \\ \phi_A(x) \rightarrow \phi'_A(x) = \phi_A(x) + \delta_0 \phi_A(x) \end{cases} \quad (2.3)$$

Les champs et leurs dérivés ont une transformation qui est induite d'une part par le changement  $\delta x^\mu$  de leur argument et d'autre part par le changement  $\delta_0 \phi_A$  des champs. On trouve, au premier ordre :

$$\begin{aligned} \cdot \phi'_A(x') &= \phi_A(x') + \delta_0 \phi_A(x') \\ &= \phi_A(x + \delta x) + \delta_0 \phi_A(x + \delta x) \\ &= \phi_A(x) + \delta_0 \phi_A(x) + \partial_\nu \phi_A(x) \delta x^\nu \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cdot \partial_\mu \phi'_A(x') &= \frac{\partial}{\partial x'^\mu} \phi'_A(x') = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\rho} \phi'_A(x') \\ &= (\delta_\mu^\rho - \partial_\mu \delta x^\rho) \partial_\rho (\phi_A(x) + \delta_0 \phi_A(x) + \partial_\nu \phi_A(x) \delta x^\nu) \\ &= \partial_\mu \phi_A(x) + \partial_\mu \delta_0 \phi_A(x) + \partial_\mu (\partial_\nu \phi_A(x) \delta x^\nu) - \partial_\mu \delta x^\rho \partial_\rho \phi_A(x) \\ &= \partial_\mu \phi_A(x) + \partial_\mu \delta_0 \phi_A(x) + \partial_\mu \partial_\nu \phi_A(x) \delta x^\nu + \cancel{\partial_\nu \phi_A(x) \partial_\mu \delta x^\nu} \\ &\quad - \cancel{\partial_\mu \delta x^\nu \partial_\nu \phi_A(x)} \\ &= \partial_\mu \phi_A(x) + \partial_\mu \delta_0 \phi_A(x) + \partial_\mu \partial_\nu \phi_A(x) \delta x^\nu \end{aligned}$$

Donc, les variations totales de chaque objet sous la transformation ont un terme provenant de  $\delta_0 \phi_A$  et un terme de transport provenant de  $\delta x^\mu$  :

$$\begin{cases} \delta \phi_A = \delta_0 \phi_A + \partial_\nu \phi_A \delta x^\nu \\ \delta(\partial_\mu \phi_A) = \partial_\mu \delta_0 \phi_A + \partial_\mu \partial_\nu \phi_A \delta x^\nu \end{cases} \quad (2.4)$$

On observe que la variation de la densité du champ est reliée à la variation du champ lui-même et des coordonnées par la relation:

$$\delta(\partial_\mu \phi_A) = \partial_\mu(\delta\phi_A) - \partial_\nu \phi_A \partial_\mu \delta X^\nu \quad (2.5)$$

La variation de la densité de Lagrangien  $\mathcal{L}$  sous la transformation infinitésimale  $\delta$  est donnée par:

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_A} \delta \phi_A + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_A)} \delta(\partial_\mu \phi_A) \\ &= \left[ \frac{d\mathcal{L}}{dx^\mu} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_A} \partial_\mu \phi_A - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \phi_A)} \partial_\mu \partial_\nu \phi_A \right] \delta X^\mu \\ &\quad + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_A} \delta \phi_A + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_A)} \delta(\partial_\mu \phi_A) \\ &= \partial_\mu \mathcal{L} \delta X^\mu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_A} (\delta \phi_A - \partial_\mu \phi_A \delta X^\mu) \\ &\quad + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_A)} (\delta(\partial_\mu \phi_A) - \partial_\mu \partial_\nu \phi_A \delta X^\nu) \\ (2.5) \\ &= \partial_\mu \mathcal{L} \delta X^\mu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_A} (\delta \phi_A - \partial_\nu \phi_A \delta X^\nu) \\ &\quad + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_A)} (\partial_\mu(\delta \phi_A) - \partial_\nu \phi_A \partial_\mu \delta X^\nu - \partial_\mu \partial_\nu \phi_A \delta X^\nu) \\ &= \partial_\mu \mathcal{L} \delta X^\mu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_A} (\delta \phi_A - \partial_\nu \phi_A \delta X^\nu) \\ &\quad + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_A)} \partial_\mu (\delta \phi_A - \partial_\nu \phi_A \delta X^\nu) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \partial_\mu \mathcal{L} \delta X^\mu + \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_A} - \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_A)} \right) (\delta \phi_A - \partial_\nu \phi_A \delta X^\nu) \\
&\quad + \partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_A)} (\delta \phi_A - \partial_\nu \phi_A \delta X^\nu) \right]
\end{aligned}$$

La variation de la mesure d'intégration dans l'action est, elle, donnée par :

$$\begin{aligned}
\delta(d^4x) &= \left[ \det \left( \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \right) - 1 \right] d^4x \\
&= \left[ \det (\delta_\nu^\mu + \partial_\nu \delta X^\mu) - 1 \right] d^4x \\
&= \left[ (1 + \text{tr}(\partial_\nu \delta X^\mu)) - 1 \right] d^4x \\
&= \partial_\mu \delta X^\mu d^4x
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Au total, la variation de l'action  $S = \int d^4x \mathcal{L}$  est donnée par l'expression suivante :

$$\begin{aligned}
\delta S &= \int \delta(d^4x \mathcal{L}) = \int [\delta(d^4x) \mathcal{L} + d^4x \delta \mathcal{L}] \\
&= \int d^4x \left\{ \partial_\mu \delta X^\mu \mathcal{L} + \partial_\mu \mathcal{L} \delta X^\mu \right. \\
&\quad \left. + \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_A} - \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_A)} \right) (\delta \phi_A - \partial_\nu \phi_A \delta X^\nu) \right. \\
&\quad \left. + \partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_A)} (\delta \phi_A - \partial_\nu \phi_A \delta X^\nu) \right] \right\} \\
&= \int d^4x \left\{ \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_A} - \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_A)} \right) (\delta \phi_A - \partial_\nu \phi_A \delta X^\nu) \right. \\
&\quad \left. + \partial_\mu \left[ \mathcal{L} \delta X^\mu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_A)} (\delta \phi_A - \partial_\nu \phi_A \delta X^\nu) \right] \right\}
\end{aligned} \tag{2.7}$$

La première ligne s'annule comme conséquence des équations d'Euler-Lagrange (2.2), qui représentent les équations du mouvement de la théorie et peuvent donc être imposées. Il reste alors :

$$\delta S = - \int d^4x \partial_\mu \delta Z^\mu \tag{2.8}$$

avec :

$$\delta Z^\mu = - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_A)} \delta \phi_A + \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_A)} \partial^\nu \phi_A - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L} \right] \delta X_\nu \tag{2.9}$$

Le théorème de Noether est l'affirmation que si  $S$  est invariante sous la transformation infinitésimale  $\delta$ , c'est-à-dire si  $\delta S = 0$ , il existe alors un courant  $\delta Z^\mu$  donné par la (2.9), qui en vertu de la (2.8) doit être conservé.

Pour dériver une quantité proprement normalisée et finie, il convient de factoriser la transformation  $\delta$  comme un paramètre infinitésimal  $\delta \epsilon$  fois un générateur  $\frac{\delta}{\delta \epsilon}$  :  $\delta = \delta \epsilon \frac{\delta}{\delta \epsilon}$ . On peut alors factoriser le paramètre  $\delta \epsilon$  dans les deux membres des équations (2.8) et (2.9), et le simplifier. Le courant qu'on obtient ainsi est donné par  $J_\epsilon^\mu = \frac{\delta Z^\mu}{\delta \epsilon}$ , c'est à dire :

$$J_\epsilon^\mu = - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_A)} \frac{\delta \phi_A}{\delta \epsilon} + \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_A)} \partial^\nu \phi_A - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L} \right] \frac{\delta X_\nu}{\delta \epsilon} \tag{2.10}$$

Si, l'action est invariante,  $\frac{\delta S}{\delta \epsilon} = 0$ , ce courant est conservé :

$$\partial_\mu J^\mu_\epsilon = 0 \quad (2.11)$$

Il définit alors une charge conservée dans le temps, qui est donnée par :

$$Q_\epsilon = \int d^3\vec{x} J^0_\epsilon \quad (2.12)$$

$$= \int d^3\vec{x} \left[ -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_A} \frac{\delta \phi_A}{\delta \epsilon} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_A} \partial^\nu \phi_A \frac{\delta x_\nu}{\delta \epsilon} - h \frac{\delta x^0}{\delta \epsilon} \right]$$

En effet, l'équation de continuité (2.11) implique que :

$$\frac{dQ_\epsilon}{dt} = \int d^3\vec{x} \partial_0 J^0_\epsilon = - \int d^3\vec{x} \partial_i J^i_\epsilon = 0 \quad (2.13)$$

En résumé, à chaque symétrie continue à un paramètre  $\epsilon$  il correspond un courant  $J^\mu_\epsilon$  satisfaisant une équation de continuité, et donc une charge  $Q_\epsilon$  qui est conservée dans le temps dans la théorie. La forme du courant et de la charge est complètement déterminée par les lois de transformation  $\frac{\delta x^\mu}{\delta \epsilon}$  et  $\frac{\delta \phi_A}{\delta \epsilon}$  des coordonnées et des champs sous la symétrie en question, et peut être construite plus explicitement cas par cas.

## 2.4 Symétries internes

Considérons d'abord le cas d'un groupe de symétries internes, qui rappelés-le sont toutefois optionnelles. Les transformations n'affectent pas les coordonnées de l'espace-temps  $x^\mu$ , mais agissent de façon non banale sur les champs  $\phi_A$ . On aura alors les transformations  $x'^\mu = x^\mu$  et  $\phi'_A(x) = e^{i\alpha_i T^i} \phi_A(x) \approx \phi_A(x) + i\alpha_i T^i \phi_A$ , où  $T^i$  sont les générateurs de l'algèbre dans une certaine représentation matricielle dont nous n'écrivons pas explicitement les indices ( $T^i$  est une matrice et chaque champ  $\phi_A$  un vecteur), et  $\alpha_i$  sont des paramètres arbitraires infinitésimaux. On a alors  $\delta x^\mu = 0$  et  $\delta \phi_A = i\delta\alpha_i T^i \phi_A$ , et donc :

$$\left. \begin{array}{l} \delta x^\mu = 0 \\ \delta \phi_A = i\delta\alpha_i T^i \phi_A \end{array} \right\} \quad (\delta \phi_A = i\delta\alpha_i T^i \phi_A) \quad (2.14)$$

L'équation (2.10) prise avec  $\epsilon \rightarrow \alpha^i$  donne  $(\frac{\delta \phi_A}{\delta \alpha^i} = i T^i \phi_A, \frac{\delta x^\nu}{\delta \alpha^i} = 0)$

$$J^{\mu i} = -i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_A)} T^i \phi_A \quad (2.15)$$

Les charges correspondantes sont :

$$\begin{aligned} Q^i &= \int d^3\vec{x} J^{0i} \\ &= -i \int d^3\vec{x} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_A} T^i \phi_A \end{aligned} \quad (2.16)$$



## 2.5 Symétries d'espace-temps

Considérons maintenant le cas du groupe de transformations d'espace-temps de Poincaré, qui doivent représenter des symétries de toute théorie relativiste. Il convient de considérer séparément les translations et les transformations de Lorentz.

Sous une translation infinitésimale, les coordonnées de l'espace temps changent comme  $x'^{\mu} = x^{\mu} + a^{\mu}$ , tandis que les champs doivent être complexivement invariants, c'est-à-dire  $\phi'_A(x') = \phi_A(x)$ . On a donc dans ce cas  $\delta x^{\mu} = \delta a^{\mu}$  et  $\delta \phi_A = 0$ . Ceci implique que la transformation ponctuelle du champ doit être  $\delta_0 \phi_A = -\delta a^{\mu} \partial_{\mu} \phi_A$ . La transformation est donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta x^{\mu} = i \delta a_{\alpha} \hat{P}^{\alpha} x^{\mu} \\ \delta \phi_A = 0 \end{array} \right. \quad (\delta_0 \phi_A = -i \delta a_{\alpha} \hat{P}^{\alpha} \phi_A) \quad (2.17)$$

avec :

$$\hat{P}^{\alpha} = -i \partial_{\nu}^{\alpha} \quad (2.18)$$

L'équation (2.10) avec  $\epsilon \rightarrow a_{\alpha}$  implique que les courants conservés sont donnés par  $(\frac{\delta \phi_A}{\delta a_{\alpha}} = 0, \frac{\delta x_{\nu}}{\delta a_{\alpha}} = \delta_{\nu}^{\alpha})$  :

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \phi_A)} \partial^{\nu} \phi_A - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L} \quad (2.19)$$

Ceci est appelé le tenseur énergie-impulsion canonique de la théorie, et les charges conservées correspondent à la 4-impulsion:

$$\begin{aligned}
 P^\alpha &= \int d^3\vec{x} T^{0\alpha} \\
 &= i \int d^3\vec{x} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_A} \hat{P}^\alpha \phi_A - \int d^3\vec{x} \eta^{0\alpha} \mathcal{L}
 \end{aligned} \tag{2.20}$$

Sous une transformation de Lorentz infinitésimale, les coordonnées se transforment avec une matrice de Lorentz du type  $\Lambda^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu + \omega^\mu_\nu$ , avec  $\omega_{\mu\nu}$  infinitésimal et antisymétrique:  $x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu \simeq x^\mu + \omega^\mu_\nu x^\nu$ . Les champs doivent se transformer en conséquence avec une certaine matrice  $U_{AB} = e^{-\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} S^{\mu\nu}_{AB}}$  qui réalise la transformation  $\Lambda^\mu_\nu$  dans une certaine représentation arbitraire du groupe de Lorentz, dans laquelle les générateurs sont les matrices  $S^{\mu\nu}_{AB}$ ; on a donc sur les champs:  $\phi'_A(x') = U_{AB} \phi_B(x) \simeq \phi_A(x) - \frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} S^{\mu\nu}_{AB} \phi_B$ .

On a donc dans ce cas  $\delta x^\mu = \delta \omega^\mu_\nu x^\nu$  et  $\delta \phi_A = -\frac{i}{2} \delta \omega_{\mu\nu} S^{\mu\nu}_{AB} \phi_B$ , ce qui implique que  $\delta_0 \phi_A = -\delta \omega^\mu_\nu x^\nu \partial_\mu \phi_A - \frac{i}{2} \delta \omega_{\mu\nu} S^{\mu\nu}_{AB} \phi_B$ . La transformation est donc donnée par:

$$\left. \begin{aligned}
 \delta x^\mu &= \frac{1}{2} \delta \omega_{\alpha\beta} \hat{L}^{\alpha\beta} x^\mu \\
 \delta \phi_A &= -\frac{i}{2} \delta \omega_{\alpha\beta} S^{\alpha\beta}_{AB} \phi_B
 \end{aligned} \right\} \quad \left( \delta_0 \phi_A = -\frac{i}{2} \delta \omega_{\alpha\beta} \hat{M}^{\alpha\beta}_{AB} \phi_B \right) \tag{2.21}$$

avec :

$$\left. \begin{aligned} \hat{L}^{\alpha\beta} &= i(X^\alpha \partial^\beta - X^\beta \partial^\alpha) \\ \hat{M}_A^{\alpha\beta B} &= \hat{L}^{\alpha\beta} \delta_A^B + S_A^{\alpha\beta B} \end{aligned} \right\} \quad (2.72)$$

L'équation (2.10) évaluée avec  $\epsilon \rightarrow \frac{1}{2} \omega_{\alpha\beta}$  donne alors les courants suivants ( $\frac{\delta \phi_A}{\delta \frac{1}{2} \omega_{\alpha\beta}} = -i S_A^{\alpha\beta B} \phi_B$ ,  $\frac{\delta X_\nu}{\delta \frac{1}{2} \omega_{\alpha\beta}} = \delta_\nu^\alpha X^\beta - \delta_\nu^\beta X^\alpha$ ):

$$\begin{aligned} K^{\mu\alpha\beta} &= - \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_A)} \partial^\alpha \phi_A - \eta^{\mu\alpha} \mathcal{L} \right] X^\beta \\ &\quad + \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_A)} \partial^\beta \phi_A - \eta^{\mu\beta} \mathcal{L} \right] X^\alpha \\ &\quad - i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_A)} S_A^{\alpha\beta B} \phi_B \end{aligned} \quad (2.73)$$

Les charges conservées correspondantes sont

$$\begin{aligned} M^{\alpha\beta} &= \int d^3\vec{x} K^{0\alpha\beta} \\ &= -i \int d^3\vec{x} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_A} \hat{M}_A^{\alpha\beta B} \phi_B + \int d^3\vec{x} (\eta^{0\alpha} X^\beta - \eta^{0\beta} X^\alpha) \mathcal{L} \end{aligned} \quad (2.74)$$

Il est clair de la forme des équations (2.73) et (2.74) que le tenseur  $K^{\mu\alpha\beta}$  représente la 4-courant de 4-moment cinétique de la théorie de champs, et que les charges  $M^{\mu\nu}$  représentent le 4-moment cinétique de la théorie, qui généralise le moment cinétique habituel  $M^{ij}$  lié aux rotations par les quantités  $M^{0i}$  liées aux boosts.

Il est possible de définir à partir de  $T^{\mu\alpha}$  et de  $K^{\mu\alpha\beta}$  de nouveaux tenseurs  $\Theta^{\mu\nu}$  et  $\mathcal{J}^{\mu\nu\beta}$  qui ont une forme plus intéressante, tout en étant équivalents à  $T^{\mu\alpha}$  et  $K^{\mu\alpha\beta}$ .  
 Pour ce faire, on définit d'abord le courant de Lorentz  $\Sigma^{\mu\alpha\beta}$  représentant la partie de spin intrinsèque de (2.73):

$$\Sigma^{\mu\alpha\beta} = -i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_A)} \int_A^{\alpha\beta} \phi_B \quad (2.75)$$

On observe ensuite que

$$\begin{aligned} \partial_\mu \Sigma^{\mu\alpha\beta} &= \partial_\mu [K^{\mu\alpha\beta} + (T^{\mu\alpha} \chi^\beta - T^{\mu\beta} \chi^\alpha)] \\ &= \cancel{\partial_\mu K^{\mu\alpha\beta}} + \cancel{\partial_\mu T^{\mu\alpha} \chi^\beta} - \cancel{\partial_\mu T^{\mu\beta} \chi^\alpha} \\ &\quad - \partial_\mu \chi^\alpha T^{\mu\beta} + \partial_\mu \chi^\beta T^{\mu\alpha} \\ &= -(T^{\alpha\beta} - T^{\beta\alpha}) \end{aligned} \quad (2.76)$$

La partie antisymétrique de  $T^{\mu\nu}$  est donc liée à la contribution de spin dans  $K^{\mu\alpha\beta}$ . On peut alors définir le nouveau tenseur de Belinfante:

$$\Theta^{\mu\nu} = T^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \partial_\rho (\Sigma^{\rho\mu\nu} - \Sigma^{\mu\rho\nu} - \Sigma^{\nu\rho\mu}) \quad (2.77)$$

et son compagnon angulaire:

$$\mathcal{J}^{\mu\nu\beta} = K^{\mu\nu\beta} - \frac{1}{2} \partial_\rho [(\Sigma^{\rho\mu\nu} - \Sigma^{\mu\rho\nu} - \Sigma^{\nu\rho\mu}) \chi^\beta - (\Sigma^{\rho\mu\beta} - \Sigma^{\mu\rho\beta} - \Sigma^{\beta\rho\mu}) \chi^\nu] \quad (2.78)$$

Les termes ajoutés consistent à ajouter à chaque courant  $J^\mu$  un terme du type  $\partial_\nu X^{\mu\nu}$  avec  $X^{\mu\nu}$  antisymétrique :  $X^{\mu\nu} = -X^{\nu\mu}$ . Grâce à cette dernière propriété, ce type de terme additif est automatiquement conservé, puisque  $\partial_\mu \partial_\nu X^{\mu\nu} = 0$ , et ne contribue pas aux charges conservées, étant donné que  $\partial_\nu X^{\nu 0} = \partial_i X^{i0}$ , et peut donc être ajouté sans affecter le contenu physique des courants et des charges. L'avantage des nouvelles quantités (2.27) et (2.28) est que la première est symétrique par construction :

$$\Theta^{\mu\nu} = \Theta^{\nu\mu} \tag{2.29}$$

et que la deuxième peut s'exprimer de façon extrêmement simple en fonction de la première :

$$\begin{aligned}
 J^{\mu\nu\rho} &= -T^{\mu\nu} X^\rho + T^{\mu\rho} X^\nu + \cancel{\Sigma^{\mu\nu\rho}} \\
 &\quad - \frac{1}{2} \left[ \partial_\nu (\Sigma^{\mu\nu\rho} - \Sigma^{\nu\mu\rho} - \Sigma^{\rho\nu\mu}) X^\rho \right. \\
 &\quad \quad - \partial_\nu (\Sigma^{\mu\rho\nu} - \Sigma^{\rho\mu\nu} - \Sigma^{\nu\rho\mu}) X^\nu \\
 &\quad \quad \left. + (\cancel{\Sigma^{\rho\mu\nu}} - \cancel{\Sigma^{\mu\rho\nu}} - \cancel{\Sigma^{\nu\rho\mu}}) - (\cancel{\Sigma^{\nu\rho\mu}} - \cancel{\Sigma^{\mu\rho\nu}} - \cancel{\Sigma^{\rho\mu\nu}}) \right] \\
 &= -\Theta^{\mu\nu} X^\rho + \Theta^{\mu\rho} X^\nu
 \end{aligned} \tag{2.30}$$

On remarque également que la conservation du nouveau tenseur  $J^{\mu\nu\sigma}$  est une simple conséquence de la conservation de  $\Theta^{\mu\nu}$  et du fait qu'il est symétrique :

$$\partial_\mu J^{\mu\alpha\beta} = -\partial_\mu \Theta^{\mu\alpha} x^\beta + \partial_\mu \Theta^{\mu\beta} x^\alpha + (\Theta^{\alpha\beta} - \Theta^{\beta\alpha}) = 0 \quad (2.31)$$

Finalement, en utilisant les tenseurs améliorés  $\Theta^{\mu\alpha}$  et  $J^{\mu\alpha\beta}$ , les charges conservées liées à l'invariance sous transformations de Poincaré s'écrivent simplement comme :

$$\left\{ \begin{array}{l} P^\mu = \int d^3\vec{x} \Theta^{0\mu} \\ M^{\mu\nu} = \int d^3\vec{x} (-\Theta^{0\mu} x^\nu + \Theta^{0\nu} x^\mu) \end{array} \right. \quad (2.32)$$

Les expressions montrent clairement que les quantités liées à l'invariance sous translations sont des moments linéaires et celles liées à l'invariance sous rotations de Lorentz sont des moments angulaires.

## 2.6 Formulation Hamiltonienne

Pour passer à une formulation Hamiltonienne d'une théorie de champs, on procède comme dans le cas d'une théorie ponctuelle. On veut passer d'équations qui sont en général du deuxième degré dans les dérivées temporelles à des équations du premier degré dans les dérivées temporelles. On définit les moments canoniques comme

$$\pi_A = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_A} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \phi_A)} \quad (2.33)$$

On utilise ensuite ces moments canoniques pour effectuer la transformation de Legendre habituelle et réexprimer  $\dot{\phi}_A$  en fonction de  $\pi_A$  et de  $\phi_A, \partial_i \phi_A$ . Les variables canoniques sont alors  $\phi_A, \partial_i \phi_A$  et  $\pi_A$ .

Pour traiter de façon plus efficace les dérivées spatiales des champs et rendre la formulation formellement plus semblable à celle des théories ponctuelles, il est très utile de définir la dérivée fonctionnelle comme :

$$\frac{\delta g(\vec{x}, t)}{\delta g(\vec{y}, t)} = \delta^3(\vec{x} - \vec{y}, t) \quad (2.34)$$

pour toute fonction  $g$  sur l'espace temps.

Sur un fonctionnel des variables canoniques du type :

$$f(\vec{x}, t) = f[\phi_A(\vec{x}, t), \partial_i \phi_A(\vec{x}, t), \pi^A(\vec{x}, t)] \quad (2.35)$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \frac{\delta f(\vec{x}, t)}{\delta \phi_A(\vec{y}, t)} &= \frac{\partial f}{\partial \phi_A}(\vec{x}, t) \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) + \frac{\partial f}{\partial (\partial_i \phi_A)}(\vec{x}, t) \partial_i \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \\ &= \left( \frac{\partial f}{\partial \phi_A} - \partial_i \frac{\partial f}{\partial (\partial_i \phi_A)} \right) (\vec{x}, t) \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \end{aligned} \quad (2.36)$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta f(\vec{x}, t)}{\delta \pi^A(\vec{y}, t)} &= \frac{\partial f}{\partial \pi^A}(\vec{x}, t) \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \\ &= \frac{\partial f}{\partial \pi^A}(\vec{x}, t) \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \end{aligned} \quad (2.37)$$

Sur un fonctionnel intégral sur les trois coordonnées spatiales, du type :

$$F(t) = \int d^3\vec{x} f(\vec{x}, t) = \int d^3\vec{x} f[\phi_A(\vec{x}, t), \partial_i \phi_A(\vec{x}, t), \pi^A(\vec{x}, t)] \quad (2.38)$$

on a par conséquent :

$$\begin{cases} \frac{\delta F(t)}{\delta \phi_A(\vec{x}, t)} = \left( \frac{\partial f}{\partial \phi_A} - \partial_i \frac{\partial f}{\partial (\partial_i \phi_A)} \right) (\vec{x}, t) \\ \frac{\delta F(t)}{\delta \pi^A(\vec{x}, t)} = \frac{\partial f}{\partial \pi^A}(\vec{x}, t) \end{cases} \quad (2.39)$$



On peut définir des parenthèses de Poisson sur des fonctionnels du type (2.35) comme :

$$\{f_1(\vec{x}_1, t), f_2(\vec{x}_2, t)\} = \int d^3y \left( \frac{\delta f_1(\vec{x}_1, t)}{\delta \phi_A(\vec{y}, t)} \frac{\delta f_2(\vec{x}_2, t)}{\delta \pi^A(\vec{y}, t)} - \frac{\delta f_2(\vec{x}_2, t)}{\delta \pi^A(\vec{y}, t)} \frac{\delta f_1(\vec{x}_1, t)}{\delta \phi_A(\vec{y}, t)} \right) \quad (2.40)$$

On vérifie facilement que cette parenthèse satisfait les mêmes propriétés algébriques qu'un commutateur, comme conséquence de la règle de Leibnitz satisfaite par la dérivée fonctionnelle. En particulier :

$$1) \{f_1, f_2\} = -\{f_2, f_1\}$$

$$2) \{f_1, f_2 g_2\} = \{f_1, f_2\} g_2 + \{f_1, g_2\} f_2$$

(2.41)

$$3) \{f_1, \{f_2, f_3\}\} + \{f_2, \{f_3, f_1\}\} + \{f_3, \{f_1, f_2\}\} = 0$$

On calcule facilement les parenthèses de base entre variables canoniques :

$$\{\phi_A(\vec{x}_1, t), \phi_B(\vec{x}_2, t)\} = 0$$

$$\{\pi^A(\vec{x}_1, t), \pi^B(\vec{x}_2, t)\} = 0$$

$$\{\phi_A(\vec{x}_1, t), \pi^B(\vec{x}_2, t)\} = \delta_A^B \delta^3(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)$$

(2.42)

$$\{\pi^A(\vec{x}_1, t), \phi_B(\vec{x}_2, t)\} = -\delta_B^A \delta^3(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)$$

On trouve également.

$$\left\{ \begin{array}{l} \{ \phi_A(\vec{x}, t), f(\vec{y}, t) \} = \frac{\delta f(\vec{y}, t)}{\delta \pi^A(\vec{x}, t)} \\ \{ \pi^A(\vec{x}, t), f(\vec{y}, t) \} = - \frac{\delta f(\vec{y}, t)}{\delta \phi_A(\vec{x}, t)} \end{array} \right. \quad (2.43)$$

En substituant ces relations dans la définition (2.40) on trouve finalement la relation:

$$\left\{ f_1(\vec{x}_1, t), f_2(\vec{x}_2, t) \right\} = \int d^3\vec{y} \left( \left\{ \phi_A(\vec{y}, t), f_1(\vec{x}_1, t) \right\} \left\{ \pi^A(\vec{y}, t), f_2(\vec{x}_2, t) \right\} - \left\{ \pi^A(\vec{y}, t), f_2(\vec{x}_2, t) \right\} \left\{ \phi_A(\vec{y}, t), f_1(\vec{x}_1, t) \right\} \right) \quad (2.44)$$

Sur les fonctionnels intégrés du type (2.38), toutes les définitions et relations valables pour les fonctionnels non intégrés se transportent simplement et sans modifications. On a

$$\left\{ F_1(t), F_2(t) \right\} = \int d^3\vec{y} \left( \frac{\delta F_1(t)}{\delta \phi_A(\vec{y}, t)} \frac{\delta F_2(t)}{\delta \pi^A(\vec{y}, t)} - \frac{\delta F_1(t)}{\delta \pi^A(\vec{y}, t)} \frac{\delta F_2(t)}{\delta \phi_A(\vec{y}, t)} \right) \quad (2.45)$$

puis :

$$\left\{ \begin{array}{l} \{ \phi_A(\vec{x}, t), F(t) \} = \frac{\delta F(t)}{\delta \pi^A(\vec{x}, t)} \\ \{ \pi^A(\vec{x}, t), F(t) \} = - \frac{\delta F(t)}{\delta \phi_A(\vec{x}, t)} \end{array} \right. \quad (2.46)$$

et finalement :

$$\left\{ F_1(t), F_2(t) \right\} = \int d^3\vec{y} \left( \left\{ \phi_A(\vec{y}, t), F_1(t) \right\} \left\{ \pi^A(\vec{y}, t), F_2(t) \right\} - \left\{ \pi^A(\vec{y}, t), F_1(t) \right\} \left\{ \phi_A(\vec{y}, t), F_2(t) \right\} \right) \quad (2.47)$$

L'Hamiltonien est donné par la transformation de Legendre du Lagrangien :

$$H = \int d^3\vec{x} \mathcal{H} \quad (2.48)$$

avec

$$\mathcal{H} = \pi^A \dot{\phi}_A - \mathcal{L} \quad (2.49)$$

On calcule facilement :

$$\begin{aligned} \frac{\delta H}{\delta \phi_A} &= \int \frac{\delta \pi^B}{\delta \phi_A} \dot{\phi}_B + \int \pi^B \frac{\delta \dot{\phi}_B}{\delta \phi_A} - \int \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi_A} \\ &= \cancel{\pi^B \frac{\partial \dot{\phi}_B}{\partial \phi_A}} - \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_A} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_i \phi_B)} \frac{\partial (\partial_i \phi_B)}{\partial \phi_A} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_B} \frac{\partial \dot{\phi}_B}{\partial \phi_A} \right] \\ &= - \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_A} - \partial_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_i \phi_B)} \right] \\ &= - \left[ \cancel{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_A} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_A)}} \right] - \partial_0 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \phi_A)} \\ &= - \frac{d\pi^A}{dt} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta H}{d\pi^A} &= \int \frac{\delta \pi^B}{\delta \pi^A} \dot{\phi}_B + \int \pi^B \frac{\delta \dot{\phi}_B}{\delta \pi^A} - \int \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \pi^A} \\ &= \dot{\phi}_A + \cancel{\pi^B \frac{\partial \dot{\phi}_B}{\partial \pi^A}} - \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_B} \frac{\partial \phi_B}{\partial \pi^A} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_i \phi_B)} \frac{\partial (\partial_i \phi_B)}{\partial \pi^A} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_B} \frac{\partial \dot{\phi}_B}{\partial \pi^A} \right] \\ &= \frac{d\phi_A}{dt} \end{aligned}$$

On trouve donc les équations de Hamilton, qui substituent les équations du mouvement d'Euler-Lagrange :

$$\begin{cases} \frac{d\phi^A}{dt} = \frac{\delta H}{\delta \pi^A} = \{ \phi^A, H \} \\ \frac{d\pi^A}{dt} = - \frac{\delta H}{\delta \phi^A} = \{ \pi^A, H \} \end{cases} \quad (2.50)$$

Ces équations déterminent l'évolution temporelle dans l'espace des phases, et elles permettent de calculer la dérivée temporelle d'un fonctionnel arbitraire intégré des variables canoniques. En effet, on calcule :

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial t} + \int \frac{\delta F}{\delta \phi^A} \frac{d\phi^A}{dt} + \int \frac{\delta F}{\delta \pi^A} \frac{d\pi^A}{dt} \\ &= \frac{\partial F}{\partial t} + \int \left( \frac{\delta F}{\delta \phi^A} \frac{\delta H}{\delta \pi^A} - \frac{\delta F}{\delta \pi^A} \frac{\delta H}{\delta \phi^A} \right) \\ &= \frac{\partial F}{\partial t} + \{ F, H \} \end{aligned} \quad (2.51)$$

Cette équation montre que le changement dans le temps d'un fonctionnel intégré des variables canoniques est déterminé par sa dépendance explicite du temps, plus une évolution dynamique déterminée par sa parenthèse de Poisson avec l'Hamiltonienne. Dans ce sens,  $H$  est le générateur de l'évolution temporelle.

## 2.7 Réalisation hamiltonienne des symétries

Dans la formulation hamiltonienne, les charges conservées associées à une symétrie de la théorie génère la partie dynamique de la transformation sur les fonctionnels intégrés des variables canoniques à travers de leur parentèse de poisson avec ces derniers.

Considérons d'abord le cas d'un groupe de symétries internes. Dans ce cas, la transformation sur les variables canoniques est donnée pour ( $\delta_x(\pi^A \phi_A) = 0$ )

$$\begin{cases} \delta_x \phi_A = i \delta x^i T^i \phi_A \\ \delta_x \pi^A = -i \delta x^i \pi^A T^i = i \delta x^i T^{i+} \pi^A \end{cases} \quad (2.52)$$

et la charge conservée est :

$$\begin{aligned} Q^i &= \int d^3 \vec{x} \mathcal{J}^i 0 \\ &= -i \int d^3 \vec{x} \pi^A T^i \phi_A \end{aligned} \quad (2.53)$$

On calcule alors :

$$\begin{aligned} \frac{\delta Q^i}{\delta \phi_A} &= -i \left[ \frac{\partial \pi^B}{\partial \phi_A} T^i \phi_B + \pi^B T^i \frac{\partial \phi_B}{\partial \phi_A} \right] \\ &= -i \pi^A T^i \\ &= i T^{i+} \pi^A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta Q^i}{\delta \pi^A} &= -i \left[ \frac{\partial \pi^B}{\partial \pi^A} T^i \phi_B + \pi^B T^i \frac{\partial \phi_B}{\partial \pi^A} \right] \\ &= -i T^i \phi_A \end{aligned}$$

On a donc :

$$\left\{ \begin{aligned} \delta_\alpha \phi_A &= -\delta\alpha_i \frac{\delta Q^i}{\delta \pi^A} = -\delta\alpha_i \{ \phi_A, Q^i \} \\ \delta_\alpha \pi^A &= +\delta\alpha_i \frac{\delta Q^i}{\delta \phi_A} = -\delta\alpha_i \{ \pi^A, Q^i \} \end{aligned} \right. \quad (2.54)$$

Sur un fonctionnel intégré des variables canoniques qui ne perde pas explicitement de représentation de la symétrie, on trouve alors :

$$\begin{aligned} \delta_\alpha F &= \int \frac{\delta F}{\delta \phi_A} \delta_\alpha \phi_A + \int \frac{\delta F}{\delta \pi^A} \delta_\alpha \pi^A \\ &= -\delta\alpha_i \int \left( \frac{\delta F}{\delta \phi_A} \frac{\delta Q^i}{\delta \pi^A} - \frac{\delta F}{\delta \pi^A} \frac{\delta Q^i}{\delta \phi_A} \right) \\ &= -\delta\alpha_i \{ F, Q^i \} \end{aligned} \quad (2.55)$$

Les charges  $Q^i$  ont des poentes de Poisson entre elles qui ont une forme dictée par l'algèbre des transformations de symétrie. En effet, si l'algèbre de Lie est  $[T^i, T^j] = i f^{ijk} T^k$ , on trouve :

$$\begin{aligned}
\{Q^i, Q^j\} &= \int \left( \frac{\delta Q^i}{\delta \phi_A} \frac{\delta Q^j}{\delta \pi^A} - \frac{\delta Q^i}{\delta \pi^A} \frac{\delta Q^j}{\delta \phi_A} \right) \\
&= \int \left( \frac{\delta Q^i}{\delta \phi_A} \frac{\delta Q^j}{\delta \pi^A} - \frac{\delta Q^j}{\delta \phi_A} \frac{\delta Q^i}{\delta \pi^A} \right) \\
&= \int \left[ (-i\pi^A T^i) (-iT^j \phi_A) - (-i\pi^A T^j) (-iT^i \phi_A) \right] \\
&= - \int \pi^A [T^i, T^j] \phi_A \\
&= -i f^{ijk} \int \pi^A T^k \phi_A \\
&= f^{ijk} Q^k
\end{aligned} \tag{2.56}$$

Enfin, vu que les charges  $Q^i$  sont conservées et ne dépendent pas explicitement du temps, on déduit de l'équation (2.51) qu'elles ont des parenthèses de Poisson nulles avec l'Hamiltonienne :

$$\begin{aligned}
\{Q^i, H\} &= - \frac{\partial Q^i}{\partial t} \\
&= 0
\end{aligned} \tag{2.57}$$

Considérons maintenant les transformations de Poincaré et les charges conservées qui y sont associées. Pour une translation, on a :

$$\begin{cases} \delta_a \phi_A = -i \delta_{a\mu} \hat{P}^\mu \phi_A \\ \delta_a \pi^A = -i \delta_{a\mu} \hat{P}^\mu \pi^A \end{cases} \quad (2.58)$$

avec :

$$\hat{P}^\mu = -i \partial^\mu \quad (2.59)$$

la charge conservée est :

$$\begin{aligned} P^\mu &= \int d^3\vec{x} T^{0\mu} \\ &= i \int d^3\vec{x} \pi^A \hat{P}^\mu \phi_A - \int d^3\vec{x} \eta^{0\mu} \mathcal{L} \end{aligned} \quad (2.60)$$

Pour calculer les dérivées partielles par rapport aux variables canoniques  $\phi_A$  et  $\pi^A$ , il est nécessaire de distinguer les cas  $\mu=0$ , où  $\phi_A$  intervient, et  $\mu=i$ , où  $\phi_A$  n'intervient pas. Dans le premier cas, les variations sont données simplement par les équations (2.50) avec l'identification  $H \rightarrow P^0$  et  $\frac{d}{dt} \rightarrow +\hat{P}^0$ . Dans le deuxième cas, le calcul est le même que pour les symétries internes, et les variations sont



données par les (2.54) avec  $Q^i \rightarrow -P^i$  et  $T^i \rightarrow \hat{P}^i$ .  
Les résultats ont la même forme dans les deux cas et finalement on trouve :

$$\frac{\delta P^\mu}{\delta \phi_A} = -i \hat{P}^\mu \pi^A$$

$$\frac{\delta P^\mu}{\delta \pi^A} = i \hat{P}^\mu \phi_A$$

On a donc :

$$\begin{cases} \delta_a \phi_A = -\delta a_\mu \frac{\delta P^\mu}{\delta \pi^A} = -\delta a_\mu \{ \phi_A, P^\mu \} \\ \delta_a \pi^A = \delta a_\mu \frac{\delta P^\mu}{\delta \phi_A} = -\delta a_\mu \{ \pi^A, P^\mu \} \end{cases} \quad (2.61)$$

Sur un fonctionnel arbitraire des variables canoniques qui ne dépend pas explicitement des coordonnées, on trouve alors :

$$\delta_a F = -\delta a_\mu \{ F, P^\mu \} \quad (2.62)$$

La 4-impulsion  $P^\mu$  génère donc les translations spatio-temporelles sur les fonctionnels de la théorie à travers de sa parenthèse de Poisson avec eux. En procédant comme pour la symétrie interne, on peut également vérifier que l'algèbre

$[\hat{p}^\mu, \hat{p}^\nu] = 0$  des translations implique que les charges  $p^\mu$  ont des commutateurs de Poisson semblables entre elles. Toutefois, dans ce cas il est nécessaire de distinguer  $p^0$ , qui contient des données temporelles, de  $p^i$ , qui n'en contient pas. On calcule:

$$\begin{aligned} \cdot \{p^i, p^j\} &= \int \left( \frac{\delta p^i}{\delta \phi_A} \frac{\delta p^j}{\delta \pi^A} - \frac{\delta p^j}{\delta \phi_A} \frac{\delta p^i}{\delta \pi^A} \right) \\ &= \int \left[ (-i \hat{p}^i \pi^A) (i \hat{p}^j \phi_A) - (-i \hat{p}^j \pi^A) (i \hat{p}^i \phi_A) \right] \\ &= - \int \pi^A [\hat{p}^i, \hat{p}^j] \phi_A \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\cdot \{p^0, p^0\} = 0$$

$$\begin{aligned} \cdot \{p^0, p^i\} &= \int \left( \frac{\delta p^0}{\delta \phi_A} \frac{\delta p^i}{\delta \pi^A} - \frac{\delta p^i}{\delta \phi_A} \frac{\delta p^0}{\delta \pi^A} \right) \\ &= \int \left( \frac{\delta H}{\delta \phi_A} (i \hat{p}^i \phi_A) - (-i \hat{p}^i \pi^A) \frac{\delta H}{\delta \pi^A} \right) \\ &= i \int \left( \frac{\delta H}{\delta \phi_A} \hat{p}^i \phi_A + \frac{\delta H}{\delta \pi^A} \hat{p}^i \pi^A \right) \\ &= i \int \hat{p}^i H = \int \partial^i H \\ &= 0 \end{aligned}$$

En résumé, on trouve donc :

$$\{p^\mu, p^\nu\} = 0 \quad (2.63)$$

Enfinement, vu que les charges  $P^\mu$  sont conservées et ne dépendent pas du temps, on peut utiliser la (2.51) pour déduire qu'elles ont une parenthèse de Poisson nulle avec  $H$ , ce qui est un cas particulier de (2.63) :

$$\begin{aligned} \{P^\mu, H\} &= -\frac{\partial P^\mu}{\partial t} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (2.64)$$

Pour une transformation de Lorentz, on a :

$$\begin{cases} \delta \omega \phi_A = -\frac{i}{2} \delta \omega_{\mu\nu} \hat{M}^{\mu\nu}{}^A{}^B \phi_B \\ \delta \omega \pi^A = -\frac{i}{2} \delta \omega_{\mu\nu} \hat{M}^{\mu\nu}{}^A{}^B \pi^B \end{cases} \quad (2.65)$$

avec :

$$\hat{M}^{\mu\nu}{}^A{}^B = i(x^\mu \delta^\nu{}^A - x^\nu \delta^\mu{}^A) \delta_A{}^B + (S^{\mu\nu})_A{}^B \quad (2.66)$$

Les charges conservées sont :

$$\begin{aligned} M^{\mu\nu} &= \int d^3\vec{x} \, K^{\mu\nu} \\ &= -i \int d^3\vec{x} \, \pi^A \hat{M}^{\mu\nu}{}^A{}^B \phi_B + \int d^3\vec{x} \, (\eta^{\mu\nu} x^\nu - \eta^{\nu\mu} x^\mu) \mathcal{L} \end{aligned} \quad (2.67)$$

Cette expression a la même structure que celle pour la charge (2.60) associée aux translations. Il faut à nouveau distinguer les cas où certains indices sont temporels et des autres temporels apparaissent, du cas où tous les indices sont spatiaux, qui est semblable à celui d'une symétrie interne. Toutefois, la réévaluation des densités fonctionnelles est simplifiée par le fait que  $\hat{M}^{\mu\nu}$  peut être écrit comme  $\hat{M}^{\mu\nu}_{AB} = -(X^{\mu}\hat{P}^{\nu} - X^{\nu}\hat{P}^{\mu})S_A^B + S_A^{\mu\nu B}$ . Pour la partie orbitale, le calcul est alors semblable à celui effectué pour les translations, la seule différence étant la présence d'un  $x^\alpha$  en plus. Pour la partie de spin, le calcul est exactement le même que pour une symétrie interne. Finalement, on trouve également :

$$\begin{aligned}
 \frac{\delta M^{\mu\nu}}{\delta \phi_A} &= \left( X^{\mu} \frac{\delta P^{\nu}}{\delta \phi_A} - X^{\nu} \frac{\delta P^{\mu}}{\delta \phi_A} \right) - i \pi^B S_B^{\mu\nu A} \\
 &= X^{\mu} (-i \hat{P}^{\nu} \pi^A) - X^{\nu} (-i \hat{P}^{\mu} \pi^A) - i \pi^B S_B^{\mu\nu A} \\
 &= -i (X^{\mu} \hat{P}^{\nu} - X^{\nu} \hat{P}^{\mu}) \pi^A + i \pi^B S_B^{\mu\nu A} \\
 &= i \hat{M}^{\mu\nu \dagger}_{AB} \pi^B
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\delta M^{\mu\nu}}{\delta \Pi^A} &= \left( X^\mu \frac{\delta P^\nu}{\delta \Pi^A} - X^\nu \frac{\delta P^\mu}{\delta \Pi^A} \right) - i \delta^{\mu\nu} \phi_B \\
&= X^\mu (i \hat{P}^\nu \phi_A) - X^\nu (i \hat{P}^\mu \phi_A) - i \delta^{\mu\nu} \phi_B \\
&= i (X^\mu \hat{P}^\nu - X^\nu \hat{P}^\mu) \phi_A - i \delta^{\mu\nu} \phi_B \\
&= -i \hat{M}^{\mu\nu} \phi_B
\end{aligned}$$

On a donc :

$$\left\{ \begin{aligned}
\delta \omega \phi_A &= +\frac{1}{2} \delta \omega_{\mu\nu} \frac{\delta M^{\mu\nu}}{\delta \Pi^A} = +\frac{1}{2} \delta \omega_{\mu\nu} \{ \phi_A, M^{\mu\nu} \} \\
\delta \omega \Pi^A &= -\frac{1}{2} \delta \omega_{\mu\nu} \frac{\delta M^{\mu\nu}}{\delta \phi_A} = +\frac{1}{2} \delta \omega_{\mu\nu} \{ \Pi^A, M^{\mu\nu} \}
\end{aligned} \right. \quad (2.68)$$

Il suit que sur un fonctionnel intégré des variables canoniques qui ne parlent pas explicitement de représentation du groupe de Lorentz, on trouve :

$$\delta \omega F = +\frac{1}{2} \delta \omega_{\mu\nu} \{ F, M^{\mu\nu} \} \quad (2.69)$$

Le 6-moment  $M^{\mu\nu}$  génère donc les transformations de Lorentz sur les fonctionnels de la théorie à travers de sa parenthèse de poisson avec eux.

En procédant comme dans les cas précédents, on peut déduire les parenthèses de poisson entre

les  $M^{\mu\nu}$  de l'algèbre  $[\hat{M}^{\mu\nu}, \hat{M}^{\alpha\beta}] = -i(\eta^{\mu\alpha} \hat{M}^{\nu\beta} - \eta^{\mu\beta} \hat{M}^{\nu\alpha} - \eta^{\nu\alpha} \hat{M}^{\mu\beta} + \eta^{\nu\beta} \hat{M}^{\mu\alpha})$ .

Il est à nouveau nécessaire de calculer séparément les parenthèses de Poisson des  $M^0_i$  qui contiennent des dérivées temporelles, et des  $M^i_j$  qui contiennent des dérivées spatiales. Pour les premiers, on doit revenir à l'Hamiltonien pour traiter les dérivées temporelles des variables canoniques, alors que pour les autres on peut procéder exactement comme pour une symétrie interne. Finalement, le résultat est :

$$\{M^{\mu\nu}, M^{\alpha\beta}\} = -(\eta^{\mu\alpha} M^{\nu\beta} - \eta^{\mu\beta} M^{\nu\alpha} - \eta^{\nu\alpha} M^{\mu\beta} + \eta^{\nu\beta} M^{\mu\alpha}) \quad (2.70)$$

Dans ce cas, les charges sont conservées, mais certaines d'entre elles dépendent explicitement du temps, et ont donc une parenthèse de Poisson non nulle avec l'Hamiltonienne. En appliquant la (2.51), on déduit en effet que :

$$\begin{aligned} \{M^{\mu\nu}, H\} &= -\frac{\partial M^{\mu\nu}}{\partial t} = -\partial_0 M^{\mu\nu} \\ &= -(\eta^{\mu 0} p^\nu - \eta^{\nu 0} p^\mu) \end{aligned} \quad (2.71)$$

La relation (2.71) est en fait une partie des  
 parenthèses de Poissons entre les charges  $M^{\mu\nu}$   
 et les charges  $P^\alpha$ , qui peuvent être calculées  
 en procédant comme pour celles entre les  $M^{\mu\nu}$   
 et les  $P^\alpha$ , en utilisant  $[\hat{M}^{\mu\nu}, \hat{P}^\alpha] = -i(\eta^{\mu\alpha}\hat{p}^\nu - \eta^{\nu\alpha}\hat{p}^\mu)$

On trouve :

$$\{M^{\mu\nu}, P^\alpha\} = -i(\eta^{\mu\alpha}P^\nu - \eta^{\nu\alpha}P^\mu) \tag{2.72}$$

Enfinement, on observe que les charges  $Q^i$  asso-  
 ciées à une symétrie interne et les charges  $M^{\mu\nu}$   
 et  $P^\alpha$  associées au groupe de Poincaré ont des  
 parenthèses de Poisson nulles, comme conséquence  
 du fait que  $[\hat{T}^i, \hat{M}^{\mu\nu}] = [\hat{T}^i, \hat{P}^\alpha] = 0$  :

$$\left. \begin{aligned} \{Q^i, M^{\mu\nu}\} &= 0 \\ \{Q^i, P^\alpha\} &= 0 \end{aligned} \right\} \tag{2.73}$$

Ces relations reflètent le fait que le groupe de  
 symétries internes et le groupe de symétries d'espace-  
 temps n'interfèrent pas entre eux.

En résumant, les charges  $Q^i$ ,  $P^\mu$  et  $M^{\mu\nu}$  génèrent les transformations de symétrie internes, les translations et les transformations de Lorentz sur la théorie, au travers de leur parenthèses de Poisson. On a sur un fonctionnel intégral:

$$\begin{cases} \delta_\alpha F = \delta\alpha^i \{Q^i, F\} \\ \delta_\epsilon F = \delta\epsilon_\mu \{P^\mu, F\} \\ \delta_\omega F = -\frac{1}{2} \delta\omega_{\mu\nu} \{M^{\mu\nu}, F\} \end{cases} \quad (2.74)$$

En outre, les parenthèses de Poisson entre les différents charges sont données par:

$$\begin{aligned} \{Q^i, Q^j\} &= f^{ijk} Q^k \\ \{P^\mu, P^\nu\} &= 0 \\ \{M^{\mu\nu}, M^{\alpha\beta}\} &= -(\eta^{\mu\alpha} M^{\nu\beta} - \eta^{\nu\alpha} M^{\mu\beta} - \eta^{\mu\beta} M^{\nu\alpha} + \eta^{\nu\beta} M^{\mu\alpha}) \\ \{P^\mu, M^{\alpha\beta}\} &= (\eta^{\mu\alpha} P^\beta - \eta^{\mu\beta} P^\alpha) \\ \{Q^i, P^\mu\} &= 0 \\ \{Q^i, M^{\mu\nu}\} &= 0 \end{aligned} \quad (2.75)$$



Il est facile de vérifier qu'en substituant les  
 parenthèses de Poissons avec des commutateurs,  
 $\{, \} \rightarrow -i [, ]$ , les équations (2.74) se réduisent  
 à la loi de transformation infinitésimale pour  
 un opérateur  $F$  sous conjugaison par un  
 opérateur  $U$  donné par  $e^{-i\alpha_i Q_i}$ ,  $e^{-i\epsilon_{\mu\nu} P^{\mu\nu}}$  et  
 $e^{+\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu} M^{\mu\nu}}$  pour les transformations de symétries  
 internes, les translations et les transformations  
 de Lorentz. En outre, les équations (2.75)  
 se réduisent à l'algèbre de commutateurs des  
 générateurs  $Q_i$  du groupe de symétries internes  
 et des générateurs  $P^{\mu}$  et  $M^{\mu\nu}$  du groupe de Poincaré.

### 3 CHAMPS SCALAIRES, SPINORIELS ET VECTORIELS

#### 3.1 Champ scalaire libre

L'exemple le plus simple de théorie de champ relativiste est basé sur un champ scalaire à spin  $s=0$ , et conduit à la théorie de Klein-Gordon. Dans ce cas, la représentation du groupe de Lorentz portée par le champ est la représentation banale, avec une seule composante complexe  $\phi(x)$  et

$$S_{\mu\nu}^{\alpha\beta} = 0 \tag{3.1}$$

L'équation du mouvement est l'équation de Klein-Gordon, qui en absence de champs externes s'écrit :

$$(\square + m^2) \phi(x) = 0 \tag{3.2}$$

Il est facile de trouver une densité de Lagrangien qui reproduit l'équation de Klein-Gordon (3.2) comme équation d'Euler-Lagrange. On peut prendre :

$$\mathcal{L}^0_{\mu\alpha} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi \tag{3.3}$$

En effet on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}^0_{\mu\alpha}}{\partial \phi} &= -m^2 \phi^* & ; & & \frac{\partial \mathcal{L}^0_{\mu\alpha}}{\partial \phi^*} &= -m^2 \phi \\ \frac{\partial \mathcal{L}^0_{\mu\alpha}}{\partial (\partial_\mu \phi)} &= \partial^\mu \phi^* & ; & & \frac{\partial \mathcal{L}^0_{\mu\alpha}}{\partial (\partial_\mu \phi^*)} &= \partial^\mu \phi \end{aligned}$$

Les équations d'Euler-Lagrange pour  $\phi$  et  $\phi^*$  sont alors:

$$(\Box + m^2)\phi = 0 \quad ; \quad (\Box + m^2)\phi^* = 0$$

Le tenseur énergie-impulsion canonique est donné par:

$$\begin{aligned} T_{\kappa\alpha}^{\sigma\mu\nu} &= \frac{\partial \mathcal{L}_{\kappa\alpha}^{\sigma}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \partial^\nu\phi + \frac{\partial \mathcal{L}_{\kappa\alpha}^{\sigma}}{\partial(\partial_\mu\phi^*)} \partial^\nu\phi^* - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L}_{\kappa\alpha}^{\sigma} \\ &= \partial^\mu\phi \partial^\nu\phi^* + \partial^\nu\phi \partial^\mu\phi^* - \eta^{\mu\nu} (\partial^\alpha\phi^* \partial_\alpha\phi - m^2\phi^*\phi) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Le tenseur est déjà symétrique, et il n'y a pas besoin de l'améliorer. En fait, vu que

$$\begin{aligned} \Sigma_{\kappa\alpha}^{\sigma\mu\nu} &= -i \frac{\partial \mathcal{L}_{\kappa\alpha}^{\sigma}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \cancel{\delta^{\alpha\beta}}_{\kappa\alpha} \phi + i \frac{\partial \mathcal{L}_{\kappa\alpha}^{\sigma}}{\partial(\partial_\mu\phi^*)} \cancel{\delta^{\alpha\beta}}_{\kappa\alpha} \phi^* \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3.5)$$

Le tenseur de Belinfante (2.27) coïncide avec le tenseur énergie-impulsion canonique:

$$\begin{aligned} \Theta_{\kappa\alpha}^{\sigma\mu\nu} &= T_{\kappa\alpha}^{\sigma\mu\nu} \\ &= \partial^\mu\phi \partial^\nu\phi^* + \partial^\mu\phi^* \partial^\nu\phi - \eta^{\mu\nu} (\partial^\alpha\phi^* \partial_\alpha\phi - m^2\phi^*\phi) \end{aligned} \quad (3.6)$$

On vérifie facilement que ce tenseur est bien conservé:

$$\begin{aligned} \partial_\mu \Theta_{\kappa\alpha}^{\sigma\mu\nu} &= \Box\phi \partial^\nu\phi^* + \cancel{\partial^\mu\phi \partial_\mu} \partial^\nu\phi^* + \Box\phi^* \partial^\nu\phi + \cancel{\partial^\mu\phi^* \partial_\mu} \partial^\nu\phi \\ &\quad - \partial^\nu \cancel{\partial^\alpha\phi^* \partial_\alpha\phi} - \cancel{\partial^\alpha\phi^* \partial_\alpha} \partial^\nu\phi + m^2(\partial^\nu\phi^*\phi + \phi^*\partial^\nu\phi) \\ &= (\Box + m^2)\phi \partial^\nu\phi^* + (\Box + m^2)\phi^* \partial^\nu\phi \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

### 3.2 Champ spinoriel libre

Le deuxième exemple très important de théorie de champ relativiste est basé sur un champ spinoriel à spin  $s = \frac{1}{2}$ , et conduit à la théorie de Dirac. Dans ce cas, la représentation du groupe de Lorentz portée par le champ est la représentation spinorielle, avec quatre composantes complexes  $\psi_a(x)$ ,  $a=1,2,3,4$ , et :

$$(S_{\text{DIRAC}}^{\mu\nu})_{ab} = \frac{i}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]_{ab} \quad (3.8)$$

L'équation du mouvement est l'équation de Dirac, qui en absence de champs externes s'écrit :

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)_{ab} \psi_b(x) = 0 \quad (3.9)$$

Comme dans le cas de Klein-Gordon, il est possible de trouver une densité de Lagrangien qui reproduit l'équation d'onde (3.9) comme équation de Euler-Lagrange. Dans ce cas, on peut prendre :

$$\mathcal{L}_{\text{DIRAC}}^0 = \frac{i}{2} \bar{\psi} \gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu \psi - m \bar{\psi} \psi \quad (3.10)$$

avec :

$$f^* \overleftrightarrow{\partial}_\mu g = f^* \partial_\mu g - \partial_\mu f^* g \quad (3.11)$$

En effet, on trouve :

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{\text{DIRAC}}^0}{\partial \psi} = -\frac{i}{2} \partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu - m \bar{\psi} \quad ; \quad \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{DIRAC}}^0}{\partial \bar{\psi}} = \frac{i}{2} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - m \psi$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{\text{DIRAC}}^0}{\partial (\partial_\mu \psi)} = \frac{i}{2} \bar{\psi} \gamma^\mu \quad ; \quad \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{DIRAC}}^0}{\partial (\partial_\mu \bar{\psi})} = -\frac{i}{2} \gamma^\mu \psi$$

Les équations d'Euler-Lagrange pour  $\psi$  et  $\bar{\psi}$  sont alors données par :

$$(i \gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi = 0 \quad ; \quad \bar{\psi} (-i \overleftarrow{\partial}_\mu \gamma^\mu - m) = 0$$

Le tenseur énergie-impulsion est donné par

$$\begin{aligned} T_{\text{DIRAC}}^{\alpha\mu\nu} &= \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{DIRAC}}^0}{\partial (\partial_\mu \psi)} \partial^\nu \psi + \partial^\nu \bar{\psi} \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{DIRAC}}^0}{\partial (\partial_\mu \bar{\psi})} - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L} \\ &= \frac{i}{2} \bar{\psi} \gamma^\mu \partial^\nu \psi - \frac{i}{2} \partial^\nu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi - \eta^{\mu\nu} \left[ \frac{i}{2} \bar{\psi} \gamma^\alpha \overleftrightarrow{\partial}_\alpha \psi - m \bar{\psi} \psi \right] \\ &= \frac{i}{2} \bar{\psi} \gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}^\nu \psi - \eta^{\mu\nu} \left[ \frac{i}{2} \bar{\psi} \gamma^\alpha \overleftrightarrow{\partial}_\alpha \psi - m^2 \bar{\psi} \psi \right] \\ &\stackrel{(3.9)}{=} \frac{i}{2} \bar{\psi} \gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}^\nu \psi \end{aligned} \tag{3.12}$$

Le tenseur n'est pas symétrique, mais il est possible d'appliquer la procédure de Belinfante pour le symétriser. On calcule pour cela la quantité :

$$\begin{aligned} \Sigma_{\text{DIRAC}}^{\alpha\mu\beta} &= -i \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{DIRAC}}^0}{\partial (\partial_\mu \psi)} S^{\alpha\beta} \psi + i \bar{\psi} S^{\alpha\beta} \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{DIRAC}}^0}{\partial (\partial_\mu \bar{\psi})} \\ &= \frac{i}{2} \bar{\psi} \gamma^\mu S^{\alpha\beta} \psi + \frac{i}{2} \bar{\psi} S^{\alpha\beta} \gamma^\mu \psi \\ &= \frac{i}{8} \bar{\psi} \gamma^\mu [\gamma^\alpha, \gamma^\beta] \psi \end{aligned} \tag{3.13}$$

Le tenseur de Belinfante est donné par :

$$\begin{aligned}
 \Theta_{\text{DIRAC}}^{\text{omn}} &= T_{\text{DIRAC}}^{\text{omn}} + \frac{1}{2} \partial_\rho \left( \sum_{\text{DIRAC}}^{\rho\mu\nu} - \sum_{\text{DIRAC}}^{\rho\mu\nu} - \sum_{\text{DIRAC}}^{\rho\nu\mu} \right) \\
 &= \frac{i}{2} \bar{\psi} \overleftrightarrow{\gamma}^{\mu\nu} \psi + \frac{i}{16} \partial_\alpha \left( \bar{\psi} \{ \gamma^\alpha, [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \} \psi \right) \\
 &\quad - \frac{i}{16} \partial_\alpha \left( \bar{\psi} \{ \gamma^\mu, [\gamma^\alpha, \gamma^\nu] \} + \{ \gamma^\nu, [\gamma^\alpha, \gamma^\mu] \} \right) \\
 &= \frac{i}{2} \bar{\psi} \overleftrightarrow{\gamma}^{\mu\nu} \psi + \frac{i}{16} \partial_\alpha \left( \bar{\psi} \{ \gamma^\alpha, [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \} \psi \right) \\
 &\quad + \frac{i}{16} \partial_\alpha \left( \bar{\psi} [ \gamma^\alpha, \{ \gamma^\mu, \gamma^\nu \} ] \psi \right) \\
 &= \frac{i}{2} \bar{\psi} \overleftrightarrow{\gamma}^{\mu\nu} \psi + \frac{i}{16} \bar{\psi} \overleftrightarrow{\gamma}^\alpha \{ \gamma^\alpha, [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \} \psi + \frac{i}{16} \bar{\psi} \{ \gamma^\alpha, [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \} \overleftrightarrow{\gamma}^\alpha \psi \\
 &= \frac{i}{2} \bar{\psi} \overleftrightarrow{\gamma}^{\mu\nu} \psi + \frac{i}{16} \bar{\psi} \overleftrightarrow{\gamma}^\alpha \left( 2 \gamma^\alpha [\gamma^\mu, \gamma^\nu] + [[\gamma^\mu, \gamma^\nu], \gamma^\alpha] \right) \psi \\
 &\quad + \frac{i}{16} \bar{\psi} \left( 2 [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \gamma^\alpha - [[\gamma^\mu, \gamma^\nu], \gamma^\alpha] \right) \overleftrightarrow{\gamma}^\alpha \psi \\
 &\stackrel{(3.9)}{=} \frac{i}{2} \bar{\psi} \overleftrightarrow{\gamma}^{\mu\nu} \psi - \frac{1}{8} m \bar{\psi} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \psi + \frac{i}{16} \bar{\psi} \overleftrightarrow{\gamma}^\alpha [[\gamma^\mu, \gamma^\nu], \gamma^\alpha] \psi \\
 &\quad + \frac{1}{8} m \bar{\psi} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \psi - \frac{i}{16} \bar{\psi} [[\gamma^\mu, \gamma^\nu], \gamma^\alpha] \overleftrightarrow{\gamma}^\alpha \psi \\
 &= \frac{i}{2} \bar{\psi} \overleftrightarrow{\gamma}^{\mu\nu} \psi - \frac{i}{16} \bar{\psi} [[\gamma^\mu, \gamma^\nu], \gamma^\alpha] \overleftrightarrow{\gamma}^\alpha \psi \\
 &= \frac{i}{2} \bar{\psi} \overleftrightarrow{\gamma}^{\mu\nu} \psi - \frac{i}{16} \bar{\psi} \left( \{ \gamma^\mu, \{ \gamma^\nu, \gamma^\alpha \} \} - \{ \gamma^\nu, \{ \gamma^\mu, \gamma^\alpha \} \} \right) \overleftrightarrow{\gamma}^\alpha \psi \\
 &= \frac{i}{2} \bar{\psi} \overleftrightarrow{\gamma}^{\mu\nu} \psi - \frac{i}{4} \bar{\psi} (\gamma^\mu \eta^{\nu\alpha} - \gamma^\nu \eta^{\mu\alpha}) \overleftrightarrow{\gamma}^\alpha \psi \\
 &= \frac{i}{2} \bar{\psi} \overleftrightarrow{\gamma}^{\mu\nu} \psi - \frac{i}{4} \bar{\psi} (\gamma^\mu \overleftrightarrow{\gamma}^\nu - \gamma^\nu \overleftrightarrow{\gamma}^\mu) \psi \\
 &= \frac{i}{4} \bar{\psi} (\gamma^\mu \overleftrightarrow{\gamma}^\nu + \gamma^\nu \overleftrightarrow{\gamma}^\mu) \psi \tag{3.14}
 \end{aligned}$$

Le tenseur est symétrique et conservé par construction.

On vérifie en effet facilement que :

$$\begin{aligned}
 \partial_\mu \Theta_{\text{DIRAC}}^{\mu\nu} &= \frac{i}{4} \bar{\psi} \overleftarrow{\partial}_\mu \gamma^\mu \overrightarrow{\partial}^\nu \psi + \frac{i}{4} \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \overleftarrow{\partial}^\nu \psi \\
 &\quad + \frac{i}{4} \bar{\psi} \overleftarrow{\partial}_\mu \gamma^\nu \overrightarrow{\partial}^\mu \psi + \frac{i}{4} \bar{\psi} \gamma^\nu \partial_\mu \overrightarrow{\partial}^\mu \psi \\
 &\stackrel{(3.9)}{=} -\frac{1}{4} m \bar{\psi} \overrightarrow{\partial}^\nu \psi + \frac{1}{4} m \bar{\psi} \overleftarrow{\partial}^\nu \psi \\
 &\quad + \frac{i}{4} \bar{\psi} \gamma^\nu (-\overleftarrow{\partial}_\mu \overrightarrow{\partial}^\mu + \overleftarrow{\partial}_\mu \overrightarrow{\partial}^\mu - \overrightarrow{\partial}_\mu \overleftarrow{\partial}^\mu + \overrightarrow{\partial}_\mu \overleftarrow{\partial}^\mu) \psi \\
 &= -\frac{i}{4} \bar{\psi} \not{\partial} \gamma^\nu \psi + \frac{i}{4} \bar{\psi} \gamma^\nu \not{\partial} \psi \\
 &= -\frac{i}{4} m \bar{\psi} \gamma^\nu \psi + \frac{i}{4} m \bar{\psi} \gamma^\nu \psi \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

(3.15)

### 3.3 Champ vectoriel libre

Le troisième exemple de théorie de champ relativiste est basé sur un champ vectoriel à spin  $s=1$ , et conduit à la théorie de Maxwell. Dans ce cas, la représentation du groupe de Lorentz portée par le champ est la représentation vectorielle, avec quatre composantes réelles  $A_\mu(x)$ ,  $\mu=0,1,2,3$ , et :

$$(S_{MAX}^{\mu\nu})_{\alpha\beta} = -i (\eta^{\mu\beta} \delta_{\alpha}^{\nu} - \eta^{\nu\beta} \delta_{\alpha}^{\mu}) \quad (3.16)$$

L'équation du mouvement est l'équation de Maxwell, qui en absence de source s'écrit :

$$\partial_{\mu} F^{\mu\nu}(x) = \square A^{\nu}(x) - \partial^{\nu}(\partial_{\mu} A^{\mu}(x)) = 0 \quad (3.17)$$

Dans ce cas, la densité de Lagrangien qui porte à cette équation du mouvement comme équation d'Euler-Lagrange est donnée par :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{MAX}^0 &= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \\ &= -\frac{1}{2} (\partial_{\mu} A_{\nu} \partial^{\mu} A^{\nu} - \partial_{\mu} A_{\nu} \partial^{\nu} A^{\mu}) \end{aligned} \quad (3.18)$$



En effet, on calcule

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{MAX}^0}{\partial A_\nu} = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}_{MAX}^0}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} &= -\frac{1}{2} F^{\alpha\beta} \frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} \\ &= -\frac{1}{2} F^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} (\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha) \\ &= -\frac{1}{2} F^{\alpha\beta} (\delta_\alpha^\mu \delta_\beta^\nu - \delta_\beta^\mu \delta_\alpha^\nu) \\ &= -f^{\mu\nu} \end{aligned}$$

L'équation d'Euler-Lagrange pour  $A_\nu$  est donc :

$$\partial_\mu f^{\mu\nu} = 0$$

Le tenseur énergie-impulsion canonique est donné par

$$\begin{aligned} T_{MAX}^{\mu\nu} &= \frac{\partial \mathcal{L}_{MAX}^0}{\partial (\partial_\mu A_\alpha)} \partial^\nu A_\alpha - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L}_{MAX}^0 \\ &= -f^{\mu\alpha} \partial^\nu A_\alpha + \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} f^{\alpha\beta} f_{\alpha\beta} \\ &= f^{\mu\alpha} f_\alpha{}^\nu + \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} f^{\alpha\beta} f_{\alpha\beta} - f^{\mu\alpha} \partial_\alpha A^\nu \quad (3.19) \end{aligned}$$

Ce tenseur n'est ni symétrique, ni invariant de jauge, à cause du dernier terme, mais il est possible de l'améliorer avec la procédure de Belinfante.

Pour cela, on considère la quantité:

$$\begin{aligned}
 \Sigma_{MAX}^{\sigma\mu\alpha\beta} &= -i \frac{\partial \mathcal{L}_{MAX}^0}{\partial (\partial_\mu A_\beta)} (S_{MAX}^{\alpha\beta})_\beta^\sigma A_\sigma \\
 &= F^{\mu\rho} (\eta^{\alpha\sigma} \delta_\rho^\beta - \eta^{\beta\sigma} \delta_\rho^\alpha) A_\sigma \\
 &= F^{\mu\beta} A^\alpha - F^{\mu\alpha} A^\beta
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

Le tenseur de Belinfante est alors donné par

$$\begin{aligned}
 \Theta_{MAX}^{\sigma\mu\nu} &= T_{MAX}^{\sigma\mu\nu} + \frac{1}{2} \partial_\rho (\Sigma_{MAX}^{\sigma\gamma\mu\nu} - \Sigma_{MAX}^{\sigma\mu\rho\nu} - \Sigma_{MAX}^{\sigma\nu\rho\mu}) \\
 &= F^{\mu\alpha} F_\alpha^\nu + \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} - F^{\mu\alpha} \partial_\alpha A^\nu \\
 &\quad + \frac{1}{2} \partial_\rho [(F^{\rho\mu} A^\nu - F^{\rho\nu} A^\mu) - (F^{\mu\rho} A^\nu - F^{\nu\rho} A^\mu) \\
 &\quad \quad - (F^{\nu\mu} A^\rho - F^{\nu\rho} A^\mu)] \\
 &= F^{\mu\alpha} F_\alpha^\nu + \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} - F^{\mu\alpha} \partial_\alpha A^\nu \\
 &\quad + \partial_\rho (-F^{\rho\mu} A^\nu) \\
 &= F^{\mu\alpha} F_\alpha^\nu + \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} - \cancel{F^{\mu\alpha} \partial_\alpha A^\nu} \\
 &\quad + (-\cancel{\partial_\rho F^{\rho\mu} A^\nu} + \cancel{F^{\mu\rho} \partial_\rho A^\nu}) \\
 &= F^{\mu\alpha} F_\alpha^\nu + \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

Le nouveau tenseur est symétrique et invariant de jauge. Il contient l'information relative à la densité d'énergie et de quantité de mouvement portées par le champ électromagnétique, ainsi que son tenseur des contraintes. Les lois de conservation associées à ces quantités sont toutes impliquées par la conservation de ce tenseur. Celle-ci peut être facilement vérifiée :

$$\begin{aligned}
 \partial_\mu \Theta^{\mu\nu} &= \cancel{\partial_\mu F^{\mu\alpha}} F_\alpha^\nu + F^{\mu\alpha} \partial_\mu F_\alpha^\nu + \frac{1}{2} \partial^\nu F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \\
 &= \frac{1}{2} (F_{\mu\alpha} \partial^\mu F^{\alpha\nu} - F_{\alpha\mu} \partial^\mu F^{\alpha\nu}) + \frac{1}{2} F_{\alpha\beta} \partial^\nu F^{\alpha\beta} \\
 &= \frac{1}{2} (F_{\alpha\beta} \partial^\alpha F^{\beta\nu} - F_{\alpha\beta} \partial^\beta F^{\alpha\nu}) + \frac{1}{2} F_{\alpha\beta} \partial^\nu F^{\alpha\beta} \\
 &= \frac{1}{2} F_{\alpha\beta} (\partial^\alpha F^{\beta\nu} + \partial^\beta F^{\nu\alpha} + \partial^\nu F^{\alpha\beta}) \\
 &= \frac{1}{2} F_{\alpha\beta} [\cancel{\partial^\alpha (\partial^\beta A^\nu - \partial^\nu A^\beta)} + \cancel{\partial^\beta (\partial^\nu A^\alpha - \partial^\alpha A^\nu)} \\
 &\quad + \cancel{\partial^\nu (\partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha)}] \\
 &= 0
 \end{aligned}
 \tag{3.22}$$

### 3.4 champs scalaire et vectoriel en interaction

Le système couplé d'un champ de Klein-Gordon et d'un champ de Maxwell en interaction est décrit par les équations de Klein-Gordon et de Maxwell en présence de champs électromagnétiques et de sources respectivement :

$$\left. \begin{array}{l} (D^\mu D_\mu + m^2) \phi(x) = 0 \\ \partial_\mu F^{\mu\nu}(x) = J^\nu(x) \end{array} \right\} \quad (3.23)$$

La dernière covariante est donnée par

$$D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu \quad (3.24)$$

et le courant électromagnétique par :

$$\begin{aligned} J^\mu &= q \cdot J_{KA}^\mu \\ &= iq [\phi^* D^\mu \phi - \phi (D^\mu \phi)^*] \end{aligned} \quad (3.25)$$

Ce dernier est conservé par l'équation de KA :

$$\begin{aligned} \partial_\mu J^\mu &= iq [\partial_\mu \phi^* D^\mu \phi + \phi^* \partial_\mu D^\mu \phi - \partial_\mu \phi (D^\mu \phi)^* - \phi \partial_\mu (D^\mu \phi)^*] \\ &= iq [(D_\mu - iqA_\mu)^* \phi^* D^\mu \phi + \phi^* (D_\mu - iqA_\mu) D^\mu \phi \\ &\quad - (D_\mu - iqA_\mu) \phi (D^\mu \phi)^* - \phi (D_\mu - iqA_\mu)^* (D^\mu \phi)^*] \\ &= iq [\cancel{D_\mu \phi^* D^\mu \phi} - m^2 \phi^* \phi - \cancel{D_\mu \phi (D^\mu \phi)^*} + m^2 \phi \phi^*] \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3.26)$$

Les équations du mouvement (3.23) peuvent être dérivées comme équations d'Euler Lagrange à partir de la densité de Lagrangien suivante :

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{KA} + \mathcal{L}_{MAX} \quad (3.27)$$

où :

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{KA} = (D_\mu \phi)^* D^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi \\ \mathcal{L}_{MAX} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \end{cases} \quad (3.28)$$

En effet :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = \frac{\partial \mathcal{L}_{KA}}{\partial \phi} = -m^2 \phi^* + i q A^\mu (D_\mu \phi)^* \quad ; \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^*} = \frac{\partial \mathcal{L}_{KA}}{\partial \phi^*} = -m^2 \phi - i q A^\mu D_\mu \phi$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (D_\mu \phi)} = \frac{\partial \mathcal{L}_{KA}}{\partial (D_\mu \phi)} = (D^\mu \phi)^* \quad ; \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (D_\mu \phi^*)} = \frac{\partial \mathcal{L}_{KA}}{\partial (D_\mu \phi^*)} = D^\mu \phi$$

Les équations pour  $\phi$  et  $\phi^*$  sont donc bien :

$$(D^\mu D_\mu + m^2) \phi = 0 \quad ; \quad (D^{*\mu} D_\mu^* + m^2) \phi^* = 0$$

Similairement, on a :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}_{KA}}{\partial A_\nu} = -i q (\phi^* D^\nu \phi - \phi D^\nu \phi^*) = -J^\nu$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} = \frac{\partial \mathcal{L}_{MAX}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} = -F^{\mu\nu}$$

L'équation pour  $A_\mu$  donne donc bien :

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu$$

Le tenseur énergie-impulsion de la théorie complète est donné par :

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial^\nu \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^*)} \partial^\nu \phi^* + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\alpha)} \partial^\nu A_\alpha - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L} \quad (3.29)$$

Celui-ci peut se récrire comme :

$$T^{\mu\nu} = T_{KA}^{\mu\nu} + T_{MAX}^{\mu\nu} \quad (3.30)$$

avec :

$$\begin{aligned} T_{KA}^{\mu\nu} &= \frac{\partial \mathcal{L}_{KA}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial^\nu \phi + \frac{\partial \mathcal{L}_{KA}}{\partial(\partial_\mu \phi^*)} \partial^\nu \phi^* - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L}_{KA} \\ &= (D^\mu \phi)^* \partial^\nu \phi + D^\mu \phi \partial^\nu \phi^* - \eta^{\mu\nu} ( (D^\alpha \phi)^* D_\alpha \phi - m^2 \phi^* \phi ) \end{aligned} \quad (3.31)$$

$$\begin{aligned} T_{MAX}^{\mu\nu} &= \frac{\partial \mathcal{L}_{MAX}}{\partial(\partial_\mu A_\alpha)} \partial^\nu A_\alpha - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L}_{MAX} \\ &= F^{\mu\alpha} f_{\alpha}{}^\nu + \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} f_{\alpha\beta} - F^{\mu\alpha} \partial_\alpha A^\nu \end{aligned} \quad (3.32)$$

Ces tenseurs ne sont ni symétriques ni invariants de jauge, et doivent donc être améliorés.

Pour ce faire, on procède d'une façon semblable à la procédure de Belinfante utilisée dans le cas libre, mais de telle façon à produire deux tenseurs énergie-impulsion  $\Theta_{KA}^{\mu\nu}$  et  $\Theta_{MAX}^{\mu\nu}$  qui soient tous deux symétriques et invariants.

A cet effet, on considère la quantité :

$$\Sigma^{\mu\alpha\beta} = -i \frac{\partial h}{\partial(\partial_\mu \phi)} S_{\kappa\alpha}^{\alpha\beta} \phi + i \frac{\partial h}{\partial(\partial_\mu \phi^*)} S_{\kappa\alpha}^{\alpha\beta} \phi^* - i \frac{\partial h}{\partial(\partial_\mu A_\beta)} (S_{\text{MAX}}^{\alpha\beta})_\beta{}^\omega A_\omega \quad (3.33)$$

Cette quantité peut se récrire comme :

$$\Sigma^{\mu\alpha\beta} = \Sigma_{\kappa\alpha}^{\mu\alpha\beta} + \Sigma_{\text{MAX}}^{\mu\alpha\beta} \quad (3.34)$$

avec :

$$\begin{aligned} \Sigma_{\kappa\alpha}^{\mu\alpha\beta} &= -i \frac{\partial h_{\kappa\alpha}}{\partial(\partial_\mu \phi)} S_{\kappa\alpha}^{\alpha\beta} \phi + i \frac{\partial h}{\partial(\partial_\mu \phi^*)} S_{\kappa\alpha}^{\alpha\beta} \phi^* \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3.35)$$

$$\begin{aligned} \Sigma_{\text{MAX}}^{\mu\alpha\beta} &= -i \frac{\partial h_{\text{MAX}}}{\partial(\partial_\mu A_\beta)} (S_{\text{MAX}}^{\alpha\beta})_\beta{}^\omega A_\omega \\ &= -F^{\mu\alpha} A^\beta + F^{\mu\beta} A^\alpha \end{aligned} \quad (3.36)$$

On peut alors définir le nouveau tenseur amélioré de Belinfante comme :

$$\Theta^{\mu\nu} = T^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \partial_\rho (\Sigma^{\gamma\mu\nu} - \Sigma^{\mu\gamma\nu} - \Sigma^{\nu\gamma\mu}) \quad (3.37)$$

Ce tenseur est par construction symétrique et conservé :

$$\partial_\mu \Theta^{\mu\nu} = 0 \quad (3.38)$$

On peut finalement le décomposer en deux termes :

$$\Theta^{\mu\nu} = \Theta_{\kappa\alpha}^{\mu\nu} + \Theta_{\text{MAX}}^{\mu\nu} \quad (3.39)$$

avec :

$$\begin{aligned}
 \Theta_{ka}^{\mu\nu} &= T_{ka}^{\mu\nu} - J^{\mu} A^{\nu} + \frac{1}{2} \partial_{\rho} \left( \sum_{ka}^{\gamma\mu\nu} - \sum_{k\lambda}^{\mu\gamma\nu} - \sum_{ka}^{\nu\gamma\mu} \right) \\
 &= \left[ (D^{\mu}\phi)^{\dagger} \partial^{\nu}\phi + D^{\mu}\phi \partial^{\nu}\phi^{*} - \eta^{\mu\nu} \left( (D^{\alpha}\phi)^{\dagger} D_{\alpha}\phi - m^2 \phi^{\dagger}\phi \right) \right. \\
 &\quad \left. - [iq\phi^{*} \overleftrightarrow{D}^{\mu}\phi A^{\nu}] \right] + [0] \\
 &= (D^{\mu}\phi)^{\dagger} D^{\nu}\phi + D^{\mu}\phi (D^{\nu}\phi)^{*} - \eta^{\mu\nu} \left( (D^{\alpha}\phi)^{\dagger} D_{\alpha}\phi - m^2 \phi^{\dagger}\phi \right) \quad (3.40)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Theta_{MAX}^{\mu\nu} &= T_{MAX}^{\mu\nu} + J^{\mu} A^{\nu} + \frac{1}{2} \partial_{\rho} \left( \sum_{MAX}^{\gamma\mu\nu} - \sum_{MAX}^{\mu\gamma\nu} - \sum_{MAX}^{\nu\gamma\mu} \right) \\
 &= T_{MAX}^{\mu\nu} + J^{\mu} A^{\nu} + \partial_{\rho} (F^{\mu\rho} A^{\nu}) \\
 &= T_{MAX}^{\mu\nu} - F^{\mu\lambda} \partial_{\lambda} A^{\nu} + \left( J^{\mu} - \cancel{\partial_{\rho} F^{\mu\rho}} \right) A^{\nu} \\
 &= F^{\mu\alpha} f_{\alpha}^{\nu} + \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \quad (3.41)
 \end{aligned}$$

Ces deux tenseurs sont symétriques et invariants de jauge, et se réduisent correctement aux tenseurs  $\Theta_{ka}^{\mu\nu}$  et  $\Theta_{MAX}^{\mu\nu}$  des théories libres dans la limite  $g \rightarrow 0$  où les interactions sont éteintes. Toutefois, seulement leur somme reste conservée pour  $g \neq 0$ , reflétant le fait que les interactions électromagnétiques induisent des échanges d'énergie et d'impulsion entre les sources et les champs électromagnétiques de la théorie.



On calcule facilement :

$$\begin{aligned}
 \partial_\mu \Theta_{ka}^{\mu\nu} &= \partial_\mu (D^\mu \phi)^\nu D^\nu \phi + D^\mu \phi^* \partial_\mu (D^\nu \phi) \\
 &\quad + \partial_\mu (D^\mu \phi) (D^\nu \phi)^* + D^\mu \phi \partial_\mu (D^\nu \phi)^* \\
 &\quad - \partial^\nu (D^\alpha \phi)^* D_\alpha - (D^\alpha \phi)^* \partial^\nu (D_\alpha \phi) \\
 &\quad + m^2 (\partial^\nu \phi^* \phi + \phi^* \partial^\nu \phi) \\
 &= (\partial_\mu D^{\mu*} + m^2) \phi^* D^\nu \phi + (\partial_\mu D^\mu + m^2) \phi (D^\nu \phi)^* \\
 &\quad + (D^\mu \phi)^* (\partial_\mu D^\nu - \partial^\nu D_\mu) \phi + D^\mu \phi (\partial_\mu D^{\nu*} - \partial^\nu D_{\mu}^*) \phi^* \\
 &= (D_\mu^\dagger D^{\mu*} + m^2 + i q A_\mu D^{*\mu}) \phi^* D^\nu \phi \\
 &\quad + (D_\mu D^\mu + m^2 - i q A_\mu D^\mu) \phi (D^\nu \phi)^* \\
 &\quad + i q (D^\mu \phi)^* [\partial_\mu (A^\nu \phi) - \partial^\nu (A_\mu \phi)] \\
 &\quad - i q (D^\mu \phi) [\partial_\mu (A^\nu \phi^*) - \partial^\nu (A_\mu \phi^*)] \\
 &= i q A_\mu [(\cancel{D^\mu \phi})^* D^\nu \phi - D^\mu \phi (\cancel{D^\nu \phi})^*] \\
 &\quad + i q (D^\mu \phi)^* [F_{\mu}{}^\nu \phi + (\cancel{A^\nu D_\mu} - \cancel{A_\mu D^\nu}) \phi] \\
 &\quad - i q (D^\mu \phi) [F_{\mu}{}^\nu \phi^* + (\cancel{A^\nu D_\mu^*} - \cancel{A_\mu D^{*\nu}}) \phi^*] \\
 &= F_{\mu}{}^\nu i q [\phi^* D^\mu \phi - \phi (D^\mu \phi)^*] \\
 &= F_{\mu}{}^\nu \mathcal{J}^\mu
 \end{aligned}$$

et, en procédant comme dans le cas libre :

$$\begin{aligned}\partial_\mu \Theta_{MAX}^{\mu\nu} &= \partial_\mu F^{\mu\alpha} F_\alpha{}^\nu \\ &= \partial^\alpha F_\alpha{}^\nu \\ &= -F^\nu{}_\mu \partial^\mu\end{aligned}$$

On peut donc finalement écrire :

$$\begin{cases} \partial_\mu \Theta_{KG}^{\mu\nu} = g^\nu \\ \partial_\mu \Theta_{MAX}^{\mu\nu} = -g^\nu \end{cases} \quad (3.42)$$

en fonction de la densité de force de Lorentz :

$$g^\nu = F^\nu{}_\mu \partial^\mu \quad (3.43)$$

On constate donc que le tenseur énergie-impulsion total du système est conservé, mais pas les deux tenseurs  $\Theta_{KG}^{\mu\nu}$  et  $\Theta_{MAX}^{\mu\nu}$  séparément. Physiquement, ceci reflète le fait que les deux types de champs s'influencent mutuellement et échangent de l'énergie et de l'impulsion. Techniquement, ceci est dû au fait que les champs externes où les sources bougent d'avancer sans translations spatio-temporelles s'ils sont considérés comme figés.

### 3.5 Champs spinoriel et vectoriel en interaction

Le système couplé d'un champ de Dirac et d'un champ de Maxwell en interaction est décrit par les équations de Dirac et de Maxwell en présence de champs électromagnétiques et de sources respectivement:

$$\left\{ \begin{array}{l} (i \gamma^\mu D_\mu - m) \psi(x) = 0 \\ \partial_\mu F^{\mu\nu}(x) = J^\nu(x) \end{array} \right. \quad (3.44)$$

La dérivée covariante est donnée comme avant par:

$$D_\mu = \partial_\mu + iq A_\mu \quad (3.45)$$

et le courant électromagnétique par

$$\begin{aligned} J^\mu &= q J_{\text{Dirac}}^\mu \\ &= q \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \end{aligned} \quad (3.46)$$

Le dernier est conservé par l'équation de Dirac:

$$\begin{aligned} \partial_\mu J^\mu &= q [\partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi + \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi] \\ &= q [(\partial_\mu - iq A_\mu) \bar{\psi} \gamma^\mu \psi + \bar{\psi} \gamma^\mu (\partial_\mu - iq A_\mu) \psi] \\ &= q [\bar{\psi} \overleftarrow{D}_\mu \gamma^\mu \psi + \bar{\psi} \gamma^\mu D_\mu \psi] \\ &= q (im \bar{\psi} \psi - im \bar{\psi} \psi) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3.47)$$

Les équations du mouvement (3.44) peuvent être dérivées comme équations d'Euler-Lagrange à partir de la densité de Lagrange suivante :

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{DIRAC}} + \mathcal{L}_{\text{MAX}} \quad (3.48)$$

où :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}_{\text{DIRAC}} = \frac{i}{2} \bar{\psi} \gamma^\mu \overleftrightarrow{D}_\mu \psi - m \bar{\psi} \psi \\ \mathcal{L}_{\text{MAX}} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \end{array} \right. \quad (3.49)$$

En effet, on trouve :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{DIRAC}}}{\partial \psi} = -\frac{i}{2} \overleftrightarrow{D}_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu - q \bar{\psi} \gamma^\mu A_\mu - m \bar{\psi} ; \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} = \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{DIRAC}}}{\partial \bar{\psi}} = \frac{i}{2} \gamma^\mu \overleftrightarrow{D}_\mu \psi - q \gamma^\mu A_\mu \psi - m \psi$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)} = \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{DIRAC}}}{\partial(\partial_\mu \psi)} = \frac{i}{2} \bar{\psi} \gamma^\mu \quad ; \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \bar{\psi})} = \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{DIRAC}}}{\partial(\partial_\mu \bar{\psi})} = -\frac{i}{2} \gamma^\mu \psi$$

Les équations pour  $\psi$  et  $\bar{\psi}$  sont donc bien :

$$(i \gamma^\mu D_\mu - m) \psi = 0 \quad ; \quad \bar{\psi} (-i \gamma^\mu \overleftrightarrow{D}_\mu^* - m) = 0$$

Semblablement, on calcule :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{DIRAC}}}{\partial A_\nu} = -q \bar{\psi} \gamma^\nu \psi = -j^\nu$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{MAX}}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = -F^{\mu\nu}$$

L'équation pour  $A_\mu$  est donc effectivement :

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu$$

Le tenseur énergie-impulsion de la théorie complète est donné par

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)} \partial^\nu \psi + \partial^\nu \bar{\psi} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \bar{\psi})} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\alpha)} \partial^\nu A_\alpha - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L} \quad (3.50)$$

et peut se récrire comme

$$T^{\mu\nu} = T^{\mu\nu}_{\text{DIRAC}} + T^{\mu\nu}_{\text{MAX}} \quad (3.51)$$

Avec:

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu}_{\text{DIRAC}} &= \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{DIRAC}}}{\partial(\partial_\mu \psi)} \partial^\nu \psi + \partial^\nu \bar{\psi} \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{DIRAC}}}{\partial(\partial_\mu \bar{\psi})} - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L}_{\text{DIRAC}} \\ &= \frac{1}{2} \bar{\psi} \gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu \psi \end{aligned} \quad (3.52)$$

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu}_{\text{MAX}} &= \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{MAX}}}{\partial(\partial_\mu A_\alpha)} \partial^\nu A_\alpha - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L}_{\text{MAX}} \\ &= F^{\mu\alpha} F_\alpha{}^\nu + \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} - F^{\mu\alpha} \partial_\alpha A^\nu \end{aligned} \quad (3.53)$$

Ces tenseurs ne sont ni symétriques, ni invariants de jauge, et doivent donc être améliorés par une procédure semblable à celle de Belinfante. Il est possible, par exemple, d'arriver à des expressions simples qui sont invariantes de jauge. Pour cela, on procède comme dans le cas de Klein-Gordon.

On commence par considérer la quantité :

$$\sum \mu_{\alpha\beta} = -i \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial(\partial_\mu \psi)} S^{\alpha\beta} \psi + i \bar{\psi} S^{\alpha\beta} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial(\partial_\mu \bar{\psi})} - i \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial(\partial_\mu A_\sigma)} (S^{\alpha\beta})^\sigma{}^\mu A_\sigma \quad (3.54)$$

Celle-ci peut se récrire comme

$$\sum \mu_{\alpha\beta} = \sum_{\text{DIRAC}} \mu_{\alpha\beta} + \sum_{\text{MAX}} \mu_{\alpha\beta} \quad (3.55)$$

avec :

$$\begin{aligned} \sum_{\text{DIRAC}} \mu_{\alpha\beta} &= -i \frac{\partial \mathcal{H}_{\text{DIRAC}}}{\partial(\partial_\mu \psi)} S^{\alpha\beta} \psi + i \bar{\psi} S^{\alpha\beta} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial(\partial_\mu \bar{\psi})} \\ &= -\frac{i}{8} \bar{\psi} \{ \gamma^\mu, [\gamma^\alpha, \gamma^\beta] \} \psi \end{aligned} \quad (3.56)$$

$$\begin{aligned} \sum_{\text{MAX}} \mu_{\alpha\beta} &= -i \frac{\partial \mathcal{H}_{\text{MAX}}}{\partial(\partial_\mu A_\sigma)} (S^{\alpha\beta})^\sigma{}^\mu A_\sigma \\ &= -F^{\mu\alpha} A^\beta + F^{\mu\beta} A^\alpha \end{aligned} \quad (3.57)$$

On peut alors définir le nouveau tenseur amélioré de Belinfante comme :

$$\Theta^{\mu\nu} = T^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \partial_\rho (\sum \gamma^{\rho\mu\nu} - \sum \mu \gamma^{\rho\nu} - \sum \nu \gamma^{\rho\mu}) \quad (3.58)$$

Ce tenseur est par construction symétrique et également conservé :

$$\partial_\mu \Theta^{\mu\nu} = 0 \quad (3.59)$$

On peut également le décomposer en deux termes :

$$\Theta^{\mu\nu} = \Theta_{\text{DIRAC}}^{\mu\nu} + \Theta_{\text{MAX}}^{\mu\nu} \quad (3.60)$$

Avec :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{O}_{\text{DIRAC}}^{\mu\nu} &= T_{\text{DIRAC}}^{\mu\nu} - \int^{\mu} A^{\nu} + \frac{1}{2} \partial_{\rho} \left( \sum_{\text{DIRAC}}^{\rho\mu\nu} - \sum_{\text{DIRAC}}^{\mu\rho\nu} - \sum_{\text{DIRAC}}^{\nu\rho\mu} \right) \\
 &\stackrel{(3.41)}{=} \frac{i}{2} \bar{\psi} \gamma^{\mu} \overleftrightarrow{\partial}^{\nu} \psi - \bar{\psi} \gamma^{\mu} A^{\nu} \psi - \frac{i}{4} \bar{\psi} (\gamma^{\mu} \overleftrightarrow{\partial}^{\nu} - \gamma^{\nu} \overleftrightarrow{\partial}^{\mu}) \psi \\
 &= \frac{i}{2} \bar{\psi} \gamma^{\mu} \overleftrightarrow{\partial}^{\nu} \psi - \frac{i}{4} \bar{\psi} (\gamma^{\mu} \overleftrightarrow{\partial}^{\nu} - \gamma^{\nu} \overleftrightarrow{\partial}^{\mu}) \psi \\
 &= \frac{i}{4} \bar{\psi} (\gamma^{\mu} \overleftrightarrow{\partial}^{\nu} + \gamma^{\nu} \overleftrightarrow{\partial}^{\mu}) \psi \tag{3.61}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{O}_{\text{MAX}}^{\mu\nu} &= T_{\text{MAX}}^{\mu\nu} + \int^{\mu} A^{\nu} + \frac{1}{2} \partial_{\rho} \left( \sum_{\text{MAX}}^{\rho\mu\nu} - \sum_{\text{MAX}}^{\mu\rho\nu} - \sum_{\text{MAX}}^{\nu\rho\mu} \right) \\
 &= T_{\text{MAX}}^{\mu\nu} + \int^{\mu} A^{\nu} - \partial_{\rho} (F^{\rho\mu} A^{\nu}) \\
 &= T_{\text{MAX}}^{\mu\nu} - F^{\rho\mu} \partial_{\rho} A^{\nu} + (\cancel{\int^{\mu}} - \cancel{\partial_{\rho}} F^{\rho\mu}) A^{\nu} \\
 &= F^{\mu\alpha} F_{\alpha}^{\nu} + \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \tag{3.62}
 \end{aligned}$$

Les deux tenseurs sont symétriques et invariants de jauge, et se réduisent correctement aux tenseurs  $\mathcal{O}_{\text{DIRAC}}^{\mu\nu}$  et  $\mathcal{O}_{\text{MAX}}^{\mu\nu}$  des théories libres dans la limite  $g \rightarrow 0$  où les interactions sont éteintes. Toutefois, comme avant, seulement leur somme reste conservée pour  $g \neq 0$  avec des interactions.

On calcule :

$$\begin{aligned}
 \partial_\mu \Theta_{\text{Dirac}}^{\mu\nu} &= \frac{i}{4} \partial_\mu (\bar{\psi} \gamma^\mu \overleftrightarrow{D}^\nu \psi) + \frac{i}{4} \partial_\mu (\bar{\psi} \gamma^\nu \overleftrightarrow{D}^\mu \psi) \\
 &= \frac{i}{4} \partial_\mu [\bar{\psi} \gamma^\mu D^\nu \psi - D^{*\nu} \bar{\psi} \gamma^\mu \psi] \\
 &\quad + \frac{i}{4} \partial_\mu [\bar{\psi} \gamma^\nu D^\mu \psi - D^{*\mu} \bar{\psi} \gamma^\nu \psi] \\
 &= \frac{i}{4} [\partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu D^\nu \psi + \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu (D^\nu \psi) \\
 &\quad - \partial_\mu (D^{*\nu} \bar{\psi}) \gamma^\mu \psi - D^{*\nu} \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi \\
 &\quad + \partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\nu D^\mu \psi + \bar{\psi} \gamma^\nu \partial_\mu (D^\mu \psi) \\
 &\quad - \partial_\mu (D^{*\mu} \bar{\psi}) \gamma^\nu \psi - D^{*\mu} \bar{\psi} \gamma^\nu \partial_\mu \psi] \\
 &= \frac{i}{4} [D_\mu^* \bar{\psi} \gamma^\mu D^\nu \psi + i q \cancel{A_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu D^\nu \psi} \\
 &\quad + \bar{\psi} \gamma^\mu D_\mu D^\nu \psi - i q \cancel{A_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu D^\nu \psi} \\
 &\quad - D_\mu^* \bar{\psi} \gamma^\nu D^\mu \psi - i q \cancel{A_\mu D^{*\nu} \bar{\psi} \gamma^\mu \psi} \\
 &\quad - D^{*\nu} \bar{\psi} \gamma^\mu D_\mu \psi + i q \cancel{A_\mu D^{*\nu} \bar{\psi} \gamma^\mu \psi} \\
 &\quad + \cancel{D_\mu^* \bar{\psi} \gamma^\nu D^\mu \psi} + i q \cancel{A_\mu \bar{\psi} \gamma^\nu D^\mu \psi} \\
 &\quad + \bar{\psi} \gamma^\nu D_\mu (D^\mu \psi) - i q \cancel{A_\mu \bar{\psi} \gamma^\nu D^\mu \psi} \\
 &\quad - D_\mu^* (D^{*\mu} \bar{\psi}) \gamma^\nu \psi - i q \cancel{A_\mu D^{*\mu} \bar{\psi} \gamma^\nu \psi} \\
 &\quad - \cancel{D^{*\mu} \bar{\psi} \gamma^\nu D_\mu \psi} + i q \cancel{A_\mu D^{*\mu} \bar{\psi} \gamma^\nu \psi}] \\
 &= \frac{i}{4} [D_\mu^* \bar{\psi} \gamma^\mu D^\nu \psi + \bar{\psi} D^\nu \gamma^\mu D_\mu \psi + [D_\mu, D^\nu] \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \\
 &\quad - D^{*\nu} D_\mu^* \bar{\psi} \gamma^\mu \psi - D^{*\nu} \bar{\psi} \gamma^\mu D_\mu \psi - [D_\mu^*, D^{*\nu}] \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \\
 &\quad + \bar{\psi} \gamma^\nu D_\mu D^\mu \psi - D_\mu^* D^{*\mu} \bar{\psi} \gamma^\nu \psi]
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
(3.23) &= \frac{i}{4} \left[ -\cancel{m \bar{\psi} \not{D}^{\nu} \psi} + \cancel{m \bar{\psi} \not{D}^{\nu} \psi} + i q F_{\mu}^{\nu} \bar{\psi} \gamma^{\mu} \psi \right. \\
&\quad + \cancel{m \not{D}^{\nu} \bar{\psi} \psi} - \cancel{m \not{D}^{\nu} \bar{\psi} \psi} + i q F_{\mu}^{\nu} \bar{\psi} \gamma^{\mu} \psi \\
&\quad + \bar{\psi} \cancel{\gamma^{\nu} (m^2 - \frac{i q}{4} F_{\alpha\beta} [\gamma^{\alpha}, \gamma^{\beta}])} \psi \\
&\quad \left. - \bar{\psi} \cancel{(m^2 + i \frac{q}{4} F_{\alpha\beta} [\gamma^{\alpha}, \gamma^{\beta}])} \gamma^{\nu} \psi \right] \\
&= -\frac{q}{2} F_{\mu}^{\nu} \bar{\psi} \gamma^{\mu} \psi + \frac{q}{16} F_{\alpha\beta} \bar{\psi} [\gamma^{\nu}, [\gamma^{\alpha}, \gamma^{\beta}]] \psi \\
&= -\frac{q}{2} F_{\mu}^{\nu} \bar{\psi} \gamma^{\mu} \psi - \frac{q}{16} F_{\alpha\beta} \bar{\psi} (\{\gamma^{\nu}, \gamma^{\alpha}\} \{\gamma^{\beta}, \gamma^{\nu}\} - \{\gamma^{\beta}, \gamma^{\alpha}\} \{\gamma^{\nu}, \gamma^{\nu}\}) \psi \\
&= -\frac{q}{2} F_{\mu}^{\nu} \bar{\psi} \gamma^{\mu} \psi - \frac{q}{4} F_{\alpha\beta} \bar{\psi} (\gamma^{\alpha} \eta^{\beta\nu} - \gamma^{\beta} \eta^{\alpha\nu}) \psi \\
&= -q F_{\mu}^{\nu} \bar{\psi} \gamma^{\mu} \psi \\
&= F_{\mu}^{\nu} J^{\mu}
\end{aligned}$$

et comme avant:

$$\partial_{\mu} \Theta_{MAX}^{\mu\nu} = - F_{\mu}^{\nu} J^{\mu}$$

On a donc:

$$\left. \begin{aligned}
\partial_{\mu} \Theta_{DIKAC}^{\mu\nu} &= g^{\nu} \\
\partial_{\mu} \Theta_{MAX}^{\mu\nu} &= -g^{\nu}
\end{aligned} \right\} \quad (3.63)$$

en terme de la densité de force de Lorentz:

$$g^{\nu} = F_{\mu}^{\nu} J^{\mu} \quad (3.64)$$

## 4 QUANTIFICATION DE CHAMPS LIBRES

### 4.1 Généralités sur la quantification de champs

Les théories de champs classiques de Klein-Gordon, Dirac et Maxwell décrivent des particules quantiques de spin  $0$ ,  $\frac{1}{2}$  et  $1$  respectivement. Par exemple, le premier type de théorie permet de décrire des particules scalaires comme les mésons  $\pi$ , le deuxième type des particules de type spinoriel comme l'électron  $e$  ou le proton  $p$ , et le troisième type des particules de type vectoriel comme le photon  $\gamma$ .

Le problème fondamental que la théorie quantique de ces champs doit adresser est la formalisation de l'aspect corpusculaire de ces champs, c'est-à-dire le fait que ces champs se comportent comme des collections de particules quantiques. Plus précisément, le but est de pouvoir contrôler mathématiquement le fait que le nombre de particules et antiparticules peut varier suite aux interactions, la seule contrainte étant la conservation de l'énergie, de la quantité de mouvement et du moment cinétique totaux.

Les théories de champs classiques qui constituent le point de départ sont à interpréter comme des théories décrivant l'évolution de la fonction d'onde quantique associée. Elles représentent donc une première quantification par rapport aux théories classiques décrivant la dynamique des particules par leur position ponctuelle.

Les théories de champs quantique représentent en quelque sorte une deuxième quantification, qui désécrit les échanges de particules pouvant intervenir. En particulier, elles capturent la possibilité de créer des paires de particules antiparticules à partir du vide, ou vice versa de détruire des paires de particules antiparticules dans le vide.

Techniquement, cette deuxième quantification peut être réalisée de la façon canonique, c'est-à-dire en postulant que les parenthèses de Poisson entre les variables canoniques, ici des champs locaux, deviennent des commutateurs ou des anticommutateurs d'opérateurs :

Pour comprendre l'essence de cette procédure, on remarque qu'un champ  $\psi(x)$  peut être interprété comme une collection infinie de variables canoniques  $q_i(t)$  correspondant à la valeur du champ  $\psi(\vec{x}_i, t)$  en chaque point  $\vec{x}_i$  de l'espace.

La densité de Lagrangien décrivant la dynamique d'un champ libre comporte usuellement trois types de termes, respectivement de la forme  $\dot{\psi}(x)^2$ ,  $\psi(x)^2$  et  $|\vec{\nabla} \cdot \psi(x)|^2$ . En chaque point  $\vec{x}_i$  de l'espace, ces termes donnent lieu à une énergie cinétique  $\dot{q}_i^2$  pour la variable  $q_i$ , une énergie potentielle  $q_i^2$  pour la variable  $q_i$ , et des énergies potentielles  $(q_i - q_{i-\epsilon})^2$  et  $(q_i - q_{i+\epsilon})^2$  pour les différences entre la variables  $q_i$  et ses voisines  $q_{i-\epsilon}$  et  $q_{i+\epsilon}$ .

L'intégrale sur l'espace définissant le Lagrangien peut finalement être interprété comme une somme sur toute les variables:  $\sum_i$ . Le résultat est donc une théorie avec un nombre infini de variables avec des énergies cinétiques usuelles et des potentiels de type harmonique.

Celle de composition en un nombre infini de variables canoniques usuelles peut être faite de façon précise et systématique en discrétisant l'espace en un réseau de maille  $\epsilon$ , avec  $\epsilon \rightarrow 0$ .

Mais le seul résultat qualitativement important est qu'il est possible de décrire un champ libre comme une collection infinie d'oscillateurs harmoniques. Nous verrons que ceux-ci sont en correspondance avec les modes normaux de l'équation du mouvement, c'est à dire de ses solutions indépendantes, qui sont ensuite interprétées comme des particules et antiparticules.

Etant donné l'importance de l'oscillateur harmonique dans toute la théorie de champs quantique, il convient de rappeler les principaux résultats le concernant. En particulier, il existe une distinction importante entre oscillateurs bosoniques, relevant à une statistique de Bose-Einstein, et oscillateurs fermioniques, relevant à une statistique de Fermi-Dirac.

### 4.2 Oscillateurs harmoniques bosonique

Un oscillateur harmonique bosonique est décrit par le Lagrangien

$$L = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 - \frac{1}{2} m \omega^2 q^2 \tag{4.1}$$

Le moment canonique conjugué à  $q$  est

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m \dot{q} \tag{4.2}$$

L'Hamiltonien correspondant est,

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 q^2 \tag{4.3}$$

Les variables canoniques  $q$  et  $p$  ont des parenthèses de Poisson données par:

$$\left. \begin{aligned} \{q, p\} &= 1 \\ \{q, q\} &= \{p, p\} = 0 \end{aligned} \right\} \tag{4.4}$$

Le système peut être quantifié de façon canonique en promouvant les variables  $q$  et  $p$  à des opérateurs satisfaisant des règles de commutation obtenues en remplaçant les parenthèses de Poisson par des commutateurs.

$$\left. \begin{aligned} [q, p] &= i \\ [q, q] &= [p, p] = 0 \end{aligned} \right\} \tag{4.5}$$

Les états quantiques propres peuvent être déterminés en considérant les opérateurs de création et de destruction suivants :

$$\begin{cases} a = \frac{1}{\sqrt{2m\omega}} (m\omega q + ip) \\ a^+ = \frac{1}{\sqrt{2m\omega}} (m\omega q - ip) \end{cases} \quad (4.6)$$

Il suit des équations (4.5) que ces opérateurs satisfaisant des règles de commutation données par :

$$\begin{cases} [a, a^+] = 1 \\ [a, a] = [a^+, a^+] = 0 \end{cases} \quad (4.7)$$

L'Hamiltonien peut être réécrit comme :

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \omega (a^+ a + a a^+) \\ &= \omega \left( a^+ a + \frac{1}{2} \right) \end{aligned} \quad (4.8)$$

Il est alors utile d'introduire l'opérateur de nombre d'occupation

$$N = a^+ a \quad (4.9)$$

En utilisant la propriété :

$$[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B \quad (4.10)$$

on trouve:

$$\begin{cases} [N, a] = -a \\ [N, a^\dagger] = +a^\dagger \end{cases} \quad (4.11)$$

et l'Hamiltonien peut se récrire simplement comme :

$$H = (N + \frac{1}{2}) \omega \quad (4.12)$$

Les états propres de l'Hamiltonien sont les états propres de l'opérateur N, définis comme :

$$N|n\rangle = n|n\rangle \quad (4.13)$$

Etant donné que  $N = a^\dagger a$  est un opérateur défini positif, n doit être positif :

$$\begin{aligned} n &= \langle n|N|n\rangle = \langle n|a^\dagger a|n\rangle = \langle n'|n'\rangle \\ &\geq 0 \end{aligned} \quad (4.14)$$

Il doit donc exister un état fondamental  $|n_0\rangle$  avec valeur propre  $n_0$  minimale, elle aussi positive :

$$N|n_0\rangle = n_0|n_0\rangle, \quad n_0 = \min \{n\} \geq 0 \quad (4.15)$$



On déduit ensuite des (4.11) que :

$$\begin{aligned} N a |n\rangle &= -a(N-1) |n\rangle = a(n-1) |n\rangle \\ &= (n-1) a |n\rangle \end{aligned} \quad (4.16)$$

$$\begin{aligned} N a^+ |n\rangle &= a^+(N+1) |n\rangle = a(n+1) |n\rangle \\ &= (n+1) a^+ |n\rangle \end{aligned} \quad (4.17)$$

Donc  $a$  et  $a^+$  transforment un état propre  $|n\rangle$  avec valeur propre  $n$  en des états propres  $|n-1\rangle$  et  $|n+1\rangle$  avec valeurs propres  $n-1$  et  $n+1$ .

Etant donné que  $|n_0\rangle$  est l'état propre avec valeur propre minimale, on déduit que :

$$a |n_0\rangle = 0 \quad (4.18)$$

Donc, pour l'état fondamental au moins :

$$\begin{aligned} n_0 &= \langle n_0 | N | n_0 \rangle = \langle n_0 | a^+ a | n_0 \rangle \\ &= 0 \end{aligned} \quad (4.19)$$

Tous les autres états propres peuvent finalement être obtenus en appliquant un nombre arbitraire de  $a^+$ , et le résultat correctement normalisé est :

$$|n\rangle = \frac{(a^+)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.20)$$

Les niveaux d'énergie sont alors donnés par :

$$E_n = \langle n | H | n \rangle$$

$$= \left(n + \frac{1}{2}\right) \omega \quad (4.21)$$

Il y a donc une énergie de point zéro  $E_0 = \frac{1}{2} \omega$  pour l'état fondamental, et les autres niveaux sont séparés par l'énergie  $\Delta E = \omega$  correspondante à la pulsation de l'oscillateur.

L'oscillateur harmonique simple traité ci-dessus peut être facilement généralisé à une collection de différents oscillateurs harmoniques avec pulsations  $\omega_k, k=1, \dots, N$ . Dans ce cas, on aura plusieurs opérateurs de création et destruction  $a_k^+$  et  $a_k$ , avec  $k=1, \dots, N$ , satisfaisant les règles de commutation suivantes :

$$\left. \begin{aligned} & [a_k, a_{k'}^+] = \delta_{kk'} \\ & [a_k, a_{k'}] = [a_k^+, a_{k'}^+] = 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.22)$$

On peut alors introduire les opérateurs de nombres d'occupations

$$N_k = a_k^+ a_k \quad (4.23)$$

satisfaisant les règles de commutations

$$\left\{ \begin{array}{l} [N_k, a_{k'}] = -\delta_{k,k'} a_k \\ [N_k, a_{k'}^+] = +\delta_{k,k'} a_{k'}^+ \end{array} \right. \quad (4.74)$$

L'Hamiltonien a la forme:

$$\begin{aligned} H &= \sum_k \omega_k (a_k^+ a_k + \frac{1}{2}) \\ &= \sum_k (N_k + \frac{1}{2}) \omega_k \end{aligned} \quad (4.75)$$

En procédant comme avant, on trouve que les états propres sont donnés par:

$$|n_1, \dots, n_k\rangle = \prod_{k=1}^N \frac{(a^+)^{n_k}}{\sqrt{n_k!}} |0\rangle, \quad n_k = 0, 1, 2, \dots \quad (4.76)$$

Les niveaux d'énergie correspondants sont:

$$\begin{aligned} E_{\{n_1, \dots, n_k\}} &= \langle n_1, \dots, n_k | H | n_1, \dots, n_k \rangle \\ &= \sum_k (n_k + \frac{1}{2}) \omega_k \end{aligned} \quad (4.77)$$

Il est clair que l'oscillateur ordinaire conduira à une statistique de Bose-Einstein, car les états (4.76) sont complètement symétriques et les nombres d'occupations  $n_k$  sont illimités.

### 4.3 Oscillateur harmonique fermionique

Il est possible de définir un système quantique qui a le même spectre que l'oscillateur harmonique bosonique mais avec une statistique fermionique compatible avec le principe d'exclusion de Pauli.

L'observation cruciale pour déterminer cette généralisation est que le spectre dépend seulement des règles de commutations de  $N$  avec  $a$  et  $a^\dagger$ , alors que la statistique dépend seulement des règles de commutations de  $a$  et  $a^\dagger$  entre eux. On peut alors essayer de changer les (4.7), mais de telle façon à laisser inchangées les (4.11).

L'oscillateur harmonique fermionique est défini en considérant un système défini par des opérateurs de création et de destruction  $a^\dagger$  et  $a$  satisfaisant une algèbre semblable à (4.7) mais avec des anticommutateurs à la place de commutateurs :

$$\left. \begin{array}{l} \{a, a^\dagger\} = 1 \\ \{a, a\} = \{a^\dagger, a^\dagger\} = 0 \end{array} \right\} \quad (4.28)$$

et un Hamiltonien semblable à (4.8) :

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \omega (a^\dagger a - a a^\dagger) \\ &= \omega \left( a^\dagger a - \frac{1}{2} \right) \end{aligned} \quad (4.29)$$

On peut alors introduire comme en (4.9) un opérateur nombre d'occupation

$$N = a^\dagger a \quad (4.30)$$

En utilisant alors la propriété alternative à (4.10) établissant que

$$[AB, C] = A\{B, C\} - \{A, C\}B \quad (4.31)$$

on trouve à nouveau les relations (4.11) :

$$\begin{cases} [N, a] = -a \\ [N, a^\dagger] = +a^\dagger \end{cases} \quad (4.32)$$

En procédant exactement comme dans le cas bosonique, on trouve que les états propres sont donnés par :

$$|n\rangle = \frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle, \quad n = 0, 1 \quad (4.33)$$

Il y a donc seulement deux états, vu que par (4.28) on a  $(a^\dagger)^2 = 0$  et donc  $(a^\dagger)^n = 0$  pour  $n \geq 1$ .

Les niveaux d'énergie sont donc donnés par :

$$\begin{aligned} E_n &= \langle n | H | n \rangle \\ &= \left(n - \frac{1}{2}\right) \omega \end{aligned} \quad (4.34)$$

Il y a une énergie de point zéro  $E_0 = -\frac{1}{2}\omega$  pour l'état fondamental, et un seul autre état séparé par l'énergie  $\Delta E = \omega$  correspondant à la pulsation de l'oscillateur harmonique.

Comme dans le cas bosonique, cet oscillateur harmonique simple peut être facilement généralisé à une collection de différents oscillateurs harmoniques avec pulsations  $\omega_k$ ,  $k = 1, \dots, N$ . On aura comme avant plusieurs opérateurs de création et de destruction  $a_k^\dagger$  et  $a_k$ , avec  $k = 1, \dots, N$ , satisfaisant les règles d'anti-commutation suivantes :

$$\left. \begin{aligned} &\{a_k, a_{k'}^\dagger\} = \delta_{kk'} \\ &\{a_k, a_{k'}\} = \{a_k^\dagger, a_{k'}^\dagger\} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.35)$$

On peut alors introduire les opérateurs nombres d'occupation définis comme :

$$N_k = a_k^\dagger a_k \quad (4.36)$$

Les opérateurs satisfaisant les règles de commutation

$$\left\{ \begin{array}{l} [N_k, a_{k'}] = -\delta_{kk'} a_{k'} \\ [N_k, a_{k'}^\dagger] = +\delta_{kk'} a_{k'}^\dagger \end{array} \right. \quad (4.37)$$

L'Hamiltonien a la forme :

$$\begin{aligned} H &= \sum_k \omega_k \left( a_k^\dagger a_k - \frac{1}{2} \right) \\ &= \sum_k \left( N_k - \frac{1}{2} \right) \omega_k \end{aligned} \quad (4.38)$$

En procédant comme avant, on trouve que les états propres sont donnés par :

$$|n_1, \dots, n_N\rangle = \prod_{k=1}^N \frac{(a^\dagger)^{n_k}}{\sqrt{n_k!}} |0\rangle, \quad n_k = 0, 1 \quad (4.39)$$

Les niveaux d'énergie correspondants sont :

$$\begin{aligned} E_{\{n_1, \dots, n_N\}} &= \langle n_1, \dots, n_N | H | n_1, \dots, n_N \rangle \\ &= \sum_k \left( n_k - \frac{1}{2} \right) \omega_k \end{aligned} \quad (4.40)$$

Il est clair que cet oscillateur conduira à une statistique de Fermi-Dirac, car les états (4.39) sont complètement antisymétriques et les nombres d'occupations sont limités à deux valeurs.

## 5 THEORIE DE KLEIN GORDON

### 5.1 Théorie classique

La théorie de Klein-Gordon est basée sur un champ scalaire complexe  $\phi(x)$  et la densité de Lagrangien est

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi \quad (5.1)$$

L'équation du mouvement est

$$(\square + m^2) \phi = 0 \quad (5.2)$$

et les moments canoniques conjugués à  $\phi$  et  $\phi^*$  sont:

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi)} = \partial^0 \phi^* ; \quad \pi^* = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi^*)} = \partial^0 \phi \quad (5.3)$$

La charge électrique, qui est la charge associée à l'invariance sous transformations de phase du champ, est donnée par:

$$\begin{aligned} Q &= q \int d^3 \vec{x} (-i \pi \phi + i \pi^* \phi^*) \\ &= -iq \int d^3 \vec{x} (\partial^0 \phi^* \phi - \partial^0 \phi \phi^*) \end{aligned} \quad (5.4)$$

L'énergie  $H$  et la quantité de mouvement  $P^i$ , qui sont les charges conservées associées à l'invariance sous translations temporelles et spatiales, s'écrivent:



$$\begin{aligned}
 H &= \int d^3\vec{x} (\pi \dot{\phi} + \pi^* \dot{\phi}^* - \mathcal{L}) \\
 &= \int d^3\vec{x} (\dot{\phi}^* \dot{\phi} + \vec{\nabla} \phi^* \cdot \vec{\nabla} \phi + m^2 \phi^* \phi)
 \end{aligned} \tag{5.5}$$

$$\begin{aligned}
 P^i &= \int d^3\vec{x} (\pi \dot{\phi}^i + \pi^* \dot{\phi}^{i*}) \\
 &= \int d^3\vec{x} (\dot{\phi}^* \dot{\phi}^i + \dot{\phi} \dot{\phi}^{i*})
 \end{aligned} \tag{5.6}$$

Les moments cinétiques  $M^{ij}$  et temporels  $M^{0i}$ , qui sont les charges associées à l'invariance sans rotations et glissements, sont données par :

$$\begin{aligned}
 M^{ij} &= \int d^3\vec{x} \left[ -x^i (\pi \dot{\phi}^j + \pi^* \dot{\phi}^{j*}) \right. \\
 &\quad \left. + x^j (\pi \dot{\phi}^i + \pi^* \dot{\phi}^{i*}) \right. \\
 &\quad \left. + i (\pi \cancel{S_{\kappa\alpha}^{ij}} \phi - \pi^* \cancel{S_{\kappa\alpha}^{ij}} \phi^*) \right] \\
 &= \int d^3\vec{x} \left[ -x^i (\dot{\phi}^* \dot{\phi}^j + \dot{\phi} \dot{\phi}^{j*}) \right. \\
 &\quad \left. + x^j (\dot{\phi}^* \dot{\phi}^i + \dot{\phi} \dot{\phi}^{i*}) \right]
 \end{aligned} \tag{5.7}$$

$$\begin{aligned}
 M^{0i} &= \int d^3\vec{x} \left[ -x^0 (\pi \dot{\phi}^i + \pi^* \dot{\phi}^{i*}) \right. \\
 &\quad \left. + x^i (\pi \dot{\phi} + \pi^* \dot{\phi}^* - \mathcal{L}) \right. \\
 &\quad \left. + i (\pi \cancel{S_{\kappa\alpha}^{0i}} \phi - \pi^* \cancel{S_{\kappa\alpha}^{0i}} \phi^*) \right] \\
 &= \int d^3\vec{x} \left[ -x^0 (\dot{\phi}^* \dot{\phi}^i + \dot{\phi} \dot{\phi}^{i*}) \right. \\
 &\quad \left. + x^i (\dot{\phi}^* \dot{\phi} + \dot{\phi} \dot{\phi}^* + \vec{\nabla} \phi \cdot \vec{\nabla} \phi^* + m^2 \phi^* \phi) \right]
 \end{aligned} \tag{5.8}$$

La solution générale de l'équation de Klein-Gordon libre (5.2) est une superposition d'ondes planes progressives et régressives satisfaisant la relation de dispersion:

$$\omega_k = \sqrt{k^2 + m^2} \quad (5.9)$$

Plus précisément, la solution générale est donnée par la décomposition en modes normaux:

$$\left\{ \begin{aligned} \phi(x) &= \phi^{(+)}(x) + \phi^{(-)}(x) \\ &= \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^{3/2} 2\omega_k} \left[ a(\vec{k}) f(\vec{k}, x) + b^*(\vec{k}) f^*(\vec{k}, x) \right] \\ \phi^*(x) &= \phi^{* (+)}(x) + \phi^{* (-)}(x) \\ &= \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^{3/2} 2\omega_k} \left[ b(\vec{k}) f(\vec{k}, x) + a^*(\vec{k}) f^*(\vec{k}, x) \right] \end{aligned} \right. \quad (5.10)$$

où :

$$f(\vec{k}, x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{-i k_\mu x^\mu} \quad (5.11)$$

Les coefficients  $a$  et  $b$  sont des scalaires sous transformations de Lorentz, étant donné que la mesure est invariante. On a en outre:

$$[\phi] = +1 ; [a] = [b] = -1 \quad (5.12)$$

L'ensemble de fonctions (5.11) est complet et orthonormal, dans le sens que :

$$\begin{aligned}
 \int d^3\vec{x} f^*(\vec{k}, x) f(\vec{k}', x) &= \int \frac{d^3\vec{x}}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}_\mu x^\mu} e^{-i\vec{k}'_\mu x^\mu} \\
 &= e^{-i(\omega_k - \omega_{k'})t} \int \frac{d^3\vec{x}}{(2\pi)^3} e^{-i(\vec{k} - \vec{k}')\vec{x}} \\
 &= e^{-i(\omega_k - \omega_{k'})t} \delta^3(\vec{k} - \vec{k}') \\
 &= \delta^3(\vec{k} - \vec{k}')
 \end{aligned} \tag{5.13}$$

Toutefois, par un calcul semblable on trouve :

$$\begin{cases}
 \int d^3\vec{x} f(\vec{k}, x) f(\vec{k}', x) = e^{-2i\omega_k t} \delta^3(\vec{k} + \vec{k}') \neq 0 \\
 \int d^3\vec{x} f^*(\vec{k}, x) f^*(\vec{k}', x) = e^{2i\omega_k t} \delta^3(\vec{k} + \vec{k}') \neq 0
 \end{cases} \tag{5.14}$$

On peut obtenir un produit scalaire plus utile entre les fonctions  $f(\vec{k}, \vec{x})$  en introduisant dans les expressions ci-dessus un  $i\epsilon_0$ . On trouve alors

$$\begin{aligned}
 \int d^3\vec{x} f^*(\vec{k}, x) i\epsilon_0 f(\vec{k}', x) &= \int \frac{d^3\vec{x}}{(2\pi)^3} e^{-i\vec{k}_\mu x^\mu} (k_0 + k_0') e^{-i\vec{k}'_\mu x^\mu} \\
 &= (\omega_k + \omega_{k'}) e^{-i(\omega_k - \omega_{k'})t} \int \frac{d^3\vec{x}}{(2\pi)^3} e^{-i(\vec{k} - \vec{k}')\vec{x}} \\
 &= (\omega_k + \omega_{k'}) e^{-i(\omega_k - \omega_{k'})t} \delta^3(\vec{k} - \vec{k}') \\
 &= 2\omega_k \delta^3(\vec{k} - \vec{k}')
 \end{aligned} \tag{5.15}$$

Par un calcul semblable on trouve cette fois:

$$\left. \begin{aligned} \int d^3\vec{x} f(\vec{k}, x) i\overleftrightarrow{\mathcal{D}}_0 f(\vec{k}', x) &= 0 \\ \int d^3\vec{x} f^*(\vec{k}, x) i\overleftrightarrow{\mathcal{D}}_0 f(\vec{k}', x) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.16)$$

Le fait que le produit scalaire défini par les équations (5.15), (5.16) est plus simple et utile que celui défini par les équations (5.13), (5.14) est liée à la forme particulière de la densité de probabilité conservée dans la théorie de Klein-Gordon qui n'est pas  $\phi^*\phi$  mais  $\phi^*i\overleftrightarrow{\mathcal{D}}_0\phi$ .

En utilisant les relations (5.15), (5.16), il est possible d'inverser les décompositions (5.10) pour déterminer les coefficients  $a$  et  $b$  en fonction du champ  $\phi$ . On trouve facilement:

$$\left. \begin{aligned} a(\vec{k}) &= \int d^3\vec{x} (2\pi)^{3/2} f^*(\vec{k}, x) i\overleftrightarrow{\mathcal{D}}_0 \phi(x) \\ b(\vec{k}) &= \int d^3\vec{x} (2\pi)^{3/2} f^*(\vec{k}, x) i\overleftrightarrow{\mathcal{D}}_0 \phi^*(x) \end{aligned} \right\} \quad (5.17)$$

Sur les solutions libres, les quantités conservées  $Q$ ,  $P^\mu$  et  $M^{\mu\nu}$  peuvent être simplifiées et être écrites en fonction de  $a$  et  $b$ . Pour cela, on peut utiliser les équations du mouvement et intégrer par parties.

De cette manière, on peut écrire :

$$Q = i \int d^3\vec{x} \phi^* \overleftrightarrow{\partial}_0 [\eta] \phi \quad (5.18)$$

puis

$$\begin{aligned} P^\mu &= \int d^3\vec{x} (\partial^0 \phi^* \partial^\mu \phi - \phi^* \partial^\mu \partial^0 \phi) \\ &= -i \int d^3\vec{x} \phi^* \{ [-i\partial^\mu] \overleftrightarrow{\partial}_0 - \overleftrightarrow{\partial}_0 [-i\partial^\mu] \} \phi \\ &= -i \int d^3\vec{x} \phi^* [\hat{P}^\mu \overleftrightarrow{\partial}_0 - \overleftrightarrow{\partial}_0 \hat{P}^\mu] \phi \end{aligned} \quad (5.19)$$

et enfin :

$$\begin{aligned} M^{\mu\nu} &= \int d^3\vec{x} \left[ -x^\mu (\partial^0 \phi^* \partial^\nu \phi - \phi^* \partial^\nu \partial^0 \phi) \right. \\ &\quad \left. + x^\nu (\partial^0 \phi^* \partial^\mu \phi - \phi^* \partial^\mu \partial^0 \phi) \right] \\ &= -i \int d^3\vec{x} \phi^* \{ [i(x^\mu \partial^\nu - x^\nu \partial^\mu)] \overleftrightarrow{\partial}_0 - \overleftrightarrow{\partial}_0 [i(x^\mu \partial^\nu - x^\nu \partial^\mu)] \} \phi \\ &= -i \int d^3\vec{x} \phi^* [\hat{M}^{\mu\nu} \overleftrightarrow{\partial}_0 - \overleftrightarrow{\partial}_0 \hat{M}^{\mu\nu}] \phi \end{aligned} \quad (5.20)$$

La forme de toutes ces expressions est remarquable du fait que la densité de probabilité conservée est donnée par la quantité :

$$j_{\mu 0} = i \phi^* \overleftrightarrow{\partial}_0 \phi \quad (5.21)$$

En utilisant les décompositions (5.10) et les relations (5.15), (5.16), on peut réduire ces expressions en termes de  $a$  et  $b$ . On trouve :

$$Q = \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3 2\omega_k} q \left[ a^*(\vec{k}) a(\vec{k}) - b(\vec{k}) b^*(\vec{k}) \right] \quad (5.22)$$

$$P^\mu = \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3 2\omega_k} k^\mu \left[ a^*(\vec{k}) a(\vec{k}) + b(\vec{k}) b^*(\vec{k}) \right] \quad (5.23)$$

$$M^{\mu\nu} = \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3 2\omega_k} \left\{ a^*(\vec{k}) \left[ i \left( k^\mu \frac{\partial}{\partial k^\nu} - k^\nu \frac{\partial}{\partial k^\mu} \right) \right] a(\vec{k}) - b(\vec{k}) \left[ i \left( k^\mu \frac{\partial}{\partial k^\nu} - k^\nu \frac{\partial}{\partial k^\mu} \right) \right] b(\vec{k}) \right\} \quad (5.24)$$

Dans la version Hamiltonienne de la théorie, ces différentes charges  $Q$ ,  $P^\mu$  et  $M^{\mu\nu}$  génèrent les transformations de jauge et les transformations de Poincaré.

Les expressions (5.22) et (5.23) montrent clairement quels sont les propriétés des degrés de liberté :

$$\left. \begin{array}{l} a(\vec{k}) \Leftrightarrow \text{particule avec impulsion } \vec{k} \text{ et charge } q \\ b(\vec{k}) \Leftrightarrow \text{antiparticule avec impulsion } \vec{k} \text{ et charge } -q \end{array} \right\} \quad (5.25)$$

Il est clair de la forme très simple des équations (5.22), (5.23) que les variables  $a$  et  $b$  permettent de décrire la théorie de façon très efficace.

## 5.2 Quantification canonique

La théorie est quantifiée en échangeant les parenthèses de Poisson canoniques entre champs et moments canoniques en commutateurs entre opérateurs à temps égaux :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 [\phi(t, \vec{x}), \pi(t, \vec{x}')] = i \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') \\
 [\phi^\dagger(t, \vec{x}), \pi^\dagger(t, \vec{x}')] = i \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') \\
 [\phi(t, \vec{x}), \pi^\dagger(t, \vec{x}')] = [\phi^\dagger(t, \vec{x}), \pi(t, \vec{x}')] = 0 \\
 [\phi(t, \vec{x}), \phi(t, \vec{x}')] = [\phi(t, \vec{x}), \phi^\dagger(t, \vec{x}')] = [\phi^\dagger(t, \vec{x}), \phi^\dagger(t, \vec{x}')] = 0 \\
 [\pi(t, \vec{x}), \pi(t, \vec{x}')] = [\pi(t, \vec{x}), \pi^\dagger(t, \vec{x}')] = [\pi^\dagger(t, \vec{x}), \pi^\dagger(t, \vec{x}')] = 0
 \end{array} \right. \quad (5.21)$$

Les seuls commutateurs non-nuls sont donc :

$$[\phi(t, \vec{x}), \mathcal{D}^0 \phi^\dagger(t, \vec{x}')] = [\phi^\dagger(t, \vec{x}), \mathcal{D}^0 \phi(t, \vec{x}')] = i \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') \quad (5.22)$$

En utilisant les équations (5.15), (5.16), (5.17), il est facile de vérifier que les règles de commutation entre  $a$ ,  $a^\dagger$ ,  $b$  et  $b^\dagger$  sont données par :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 [a(\vec{k}), a^\dagger(\vec{k}')] = [b(\vec{k}), b^\dagger(\vec{k}')] = (2\pi)^3 2\omega_k \delta^3(\vec{k} - \vec{k}') \\
 [a(\vec{k}), b^\dagger(\vec{k}')] = [b(\vec{k}), a^\dagger(\vec{k}')] = 0 \\
 [a(\vec{k}), a(\vec{k}')] = [b(\vec{k}), b(\vec{k}')] = [a(\vec{k}), b(\vec{k}')] = 0 \\
 [a^\dagger(\vec{k}), a^\dagger(\vec{k}')] = [b^\dagger(\vec{k}), b^\dagger(\vec{k}')] = [a^\dagger(\vec{k}), b^\dagger(\vec{k}')] = 0
 \end{array} \right. \quad (5.23)$$

Cette algèbre est l'algèbre d'une collection infinis d'oscillateurs bosoniques. Plus précisément, pour chaque  $\vec{k}$  il existe deux oscillateurs harmonique indépendants décrits par les opérateurs  $a(\vec{k}), a^\dagger(\vec{k})$  et  $b(\vec{k}), b^\dagger(\vec{k})$ . Les opérateurs de densité de nombre d'occupation doivent être définis avec une normalisation qui corresponde celle qui apparaît dans l'algèbre (1.68):

$$\left\{ \begin{array}{l} N_a(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3 2\omega_k} a^\dagger(\vec{k}) a(\vec{k}) \\ N_b(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3 2\omega_k} b^\dagger(\vec{k}) b(\vec{k}) \end{array} \right. \quad (15.29)$$

Les opérateurs satisfaisant:

$$\left\{ \begin{array}{l} [N_a(\vec{k}), a(\vec{k}')] = -a(\vec{k}) \delta^3(\vec{k}-\vec{k}') \\ [N_a(\vec{k}), a^\dagger(\vec{k}')] = +a^\dagger(\vec{k}) \delta^3(\vec{k}-\vec{k}') \\ [N_b(\vec{k}), b(\vec{k}')] = -b(\vec{k}) \delta^3(\vec{k}-\vec{k}') \\ [N_b(\vec{k}), b^\dagger(\vec{k}')] = +b^\dagger(\vec{k}) \delta^3(\vec{k}-\vec{k}') \\ [N_a(\vec{k}), b(\vec{k}')] = [N_a(\vec{k}), b^\dagger(\vec{k}')] = 0 \\ [N_b(\vec{k}), a(\vec{k}')] = [N_b(\vec{k}), a^\dagger(\vec{k}')] = 0 \\ [N_a(\vec{k}), N_b(\vec{k}')] = 0 \end{array} \right. \quad (15.30)$$



La charge électrique (5.22) peut se récrire en fonction des opérateurs nombres d'occupation comme :

$$\begin{aligned}
 Q &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} q [a^\dagger(\vec{k})a(\vec{k}) - b(\vec{k})b^\dagger(\vec{k})] \\
 &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} q [a^\dagger(\vec{k})a(\vec{k}) - b^\dagger(\vec{k})b(\vec{k}) - (2\pi)^3 2\omega_k \delta^3(\vec{0})] \\
 &= \int d^3k q [N_a(\vec{k}) - N_b(\vec{k}) - \delta^3(\vec{0})] \quad (5.31)
 \end{aligned}$$

De façon semblable, on peut récrire l'Hamiltonien et la quantité de mouvement (5.23) comme :

$$H = \int d^3k \omega_k [N_a(\vec{k}) + N_b(\vec{k}) + \delta^3(\vec{0})] \quad (5.32)$$

$$\vec{P} = \int d^3k \vec{k} [N_a(\vec{k}) + N_b(\vec{k}) + \delta^3(\vec{0})] \quad (5.33)$$

On trouve donc bien une collection d'oscillateurs harmoniques, un de type a et un de type b pour chaque  $\vec{k}$ , avec pulsations  $\omega_k$ . Les deux types d'oscillateurs a et b sont distingués par la charge électrique  $\pm q$ . L'état fondamental a une charge électrique  $Q_0 = -\int d^3k q \delta^3(\vec{0}) = \pm \infty$ , le signe dépendant de  $q$ , une énergie donnée par  $E_0 = \int d^3k \omega_k \delta^3(\vec{0}) = +\infty$  et une quantité de mouvement  $\vec{P}_0 = \int d^3k \vec{k} \delta^3(\vec{0}) = 0$ , qui s'annule après intégration.

Les états excités sont séparés par des multiples de charge, énergie et impulsion  $\pm q$ ,  $\omega_k$  et  $\vec{k}$  qui sont associées aux excitations des oscillateurs.

Les résultats permettent une interprétation physique claire des excitations harmoniques quantifiées avec des particules et des antiparticules avec 4-impulsion et charges définies. Plus précisément, on fait les identifications suivantes :

$$\left. \begin{aligned}
 a^\dagger(\vec{k}) &: \text{créé une particule avec 4-impulsion} \\
 &\quad p^\mu = (\omega_k, \vec{k}) \text{ et charge } q. \\
 a(\vec{k}) &: \text{détruit une particule avec 4-impulsion} \\
 &\quad p^\mu = (\omega_k, \vec{k}) \text{ et charge } q. \\
 b^\dagger(\vec{k}) &: \text{créé une antiparticule avec 4-impulsion} \\
 &\quad p^\mu = (\omega_k, \vec{k}) \text{ et charge } -q. \\
 b(\vec{k}) &: \text{détruit une antiparticule avec 4-impulsion} \\
 &\quad p^\mu = (\omega_k, \vec{k}) \text{ et charge } -q.
 \end{aligned} \right\} \quad (5.34)$$

Les états propres de la théorie peuvent être construits en procédant comme pour l'oscillateur bosonique usuel. L'espace de ces états s'appelle espace de Fock.

Pour définir de façon plus simple et claire les caractéristiques de ces états, il convient d'exploiter la liberté de dranger les quantités conservées  $Q$ ,  $P^{\mu}$  et  $M^{\mu\nu}$  pour des constantes, afin d'obtenir des valeurs moyennes nulles sur l'état fondamental, qui sera interprété comme le vide, sans aucune particule ou antiparticule.

Physiquement, ceci est justifié par le fait que seules les différences entre les valeurs d'une quantité conservée entre deux états quantiques est mesurable, tandis que la valeur absolue de ces valeurs n'est pas physiquement mesurable. Techniquement, on peut exploiter le fait que les commutateurs entre opérateurs de création et de destructions sont soit nuls soit constants, pour définir le concept d'ordre normal quantique. Plus précisément, on part de l'expression classique d'une certaine charge  $Q$ , où l'ordre des dranges est irrelevant, et on définit sa version quantique :  $:Q:$  comme la même expression mais en ordonnant les opérateurs de telle façon que  $:Q:$  s'annule sur l'état fondamental de la théorie.

Concrètement, on place tous les opérateurs de création à gauche et tous ceux de destruction à droite. Il est facile de se convaincre que cette prescription n'a aucune ambiguïté, et qu'elle correspond effectivement à fixer une valeur particulière de la constante additive arbitraire associée à chaque charge.

Pour la charge  $Q$  et la 4-impulsion  $P^\mu$ , en particulier, on obtient simplement :

$$: Q : = \int d^3\vec{k} \, q [N_a(\vec{k}) - N_b(\vec{k})] \quad (5.35)$$

$$: P^\mu : = \int d^3\vec{k} \, k^\mu [N_a(\vec{k}) + N_b(\vec{k})] \quad (5.36)$$

L'état correspondant au vide est identifié avec le produit tensoriel des états fondamentaux de tous les oscillateurs harmoniques :

$$|0\rangle : \quad (5.37)$$

Cet état satisfait les propriétés

$$a(\vec{k}) |0\rangle = b(\vec{k}) |0\rangle = 0 \quad (5.38)$$

On trouve donc :

$$\left. \begin{aligned} : Q : |0\rangle &= 0 |0\rangle \\ : P^\mu : |0\rangle &= 0 |0\rangle \end{aligned} \right\} \quad (5.39)$$

Les états à une particule sont identifiés avec les premiers états excités des oscillateurs de type a :

$$|k\rangle = a^\dagger(\vec{k}) |0\rangle \quad (5.40)$$

Dans ce cas on trouve :

$$\left. \begin{aligned} :Q: |k\rangle &= +q |k\rangle \\ :P^\mu: |k\rangle &= k^\mu |k\rangle \end{aligned} \right\} \quad (5.41)$$

Les états à plusieurs particules sont identifiés avec des états excités plus élevés des oscillateurs de type a ; Par exemple, pour  $k_1 \neq \dots \neq k_n$ , on a :

$$|k_1, \dots, k_n\rangle = a^\dagger(\vec{k}_1) \dots a^\dagger(\vec{k}_n) |0\rangle \quad (5.42)$$

Ces états sont complètement symétriques sous l'échange de différentes particules, comme il se doit pour des états bosoniques, vu que les  $a^\dagger(\vec{k}_i)$  commutent entre eux.

On trouve dans ce cas :

$$\left. \begin{aligned} :Q: |k_1, \dots, k_n\rangle &= +nq |k_1, \dots, k_n\rangle \\ :P^\mu: |k_1, \dots, k_n\rangle &= \left( \sum_{i=1}^n k_i^\mu \right) |k_1, \dots, k_n\rangle \end{aligned} \right\} \quad (5.43)$$

Les états à une antiparticule sont identifiés avec les premiers états excités des oscillateurs de type b :

$$|\bar{k}\rangle = b^\dagger(\vec{k}) |0\rangle \quad (5.44)$$

Dans ce cas on trouve :

$$\left. \begin{array}{l} :Q: |\bar{k}\rangle = -q |\bar{k}\rangle \\ :P^\mu: |\bar{k}\rangle = \bar{k}^\mu |\bar{k}\rangle \end{array} \right\} \quad (5.45)$$

Les états à plusieurs antiparticules sont identifiés avec des états excités plus élevés des oscillateurs de type b. Par exemple, pour  $\bar{k}_1 \neq \dots \neq \bar{k}_n$  on a :

$$|\bar{k}_1, \dots, \bar{k}_n\rangle = b^+(\bar{k}_1) \dots b^+(\bar{k}_n) |0\rangle \quad (5.46)$$

Ces états sont complètement symétriques, comme il se doit, vu que les  $b^+(\bar{k}_i)$  commutent entre eux.

On obtient dans ce cas :

$$\left. \begin{array}{l} :Q: |\bar{k}_1, \dots, \bar{k}_n\rangle = -nq |\bar{k}_1, \dots, \bar{k}_n\rangle \\ :P^\mu: |\bar{k}_1, \dots, \bar{k}_n\rangle = \left( \sum_{i=1}^n \bar{k}_i \cdot \mu \right) |\bar{k}_1, \dots, \bar{k}_n\rangle \end{array} \right\} \quad (5.47)$$

Finalement, les états contenant simultanément des particules et antiparticules sont associés à des états du type suivant, si par exemple  $k_1 \neq \dots \neq k_n$  et  $\bar{k}_1 \neq \dots \neq \bar{k}_n$  :

$$|k_1, \dots, k_n; \bar{k}_1, \dots, \bar{k}_n\rangle = a^+(k_1) \dots a^+(k_n) b^+(\bar{k}_1) \dots b^+(\bar{k}_n) |0\rangle \quad (5.48)$$

Ces états sont complètement symétriques sans échanges de particules entre elles et particules entre elles.

On trouve dans ce cas général :

$$\left. \begin{aligned} & :Q^\mu : |k_1, \dots, k_n; \bar{k}_1, \dots, \bar{k}_{\bar{n}}\rangle = (n - \bar{n})q |k_1, \dots, k_n; \bar{k}_1, \dots, \bar{k}_{\bar{n}}\rangle \\ & ; P^\mu : |k_1, \dots, k_n; \bar{k}_1, \dots, \bar{k}_{\bar{n}}\rangle = \left( \sum_{i=1}^n k_i^\mu + \sum_{i=1}^{\bar{n}} \bar{k}_i^\mu \right) |k_1, \dots, k_n; \bar{k}_1, \dots, \bar{k}_{\bar{n}}\rangle \end{aligned} \right\} \quad (5.49)$$

On remarque que les états construits ci-dessus correspondent à des ondes planes avec un nombre d'onde bien défini, et sont normalisés d'une façon lorentz-covariante. Plus précisément, en prenant

$$\langle 0 | 0 \rangle = 1 \quad (4.50)$$

on trouve que :

$$\begin{aligned} \langle k_1, \dots, k_n; \bar{k}_1, \dots, \bar{k}_{\bar{n}} | k'_1, \dots, k'_n; \bar{k}'_1, \dots, \bar{k}'_{\bar{n}} \rangle &= \\ &= \langle 0 | \sum_{\{i\}_3} \prod_{i=1}^n [a(\vec{k}_i), a^\dagger(\vec{k}'_i)] \sum_{\{\bar{i}\}_3} \prod_{\bar{i}=1}^{\bar{n}} [b(\vec{k}_{\bar{i}}), b^\dagger(\vec{k}'_{\bar{i}})] | 0 \rangle \\ &= \sum_{\{i\}_3} \prod_{i=1}^n [(2\pi)^3 2\omega_{k_i} \delta^3(\vec{k}_i - \vec{k}'_i)] \sum_{\{\bar{i}\}_3} \prod_{\bar{i}=1}^{\bar{n}} [(2\pi)^3 2\omega_{k_{\bar{i}}} \delta^3(\vec{k}_{\bar{i}} - \vec{k}'_{\bar{i}})] \quad (4.51) \end{aligned}$$

On peut alors construire des paquets d'ondes du type :

$$|\psi_{n, \bar{n}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{n! \bar{n}!}} \prod_{i=1}^n \int \frac{d^3 \vec{k}_i}{(2\pi)^3 2\omega_{k_i}} \prod_{\bar{i}=1}^{\bar{n}} \int \frac{d^3 \vec{k}_{\bar{i}}}{(2\pi)^3 2\omega_{k_{\bar{i}}}} f(k_1, \dots, k_n; \bar{k}_1, \dots, \bar{k}_{\bar{n}}) |k_1, \dots, k_n; \bar{k}_1, \dots, \bar{k}_{\bar{n}}\rangle \quad (4.52)$$

Leur normalisation est, en appliquant (4.51), donnée par :

$$\langle \psi_{n, \bar{n}} | \psi_{n, \bar{n}} \rangle = \prod_{i=1}^n \int \frac{d^3 \vec{k}_i}{(2\pi)^3 2\omega_{k_i}} \prod_{\bar{i}=1}^{\bar{n}} \int \frac{d^3 \vec{k}_{\bar{i}}}{(2\pi)^3 2\omega_{k_{\bar{i}}}} |f(k_1, \dots, k_n; \bar{k}_1, \dots, \bar{k}_{\bar{n}})|^2 \quad (5.53)$$

### 5.3 Propriétés des champs quantiques

Dans la théorie quantique obtenue par la procédure canonique de Heisenberg, le champ  $\phi(x)$  et son conjugué  $\phi^\dagger(x)$  sont des opérateurs qui dépendent du temps comme requiert pour la dynamique, alors que les états sont indépendants du temps.

Les transformations de symétries sont bien réalisées de la façon attendue. On trouve par exemple :

$$[Q, \phi(x)] = -q \phi(x) \quad ; \quad [Q, \phi^\dagger(x)] = +q \phi^\dagger(x) \quad (5.54)$$

Ces relations reflètent le fait que  $\phi(x)$  crée des antiparticules de charge  $-q$  et détruit des particules de charge  $+q$ , alors que  $\phi^\dagger(x)$  crée des particules de charge  $+q$  et détruit des antiparticules de charge  $-q$ . On trouve également :

$$\begin{cases} [P^\mu, \phi(x)] = \hat{P}^\mu \phi(x) & ; \quad [P^\mu, \phi^\dagger(x)] = \hat{P}^\mu \phi^\dagger(x) \\ [M^{\mu\nu}, \phi(x)] = -\hat{M}^{\mu\nu} \phi(x) & ; \quad [M^{\mu\nu}, \phi^\dagger(x)] = -\hat{M}^{\mu\nu} \phi^\dagger(x) \end{cases} \quad (5.55)$$

où :

$$\begin{cases} \hat{P}^\mu = -i \partial^\mu \\ \hat{M}^{\mu\nu} = i(x^\mu \partial^\nu - x^\nu \partial^\mu) + S_{\mu\nu}^{\alpha\beta} \quad (S_{\mu\nu}^{\alpha\beta} = 0) \end{cases} \quad (5.56)$$



Les relations montrent que les champs  $\phi(x)$  et  $\phi^\dagger(x)$  portent des moments linéaires et angulaires.

Les équations (5.54) et (5.55) montrent que les champs  $\phi(x)$  et  $\phi^\dagger(x)$  réalisent une symétrie interne dont le générateur est  $Q$ , et les symétries d'espace temps dont les générateurs sont  $P^\mu$  et  $M^{\mu\nu}$ . Les transformations correspondantes agissent de la façon usuelle sur les états et les opérateurs quantiques :

$$\left\{ \begin{array}{l} |Y\rangle \rightarrow |Y'\rangle = U|Y\rangle \\ \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}' = U\mathcal{O}'U^{-1} \end{array} \right. \quad (5.57)$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Symétrie interne : } U(\alpha) = e^{-i\alpha Q} \\ \text{translations : } U(\epsilon_\mu) = e^{-i\epsilon_\mu P^\mu} \\ \text{transf. lorentz : } U(\omega_{\mu\nu}) = e^{\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu} M^{\mu\nu}} \end{array} \right. \quad (5.58)$$

En outre, on vérifie que les générateurs  $Q$ ,  $P^\mu$  et  $M^{\mu\nu}$  ont une algèbre qui correspond à un groupe interne  $U(1)$  et au groupe de Poincaré.

Une chose importante à vérifier est que le commutateur à temps et positions arbitraires entre deux champs est compatible avec la relativité et le principe de causalité, même si la quantification a été obtenue par un traitement hamiltonien où le temps et l'espace jouent des rôles très différents, et le point de départ était représenté par des commutateurs canoniques à positions arbitraires mais temps égaux. Pour calculer le commutateur à points arbitraires en question, on peut utiliser la décomposition (5.10) des champs et l'algèbre (5.28). On trouve, pour les parties à fréquence positives et négatives:

$$\left\{ \begin{array}{l} [\phi^{(\pm)}(x), \phi^{(\pm)}(x')] = [\phi^{+(\pm)}(x), \phi^{+(\pm)}(x')] = 0 \\ [\phi^{(\pm)}(x), \phi^{(\mp)}(x')] = [\phi^{+(\pm)}(x), \phi^{+(\mp)}(x')] = 0 \\ [\phi^{(\pm)}(x), \phi^{+(\pm)}(x')] = 0 \\ [\phi^{(\pm)}(x), \phi^{+(\mp)}(x')] = i \Delta_{\mu\nu}^{\pm}(x-x') \end{array} \right. \quad (5.59)$$

où :

$$\Delta_{\mu\nu}^{\pm}(x) = \mp i \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} e^{\mp i k x} \quad (5.60)$$

Il suit que pour les champs complets:

$$\left\{ \begin{aligned} [\phi(x), \phi(x')] &= [\phi^\dagger(x), \phi^\dagger(x')] = 0 \\ [\phi(x), \phi^\dagger(x')] &= i \Delta_{\mu\alpha}(x-x') \end{aligned} \right. \quad (5.61)$$

avec :

$$\begin{aligned} \Delta_{\mu\alpha}(X) &= \Delta_{\mu\alpha}^+(X) + \Delta_{\mu\alpha}^-(X) \\ &= - \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3 \omega_k} \sin(kX) \end{aligned} \quad (5.62)$$

Les fonctions  $\Delta_{\mu\alpha}^\pm(X)$  et  $\Delta_{\mu\alpha}(X)$  sont des invariants sous transformations de Lorentz propres, vu qu'elles ont la forme d'une intégrale d'une fonction scalaire avec la juste mesure. On peut rendre cela plus évident en les réécrivant comme :

$$\left\{ \begin{aligned} \Delta_{\mu\alpha}^\pm(X) &= \mp i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^3} \delta(k^2 - m^2) \theta(\pm k_0) e^{-ikX} \\ \Delta_{\mu\alpha}(X) &= -i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^3} \delta(k^2 - m^2) \epsilon(k_0) e^{-ikX} \end{aligned} \right. \quad (5.63)$$

De cette façon, il devient également évident que ces fonctions satisfaisant l'équation de Klein-Gordon :

$$\left\{ \begin{aligned} (\Box + m^2) \Delta_{\mu\alpha}^\pm(X) &= 0 \\ (\Box + m^2) \Delta_{\mu\alpha}(X) &= 0 \end{aligned} \right. \quad (5.64)$$

On remarque finalement que la fonction  $\Delta_{\kappa_0}$  est nulle si son argument est un 4-vecteur de genre espace. En effet, étant donné que la fonction est invariante de Lorentz, on peut la calculer dans le référentiel particulier où la composante temporelle est nulle, et le résultat est alors nul car la fonction se réduit dans ce cas à l'intégrale sur  $\vec{k}$  d'une fonction impaire en  $\vec{k}$ . Donc :

$$\Delta_{\kappa_0}(X) = 0 \quad \text{si} \quad X^2 < 0 \quad (5.65)$$

Il suit que le commutateur de deux fonctions des champs à des points  $x_1$  et  $x_2$  s'annule si l'intervalle qui les sépare est de genre espace, comme requiert par le fait que dans cette situation il ne doit exister aucune relation de cause à effet entre les deux points :

$$[f_1(\phi(x_1)), f_2(\phi(x_2))] = 0 \quad \text{si} \quad (x_1 - x_2)^2 < 0 \quad (5.66)$$

Cette propriété est dite de microcausalité, et représente la généralisation covariante des commutateurs canoniques.

La valeur moyenne d'une fonction des champs sur le vide peut être calculée en utilisant la définition du vide (5.38) impliquant

$$\phi^{(+)}(x)|0\rangle = \phi^{(+)}(x)|0\rangle = 0 \quad (5.67)$$

ainsi que les relations de commutation covariantes (5.59) entre parties à fréquences positives et négatives des champs. On trouve en particulier:

$$\begin{cases} \langle 0|\phi(x)|0\rangle = 0 \\ \langle 0|\phi^{\dagger}(x)|0\rangle = 0 \end{cases} \quad (5.68)$$

et :

$$\begin{aligned} \langle 0|\phi(x)\phi^{\dagger}(x')|0\rangle &= \langle 0|\phi^{(+)}(x)\phi^{(+)}(x')|0\rangle \\ &= \langle 0|[\phi^{(+)}(x), \phi^{(+)}(x')]|0\rangle \\ &= i\Delta_{\mu\nu}^{+}(x-x') \end{aligned} \quad (5.69)$$

$$\begin{aligned} \langle 0|\phi^{\dagger}(x')\phi(x)|0\rangle &= \langle 0|\phi^{(+)}(x')\phi^{(-)}(x)|0\rangle \\ &= \langle 0|[\phi^{(+)}(x'), \phi^{(-)}(x)]|0\rangle \\ &= -i\Delta_{\mu\nu}^{-}(x-x') \end{aligned} \quad (5.70)$$

## 5.4 Propagateur

Pour étudier des processus d'interaction, il est très utile de construire une fonction de Green pour l'équation de Klein-Gordon, satisfaisant:

$$(\Box + m^2) G_{\text{KG}}(x) = \delta^4(x) \quad (5.71)$$

Plus précisément, il est possible de construire une telle fonction comme valeur moyenne sur le vide d'un produit approprié des champs  $\phi(x)$  et de son conjugué  $\phi^\dagger(x')$  en deux points arbitraires de l'espace temps. Etant donné que les particules et les antiparticules sont créés par l'un de ces opérateurs et détruits par l'autre, il est clair que l'on obtiendra ainsi un propagateur, représentant l'apparition d'une particule ou d'une antiparticule à un certain point et sa disparition à un autre point. Toutefois, les simples produits  $\phi(x)\phi^\dagger(x')$  ou  $\phi^\dagger(x')\phi(x)$  ne font pas l'affaire, vu que par (5.69) et (5.70) la valeur moyenne de ces opérateurs sur le vide est donnée par les fonctions  $+\Delta_{\text{KG}}^+(x-x')$  et  $-\Delta_{\text{KG}}^-(x-x')$ , qui satisfaisant l'équation de Klein-Gordon (5.64) et pas la (5.67).

La prescription appropriée à la construction du propagateur consiste à utiliser un produit de champs dit produit chronologique, dénoté par  $T$ , qui consiste à mettre une série de champs dans l'ordre correspondant à des temps décroissants. On définit alors le propagateur de Feynman comme la fonction à deux points chronologiquement ordonné, c'est-à-dire :

$$G_{ka}(x-x') = i \langle 0 | T(\phi(x) \phi^\dagger(x')) | 0 \rangle \quad (5.72)$$

Cette expression peut se récrire, en utilisant les relations (5.69) et (5.70), comme :

$$\begin{aligned} G_{ka}(x-x') &= i \theta(t-t') \langle 0 | \phi(x) \phi^\dagger(x') | 0 \rangle + i \theta(t'-t) \langle 0 | \phi^\dagger(x') \phi(x) | 0 \rangle \\ &= -\theta(t-t') \Delta_{ka}^+(x-x') + \theta(t'-t) \Delta_{\bar{k}\bar{a}}(x-x') \\ &= i \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} e^{-i\omega_k |t-t'|} \cos[k^2(\vec{x}-\vec{x}')] \end{aligned} \quad (5.73)$$

La fonction  $G_{ka}(x)$  est elle aussi, comme les fonctions  $\Delta_{\bar{k}\bar{a}}^+(x)$  et  $\Delta_{ka}(x)$ , invariante de Lorentz, étant donné qu'elle a la forme d'une intégrale d'une fonction invariante avec la juste mesure d'intégration.

Il est possible de récrire la fonction  $G_{ka}(x)$  d'une façon plus simple et intéressante, qui rend cette propriété et d'autres plus manifestes. L'expression en question est obtenue en introduisant comme avant une intégrale sur l'énergie. On trouve :

$$G_{ka}(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{-1}{k^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ikx} \quad (5.74)$$

Le facteur  $i\epsilon$  au dénominateur représente une prescription bien définie pour traiter les singularités rencontrées à  $k_0 = \pm wk$ . Plus précisément, on peut calculer l'intégrale en  $k_0$  en passant à une intégrale de contour dans le plan complexe. On doit alors choisir un contour qui passe en dessus de  $k_0 = +wk$  et en dessous de  $k_0 = -wk$ . Ceci donne alors le bon résultat pour l'intégrale. En effet, si  $t-t' > 0$ , le contour doit être fermé à l'infini dans le plan inférieur où  $\text{Im} k_0 < 0$ , et seule la singularité en  $k_0 = +wk$  contribue au résidu, donnant pour résultat  $+\Delta^+(x)$ .



Si au contraire  $t-t' < 0$ , le contour doit être fermé à l'infini dans le plan supérieur pour  $k_0 > 0$ , et seule la singularité en  $k_0 = -\omega k$  contribue au résidu, donnant pour résultat  $-\Delta^-(x)$ . La forme (5.74) reproduit donc bien le résultat (5.73).

On vérifie facilement que le propagateur (5.72) est bien une fonction de Green satisfaisant (5.71). En effet, l'expression (5.74) a manifestement la structure générale requise pour une solution de l'équation (5.71) écrite en transformée de Fourier 4-dimensionnelle, la fonction se distingue d'autres fonctions de Green possibles pour une solution de l'équation de Klein-Gordon homogène, et donc les conditions au bord qu'elle satisfait. Sa caractéristique principale est qu'elle propage les fréquences positives en avant dans le temps et les fréquences négatives en arrière dans le temps. Ceci la distingue des fonctions de Green retardées et avancées usuelles, qui au contraire propagent toutes les fréquences soit en avant soit en arrière dans le temps.

On remarque finalement que le propagateur (5.73) peut également être réécrit comme

$$\begin{aligned}
G_{\text{na}}(x-x') &= i\theta(t-t') \int \frac{d^3k}{2\omega_k} f(\vec{k},x) f^*(\vec{k},x') \\
&\quad + i\theta(t'-t) \int \frac{d^3k}{2\omega_k} f^*(\vec{k},x) f(\vec{k},x') \\
&= i\theta(t-t') \int d^3k \phi^{(+)}(\vec{k},x) \phi^{* (+)}(\vec{k},x') \\
&\quad + i\theta(t'-t) \int d^3k \phi^{(-)}(\vec{k},x) \phi^{* (-)}(\vec{k},x') \tag{5.75}
\end{aligned}$$

en fonction de la base orthonormale complète de solutions de l'équation de Klein-Gordon homogène :

$$\begin{cases}
\phi^{(+)}(\vec{k},x) = \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} f(\vec{k},x) \\
\phi^{(-)}(\vec{k},x) = \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} f^*(\vec{k},x)
\end{cases} \tag{5.76}$$

## 6 THEORIE DE DIRAC

### 6.1 Theorie classique

La theorie de Dirac est basee sur un champ spinoriel complexe à quatre composantes  $\psi(x)$  et la densité de Lagrangien est :

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} \bar{\psi} \gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu \psi - m \bar{\psi} \psi \quad (6.1)$$

L'équation du mouvement est :

$$(i \gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi = 0 \quad (6.2)$$

et les moments canoniques conjugués à  $\psi$  et  $\bar{\psi}$  sont :

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \psi)} = \frac{i}{2} \bar{\psi} \gamma_0 \quad ; \quad \bar{\pi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \bar{\psi})} = -\frac{i}{2} \gamma_0 \psi \quad (6.3)$$

La charge électrique  $Q$  associée à l'invariance sous transformations de phase du champ est :

$$\begin{aligned} Q &= q \int d^3x^i (-i\pi \psi + i \bar{\psi} \pi) \\ &= q \int d^3x^i \psi^\dagger \psi \end{aligned} \quad (6.4)$$

L'énergie  $H$  et la quantité de mouvement  $P^i$ , associées à l'invariance sous translations temporelles et spatiales des coordonnées et des champs, sont :

$$\begin{aligned}
H &= \int d^3\vec{x} (\pi \dot{\psi} + \dot{\bar{\psi}} \pi - \mathcal{L}) \\
&= \int d^3\vec{x} \left( \frac{i}{2} \bar{\psi} \gamma^0 \dot{\psi} - \frac{i}{2} \dot{\bar{\psi}} \gamma^0 \psi - \frac{i}{2} \bar{\psi} \gamma^{\mu} \overleftrightarrow{\partial}_{\mu} \psi + m \bar{\psi} \psi \right) \\
&= \int d^3\vec{x} \psi^{\dagger} (i \gamma^0 \partial_t + m \gamma^0) \psi
\end{aligned} \tag{6.5}$$

$$\begin{aligned}
P^i &= \int d^3\vec{x} (\pi \dot{\psi}^i + \dot{\bar{\psi}}^i \pi) \\
&= \int d^3\vec{x} (\psi^{\dagger} \dot{\psi}^i)
\end{aligned} \tag{6.6}$$

Les moments cinétiques  $M^{ij}$  et temporels  $M^{0i}$  associés à l'invariance sous rotations et glissements sont :

$$\begin{aligned}
M^{ij} &= \int d^3\vec{x} \left[ -x^i (\pi \dot{\psi}^j + \dot{\bar{\psi}}^j \pi) + x^j (\pi \dot{\psi}^i + \dot{\bar{\psi}}^i \pi) \right. \\
&\quad \left. + i (\pi S_{\text{Dirac}}^{ij} \psi - \bar{\psi} S_{\text{Dirac}}^{ij} \bar{\pi}) \right] \\
&= \int d^3\vec{x} \psi^{\dagger} \left[ -i (x^i \partial^j - x^j \partial^i) - \frac{i}{4} [\gamma^i, \gamma^j] \right] \psi
\end{aligned} \tag{6.7}$$

$$\begin{aligned}
M^{0i} &= \int d^3\vec{x} \left[ -x^0 (\pi \dot{\psi}^i + \dot{\bar{\psi}}^i \pi) + x^i (\pi \dot{\psi}^0 + \dot{\bar{\psi}}^0 \pi - \mathcal{L}) \right. \\
&\quad \left. + i (\pi S_{\text{Dirac}}^{0i} \psi - \bar{\psi} S_{\text{Dirac}}^{0i} \bar{\pi}) \right] \\
&= \int d^3\vec{x} \psi^{\dagger} \left[ -i (x^0 \partial^i - x^i (-i \gamma^0 \gamma^k \partial_k + m \gamma^0)) - \frac{i}{4} [\gamma^0, \gamma^i] \right] \psi
\end{aligned} \tag{6.8}$$

Ces expressions sont déjà toutes semblables, reflétant le fait que la densité de probabilité de la théorie de Dirac est simplement  $\psi^{\dagger} \psi$ .

La solution générale de l'équation de Dirac libre (6.2) est une superposition d'ondes planes progressives et régressives satisfaisant la relation de dispersion

$$\omega_k = \sqrt{k^2 + m^2} \quad (6.9)$$

Plus précisément, la solution générale est :

$$\left\{ \begin{aligned} \psi(x) &= \psi^{(+)}(x) + \psi^{(-)}(x) \\ &= \sum_{\alpha=1}^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{2m}{2\omega_k} \left[ b_{\alpha}(\vec{k}) u_{\alpha}(\vec{k}) f(\vec{k}, x) + d_{\alpha}^*(\vec{k}) v_{\alpha}(\vec{k}) f^*(\vec{k}, x) \right] \\ \bar{\psi}(x) &= \bar{\psi}^{(+)}(x) + \bar{\psi}^{(-)}(x) \\ &= \sum_{\alpha=1}^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{2m}{2\omega_k} \left[ d_{\alpha}(\vec{k}) \bar{v}_{\alpha}(\vec{k}) f(\vec{k}, x) + b_{\alpha}^*(\vec{k}) \bar{u}_{\alpha}(\vec{k}) f^*(\vec{k}, x) \right] \end{aligned} \right. \quad (6.10)$$

où comme avant les ondes planes normalisées s'écrivent

$$f(\vec{k}, x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{-i k_{\mu} x^{\mu}} \quad (6.11)$$

et les spineurs de polarisation sont donnés par :

$$\left\{ \begin{aligned} u_1(\vec{k}) &= \sqrt{\frac{m+\omega_k}{2m}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{k_3}{m+\omega_k} \\ \frac{k_+}{m+\omega_k} \end{pmatrix} ; u_2 = \sqrt{\frac{m+\omega_k}{2m}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{k_-}{m+\omega_k} \\ -\frac{k_3}{m+\omega_k} \end{pmatrix} \\ v_1(\vec{k}) &= \sqrt{\frac{m+\omega_k}{2m}} \begin{pmatrix} \frac{k_3}{m+\omega_k} \\ \frac{k_+}{m+\omega_k} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; v_2 = \sqrt{\frac{m+\omega_k}{2m}} \begin{pmatrix} \frac{k_-}{m+\omega_k} \\ -\frac{k_3}{m+\omega_k} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \right. \quad (6.12)$$

Les coefficients  $b_\alpha$  et  $d_\alpha$  sont des scalaires, et on a :

$$[\chi] = \frac{3}{2}, [b_\alpha] = [d_\alpha] = -1; [U_\alpha] = [V_\alpha] = 0 \quad (6.13)$$

Les ondes planes  $f$  forment un ensemble complet et orthonormal de fonctions des coordonnées, dans le sens que :

$$\int d^3x f^*(\vec{k}', x) f(\vec{k}, x) = \delta^3(\vec{k}' - \vec{k}) \quad (6.14)$$

Les spineurs de polarisation  $U_\alpha$  et  $V_\alpha$  forment, eux, un ensemble complet et orthonormal de spineurs constants, dans le sens que :

$$\left. \begin{aligned} \bar{U}_\alpha(\vec{k}) U_\beta(\vec{k}) &= -\bar{V}_\alpha(\vec{k}) V_\beta(\vec{k}) = \delta_{\alpha\beta} \\ \bar{U}_\alpha(\vec{k}) V_\beta(\vec{k}) &= \bar{V}_\beta(\vec{k}) U_\alpha(\vec{k}) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (6.15)$$

ou :

$$\left. \begin{aligned} U_\alpha^\dagger(\vec{k}) U_\beta(\vec{k}) &= V_\alpha^\dagger(\vec{k}) V_\beta(\vec{k}) = \frac{\omega k}{m} \delta_{\alpha\beta} \\ U_\alpha^\dagger(\vec{k}) V_\beta(-\vec{k}) &= V_\alpha^\dagger(\vec{k}) U_\beta(-\vec{k}) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (6.16)$$

En utilisant ces relations, il est possible d'inverser les décompositions (6.10). On a pu écrire :

$$\left. \begin{aligned} b_\alpha(\vec{k}) &= \int d^3x (2\pi)^{\frac{3}{2}} \sqrt{2m} f^*(\vec{k}, x) U_\alpha^\dagger(\vec{k}) \psi(x) \\ d_\alpha(\vec{k}) &= \int d^3x (2\pi)^{\frac{3}{2}} \sqrt{2m} f^*(\vec{k}, x) \psi^\dagger(x) V_\alpha(\vec{k}) \end{aligned} \right\} \quad (6.17)$$

Sur les solutions libres, les quantités conservées  $Q$ ,  $P^\mu$  et  $M^{\mu\nu}$  peuvent être réécrites de façon plus simple en utilisant les équations du mouvement.

On trouve :

$$Q = \int d^3\vec{x} \psi^\dagger \eta \psi \quad (6.18)$$

puis :

$$\begin{aligned} P^\mu &= \int d^3\vec{x} \psi^\dagger [i\partial^\mu] \psi \\ &= - \int d^3\vec{x} \psi^\dagger [-i\partial^\mu] \psi \\ &= - \int d^3\vec{x} \psi^\dagger \hat{P}^\mu \psi \end{aligned} \quad (6.19)$$

et enfin :

$$\begin{aligned} M^{\mu\nu} &= \int d^3\vec{x} \psi^\dagger [-i(x^\mu \partial^\nu - x^\nu \partial^\mu) - S_{\text{DIRAC}}^{\mu\nu}] \psi \\ &= - \int d^3\vec{x} \psi^\dagger [i(x^\mu \partial^\nu - x^\nu \partial^\mu) + S_{\text{DIRAC}}^{\mu\nu}] \psi \\ &= - \int d^3\vec{x} \psi^\dagger \hat{M}^{\mu\nu} \psi \end{aligned} \quad (6.20)$$

Ces expressions sont toutes de la même forme, qui est remarquable du fait que la densité de probabilité conservée est donnée par :

$$S_{\text{DIRAC}} = \psi^\dagger \psi \quad (6.21)$$

En utilisant les décompositions (6.10) et les relations (6.14), (6.16), on peut récrire ces expressions en termes de  $b$  et  $d$ . On trouve :

$$Q = \sum_{\alpha=1}^2 \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2\omega_k} q \left[ b_{\alpha}^*(\vec{k}) b_{\alpha}(\vec{k}) + d_{\alpha}(\vec{k}) d_{\alpha}^*(\vec{k}) \right] \quad (6.22)$$

$$P^{\mu} = \sum_{\alpha=1}^2 \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2\omega_k} k^{\mu} \left[ b_{\alpha}^*(\vec{k}) b_{\alpha}(\vec{k}) - d_{\alpha}(\vec{k}) d_{\alpha}^*(\vec{k}) \right] \quad (6.23)$$

$$M^{\mu\nu} = \sum_{\alpha=1}^2 \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2\omega_k} \left\{ b_{\alpha}^*(\vec{k}) \left[ i \left( k^{\mu} \frac{\partial}{\partial k^{\nu}} - k^{\nu} \frac{\partial}{\partial k^{\mu}} \right) + \bar{U}_{\alpha}(\vec{k}) S_{\text{Dirac}}^{\mu\nu} U_{\alpha}(\vec{k}) \right] b_{\alpha}(\vec{k}) \right. \\ \left. + d_{\alpha}(\vec{k}) \left[ i \left( k^{\mu} \frac{\partial}{\partial k^{\nu}} - k^{\nu} \frac{\partial}{\partial k^{\mu}} \right) + \bar{V}_{\alpha}(\vec{k}) S_{\text{Dirac}}^{\mu\nu} V_{\alpha}(\vec{k}) \right] d_{\alpha}^*(\vec{k}) \right\} \quad (6.24)$$

Dans la formulation Hamiltonienne de la théorie, ces champs génèrent les transformations de jauge et de Poincaré.

Les expressions (6.22) et (6.23) montrent clairement quelles sont les propriétés des degrés de liberté :

$$\left\{ \begin{array}{l} b_{\alpha}(\vec{k}) \Leftrightarrow \text{particule avec impulsion } \vec{k}, \text{ charge } q \\ \text{et polarisation de spin } U_{\alpha}(\vec{k}) \\ d_{\alpha}(\vec{k}) \Leftrightarrow \text{antiparticule avec impulsion } \vec{k}, \text{ charge } -q \\ \text{et polarisation de spin } V_{\alpha}(\vec{k}) \end{array} \right. \quad (6.25)$$

Il est clair de la forme très simple des équations (5.22), (5.23) que les variables  $b$  et  $d$  sont appropriées.



## 6.2 Quantification canonique

La théorie est quantifiée en changeant les poissiens de Poisson canoniques entre champs et moments canoniques en anti-commutateurs entre opérateurs à temps égaux :

$$\left\{ \begin{array}{l} \{ \psi(t, \vec{x}), \pi(t, \vec{x}') \} = i \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') \mathbb{1} \\ \{ \bar{\psi}(t, \vec{x}), \bar{\pi}(t, \vec{x}') \} = i \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') \mathbb{1} \\ \{ \psi(t, \vec{x}), \bar{\pi}(t, \vec{x}') \} = \{ \bar{\psi}(t, \vec{x}), \pi(t, \vec{x}') \} = 0 \\ \{ \psi(t, \vec{x}), \psi(t, \vec{x}') \} = \{ \psi(t, \vec{x}), \bar{\psi}(t, \vec{x}') \} = \{ \bar{\psi}(t, \vec{x}), \bar{\psi}(t, \vec{x}') \} = 0 \\ \{ \pi(t, \vec{x}), \pi(t, \vec{x}') \} = \{ \pi(t, \vec{x}), \bar{\pi}(t, \vec{x}') \} = \{ \bar{\pi}(t, \vec{x}), \bar{\pi}(t, \vec{x}') \} = 0 \end{array} \right. \quad (6.26)$$

Dans ce cas, il y a un problème de consistance dans ces relations, dû au fait que le moment canonique est en fait une fonction des variables et non de ses dérivées, vu que le lagrangien est du premier ordre dans les dérivées temporelles. Il est possible de montrer qu'en tenant compte de cette caractéristique de façon plus détaillée on arrive à un seul anti-commutateur non-nul entre les champs :

$$\{ \psi(t, \vec{x}), \psi^\dagger(t, \vec{x}') \} = \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') \quad (6.27)$$

En utilisant les équations (6.14), (6.16) et (6.17), on peut vérifier que les règles de commutation entre  $b, b^+, d$  et  $d^+$  qui correspondent à ce résultat sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \{b_{\alpha}(\vec{k}), b_{\beta}^+(\vec{k}')\} = \{d_{\alpha}(\vec{k}), d_{\beta}^+(\vec{k}')\} = (2\pi)^{-3} 2\omega_{\vec{k}} \delta^3(\vec{k}-\vec{k}') \delta_{\alpha\beta} \\ \{b_{\alpha}(\vec{k}), d_{\beta}^+(\vec{k}')\} = \{d_{\alpha}(\vec{k}), b_{\beta}^+(\vec{k}')\} = 0 \\ \{b_{\alpha}(\vec{k}), b_{\beta}(\vec{k}')\} = \{d_{\alpha}(\vec{k}), d_{\beta}(\vec{k}')\} = \{b_{\alpha}(\vec{k}), d_{\beta}(\vec{k}')\} = 0 \\ \{b_{\alpha}^+(\vec{k}), b_{\beta}^+(\vec{k}')\} = \{d_{\alpha}^+(\vec{k}), d_{\beta}^+(\vec{k}')\} = \{b_{\alpha}^+(\vec{k}), d_{\beta}^+(\vec{k}')\} = 0 \end{array} \right. \quad (6.28)$$

Cette algèbre est l'algèbre d'une collection infinie d'oscillateurs fermioniques. Plus précisément, pour chaque  $\vec{k}$  et existe quatre oscillateurs harmoniques indépendants décrits par les opérateurs  $b_{\alpha}(\vec{k}), b_{\alpha}^+(\vec{k})$  et  $d_{\alpha}(\vec{k}), d_{\alpha}^+(\vec{k})$ . Les opérateurs de densité de nombre d'occupation correspondants sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} N_{b_{\alpha}}(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3 2\omega_{\vec{k}}} b_{\alpha}^+(\vec{k}) b_{\alpha}(\vec{k}) \\ N_{d_{\alpha}}(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3 2\omega_{\vec{k}}} d_{\alpha}^+(\vec{k}) d_{\alpha}(\vec{k}) \end{array} \right. \quad (6.29)$$

Les opérateurs satisfont une algèbre de commutateurs avec les opérateurs  $b_{\alpha}(\vec{k}), b_{\alpha}^+(\vec{k}), d_{\alpha}(\vec{k}), d_{\alpha}^+(\vec{k})$ .

On trouve :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 [N_{b_\alpha}(\vec{k}), b_\beta(\vec{k}')] = -b_\alpha(\vec{k}) \delta^3(\vec{k}-\vec{k}') \delta_{\alpha\beta} \\
 [N_{b_\alpha}(\vec{k}), b_\beta^+(\vec{k}')] = +b_\alpha^+(\vec{k}) \delta^3(\vec{k}-\vec{k}') \delta_{\alpha\beta} \\
 [N_{d_\alpha}(\vec{k}), d_\beta(\vec{k}')] = -d_\alpha(\vec{k}) \delta^3(\vec{k}-\vec{k}') \delta_{\alpha\beta} \\
 [N_{d_\alpha}(\vec{k}), d_\beta^+(\vec{k}')] = +d_\alpha^+(\vec{k}) \delta^3(\vec{k}-\vec{k}') \delta_{\alpha\beta} \\
 [N_{b_\alpha}(\vec{k}), d_\beta^+(\vec{k}')] = [N_{b_\alpha}(\vec{k}'), d_\beta^+(\vec{k})] = 0 \\
 [N_{d_\alpha}(\vec{k}), b_\beta(\vec{k}')] = [N_{d_\alpha}(\vec{k}'), b_\beta(\vec{k})] = 0 \\
 [N_{b_\alpha}(\vec{k}), N_{b_\beta}(\vec{k}')] = [N_{d_\alpha}(\vec{k}), N_{d_\beta}(\vec{k}')] = [N_{b_\alpha}(\vec{k}), N_{d_\beta}(\vec{k}')] = 0
 \end{array} \right. \quad (6.30)$$

La charge électrique (6.22) peut être écrite en fonction des opérateurs nombres d'occupation comme :

$$\begin{aligned}
 Q &= \sum_{\alpha=1}^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} q [b_\alpha^+(\vec{k}) b_\alpha(\vec{k}) + d_\alpha(\vec{k}) d_\alpha^+(\vec{k})] \\
 &= \sum_{\alpha=1}^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} q [b_\alpha^+(\vec{k}) b_\alpha(\vec{k}) - d_\alpha^+(\vec{k}) d_\alpha(\vec{k}) + (2\pi)^3 2\omega_k \delta(\vec{0})] \\
 &= \sum_{\alpha=1}^2 \int d^3k^3 q [N_{b_\alpha}(\vec{k}) - N_{d_\alpha}(\vec{k}) + \delta^3(\vec{0})] \quad (6.31)
 \end{aligned}$$

En procédant de façon semblable, on peut écrire l'Hamiltonien et la quantité de mouvement (6.23) comme :

$$H = \sum_{\alpha=1}^2 \int d^3k^3 \omega_k [N_{b_\alpha}(\vec{k}) + N_{d_\alpha}(\vec{k}) - \delta^3(\vec{0})] \quad (6.32)$$

$$\vec{P} = \sum_{\alpha=1}^2 \int d^3k^3 \vec{k} [N_{b_\alpha}(\vec{k}) + N_{d_\alpha}(\vec{k}) - \delta^3(\vec{0})] \quad (6.33)$$

On trouve donc bien une collection d'oscillateurs harmoniques, deux de type b et deux de type d pour chaque  $\vec{k}$ , avec pulsations  $\omega_k$ . Les deux types d'oscillateurs b et d sont distingués par la charge électrique  $\pm q$ . L'état fondamental a une charge électrique  $Q_0 = +2 \int d^3\vec{k} q \delta^3(\vec{0}) = \pm \infty$ , une énergie  $E_0 = -2 \int d^3\vec{k} \omega_k \delta^3(\vec{0}) = -\infty$  et une quantité de mouvement  $\vec{P}_0 = +2 \int d^3\vec{k} \vec{k} \delta^3(\vec{0}) = 0$ . Les états excités sont séparés par des multiples de charge, énergie et impulsion  $\pm q$ ,  $\omega_k$  et  $\vec{k}$  qui sont associées aux excitations des oscillateurs.

Ces résultats conduisent à l'interprétation physique des excitations harmoniques quantifiées avec des particules et des antiparticules :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 b_{\alpha}^{+}(\vec{k}) : \text{créé une particule avec 4-impulsion} \\
 \quad p^{\mu} = (\omega_k, \vec{k}), \text{ charge } q \text{ et polarisation } V_{\alpha}(\vec{k}) \\
 b_{\alpha}(\vec{k}) : \text{détruit une particule avec 4-impulsion} \\
 \quad p^{\mu} = (\omega_k, \vec{k}), \text{ charge } q \text{ et polarisation } V_{\alpha}(\vec{k}) \\
 d_{\alpha}^{+}(\vec{k}) : \text{créé une antiparticule avec 4-impulsion} \\
 \quad p^{\mu} = (\omega_k, \vec{k}), \text{ charge } -q \text{ et polarisation } V_{\alpha}(\vec{k}) \\
 d_{\alpha}(\vec{k}) : \text{détruit une particule avec 4-impulsion} \\
 \quad p^{\mu} = (\omega_k, \vec{k}), \text{ charge } -q \text{ et polarisation } V_{\alpha}(\vec{k}).
 \end{array} \right. \quad (6.34)$$

Les états propres de la théorie peuvent être construits en procédant comme pour l'oscillateur harmonique usuel, et constituant un espace de Fock.

Comme pour la théorie de Klein-Gordon, il convient de redéfinir les quantités conservées  $Q$ ,  $P^i$  et  $M^{\mu\nu}$  par des constantes, de telle façon à ce que leurs valeurs moyennes soient nulles sur l'état fondamental, qui sera alors interprété comme le vide. Dans ce cas, cette définition du vide peut être interprétée comme la formalisation de l'athèse des trous de Dirac. Le vide peut être interprété comme un état où tous les niveaux à énergie négative et charge égale à  $q$  sont déjà complètement occupés. Le formalisme des champs quantifiés permet toutefois comme déjà vu de réaliser une définition semblable du vide pour toute théorie, qu'elle soit bosonique ou fermionique. Techniquement, on peut à nouveau formaliser le choix de la valeur de référence pour les charges conservées en termes d'ordre normal.

Comme avant, cette prescription consiste à choisir un ordre pour les opérateurs tel que tous les opérateurs de création soient à gauche et tous ceux de destruction soient à droite. À nouveau, il est facile de se convaincre que cette prescription correspond effectivement à fixer une valeur particulière de la constante additive arbitraire associée à chaque charge. En outre, elle ne souffre pas d'ambiguïtés, pourvu qu'on ajoute un signe - chaque fois que l'on change l'ordre de deux opérateurs.

Pour la charge  $Q$  et la 4-impulsion  $p^\mu$ , en particulier, on obtient simplement:

$$:Q: = \sum_{\alpha=1}^2 \int d^3\vec{k} \ q [ N_{b_\alpha}(\vec{k}) - N_{d_\alpha}(\vec{k}) ] \quad (6.35)$$

$$:p^\mu: = \sum_{\alpha=1}^2 \int d^3\vec{k} \ k^\mu [ N_{b_\alpha}(\vec{k}) + N_{d_\alpha}(\vec{k}) ] \quad (6.36)$$

L'état correspondant au vide est

$$|0\rangle \quad (6.37)$$

et satisfait les propriétés:

$$b_\alpha(\vec{k}) |0\rangle = d_\alpha(\vec{k}) |0\rangle = 0 \quad (6.38)$$

On trouve donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} :Q: |0\rangle = 0 |0\rangle \\ :P^M: |0\rangle = 0 |0\rangle \end{array} \right. \quad (6.39)$$

Les états à une particule sont identifiés avec les premiers états excités des oscillateurs de type b :

$$|k^{(\alpha)}\rangle = b_{\alpha}^{\dagger}(\vec{k}) |0\rangle \quad (6.40)$$

Dans ce cas, on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} :Q: |k^{(\alpha)}\rangle = +q |k^{(\alpha)}\rangle \\ :P^M: |k^{(\alpha)}\rangle = k^M |k^{(\alpha)}\rangle \end{array} \right. \quad (6.41)$$

Les états à plusieurs particules sont construits de façon semblable et ont la forme :

$$|k_1^{(\alpha_1)}, \dots, k_n^{(\alpha_n)}\rangle = b_{\alpha_1}^{\dagger}(\vec{k}_1) \dots b_{\alpha_n}^{\dagger}(\vec{k}_n) |0\rangle \quad (6.42)$$

Les états sont complètement antisymétriques sous l'échange de différentes particules, comme il se doit pour des états fermioniques, vu que les  $b_{\alpha i}^{\dagger}(\vec{k}_i)$  anticommulent entre eux. On trouve dans ce cas :

$$\left\{ \begin{array}{l} :Q: |k_1^{(\alpha_1)}, \dots, k_n^{(\alpha_n)}\rangle = +nq |k_1^{(\alpha_1)}, \dots, k_n^{(\alpha_n)}\rangle \\ :P^M: |k_1^{(\alpha_1)}, \dots, k_n^{(\alpha_n)}\rangle = \left( \sum_{i=1}^n k_i^M \right) |k_1^{(\alpha_1)}, \dots, k_n^{(\alpha_n)}\rangle \end{array} \right. \quad (6.43)$$

Les états à une antiparticule sont identifiés avec les premiers états excités des oscillateurs de type d :

$$|\bar{k}^{(\alpha)}\rangle = d_{\alpha}^{\dagger}(\vec{k}) |0\rangle \quad (6.44)$$

Dans ce cas, on trouve :

$$\left. \begin{array}{l} :Q: |\bar{k}^{(\alpha)}\rangle = -q |\bar{k}\rangle \\ ;P^{\mu}: |\bar{k}^{(\alpha)}\rangle = k^{\mu} |\bar{k}\rangle \end{array} \right\} \quad (6.45)$$

Les états à plusieurs antiparticules sont construits de façon semblable et ont la forme :

$$|\bar{k}_1^{(\alpha_1)}, \dots, \bar{k}_n^{(\alpha_n)}\rangle = d_{\alpha_1}^{\dagger}(\vec{k}_1) \dots d_{\alpha_n}^{\dagger}(\vec{k}_n) |0\rangle \quad (6.46)$$

Ces états sont complètement antisymétriques sous l'échange de différentes antiparticules, comme il se doit, vu que les  $d_{\alpha_i}^{\dagger}(\vec{k}_i)$  anticommulent entre eux. On obtient dans ce cas :

$$\left. \begin{array}{l} :Q: |\bar{k}_1^{(\alpha_1)}, \dots, \bar{k}_n^{(\alpha_n)}\rangle = -nq |\bar{k}_1^{(\alpha_1)}, \dots, \bar{k}_n^{(\alpha_n)}\rangle \\ ;P^{\mu}: |\bar{k}_1^{(\alpha_1)}, \dots, \bar{k}_n^{(\alpha_n)}\rangle = \left( \sum_{i=1}^n k_i^{\mu} \right) |\bar{k}_1^{(\alpha_1)}, \dots, \bar{k}_n^{(\alpha_n)}\rangle \end{array} \right\} \quad (6.47)$$

Finalement, les états contenant simultanément des particules et des antiparticules ont la forme :

$$|k_1^{(\alpha_1)}, \dots, k_n^{(\alpha_n)}; \bar{k}_1^{(\alpha_1)}, \dots, \bar{k}_n^{(\alpha_n)}\rangle = b_{\alpha_1}^{\dagger}(k_1) \dots b_{\alpha_n}^{\dagger}(k_n) d_{\alpha_1}^{\dagger}(\vec{k}_1) \dots d_{\alpha_n}^{\dagger}(\vec{k}_n) |0\rangle \quad (6.48)$$



Ces états ont les justes propriétés d'antisymétrie, et on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} :Q: |k_1^{(\alpha_1)}, \dots, k_n^{(\alpha_n)}; \bar{k}_1^{(\bar{\alpha}_1)}, \dots, \bar{k}_n^{(\bar{\alpha}_n)}\rangle = (n-\bar{n})q |k_1^{(\alpha_1)}, \dots, k_n^{(\alpha_n)}; \bar{k}_1^{(\bar{\alpha}_1)}, \dots, \bar{k}_n^{(\bar{\alpha}_n)}\rangle \\ :p^\mu: |k_1^{(\alpha_1)}, \dots, k_n^{(\alpha_n)}; \bar{k}_1^{(\bar{\alpha}_1)}, \dots, \bar{k}_n^{(\bar{\alpha}_n)}\rangle = \left( \sum_{i=1}^n k_i^\mu + \sum_{i=1}^{\bar{n}} \bar{k}_i^\mu \right) |k_1^{(\alpha_1)}, \dots, k_n^{(\alpha_n)}; \bar{k}_1^{(\bar{\alpha}_1)}, \dots, \bar{k}_n^{(\bar{\alpha}_n)}\rangle \end{array} \right. \quad (6.49)$$

Les états à énergie et impulsion définies constants ci-dessus sont normalisés d'une façon Lorentz-covariante.

En choisissant :

$$\langle 0|0\rangle = 1$$

(6.50)

On trouve que :

$$\begin{aligned} \langle k_1^{(\alpha_1)}, \dots, k_n^{(\alpha_n)}; \bar{k}_1^{(\bar{\alpha}_1)}, \dots, \bar{k}_n^{(\bar{\alpha}_n)} | k_1^{(\alpha_1)}, \dots, k_n^{(\alpha_n)}; \bar{k}_1^{(\bar{\alpha}_1)}, \dots, \bar{k}_n^{(\bar{\alpha}_n)} \rangle &= \\ &= \langle 0 | \sum_{i_1, i_2}^n \prod_{i=1}^n [b_{\alpha_i}(k_i), b_{\alpha_i}^\dagger(k_{i_1})] \sum_{j_1, j_2}^{\bar{n}} \prod_{i=1}^{\bar{n}} [d_{\bar{\alpha}_i}(\bar{k}_i), d_{\bar{\alpha}_i}^\dagger(\bar{k}_{j_1})] | 0 \rangle \\ &= \sum_{i_1, i_2}^n \prod_{i=1}^n [(2\pi)^3 2\omega_{k_i} \delta^3(\vec{k}_i - \vec{k}_{i_1}) \delta_{\alpha_i, \alpha_{i_1}}] \sum_{j_1, j_2}^{\bar{n}} \prod_{i=1}^{\bar{n}} [(2\pi)^3 2\omega_{\bar{k}_i} \delta^3(\vec{k}_i - \vec{k}_{j_1}) \delta_{\bar{\alpha}_i, \bar{\alpha}_{j_1}}] \quad (6.51) \end{aligned}$$

On peut alors construire des paquets d'onde du type :

$$|\psi_{n, \bar{n}}\rangle = \frac{1}{n! \bar{n}!} \prod_{i=1}^n \int \frac{d^3 k_i}{(2\pi)^3 2\omega_{k_i}} \prod_{i=1}^{\bar{n}} \int \frac{d^3 \bar{k}_i}{(2\pi)^3 2\omega_{\bar{k}_i}} f(k_1^{(\alpha_1)}, \dots, k_n^{(\alpha_n)}; \bar{k}_1^{(\bar{\alpha}_1)}, \dots, \bar{k}_n^{(\bar{\alpha}_n)}) |k_1^{(\alpha_1)}, \dots, k_n^{(\alpha_n)}; \bar{k}_1^{(\bar{\alpha}_1)}, \dots, \bar{k}_n^{(\bar{\alpha}_n)}\rangle \quad (6.52)$$

Leur normalisation est, en appliquant (6.51), donnée par :

$$\langle \psi_{n, \bar{n}} | \psi_{n, \bar{n}} \rangle = \prod_{i=1}^n \sum_{\alpha_i} \int \frac{d^3 k_i}{(2\pi)^3 2\omega_{k_i}} \prod_{i=1}^{\bar{n}} \int \frac{d^3 \bar{k}_i}{(2\pi)^3 2\omega_{\bar{k}_i}} |f(k_1^{(\alpha_1)}, \dots, k_n^{(\alpha_n)}; \bar{k}_1^{(\bar{\alpha}_1)}, \dots, \bar{k}_n^{(\bar{\alpha}_n)})|^2 \quad (6.53)$$

### 6.3 Propriétés des champs quantiques

Dans la théorie quantique obtenue par la procédure canonique de Heisenberg, les champs  $\psi(x)$  et  $\bar{\psi}(x)$  sont des opérateurs qui dépendent du temps comme requis par la dynamique, tandis que les états sont indépendants du temps.

Les transformations de symétries sont réalisées de la façon usuelle. On a par exemple :

$$[Q, \psi(x)] = -q \psi(x) \quad ; \quad [Q, \bar{\psi}(x)] = +q \bar{\psi}(x) \quad (6.54)$$

Ceci reflète le fait que  $\psi(x)$  crée des antiparticules de charge  $-q$  ou détruit des particules de charge  $+q$ , alors que  $\bar{\psi}(x)$  crée des particules de charge  $+q$  et détruit des antiparticules de charge  $-q$ . On trouve aussi :

$$\left. \begin{aligned} [P^\mu, \psi(x)] &= \hat{P}^\mu \psi(x) \quad ; \quad [P^\mu, \bar{\psi}(x)] = \hat{P}^\mu \bar{\psi}(x) \\ [M^{\mu\nu}, \psi(x)] &= -\hat{M}^{\mu\nu} \psi(x) \quad ; \quad [M^{\mu\nu}, \bar{\psi}(x)] = -\hat{M}^{\mu\nu} \bar{\psi}(x) \end{aligned} \right\} (6.55)$$

où :

$$\left. \begin{aligned} \hat{P}^\mu &= -i \partial^\mu \\ \hat{M}^{\mu\nu} &= i(x^\mu \partial^\nu - x^\nu \partial^\mu) \mathbb{1} + S_{\text{Dirac}}^{\mu\nu} \quad \left( S_{\text{Dirac}}^{\mu\nu} = \frac{i}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \right) \end{aligned} \right\} (6.56)$$

Ces relations montrent que  $\psi(x)$  et  $\bar{\psi}(x)$  portent également des moments linéaires et angulaires.

Les équations (6.54) et (6.55) montrent que les champs  $\psi(x)$  et  $\bar{\psi}(x)$  réalisent une symétrie interne dont le générateur est  $Q$ , et les symétries d'espace-temps de Poincaré, dont les générateurs sont  $P^\mu$  et  $M^{\mu\nu}$ . Les transformations correspondantes agissent sur la théorie quantique de la façon suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} |\psi\rangle \rightarrow |\psi'\rangle = U|\psi\rangle \\ Q \rightarrow Q' = UQU^{-1} \end{array} \right. \quad (6.57)$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{symétrie interne : } U(\alpha) = e^{-i\alpha Q} \\ \text{translations : } U(\epsilon_\mu) = e^{-i\epsilon_\mu P^\mu} \\ \text{transf. Lorentz : } U(\omega_{\mu\nu}) = e^{\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu} M^{\mu\nu}} \end{array} \right. \quad (6.58)$$

En outre, on peut vérifier que les générateurs  $Q$ ,  $P^\mu$  et  $M^{\mu\nu}$  ont bien une algèbre qui correspond à un groupe interne  $U(1)$  et au groupe de Poincaré.

Seulement au cas de Klein-Gordon, une chose importante à vérifier est que l'anticommutateur à temps et positions arbitraires entre deux champs est compatible avec le principe de causalité usuel.

Pour calculer cet anticommuteur, on peut utiliser la décomposition (6.10) des champs et l'algèbre (6.28). On trouve, pour les pentes à fréquences positives et négatives, les résultats suivants :

$$\begin{aligned}
 \left\{ \psi^{(\pm)}(x), \psi^{(\pm)}(x') \right\} &= \left\{ \bar{\psi}^{(\pm)}(x), \bar{\psi}^{(\pm)}(x') \right\} = 0 \\
 \left\{ \psi^{(\pm)}(x), \psi^{(\mp)}(x') \right\} &= \left\{ \bar{\psi}^{(\pm)}(x), \bar{\psi}^{(\mp)}(x') \right\} = 0 \\
 \left\{ \psi^{(\pm)}(x), \bar{\psi}^{(\pm)}(x') \right\} &= 0 \\
 \left\{ \psi^{(\pm)}(x), \bar{\psi}^{(\mp)}(x') \right\} &= i \Delta_{\text{Dirac}}^{\pm}(x-x')
 \end{aligned} \tag{6.59}$$

où :

$$\begin{aligned}
 \Delta_{\text{Dirac}}^{\pm}(x) &= (i\gamma^{\mu})_{\mu+m} \Delta_{ka}^{\pm}(x) \\
 &= \mp i \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} (\pm k + m) e^{\mp i k x}
 \end{aligned} \tag{6.60}$$

Il suit que pour les champs complets :

$$\left. \begin{aligned}
 \left\{ \psi(x), \psi(x') \right\} &= \left\{ \bar{\psi}(x), \bar{\psi}(x') \right\} = 0 \\
 \left\{ \psi(x), \bar{\psi}(x') \right\} &= i \Delta_{\text{Dirac}}(x-x')
 \end{aligned} \right\} \tag{6.61}$$

avec :

$$\begin{aligned}
 \Delta_{\text{Dirac}}(x) &= \Delta_{\text{Dirac}}^{+}(x) + \Delta_{\text{Dirac}}^{-}(x) \\
 &= (i\gamma^{\mu})_{\mu+m} \Delta_{ka}(x) \\
 &= - \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 \omega_k} (i k \cos(kx) + m \sin(kx))
 \end{aligned} \tag{6.62}$$

Les fonctions  $\Delta_{\text{DIRAC}}^{\pm}(X)$  et  $\Delta_{\text{DIRAC}}(X)$  se transforment  
comme l'opérateur de Dirac, vu qu'elles sont reliées  
par un opérateur semblable à  $\Delta_{ka}^{\pm}(X)$  et  $\Delta_{ka}(X)$ , qui  
sont des invariants. On peut rendre cela plus évident  
en les écrivant comme :

$$\begin{cases} \Delta_{\text{DIRAC}}^{\pm}(X) = \mp i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^3} (k+m) \delta(k^2-m^2) \theta(\pm k_0) e^{-ikx} \\ \Delta_{\text{DIRAC}}(X) = -i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^3} (k+m) \delta(k^2-m^2) \epsilon(k_0) e^{-ikx} \end{cases} \quad (6.63)$$

De cette façon, il devient évident que ces fonctions  
satisfont non seulement l'équation de KG, mais  
également celle de Dirac :

$$\begin{cases} (i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m) \Delta_{\text{DIRAC}}^{\pm}(X) = 0 \\ (i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m) \Delta_{\text{DIRAC}}(X) = 0 \end{cases} \quad (6.64)$$

On remarque finalement que la fonction  $\Delta_{\text{DIRAC}}$  est  
nulle si son argument est un 4-vecteur de genre  
espace, pour les mêmes raisons que  $\Delta_{ka}$  :

$$\Delta_{\text{DIRAC}}(X) = 0 \quad \text{si } X^2 < 0 \quad (6.65)$$

Il suit que le commutateur de deux fonctions des  
champs à deux points  $x_1$  et  $x_2$  s'annule si  $x_1 - x_2$  est  
de genre espace, comme requiert par la microcausalité :

$$[f_1(\psi(x_1)), f_2(\psi(x_2))] = 0 \quad \text{si } (x_1 - x_2)^2 < 0 \quad (6.66)$$

La valeur moyenne d'une fonction des champs sur le vide peut être calculée en utilisant la définition du vide (6.38), impliquant:

$$\psi^{(+)}(x) |0\rangle = \bar{\psi}^{(+)}(x) |0\rangle = 0 \quad (6.67)$$

ainsi que les relations d'anticommulation covariantes (6.59) entre parties à fréquences positives et négatives des champs. On trouve en particulier:

$$\begin{cases} \langle 0 | \psi(x) |0\rangle = 0 \\ \langle 0 | \bar{\psi}(x) |0\rangle = 0 \end{cases} \quad (6.68)$$

et :

$$\begin{aligned} \langle 0 | \psi(x) \bar{\psi}(x') |0\rangle &= \langle 0 | \psi^{(+)}(x) \bar{\psi}^{(-)}(x') |0\rangle \\ &= \langle 0 | \{ \psi^{(+)}(x), \bar{\psi}^{(-)}(x') \} |0\rangle \\ &= i \Delta_{\text{DIRAC}}^{+}(x-x') \end{aligned} \quad (6.69)$$

$$\begin{aligned} \langle 0 | \bar{\psi}(x') \psi(x) |0\rangle &= \langle 0 | \bar{\psi}^{(+)}(x') \psi^{(-)}(x) |0\rangle \\ &= \langle 0 | \{ \bar{\psi}^{(+)}(x'), \psi^{(-)}(x) \} |0\rangle \\ &= -i \Delta_{\text{DIRAC}}^{-}(x-x') \end{aligned} \quad (6.70)$$

## 6.4 Propagateur

Pour étudier des processus d'interaction, il est utile de construire une fonction de Green pour l'équation de Dirac, satisfaisant l'équation inhomogène :

$$(i\gamma^\mu)_{\mu-\nu} G_{\text{Dirac}}(x) = \delta^4(x) \mathbb{1}. \quad (6.71)$$

Plus précisément, il est possible d'obtenir ce type de propagateur comme valeur moyenne sur le vide d'un produit approprié de champs  $\psi(x)$  et  $\bar{\psi}(x')$ .

Comme avant, la prescription appropriée est de considérer le produit chronologique, consistant à ordonner les champs avec des temps décroissants, en ajoutant un signe  $-$  pour chaque permutation. On définit le propagateur de Feynman comme :

$$G_{\text{Dirac}}(x-x') = i \langle 0 | T(\psi(x) \bar{\psi}(x')) | 0 \rangle \quad (6.72)$$

Ceci donne :

$$\begin{aligned} G_{\text{Dirac}}(x-x') &= i \theta(t-t') \langle 0 | \psi(x) \bar{\psi}(x') | 0 \rangle - i \theta(t'-t) \langle 0 | \bar{\psi}(x') \psi(x) | 0 \rangle \\ &= -\theta(t-t') \Delta_{\text{Dirac}}^+(x-x') + \theta(t'-t) \Delta_{\text{Dirac}}^-(x-x') \\ &= (i\gamma^\mu)_{\mu+\nu} G_{\text{KG}}(x-x') \\ &= i \left\{ \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} e^{-i\omega_k(t-t')} (\omega_k + \epsilon(t-t')) \cos[\vec{k}(\vec{x}-\vec{x}')] \right. \\ &\quad \left. - \vec{\gamma} \cdot \vec{k} \sin[\vec{k}(\vec{x}-\vec{x}')] \right\} \quad (6.73) \end{aligned}$$

La fonction  $G_{\text{DINAC}}(x)$  peut être écrite de la façon suivante :

$$\begin{aligned} G_{\text{DINAC}}(x) &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{-(k+m)}{k^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ikx} \\ &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{-1}{k - m + i\epsilon} e^{-ikx} \end{aligned} \quad (6.74)$$

Le facteur  $i\epsilon$  au dénominateur représente, comme dans le cas de Klein-Gordon, une prescription bien connue pour traiter les singularités. Plus précisément, en calculant l'intégrale en  $k_0$  dans le plan complexe à l'aide du théorème de Cauchy, le pôle en  $k_0 = +wk$  contribue quand  $t-t' > 0$  et le pôle en  $k_0 = -wk$  quand au contraire  $t-t' < 0$ . On reproduit alors dans les deux cas l'expression (6.63) pour  $+\Delta_{\text{DINAC}}^+(x-x')$  et  $-\Delta_{\text{DINAC}}^-(x-x')$ , et on retrouve donc bien le résultat (6.73).

On vérifie facilement que le propagateur (6.74) vérifie effectivement l'équation (6.71) et représente donc une fonction de Green. En effet, l'expression (6.74) a manifestement la structure générale qui est requise pour une solution de la (6.74) écrite comme transformée de Fourier 4-dimensionnelle.



Comme dans le cas de Klein-Gordon, la fonction de Green (6.74) se distingue d'autres types de fonctions de Green possibles pour l'opérateur de Dirac par les conditions aux bords qu'elle satisfait. En particulier, elle propage en avant dans le temps les composantes à fréquences positives et en arrière dans le temps les fréquences négatives.

On remarque finalement qu'à l'aide des projecteurs sur les sous-espaces à énergies positives et négatives des spineurs :

$$\left. \begin{aligned} \Lambda_+(\vec{k}) &= \frac{1}{2} \left( \mathbb{1} + \frac{\mathbf{K}}{m} \right) = \sum_{\alpha=1}^2 U_\alpha(\vec{k}) \bar{U}_\alpha(\vec{k}) \\ \Lambda_-(\vec{k}) &= \frac{1}{2} \left( \mathbb{1} - \frac{\mathbf{K}}{m} \right) = - \sum_{\alpha=1}^2 V_\alpha(\vec{k}) \bar{V}_\alpha(\vec{k}) \end{aligned} \right\} \quad (6.75)$$

on peut également récrire le propagateur (6.73) comme :

$$\begin{aligned} G_{\text{Dirac}}(x-x') &= i \Theta(t-t') \int \frac{d^3k}{2\omega_k} 2m \Lambda_+(\vec{k}) f(\vec{k}, x) f^*(\vec{k}, x') \\ &\quad + i \Theta(t'-t) \int \frac{d^3k}{2\omega_k} 2m \Lambda_-(\vec{k}) f^*(\vec{k}, x) f(\vec{k}, x') \\ &= i \Theta(t-t') \int d^3k \sum_{\alpha=1}^2 \psi_\alpha^{(+)}(\vec{k}, x) \bar{\psi}_\alpha^{(+)}(\vec{k}, x') \\ &\quad - i \Theta(t'-t) \int d^3k \sum_{\alpha=1}^2 \psi_\alpha^{(-)}(\vec{k}, x) \bar{\psi}_\alpha^{(-)}(\vec{k}, x') \end{aligned} \quad (6.76)$$

en terme de la base orthonormale complete de solutions de l'equation de Dirac homogene:

$$\left\{ \begin{aligned} \psi_{\alpha}^{(+)}(\vec{k}, x) &= \sqrt{\frac{m}{\omega_k}} u_{\alpha}(\vec{k}, x) f(\vec{k}, x) \\ \psi_{\alpha}^{-}(\vec{k}, x) &= \sqrt{\frac{m}{\omega_k}} v_{\alpha}(\vec{k}, x) f^{*}(\vec{k}, x) \end{aligned} \right. \quad (6.76)$$

## 7 THEORIE DE MAXWELL

### 7.1 Théorie classique :

La théorie de Maxwell est basée sur un champ vectoriel réel  $A_\mu(x)$  et la densité de Lagrangien est :

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} f_{\mu\nu} f^{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu + \frac{1}{2} \partial_\mu A_\nu \partial^\nu A^\mu \quad (7.1)$$

l'équation du mouvement est :

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = \partial_\nu A^\mu - \partial^\mu \partial_\nu A^\nu = 0 \quad (7.2)$$

et le moment canonique conjugué à  $A_\mu$  est :

$$\pi^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_\mu)} = F^{\mu 0} = -\partial^0 A^\mu + \partial^\mu A^0 \quad (7.3)$$

La théorie est invariante sous transformations de jauge du type :

$$\begin{cases} x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu \\ A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu \lambda(x) \end{cases} \quad (7.4)$$

Les expressions (7.1)-(7.3) sont manifestement invariantes sous la transformation (7.4). Toutefois, il est possible d'utiliser la liberté (7.4) pour réduire la théorie en fonction d'un  $A'_\mu(x)$  satisfaisant des propriétés particulières.

Par exemple, en partant d'un  $A_\mu(x)$  totalement arbitraire, il est toujours possible de choisir un paramètre de jauge  $\lambda$  tel que le nouveau potentiel  $A_\mu(x)$  satisfasse la condition de Lorentz :

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \quad (7.5)$$

Cette condition ne fixe toutefois pas complètement la liberté de jauge (7.4). En effet, la condition de Lorentz (7.5) reste satisfaite si on effectue des transformations de jauge de type (7.4) avec des paramètres harmoniques :

$$\delta A_\mu = \partial_\mu \lambda \quad \text{avec} \quad \square \lambda = 0 \quad (7.6)$$

La condition (7.5) définit donc en réalité une classe de jauge, et ne fixe pas toute l'ambiguïté liée aux transformations de jauge.

En résumé, le décompte des degrés de liberté est le suivant. On part avec 4 degrés de liberté  $A^\mu$ . Ceux-ci sont ensuite réduits à 3 degrés de liberté par la condition  $\partial_\mu A^\mu = 0$ . Finalement, ceux-ci sont distingués en 2 degrés de libertés physiques et 1 non-physique lié à l'ambiguïté (7.6).

Il n'est pas possible de se libérer définitivement du degré de liberté non-physique en gardant un choix de jauge manifestement covariant. En effet, ce degré de liberté correspond précisément à la liberté de choix d'une jauge de Lorentz particulière, dont la spécification nécessite le choix d'une direction particulière dans l'espace-temps. Par exemple, dans la jauge temporelle on a  $A_0 = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ , de telle sorte que les deux degrés de liberté physiques sont les polarisations transverses du potentiel vecteur.

Dans une jauge de Lorentz géométrique, on peut considérer l'équation (7.5) comme une contrainte et décrire le système par le lagrangien plus simple :

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu \tag{7.7}$$

Ceci conduit à l'équation du mouvement

$$\square A^\mu = 0 \tag{7.8}$$

et à un moment canonique donné par :

$$\pi^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_\mu)} = -\partial^0 A^\mu \tag{7.9}$$

Les équations (7.7)-(7.9) sont équivalentes aux eqs. (7.1)-(7.3), une fois que la contrainte (7.5) est prise en compte.

L'énergie  $H$  et la quantité de mouvement  $P^i$  sont données par les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} H &= \int d^3\vec{x} (\Pi^\mu \dot{A}_\mu - \mathcal{L}) \\ &= -\frac{1}{2} \int d^3\vec{x} (\dot{A}^0 A^0 + \vec{\nabla} A^\mu \cdot \vec{\nabla} A_\mu) \end{aligned} \quad (7.10)$$

$$\begin{aligned} P^i &= \int d^3\vec{x} (\Pi^\mu \dot{A}_\mu) \\ &= - \int d^3\vec{x} (\dot{A}^0 A^i) \end{aligned} \quad (7.11)$$

Les moments cinétiques  $M^{it}$  et temporels  $M^{0i}$  sont eux donnés par :

$$\begin{aligned} M^{it} &= \int d^3\vec{x} \left[ -x^i (\Pi^\mu \dot{A}_\mu) + x^t (\Pi^\mu \dot{A}_\mu) \right. \\ &\quad \left. + i \Pi^\mu (S_{MAX}^{it})_\mu \nu A_\nu \right] \\ &= \int d^3\vec{x} \left[ x^i \dot{A}^0 A^t - x^t \dot{A}^0 A^i \right. \\ &\quad \left. - i \dot{A}^0 A^\mu (S_{MAX}^{it})_\mu \nu A_\nu \right] \end{aligned} \quad (7.12)$$

$$\begin{aligned} M^{0i} &= \int d^3\vec{x} \left[ -x^0 (\Pi^\mu \dot{A}_\mu) + x^i (\Pi^\mu \dot{A}_\mu - \mathcal{L}) \right. \\ &\quad \left. + i \Pi^\mu (S_{MAX}^{0i})_\mu \nu A_\nu \right] \\ &= \int d^3\vec{x} \left[ x^0 \dot{A}^0 A^i - \frac{1}{2} x^i (\dot{A}^0 A^0 + \vec{\nabla} A^\mu \cdot \vec{\nabla} A_\mu) \right. \\ &\quad \left. - i \dot{A}^0 A^\mu (S_{MAX}^{0i})_\mu \nu A_\nu \right] \end{aligned} \quad (7.13)$$

La solution générale de l'équation d'onde de Maxwell libre (7.8) dans la jauge de Lorentz est une superposition d'ondes planes satisfaisant la relation de dispersion

$$\omega_k = |\vec{k}| \quad (7.14)$$

Plus précisément, la solution générale est donnée par la décomposition suivante :

$$A_\mu(x) = A_\mu^{(4)}(x) + A_\mu^{(-)}(x) \\ = \sum_{r=0}^3 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2} 2\omega_k} \left[ a_r(\vec{k}) \xi_r^\mu(\vec{k}) f(\vec{k}, x) + a_r^*(\vec{k}) \xi_r^{*\mu}(\vec{k}) f^*(\vec{k}, x) \right] \quad (7.15)$$

Où :

$$f(\vec{k}, x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{-ik_\mu x^\mu} \quad (7.16)$$

Les vecteurs de polarisations peuvent être paramétrisés de la façon suivante ( $\vec{d}_1 \perp \vec{d}_2 \perp \frac{\vec{k}}{k}$ , normalisés à 1) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi_0^\mu(\vec{k}) = \begin{pmatrix} 1 \\ \vec{0} \end{pmatrix} : \text{polarisation scalaire} \\ \xi_1^\mu(\vec{k}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{d}_1(\vec{k}) \end{pmatrix} : \text{polarisation transverse} \\ \xi_2^\mu(\vec{k}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{d}_2(\vec{k}) \end{pmatrix} : \text{polarisation transverse} \\ \xi_3^\mu(\vec{k}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} \end{pmatrix} : \text{polarisation longitudinale} \end{array} \right. \quad (7.17)$$

Les coefficients  $a_r$  sont des scalaires, et on a :

$$[A_\mu] = 1 ; [a_r] = -1 ; [\xi_r] = 0 \quad (7.18)$$

Les ondes planes  $f$  forment un ensemble complet et orthogonal de fonctions, dans le sens que :

$$\int d^3\vec{x} f^*(\vec{k}, x) f(\vec{k}', x) = \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') \quad (7.19)$$

(comme déjà vu pour la théorie de Klein-Gordon, de cette propriété il suit également que :

$$\begin{cases} \int d^3\vec{x} f^*(\vec{k}, x) i\overleftrightarrow{\partial}_0 f(\vec{k}', x) = 2\omega_k \delta^3(\vec{k} - \vec{k}') \\ \int d^3\vec{x} f(\vec{k}, x) i\overleftrightarrow{\partial}_0 f(\vec{k}', x) = 0 \\ \int d^3\vec{x} f^*(\vec{k}, x) i\overleftrightarrow{\partial}_0 f(\vec{k}', x) = 0 \end{cases} \quad (7.20)$$

Les vecteurs de polarisations  $\xi_r$  forment, eux, un ensemble complet et orthogonal de vecteurs constants, dans le sens que :

$$\xi_{r\mu}^*(\vec{k}) \xi_s^\mu(\vec{k}) = \eta_{rs} \quad (7.21)$$

En utilisant ces relations, on peut invertir la décomposition (7.15). On trouve :

$$a_r(\vec{k}) = \int d^3\vec{x} (2\pi)^{3/2} \xi_r^{\mu*}(\vec{k}) f^*(\vec{k}, x) i\overleftrightarrow{\partial}_0 A_\mu(x) \quad (7.22)$$



Sur les solutions libres, les quantités conservées  $P^\mu$  et  $M^{\mu\nu}$  peuvent être simplifiées en utilisant les équations du mouvement. On trouve :

$$\begin{aligned}
 P^\mu &= \frac{1}{2} \int d^3\vec{x} (A^\alpha \partial^0 \partial^\mu A_\alpha - \partial^0 A^\alpha \partial^\mu A_\alpha) \\
 &= -\frac{i}{2} \int d^3\vec{x} A^\alpha \left\{ [-i\partial^\mu] \vec{\partial}^0 - \vec{\partial}^0 [-i\partial^\mu] \right\} A_\alpha \\
 &= -\frac{i}{2} \int d^3\vec{x} A^\alpha \left[ \hat{P}^\mu \vec{\partial}^0 - \vec{\partial}^0 \hat{P}^\mu \right] A_\alpha \tag{7.22}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M^{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \int d^3\vec{x} \left[ -x^\mu (\partial^0 A^\alpha \partial^\nu A_\alpha - A^\alpha \partial^0 \partial^\nu A_\alpha) \right. \\
 &\quad \left. + x^\nu (\partial^0 A^\alpha \partial^\mu A_\alpha - A^\alpha \partial^0 \partial^\mu A_\alpha) \right. \\
 &\quad \left. - i (\partial^0 A^\alpha \sum_{\text{MAX}}^{\mu\nu} A_\beta - A^\alpha \partial^0 \sum_{\text{MAX}}^{\mu\nu} A_\beta) \right] \\
 &= -\frac{i}{2} \int d^3\vec{x} A^\alpha \left\{ [i(x^\mu \partial^\nu - x^\nu \partial^\mu) \epsilon_{\alpha\beta} + \sum_{\text{MAX}}^{\mu\nu} \nu_\beta] \vec{\partial}^0 \right. \\
 &\quad \left. - \vec{\partial}^0 [i(x^\mu \partial^\nu - x^\nu \partial^\mu) \epsilon_{\alpha\beta} + \sum_{\text{MAX}}^{\mu\nu} \nu_\beta] \right\} A_\alpha \\
 &= -\frac{i}{2} \int d^3\vec{x} A^\alpha \left[ \hat{M}_{\alpha}^{\mu\nu} \vec{\partial}^0 - \vec{\partial}^0 \hat{M}_{\alpha}^{\mu\nu} \right] A_\alpha \tag{7.23}
 \end{aligned}$$

Les formes de ces deux expressions sont semblables, et montrent clairement que le champ peut être interprété comme fonction d'onde de probabilité, même si dans ce cas il n'y a pas de courant de probabilité conservé, et pas de courant électrique non plus :

$$\int_{\text{MAX}} = \frac{i}{2} A^\alpha \vec{\partial}^0 A_\alpha = 0 \tag{7.24}$$

En utilisant la décomposition (7.15) et les relations (7.20) et (7.21), il est possible de réduire les expressions (7.22) et (7.23) en fonction des  $a$ . On obtient:

$$P^\mu = -\frac{1}{2} \sum_{r=0}^3 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 \omega_k} \eta_{rr} k^\mu [a_r^\dagger(\vec{k}) a_r(\vec{k}) + a_r(\vec{k}) a_r^\dagger(\vec{k})] \quad (7.25)$$

$$M^{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \sum_{r=0}^3 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 \omega_k} \eta_{rr} \left\{ a_r^\dagger(\vec{k}) \left[ i(k^\mu \frac{\partial}{\partial k^\nu} - k^\nu \frac{\partial}{\partial k^\mu}) + \xi_r^{\alpha\beta}(\vec{k}) S_{\text{MAX } \alpha\beta}^{\mu\nu} \xi_r^\beta(\vec{k}) \right] a_r(\vec{k}) \right. \\ \left. - a_r(\vec{k}) \left[ i(k^\mu \frac{\partial}{\partial k^\nu} - k^\nu \frac{\partial}{\partial k^\mu}) + \xi_r^{\alpha\beta}(\vec{k}) S_{\text{MAX } \alpha\beta}^{\mu\nu} \xi_r^\beta(\vec{k}) \right] a_r^\dagger(\vec{k}) \right\} \quad (7.26)$$

Les charges génèrent les transformations de Poincaré.

Avant d'examiner le contenu physique de la théorie, il faut imposer la condition (7.5) définissant les jauge de Lorentz, qui éliminera une combinaison des  $a_r$ , et identifier quelle autre combinaison des  $a_r$  correspond au choix non-physique de jauge spécifique (7.6). Pour déterminer la condition on applique  $\partial^\mu$  au développement (7.15) et demande que le résultat soit nul. Ceci impose:

$$\sum_{r=0}^3 k_\mu \xi_r^\mu(\vec{k}) a_r(\vec{k}) = 0 \quad (7.27)$$

Ceci élimine 1 parmi les 4 polarisations indépendantes.

Dans la base (7.17), on trouve que  $k_\mu \xi_1^\mu = k_\mu \xi_2^\mu = 0$  et  $k_\mu \xi_0^\mu = -k_\mu \xi_3^\mu \neq 0$ , ou  $k_\mu (\xi_0 + \xi_3)^\mu = 0$ ,  $k_\mu (\xi_0 - \xi_3)^\mu \neq 0$ .

l'imposition de l'équation (7.27) implique donc que les coefficients  $a_1, a_2$  et  $(a_0 + a_3)$  associés aux polarisations  $\xi_1^\mu, \xi_2^\mu$  et  $\xi_0^\mu + \xi_3^\mu$  sont gardés, tandis que le coefficient  $a_1 - a_3$  associé à la polarisation  $(\xi_0 - \xi_3)^\mu$  doit être mis à zéro:

$$a_0(k) - a_3(k) = 0 \quad (7.28)$$

Pour déterminer le degré de liberté non physique, on cherche à identifier quelle polarisation donne un champ du type (7.6). Dans la base (7.17), on trouve que  $(\xi_0 + \xi_3)^\mu = k^\mu$ . Il est donc clair que le degré de liberté non-physique est lié au coefficient  $a_1 + a_3$  associé à la polarisation  $(\xi_0 + \xi_3)^\mu$ :

$$a_0(k) + a_3(k) : \text{non-physique} \quad (7.29)$$

On observe que la 4-impulsion  $p^\mu$  dépend de  $a_1$  et  $a_2$ , qui sont associés aux deux degrés de liberté physiques, de façon séparée, mais qu'elle dépend de  $a_0 - a_3$  qui est la combinaison jellée par la contrainte, et de  $a_0 + a_3$ , qui correspond au degré de liberté non-physique, seulement au travers de leurs produits complexes.

Ceci implique qu'après avoir appliqué la contrainte (7.28), le degré de liberté non-physique (7.29) ne contribue pas à l'énergie et à la quantité de mouvement. Pour les moments  $\gamma^{\mu\nu}$ , au contraire, la dépendance de  $a_1, a_2, a_0 - a_3$  et  $a_0 + a_3$  est plus compliquée, et même après avoir imposé la contrainte (7.28), il reste une dépendance du degré de liberté non-physique (7.29). Ceci reflète le fait que ce dernier est nécessaire seulement pour rendre la formulation manifestement covariante.

En résumé, les propriétés des différents degrés de liberté sont les suivantes :

$$\left. \begin{aligned}
 a_1(\vec{k}) &\Leftrightarrow \text{particule=antiparticule physique avec} \\
 &\quad \text{impulsion } \vec{k} \text{ et polarisation } \xi_1^\mu(\vec{k}) \\
 a_2(\vec{k}) &\Leftrightarrow \text{particule=antiparticule physique avec} \\
 &\quad \text{impulsion } \vec{k} \text{ et polarisation } \xi_2^\mu(\vec{k}) \\
 (a_0 + a_3)(\vec{k}) &\Leftrightarrow \text{particule=antiparticule non-physique avec} \\
 &\quad \text{impulsion } \vec{k} \text{ et polarisation } \left(\xi_0 + \xi_3\right)^\mu(\vec{k}) \\
 (a_0 - a_3)(\vec{k}) &\Leftrightarrow \text{particule=antiparticule jetée, avec} \\
 &\quad \text{impulsion } \vec{k} \text{ et polarisation } \left(\xi_0 - \xi_3\right)^\mu(\vec{k})
 \end{aligned} \right\} \quad (7.30)$$

## 7.2 Quantification canonique

La théorie est quantifiée en changeant les parenthèses de Poisson entre champs et moments canoniques en commutateurs entre opérateurs à temps égaux :

$$\left\{ \begin{array}{l} [A_\mu(t, \vec{x}), \pi^\nu(t, \vec{x}')] = i \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') \delta_\mu^\nu \\ [A_\mu(t, \vec{x}), A_\nu(t, \vec{x}')] = 0 \\ [\pi^\mu(t, \vec{x}), \pi^\nu(t, \vec{x}')] = 0 \end{array} \right. \quad (7.31)$$

Pour la théorie de Maxwell telle quelle, il y a un problème de consistance dans ces relations, dû au fait que  $\pi^0 = 0$  selon la (7.3), qui est une contrainte incompatible avec la première des (7.31). Il est possible de traiter cette contrainte de façon consistante, mais il est plus simple de passer directement à la théorie modifiée équivalente à la théorie dans la jauge de Lorentz. Dans ce cas,  $\pi^0 \neq 0$  selon la (7.9), et n'y a donc pas de problème. On trouve alors que le seul commutateur non-trivial est :

$$[A_\mu(t, \vec{x}), \partial^0 A_\nu(t, \vec{x}')] = -i \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') \eta_{\mu\nu} \quad (7.32)$$

En utilisant les équations (7.20), (7.21) et (7.22), on peut vérifier que les règles de commutation entre  $a$  et  $a^\dagger$  qui correspondent à ce résultat sont,

$$\left\{ \begin{array}{l} [a_r(\vec{k}), a_s^\dagger(\vec{k}')] = (2\pi)^3 2\omega_k \delta^3(\vec{k}-\vec{k}') (-\eta_{rs}) \\ [a_r(\vec{k}), a_s(\vec{k}')] = 0 \\ [a_r^\dagger(\vec{k}), a_s^\dagger(\vec{k}')] = 0 \end{array} \right. \quad (7.33)$$

Cette algèbre est l'algèbre d'une collection infinie d'oscillateurs bosoniques. Plus précisément, pour chaque  $\vec{k}$  il existe quatre oscillateurs harmoniques indépendants décrits par les opérateurs  $a_r(\vec{k})$  et  $a_r^\dagger(\vec{k})$ . Les opérateurs de densité de nombre d'occupation correspondants sont définis, pour chaque  $r=0,1,2,3$ , comme :

$$N_{ar} = \frac{1}{(2\pi)^3 2\omega_k} a_r^\dagger(\vec{k}) a_r(\vec{k}) \quad (7.34)$$

Les opérateurs satisfaisant l'algèbre de commutateurs ordinaire avec les opérateurs de destruction et de création :

$$\left\{ \begin{array}{l} [N_{ar}(\vec{k}), a_s(\vec{k}')] = -a_r(\vec{k}) \delta^3(\vec{k}-\vec{k}') (-\eta_{rs}) \\ [N_{ar}(\vec{k}), a_s^\dagger(\vec{k}')] = +a_r^\dagger(\vec{k}) \delta^3(\vec{k}-\vec{k}') (-\eta_{rs}) \\ [N_{ar}(\vec{k}), N_{as}(\vec{k}')] = 0 \end{array} \right. \quad (7.35)$$

L'Hamiltonien et la quantité de mouvement (7.25) peuvent être réécrits en fonction des  $N_{\alpha r}(\vec{k})$ . On trouve:

$$\begin{aligned} H &= -\frac{1}{2} \sum_{r=0}^3 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} \eta_{rr} \omega_k [a_r^\dagger(\vec{k}) a_r(\vec{k}) + a_r(\vec{k}) a_r^\dagger(\vec{k})] \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{r=0}^3 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} \eta_{rr} \omega_k [2a_r^\dagger(\vec{k}) a_r(\vec{k}) - (2\pi)^3 2\omega_k \delta^3(\vec{0}) (-\eta_{rr})] \\ &= \sum_{r=0}^3 \int d^3k \omega_k \left[ (-\eta_{rr}) N_{\alpha r}(\vec{k}) + \frac{1}{2} \delta^3(\vec{0}) \right] \end{aligned} \quad (7.36)$$

$$\begin{aligned} \vec{P} &= -\frac{1}{2} \sum_{r=0}^3 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} \eta_{rr} \vec{k} [a_r^\dagger(\vec{k}) a_r(\vec{k}) + a_r(\vec{k}) a_r^\dagger(\vec{k})] \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{r=0}^3 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} \eta_{rr} \vec{k} [2a_r^\dagger(\vec{k}) a_r(\vec{k}) - (2\pi)^3 2\omega_k \delta^3(\vec{0}) (-\eta_{rr})] \\ &= \sum_{r=0}^3 \int d^3k \vec{k} \left[ (-\eta_{rr}) N_{\alpha r}(\vec{k}) + \frac{1}{2} \delta^3(\vec{0}) \right] \end{aligned} \quad (7.37)$$

On trouve donc bien une collection d'oscillateurs harmoniques, quatre de type  $\alpha$  pour chaque  $\vec{k}$ , avec pulsations  $\omega_k$ . Les différents types d'oscillateurs sont distingués par la polarisation  $\xi$ . L'état fondamental a une énergie donnée par  $E_0 = 2 \int d^3k \omega_k \delta^3(\vec{0}) = +\infty$  et une quantité de mouvement  $\vec{P}_0 = 2 \int d^3k \vec{k} \delta^3(\vec{0}) = 0$ . Les états excités sont séparés par des multiples d'énergie et d'impulsion  $\omega_k$  et  $\vec{k}$  qui sont associées aux excitations des oscillateurs harmoniques.

Les résultats conduisent à l'interprétation physique des excitations harmoniques quantifiées avec des particules et des antiparticules :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_r^+(\vec{k}) : \text{créé une particule = antiparticule avec} \\ \quad \text{4-impulsion } p^\mu = (\omega_k, \vec{k}) \text{ et polarisation } \xi_r^\mu(\vec{k}) \\ a_r(\vec{k}) : \text{détruit une particule = antiparticule avec} \\ \quad \text{4-impulsion } p^\mu = (\omega_k, \vec{k}) \text{ et polarisation } \xi_r^\mu(\vec{k}) \end{array} \right. \quad (7.38)$$

Les états de la théorie peuvent être construits en procédant comme pour l'oscillateur bosonique et en imposant la contrainte de Lorentz. On obtient dans ce cas un espace de Fock à nombre indéfini.

Dans ce cas aussi, il convient de redéfinir toutes les observables par des constantes additives telles que la valeur moyenne de ces observables soit nulle dans le vide. Techniquement, ceci est réalisable comme avant en adoptant une procédure d'ordre normal, consistant à choisir l'ordre des opérateurs de telle façon que tous les opérateurs de création soient à gauche et tous les opérateurs de destruction à droite.



Pour la 4-impulsion  $P^\mu$ , en particulier, on obtient simplement :

$$\begin{aligned}
 :P^\mu: &= \sum_{r=0}^3 \int d^3\vec{k} k^\mu (-\eta_{rr}) N_{ar}(\vec{k}) \\
 &= \int d^3\vec{k} k^\mu [-N_{a0}(\vec{k}) + N_{a3}(\vec{k})] \\
 &\quad + \sum_{r=1}^2 \int d^3\vec{k} k^\mu N_{ar}(\vec{k})
 \end{aligned} \tag{7.39}$$

L'espace de Fock peut être construit de la façon standard, en définissant un état de vide qui est détruit par tous les opérateurs de destruction et des états excités obtenus en agissant avec les différents opérateurs de création. Dans ce cas, il y a toutefois plusieurs aspects délicats liés entre eux. Premièrement, on observe que comme conséquence du signe atypique dans les relations de commutations des  $a_r$ , l'espace de Fock a une métrique indéfinie, avec des états non seulement à norme positive, mais aussi à norme négative et à norme nulle. Les états à norme négative sont intolérables, vue l'interprétation probabiliste espérée par la théorie quantique. Les états à norme nulle sont tolérables, mais en quelque sorte irrelevant pour les prédictions physiques.

La définition d'un espace de Fock physiquement raisonnable est obtenue en imposant la contrainte (7.5) de Lorentz, qui est nécessaire pour que la théorie considérée soit effectivement équivalente à la théorie de Maxwell. Les états à norme négative sont alors jetés, et ceux à norme nulle sont identifiés avec l'ambiguïté irrelevante liée aux différents choix spécifiques de jauge de Lorentz, c'est-à-dire l'équation (7.6).

La condition (7.5) ne peut pas être imposée comme contrainte  $\partial_\mu A^\mu = 0$  sur les opérateurs  $A_\mu$ , car ceci serait incompatible avec les commutateurs canoniques (7.32). On remarque alors qu'il est en réalité suffisant de demander que cette contrainte soit satisfaite en valeur moyenne sur tous les états physiques gardés dans l'espace de Fock. Ceci veut dire

$$\langle 4 | \partial_\mu A^\mu | 4 \rangle = 0 \quad (7.40)$$

ce qui est le cas si la condition plus faible suivante est réalisée :

$$\partial_\mu A^{\mu(+) | 4 \rangle = 0 \quad (7.41)$$

Dans la base (7.17) pour les vecteurs de polarisation, celle condition algébrique que :

$$(a_0(\vec{k}) - a_3(\vec{k})) |4\rangle = 0 \quad (7.42)$$

Cette condition est trivialement satisfaite pour tout état ne contenant que des particules associées aux oscillateurs de types  $a_1$  et  $a_2$ , qui correspondent aux polarisations transverses  $\xi_1^\mu$  et  $\xi_2^\mu$ . Pour les états contenant des particules associées aux oscillateurs de types  $a_0$  et  $a_3$ , correspondants aux polarisations scalaires et longitudinales  $\xi_0^\mu$  et  $\xi_3^\mu$ , la condition (7.42) représente au contraire une restriction non triviale. Pour les états avec au plus une particule de chaque type, par exemple, on trouve que ceux du type  $(a_0^\dagger(\vec{k}) + a_3^\dagger(\vec{k})) |0\rangle$  sont liés par la contrainte (7.42), alors que ceux de type orthogonal  $(a_0^\dagger(\vec{k}) - a_3^\dagger(\vec{k})) |0\rangle$  la satisfont et sont donc gardés. Toutefois, il est facile de vérifier que la norme de ce type d'état est nulle. Plus en général, il est possible de démontrer que tout les états satisfaisant (7.42) avec un nombre non-nul de particules scalaires ou longitudinales ont nécessairement norme nulle.

Pour prouver cette affirmation, on peut considérer la base des états propres de l'opérateur nombre total de particules scalaires ou longitudinales, défini par l'expression :

$$\hat{N} = \int d^3k \left[ -N_{a_0}(\vec{k}) + N_{a_3}(\vec{k}) \right] \quad (7.43)$$

La valeur moyenne de cet opérateur doit être nulle sur tout état physique satisfaisant la condition (7.42). En effet, on calcule :

$$\begin{aligned} \langle 4 | \hat{N} | 4 \rangle &= \int d^3k \langle 4 | (-N_{a_0}(\vec{k}) + N_{a_3}(\vec{k})) | 4 \rangle \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} \langle 4 | (-a_0^\dagger(\vec{k}) a_0(\vec{k}) + a_3^\dagger(\vec{k}) a_3(\vec{k})) | 4 \rangle \\ &\stackrel{(7.42)}{=} 0 \end{aligned} \quad (7.44)$$

En particulier, pour un état propre de  $\hat{N}$  :

$$\hat{N} | \psi_{\vec{n}} \rangle = \vec{n} | \psi_{\vec{n}} \rangle \quad (7.45)$$

on obtient, si  $\vec{n} \neq 0$  :

$$\begin{aligned} \langle \psi_{\vec{n}} | \psi_{\vec{n}} \rangle &= \frac{\langle \psi_{\vec{n}} | \hat{N} | \psi_{\vec{n}} \rangle}{\vec{n}} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (7.46)$$

Il est possible de vérifier explicitement que l'addition de ce type d'états inélevants correspond à l'ambiguïté (7.6) liée aux changements de jauge de Lorenz.

La valeur moyenne des observables physiques qui sont invariantes sous changement de jauge doit être indépendante du contenu en oscillateurs non-physiques de type  $a_0$  et  $a_3$ , et dépendre seulement des oscillateurs physiques de types  $a_1$  et  $a_2$ . Pour la 4-impulsion, on vérifie facilement que ceci est bien le cas, comme conséquence de la condition (7.42). En effet, en procédant comme pour (7.44), on trouve facilement que :

$$\langle 4 | (-N_{a_0}(\vec{k}) + N_{a_3}(\vec{k})) | 4 \rangle = 0 \quad (7.47)$$

Ceci implique que

$$\langle 4 | : P^\mu : | 4 \rangle = \langle 4 | : P_{\text{phys}}^\mu : | 4 \rangle \quad (7.48)$$

avec :

$$: P_{\text{phys}}^\mu : = \sum_{\alpha=1}^2 \int d^3\vec{k} k^\mu N_{a_\alpha}(\vec{k}) \quad (7.49)$$

L'espace de Fock peut être construit en factorisant la partie liée aux oscillateurs physiques  $a_1$  et  $a_2$  et celle liée aux oscillateurs non physiques  $a_0$  et  $a_3$ . Voyons la première partie, qui est cruciale.

l'état correspondant au vide est

$$|0\rangle$$

(7.50)

et satisfait les propriétés ( $r=1,2$ )

$$a_r(\vec{k})|0\rangle = 0$$

(7.51)

On trouve donc :

$$:P^\mu : |0\rangle = 0|0\rangle$$

(7.52)

Les états à une particule ont la forme ( $r=1,2$ )

$$|k^{(r)}\rangle = a_r^\dagger(\vec{k})|0\rangle$$

(7.53)

Dans ce cas on a :

$$:P^\mu : |k^{(r)}\rangle = k^\mu |k^{(r)}\rangle$$

(7.54)

Les états à plusieurs particules ont la forme ( $r_i=1,2$ )

$$|k_1^{(r_1)} \dots k_n^{(r_n)}\rangle = a_{r_1}^\dagger(\vec{k}_1) \dots a_{r_n}^\dagger(\vec{k}_n)|0\rangle$$

(7.55)

Ces états sont complètement symétriques, comme il se doit pour des états bosoniques, et on a dans ce cas :

$$:P^\mu : |k_1^{(r_1)} \dots k_n^{(r_n)}\rangle = \left( \sum_{i=1}^n k_i^\mu \right) |k_1^{(r_1)} \dots k_n^{(r_n)}\rangle$$

(7.56)

Les états à énergie et impulsion définies ci-dessus sont normalisés d'un façon Lorentz-covariante. En choisissant

$$\langle 0|0\rangle = 1 \quad (7.57)$$

on trouve que :

$$\begin{aligned} \langle k_1^{(r_1)} \dots k_n^{(r_n)} | k_1^{(r_1)} \dots k_n^{(r_n)} \rangle &= \\ &= \langle 0 | \sum_{j_1, j_2} \prod_{i=1}^n [a_{r_i}(k_i), a_{r_i}^\dagger(k_i)] | 0 \rangle \\ &= \sum_{j_1, j_2} \prod_{i=1}^n \left[ (2\pi)^3 2\omega k_i \delta^3(k_i - k_i') \delta_{r_i, r_i'} \right] \end{aligned} \quad (7.58)$$

On peut alors construire des paquets d'onde du type :

$$|4_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} \sum_{r_i=1}^2 \int \prod_{i=1}^n \frac{d^3 \vec{k}_i}{(2\pi)^3 2\omega k_i} f(k_1^{(r_1)} \dots k_n^{(r_n)}) |k_1^{(r_1)} \dots k_n^{(r_n)}\rangle \quad (7.59)$$

Leur normalisation est, en appliquant (7.58), donnée par :

$$\langle 4_n | 4_n \rangle = \prod_{i=1}^n \sum_{r_i=1}^2 \int \frac{d^3 \vec{k}_i}{(2\pi)^3 2\omega k_i} |f(k_1^{(r_1)} \dots k_n^{(r_n)})|^2 \quad (7.60)$$

### 7.3 Propriétés des champs quantiques

Dans la théorie quantique obtenue par la procédure canonique de Heisenberg, les champs  $A_\alpha(x)$  sont des opérateurs qui dépendent du temps, comme requiert par la dynamique, tandis que les états sont indépendants du temps.

Les transformations de Poincaré sont réalisées de la façon usuelle. On trouve en particulier:

$$\left. \begin{aligned} & [P^\mu, A_\alpha(x)] = \hat{P}^\mu A_\alpha(x) \\ & [M^{\mu\nu}, A_\alpha(x)] = -(\hat{M}^{\mu\nu})_\alpha^\beta A_\beta(x) \end{aligned} \right\} \quad (7.61)$$

où:

$$\left. \begin{aligned} & \hat{P}^\mu = -i\partial^\mu \\ & \hat{M}^{\mu\nu} = i(x^\mu\partial^\nu - x^\nu\partial^\mu) \mathbb{1} + S_{MAX}^{\mu\nu} \quad \left( S_{MAX}^{\mu\nu} \right)_\alpha^\beta = -i(\eta^{\mu\beta}\delta_\alpha^\nu - \eta^{\nu\beta}\delta_\alpha^\mu) \end{aligned} \right\} \quad (7.62)$$

Les transformations correspondantes sont réalisées de la façon habituelle sur la théorie quantique:

$$\left. \begin{aligned} & |4\rangle \rightarrow |4'\rangle = U|4\rangle \\ & \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}' = U\mathcal{O}U^{-1}|4\rangle \end{aligned} \right\} \quad (7.63)$$



avec :

$$\left. \begin{array}{l} \text{translations : } U(\epsilon_\mu) = e^{-i\epsilon_\mu P^\mu} \\ \text{transf. Lorentz : } U(\omega_{\mu\nu}) = e^{\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu} M^{\mu\nu}} \end{array} \right\} \quad (7.64)$$

On peut vérifier que les générateurs  $P^\mu$  et  $M^{\mu\nu}$  ont bien une algèbre qui correspond à celle du groupe de Poincaré.

Le commutateur à temps et positions orbitales entre deux champs peut être calculé comme pour le champ de Klein-Gordon et est compatible avec le principe de causalité. En utilisant la décomposition (7.15) et l'algèbre (7.33), on trouve, pour les parties à fréquences positives et négatives :

$$\begin{aligned} [A_\alpha^{(\pm)}(x), A_\beta^{(\pm)}(x')] &= 0 \\ [A_\alpha^{(\pm)}(x), A_\beta^{(\mp)}(x')] &= i \Delta_{\text{MAX } \alpha\beta}^\pm(x-x') \end{aligned} \quad (7.65)$$

où :

$$\begin{aligned} \Delta_{\text{MAX } \alpha\beta}^\pm(x) &= -\eta_{\alpha\beta} \Delta_{\text{KA}}^\pm(x) \Big|_{m=0} \\ &= \mp i \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3 2\omega_k} (-\eta_{\alpha\beta}) e^{\mp i k \cdot x} \end{aligned} \quad (7.66)$$

Il suit que pour les champs complets :

$$[A_\alpha(x), A_\beta(x')] = i \Delta_{\text{MAX } \alpha\beta}(x) \quad (7.67)$$

avec :

$$\begin{aligned} \Delta_{\text{MAX } \alpha\beta}(x) &= \Delta_{\text{MAX } \alpha\beta}^+(x) + \Delta_{\text{MAX } \alpha\beta}^-(x) \\ &= -\eta_{\alpha\beta} \Delta u_\alpha(x) \Big|_{m=0} \\ &= - \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} (-\eta_{\alpha\beta}) \sin(kx) \end{aligned} \quad (7.68)$$

Les fonctions  $\Delta_{\text{MAX } \alpha\beta}^\pm(x)$  et  $\Delta_{\text{MAX } \alpha\beta}(x)$  se transforment comme la métrique sous transformations de Lorentz, vu qu'elles sont reliées par cette dernière aux fonctions  $\Delta_{\mu\alpha}^\pm(x)$  et  $\Delta_{\mu\alpha}(x)$  qui sont invariantes. On peut en fait écrire ces fonctions comme :

$$\left. \begin{aligned} \Delta_{\text{MAX } \alpha\beta}^+(x) &= \mp i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} (-\eta_{\alpha\beta}) \delta(k^2) \theta(\mp k_0) e^{\mp i k x} \\ \Delta_{\text{MAX } \alpha\beta}^-(x) &= -i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} (-\eta_{\alpha\beta}) \delta(k^2) \epsilon(k_0) e^{-i k x} \end{aligned} \right\} (7.69)$$

Il devient alors évident que ces fonctions satisfaisant l'équation du mouvement (7.8) :

$$\left. \begin{aligned} \square \Delta_{\text{MAX } \alpha\beta}^\pm(x) &= 0 \\ \square \Delta_{\text{MAX } \alpha\beta}(x) &= 0 \end{aligned} \right\} (7.70)$$

Comme ses analogues dans le cas de Klein-Gordon et de Dirac, la fonction  $\Delta_{MAX \psi_3}$  est nulle si son argument est un 4-vecteur de genre espace :

$$\Delta_{MAX \psi_3}(x) = 0 \quad \text{si } x^2 < 0 \quad (7.71)$$

Il suit que le commutateur de deux fonctions des champs à deux points  $x_1$  et  $x_2$  s'annule si  $x_1 - x_2$  est de genre espace, comme requiert par la microcausalité :

$$[f_1(A_\alpha(x_1)), f_2(A_\alpha(x_2))] = 0 \quad \text{si } (x_1 - x_2)^2 < 0 \quad (7.72)$$

La valeur moyenne d'une fonction des champs sur le vide peut être calculée en utilisant la définition du vide (7.51), impliquant :

$$A_\alpha^{(+)}(x) |0\rangle = 0 \quad (7.73)$$

ainsi que les relations de commutation covariantes (7.65). On trouve en particulier :

$$\langle 0 | A_\alpha(x) | 0 \rangle = 0 \quad (7.74)$$

et :

$$\begin{aligned}
 \langle 0 | A_\alpha(x) A_\beta(x') | 0 \rangle &= \langle 0 | A_\alpha^{(+)}(x) A_\beta^{(-)}(x') | 0 \rangle \\
 &= \langle 0 | [A_\alpha^{(+)}(x), A_\beta^{(-)}(x')] | 0 \rangle \\
 &= i \Delta_{\text{MAX} \alpha \beta}^+(x-x')
 \end{aligned} \tag{7.75}$$

$$\begin{aligned}
 \langle 0 | A_\beta(x') A_\alpha(x) | 0 \rangle &= \langle 0 | A_\beta^{(+)}(x') A_\alpha^{(-)}(x) | 0 \rangle \\
 &= \langle 0 | [A_\beta^{(+)}(x') A_\alpha^{(-)}(x)] | 0 \rangle \\
 &= -i \Delta_{\text{MAX} \alpha \beta}^-(x-x')
 \end{aligned} \tag{7.76}$$

On voit que tout fonctionne comme dans les cas de Klein-Gordon et de Dirac, mis à part le fait que le champ est réel, et que la structure du vide est compliquée par le fait qu'il y a une contrainte et une redondance dans la théorie.

On remarque à ce propos qu'en prenant les dérivées des (7.74), (7.75) et (7.76) on déduit que :

$$\langle 0 | \partial_\mu A^\mu(x) | 0 \rangle = 0 \tag{7.77}$$

mais :

$$\left\{ \begin{aligned}
 \langle 0 | \partial^\alpha A_\alpha(x) A_\beta(x') | 0 \rangle &= i \partial^\alpha \Delta_{\text{MAX} \alpha \beta}^+(x-x') \neq 0 \\
 \langle 0 | A_\beta(x') \partial^\alpha A_\alpha(x) | 0 \rangle &= i \partial^\alpha \Delta_{\text{MAX} \alpha \beta}^-(x-x') \neq 0
 \end{aligned} \right. \tag{7.78}$$

## 7.4 Propagateur

Pour étudier des processus d'interaction, il est utile de construire une fonction de Green pour la version (7.8) des équations de Maxwell dans la jauge de Lorentz considérée pour pour la quantification covariante de la théorie. Une telle fonction de Green doit satisfaire l'équation inhomogène correspondante à (7.8) avec une source localisée :

$$\square G_{\text{MAX } \alpha\beta}(x) = \delta^4(x) (-\eta_{\alpha\beta}) \quad (7.79)$$

Comme dans les cas précédents, il est possible d'obtenir ce type de propagateur comme valeur moyenne sur le vide d'un produit approprié de champs  $A_\alpha(x)$  et  $A_\beta(x')$ .

Comme avant, la prescription appropriée est de considérer le produit chronologique, consistant à ordonner les champs selon un ordre de temps décroissants, sans ajouter aucun signe non-baré pour les permutations.

On définit le propagateur de Feynman comme la quantité :

$$G_{\text{MAX } \alpha\beta}(x-x') = i \langle 0 | T(A_\alpha(x) A_\beta(x')) | 0 \rangle \quad (7.80)$$

Ceci donne :

$$\begin{aligned} G_{\text{MAX } \alpha\beta}(x-x') &= i \theta(t-t') \langle 0 | A_\alpha(x) A_\beta(x') | 0 \rangle + i \theta(t'-t) \langle 0 | A_\beta(x') A_\alpha(x) | 0 \rangle \\ &= -\theta(t-t') \Delta_{\text{MAX } \alpha\beta}^+(x-x') + \theta(t'-t) \Delta_{\text{MAX } \alpha\beta}^-(x-x') \\ &= (-\eta_{\alpha\beta}) G_{\text{KG}}(x-x') \Big|_{m=0} \\ &= i \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} (-\eta_{\alpha\beta}) e^{-i\omega_k(t-t')} \cos[k^2(\vec{x}-\vec{x}')] \quad (7.81) \end{aligned}$$

La fonction  $G_{\text{MAX } \alpha\beta}(x)$  peut être écrite de la façon suivante :

$$G_{\text{MAX } \alpha\beta}(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\eta_{\alpha\beta}}{k^2 + i\epsilon} e^{-ikx} \quad (7.82)$$

Comme dans les cas précédents, le facteur  $i\epsilon$  fixe une prescription pour traiter les singularités en  $k_0 = \pm \omega_k$ , et on peut vérifier en procédant comme pour les diagrammes de Klein-Gordon et de Dirac, en utilisant le théorème de Cauchy, que la (7.82) est bien équivalente à la (7.81).

La forme (7.82) montre clairement que le propagateur de Feynman vérifie l'équation (7.79) et représente donc bien une fonction de Green. Sa structure est semblable à celles rencontrées pour les théories de Klein-Gordon et de Dirac.

On remarque finalement qu'en utilisant le fait que les vecteurs de polarisation forment une base complète satisfaisant la relation :

$$\sum_{r=1}^4 \xi_{\alpha r}(\vec{k}) \xi_{\beta r}^*(\vec{k}) = \sum_{r=1}^4 \xi_{\alpha r}^*(\vec{k}) \xi_{\beta r}(\vec{k}) = \eta_{\alpha\beta} \quad (7.83)$$

on peut également récrire le propagateur (7.81) comme :

$$\begin{aligned} G_{\text{MAX } \alpha\beta}(x-x') &= -i\theta(t-t') \int \frac{d^3\vec{k}}{2\omega\vec{k}} \sum_{r=1}^4 \xi_{\alpha r}(\vec{k}) \xi_{\beta r}^*(\vec{k}) f(\vec{k}, x) f^*(\vec{k}, x') \\ &\quad - i\theta(t-t') \int \frac{d^3\vec{k}}{2\omega\vec{k}} \sum_{r=1}^4 \xi_{\alpha r}^*(\vec{k}) \xi_{\beta r}(\vec{k}) f^*(\vec{k}, x) f(\vec{k}, x') \\ &= -i\theta(t-t') \int d^3\vec{k} \sum_{r=1}^4 A_{\alpha r}^{(+)}(\vec{k}, x) A_{\beta r}^{(+)*}(\vec{k}, x') \\ &\quad - i\theta(t-t') \int d^3\vec{k} \sum_{r=1}^4 A_{\alpha r}^{(-)}(\vec{k}, x) A_{\beta r}^{(-)*}(\vec{k}, x') \quad (7.84) \end{aligned}$$

en fonction de la base orthonormale complète  
de solutions à l'équation homogène (7.8) :

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{\alpha r}^{(+)}(\vec{k}, x) = \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} \sum_{\alpha r}(\vec{k}) f(\vec{k}, x) \\ A_{\alpha r}^{(-)}(\vec{k}, x) = \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} \sum_{\alpha r}^*(\vec{k}) f^*(\vec{k}, x) \end{array} \right. \quad (7.85)$$



## 8 INTERACTIONS ET TRANSITIONS

### 8.1 Représentation d'interaction

L'évolution temporelle d'une théorie quantique est déterminée par une équation différentielle basée sur l'identification de l'hamiltonien  $H$  avec le générateur  $i\frac{d}{dt}$  des translations temporelles infinitésimales. Cette équation du premier degré peut être facilement intégrée. On trouve que l'évolution temporelle d'un temps  $t_0$  à un temps  $t$  arbitraire est déterminée par l'opérateur unitaire :

$$U(t-t_0) = e^{-i(t-t_0)H} \quad (8.1)$$

Il y a plusieurs façons équivalentes de réaliser cette évolution temporelle dans une théorie quantique, qui traitent de manières différentes les opérateurs et les états, mais donnent les mêmes valeurs moyennes observables. Ces différentes représentations diffèrent par des transformations unitaires.

Dans la représentation de Heisenberg, l'évolution temporelle est entièrement portée par les opérateurs, alors que les états sont indépendants du temps:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{O}_H(t) = U^\dagger(t-t_0) \mathcal{O}(t_0) U(t-t_0) \\ |\psi_H(t)\rangle = |\psi(t_0)\rangle \end{array} \right. \quad (8.2)$$

Les équations différentielles correspondantes sont facilement vérifiées être :

$$\left\{ \begin{array}{l} i \frac{d}{dt} \mathcal{O}_H(t) = [\mathcal{O}_H(t), H_H] \\ i \frac{d}{dt} |\psi_H(t)\rangle = 0 \end{array} \right. \quad (8.3)$$

où, étant donné que  $H$  ne dépend pas du temps :

$$H_H = H \quad (8.4)$$

En outre, on peut également déterminer facilement l'évolution temporelle entre deux temps arbitraires.

Étant donné que  $U(t_B-t_0) U^\dagger(t_0-t_A) = U(t_B-t_A)$ , on trouve facilement que

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{O}_H(t_B) = S_H^\dagger(t_B-t_A) \mathcal{O}_H(t_A) S_H(t_B-t_A) \\ |\psi_H(t_B)\rangle = |\psi_H(t_A)\rangle \end{array} \right. \quad (8.5)$$

avec :

$$S_H(t_B-t_A) = e^{-i(t_B-t_A)H_H} \quad (8.6)$$

Dans la représentation de Schrödinger, au contraire, l'évolution temporelle est entièrement portée par les états, alors que les opérateurs sont indépendants du temps :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{O}_S(t) = \mathcal{O}(t_0) \\ |\psi_S(t)\rangle = U(t-t_0) |\psi(t_0)\rangle \end{array} \right. \quad (8.7)$$

Les équations différentielles correspondantes sont facilement vérifiées être :

$$\left\{ \begin{array}{l} i \frac{d}{dt} \mathcal{O}_S(t) = 0 \\ i \frac{d}{dt} |\psi_S(t)\rangle = H_S |\psi_S(t)\rangle \end{array} \right. \quad (8.8)$$

où

$$H_S = H \quad (8.9)$$

Finalement, on peut facilement déterminer aussi l'évolution temporelle entre deux temps arbitraires.

Vu que  $U(t_B-t_0) U^\dagger(t_0-t_A) = U(t_B-t_A)$ , on trouve

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{O}_S(t_B) = \mathcal{O}_S(t_A) \\ |\psi_S(t_B)\rangle = S_S(t_B-t_A) |\psi_S(t_A)\rangle \end{array} \right. \quad (8.10)$$

avec :

$$S_S(t_B-t_A) = e^{-i(t_B-t_A)H_S} \quad (8.11)$$

Les représentations de Heisenberg et Schrödinger sont reliées par une transformation unitaire induite par l'opérateur  $V(t) = e^{-itH}$ . Elle sont utiles dans tous les cas où  $H$  peut être traité de façon exacte, comme par exemple les théories libres.

Pour ce qui concerne les théories de champs libres, la représentation la plus utile est celle de Heisenberg, utilisée jusqu'à présent. En effet, la dépendance temporelle des opérateurs est alors liée simplement à la dépendance du temps impliquée par les équations du mouvement des champs, alors que les états sont indépendants et caractérisent simplement le type de particules présentes et leurs caractéristiques.

Dans les cas où il n'est pas possible de traiter  $H$  de façon exacte, comme par exemple pour les théories en interaction, le mieux qu'on peut faire est d'utiliser une méthode de perturbation.

Cette méthode consiste à étudier la théorie en la développant en série de puissances d'un paramètre adimensionnel petit contrôlant la partie de l'Hamiltonien qui n'est pas exactement soluble. Il est alors possible de calculer ordre par ordre dans ce développement toutes les observables physique. Si la série converge, il est alors possible de déterminer les prédictions de la théorie avec une précision arbitrairement grande, en principe.

Considérons le cas d'une théorie décrite par un Hamiltonien de la forme :

$$H = H_0 + H_{int} \quad (8.12)$$

Où :

$$\left. \begin{array}{l} H_0 : \text{partie libre} \\ H_{int} : \text{interactions} \end{array} \right\} \quad (8.13)$$

Assumons ensuite que les interactions contiennent un paramètre de couplage  $\epsilon$  qui peut être traité comme petit, et qu'il soit sensé de développer la théorie en série en puissances de  $\epsilon$  et que cette série converge.

On peut alors considérer séparément les deux opérateurs d'évolution temporelle définis par les parties  $H_0$  et  $H_{int}$  de  $H$ :

$$U_0(t-t_0) = e^{-i(t-t_0)H_0} \quad (8.14)$$

$$U_{int}(t-t_0) = e^{-i(t-t_0)H_{int}} \quad (8.15)$$

On remarque que vu qu'en général  $H_0$  et  $H_{int}$  ne commutent pas, l'évolution temporelle (8.1) définie par le  $H$  total diffère du produit des évolutions temporelles (8.14) et (8.15) liées aux parties  $H_0$  et  $H_{int}$ . Il peut toutefois s'avérer très utile de réaliser l'une de ces deux évolutions partielles sur les états/opérateurs et la restante évolution sur les opérateurs/états.

Le type de représentation peut être construite en appliquant aux représentations de Heisenberg ou de Schrödinger des transformations unitaires basées sur des opérateurs du type  $V_0(t) = e^{-itH_0}$  ou  $V_{int} = e^{-itH_{int}}$ , de façon à séparer les rôles joués par  $H_0$  et  $H_{int}$ .

Dans la représentation d'interaction, l'évolution temporelle partielle déterminée par  $H_0$  est réalisée sur les opérateurs, alors que la restante évolution temporelle liée à  $H_{int}$  est au contraire réalisée sur les états :

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{O}_I(t) &= U_0^\dagger(t-t_0) \mathcal{O}(t_0) U_0(t-t_0) \\ |\psi_I(t)\rangle &= U_0^\dagger(t-t_0) U(t-t_0) |\psi(t_0)\rangle \end{aligned} \right\} \quad (8.16)$$

Les équations différentielles correspondantes sont simplement vérifiées être :

$$\left. \begin{aligned} i \frac{d}{dt} \mathcal{O}_I(t) &= [\mathcal{O}_I(t), H_{0I}] \\ i \frac{d}{dt} |\psi_I(t)\rangle &= H_{intI}(t) |\psi_I(t)\rangle \end{aligned} \right\} \quad (8.17)$$

avec :

$$H_{0I} = H_0 ; \quad H_{intI}(t) = e^{-i(t-t_0)H_0} H_{int}(t_0) e^{i(t-t_0)H_0} \quad (8.18)$$

Dans ce cas, il est moins banal de déterminer l'évolution temporelle entre deux temps arbitraires, étant donné que les différents  $U$ ,  $U_0$  et  $U_{int}$  ne commutent pas entre eux. Pour arriver au résultat, il est nécessaire de partir de la deuxième équation (8.17) et de l'intégrer.

On commence par intégrer cette équation de  $t_A$  à  $t_B$  pour écrire une équation intégrale :

$$|\psi(t_B)\rangle = |\psi(t_A)\rangle + (-i) \int_{t_A}^{t_B} dt H_{int}(t) |\psi(t)\rangle \quad (8.19)$$

On résoud ensuite formellement cette équation en utilisant itérativement la même équation dans la forme :

$$|\psi(t_i)\rangle = |\psi(t_A)\rangle + (-i) \int_{t_A}^{t_i} dt_{i+1} H_{int}(t_{i+1}) |\psi(t_{i+1})\rangle \quad (8.20)$$

dans le terme intégré de (8.19). On obtient de cette façon :

$$\begin{aligned} |\psi(t_B)\rangle &= |\psi(t_A)\rangle + (-i) \int_{t_A}^{t_B} dt_1 H_{int}(t_1) |\psi(t_1)\rangle \\ &= |\psi(t_A)\rangle + (-i) \int_{t_A}^{t_B} dt_1 H_{int}(t_1) |\psi(t_A)\rangle \\ &\quad + (-i)^2 \int_{t_A}^{t_B} dt_1 \int_{t_A}^{t_1} dt_2 H_{int}(t_1) H_{int}(t_2) |\psi(t_2)\rangle \\ &= |\psi(t_A)\rangle + (-i) \int_{t_A}^{t_B} dt_1 H_{int}(t_1) |\psi(t_A)\rangle \\ &\quad + (-i)^2 \int_{t_A}^{t_B} dt_1 \int_{t_A}^{t_1} dt_2 H_{int}(t_1) H_{int}(t_2) |\psi(t_A)\rangle \\ &\quad + (-i)^3 \int_{t_A}^{t_B} dt_1 \int_{t_A}^{t_1} dt_2 \int_{t_A}^{t_2} dt_3 H_{int}(t_1) H_{int}(t_2) H_{int}(t_3) |\psi(t_A)\rangle \\ &= \dots \end{aligned}$$



En itérant à l'infini et en jetant le "dernier" terme, on trouve finalement :

$$\begin{aligned}
 |4(t_B)\rangle &= \left( 1 + (-i) \int_{t_A}^{t_B} dt_1 H_{int}(t_1) + \frac{(-i)^2}{2!} \int_{t_A}^{t_B} dt_1 \int_{t_A}^{t_1} dt_2 H_{int}(t_1) H_{int}(t_2) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{(-i)^3}{3!} \int_{t_A}^{t_B} dt_1 \int_{t_A}^{t_1} dt_2 \int_{t_A}^{t_2} dt_3 H_{int}(t_1) H_{int}(t_2) H_{int}(t_3) \right. \\
 &\quad \left. + \dots \right) |4(t_A)\rangle \\
 &= \left( 1 + (-i) \int_{t_A}^{t_B} dt_1 H_{int}(t_1) + \frac{(-i)^2}{2!} \int_{t_A}^{t_B} dt_1 \int_{t_A}^{t_1} dt_2 T(H_{int}(t_1) H_{int}(t_2)) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{(-i)^3}{3!} \int_{t_A}^{t_B} dt_1 \int_{t_A}^{t_1} dt_2 \int_{t_A}^{t_2} dt_3 T(H_{int}(t_1) H_{int}(t_2) H_{int}(t_3)) \right. \\
 &\quad \left. + \dots \right) |4(t_B)\rangle \\
 &= T \left( e^{-i \int_{t_A}^{t_B} dt H_{int}(t)} \right) |4(t_B)\rangle \tag{8.71}
 \end{aligned}$$

finalement, on obtient donc :

$$\left. \begin{aligned}
 \} \mathcal{O}_I(t_B) &= S_{0I}^+(t_B - t_A) \mathcal{O}_I(t_A) S_{0I}(t_B - t_A) \\
 \} |4_I(t_B)\rangle &= S_{int I}(t_B - t_A) |4(t_A)\rangle
 \end{aligned} \right. \tag{8.72}$$

avec :

$$\left. \begin{aligned}
 \} S_{0I}(t_B - t_A) &= e^{-i(t_B - t_A) H_{0I}} \\
 \} S_{int I}(t_B - t_A) &= T \left[ e^{-i \int_{t_A}^{t_B} dt H_{int I}(t)} \right]
 \end{aligned} \right. \tag{8.73}$$

La représentation d'interaction est particulièrement utile au traitement des théories de champs en interaction. En effet, les opérateurs ont la même structure que dans le cas libre, avec les mêmes règles de commutation si l'hamiltonien ne contient pas de dérivées et ne modifie pas les moments canoniques. L'effet des interactions apparaît seulement de faire évoluer dans le temps les états de la théorie, et dans tous les problèmes où ces interactions sont actives seulement pendant un temps limité, leur effet est de faire évoluer les états libres présents avant en d'autres états libres présents après, c'est-à-dire d'induire des transitions entre états différents de particules libres. Ainsi, un processus de diffusion avec certaines particules initiales et certaines particules finales, asymptotiquement libres et interagissant significativement seulement durant la collision, peut être décrit exactement de la même façon qu'un processus de transition entre deux états d'un système stationnaire soumis à une perturbation externe adiabatiquement allumée puis éteinte.

## 8.2 Matrice de transition

Un processus de diffusion entre particules est caractérisé par un état initial constitué de particules libres éloignées entre elles, une collision entre ces particules durant laquelle elles interagissent et se transforment, et finalement un état final constitué de particules libres à nouveau éloignées entre elles.

$|i\rangle$  = état initial de particules libres

$|f\rangle$  = état final de particules libres (8.74)

Dans la représentation d'interaction, l'état du système en interaction est décrit par un état  $|4(t)\rangle$  évoluant dans le temps comme dicté par l'équation (8.73):

$|4(t)\rangle$  = état intermédiaire de particules  
en interaction (8.75)

L'évolution temporelle de cet état est déterminé par la relation (8.73). Elle est déterminé par la forme de l'Hamiltonien d'interaction  $H_I$ , et correspond à une transformation unitaire.

En particulier, la forme de l'état en  $t = +\infty$  est déterminée par la forme de l'état en  $t = -\infty$  par la relation :

$$| \psi(+\infty) \rangle = S | \psi(-\infty) \rangle \quad (8.76)$$

Où :

$$S = \mathcal{T} \left[ e^{-i \int_{-\infty}^{+\infty} dt H_{int}(t)} \right] \quad (8.77)$$

Cette opérateur peut être réécrit d'une façon encore plus utile en exprimant  $\int_{-\infty}^{+\infty} dt H_{int}(t)$  comme  $\int_{-\infty}^{+\infty} d^4x \mathcal{H}_{int}(x)$ , où  $\mathcal{H}_{int}$  est la densité d'Hamiltonien d'interaction, et en utilisant finalement le fait que  $\mathcal{H}_{int} = -\mathcal{L}_{int}$  si les moments canoniques ne sont pas affectés par le terme d'interaction. On trouve alors finalement :

$$S = \mathcal{T} \left[ e^{i \int d^4x \mathcal{L}_{int}} \right] \quad (8.78)$$

On peut démontrer que cette expression reste valable même dans le cas général où  $\mathcal{L}_{int}$  contient des dérivées.

Étant donné que  $|4(+\infty)\rangle$  et  $|4(-\infty)\rangle$  sont en réalité des états libres, il peuvent être décomposés sur une base complète de ce type d'états. L'opérateur  $S$  peut alors être interprété comme matrice de transition entre ce types d'états.

La probabilité de transition entre un état initial  $|i\rangle$  et un état final  $|f\rangle$  est donnée par l'élément correspondant de la matrice  $S$ :

$$S_{fi} = \langle f | S | i \rangle \quad (8.29)$$

L'unitarité de la matrice  $S$  s'écrit:

$$\sum_f |S_{fi}|^2 = 1 \quad (8.30)$$

Elle implique la conservation de la probabilité totale, dans le sens qu'un état initial  $|i\rangle$  à certaines probabilités partielles  $|S_{fi}|^2 < 1$  de produire chaque type d'état final  $|f\rangle$ , mais la probabilité totale de produire un quelconque de ces états est l'unité:  $\sum_i |S_{fi}|^2 = 1$ .

### 8.3 Théorème de Wick

Pour calculer la valeur de la probabilité associée à une certaine transition, on développe l'expression formelle (8.78) pour  $S$  en série de puissances du paramètre  $\epsilon$  qui contrôle les interactions. On définit l'élément de matrice  $S_{fi}$  comme série de puissance en  $\epsilon$ , et le terme d'ordre  $\epsilon^n$  est donné par la valeur d'expectation d'un produit chronologique de fonctionnels  $S$  int des champs calculée entre les états  $|i\rangle$  et  $|f\rangle$  puis intégrée. Cette valeur moyenne peut être calculée de façon algébrique dans la théorie libre, vu que les opérateurs et les états concernés ont la même structure que ceux de la théorie libre. La seule difficulté consiste à décomposer le produit chronologique. En fait, il existe une façon systématique de décomposer ce produit en termes de propagateur, qui porte le nom de Théorème de Wick

Pour des états initiaux et finaux  $|i\rangle$  et  $|f\rangle$  donnés, seulement certains termes dans le développement de la matrice  $S$  contribuent l'élément  $S_{fi} = \langle f|S|i\rangle$ . Plus précisément, pour obtenir une contribution non-nulle, le terme doit contenir un opérateur de destruction pour chaque particule qui apparaît en  $|i\rangle$  et pas en  $|f\rangle$ , et un opérateur de destruction pour chaque particule qui apparaît en  $|f\rangle$  mais pas en  $|i\rangle$ . En plus, il peut y avoir des paires d'opérateurs de création et de destruction d'un même type, qui correspondent à l'échange de particules virtuelles.

Un terme quelconque de  $S$  a la forme d'un produit chronologique d'opérateurs  $T$  pris à des points arbitraires sur lesquels on intègre ensuite. On assume dès le départ que  $T$  est pris dans l'ordre normal. Mais le produit chronologique de plusieurs de ces opérateurs n'est pas automatiquement dans un ordre normal, et sa valeur d'expectation entre  $\langle f|$  et  $|i\rangle$  est difficile à calculer. Pour rendre le calcul plus simple, il est très utile de commencer par décomposer cet objet en une somme de termes en ordre normal.

Voyons d'abord comment on peut décomposer un produit chronologique de champs en une somme de produits normaux de ces mêmes champs.

Dans le cas de deux champs  $\phi_1(x_1)$  et  $\phi_2(x_2)$ , cette décomposition est facile à faire. En partant des définitions de produit usuel et de produit normal écrite en termes des parties  $\phi_i^\pm(x_i)$  et  $\phi_2^\pm(x_2)$ , on a (signe supérieur/inferieur pour bosons/fermions):

$$\phi_1 \phi_2 = \phi_1^{(+)} \phi_2^{(+)} + \phi_1^{(+)} \phi_2^{(-)} + \phi_1^{(-)} \phi_2^{(+)} + \phi_1^{(-)} \phi_2^{(-)}$$

$$:\phi_1 \phi_2: = \phi_1^{(+)} \phi_2^{(+)} \pm \phi_2^{(-)} \phi_1^{(+)} + \phi_1^{(-)} \phi_2^{(+)} + \phi_1^{(-)} \phi_2^{(-)}$$

La différence entre ces deux quantités est :

$$\begin{aligned} \phi_1 \phi_2 - :\phi_1 \phi_2: &= \phi_1^{(+)} \phi_2^{(-)} \mp \phi_2^{(-)} \phi_1^{(+)} \\ &= [\phi_1^{(+)}, \phi_2^{(-)}]_{\mp} \\ &= \langle 0 | \phi_1 \phi_2 | 0 \rangle \end{aligned}$$

Il suit que :

$$\phi_1 \phi_2 = :\phi_1 \phi_2: + \langle 0 | \phi_1 \phi_2 | 0 \rangle \quad (8.32)$$

Le produit chronologique de  $\phi_1(x_1)$  et  $\phi_2(x_2)$  est lui défini comme :

$$T(\phi_1 \phi_2) = \theta(t_1 - t_2) \phi_1 \phi_2 \pm \theta(t_2 - t_1) \phi_2 \phi_1 \quad (8.33)$$



En utilisant la relation (8.33) et le fait que

$$:\phi_1 \phi_2: = \pm :\phi_2 \phi_1: \quad (8.34)$$

on obtient finalement :

$$\begin{aligned} T(\phi_1 \phi_2) &= \theta(t_1 - t_2) (:\phi_1 \phi_2: + \langle 0 | \phi_1 \phi_2 | 0 \rangle) \\ &\quad \pm \theta(t_2 - t_1) (:\phi_2 \phi_1: + \langle 0 | \phi_2 \phi_1 | 0 \rangle) \\ &= :\phi_1 \phi_2: + \langle 0 | T(\phi_1 \phi_2) | 0 \rangle \end{aligned} \quad (8.35)$$

Dans le cas de trois champs  $\phi_1(x_1)$ ,  $\phi_2(x_2)$  et  $\phi_3(x_3)$ , on peut procéder de la même façon. On commence par observer qu'en appliquant les définitions du produit usuel et du produit normal on a :

$$\begin{aligned} \phi_1 \phi_2 \phi_3 &= \phi_1^{(+)} \phi_2^{(+)} \phi_3^{(+)} + \phi_1^{(+)} \phi_2^{(+)} \phi_3^{(-)} + \phi_1^{(+)} \phi_2^{(-)} \phi_3^{(+)} + \phi_1^{(-)} \phi_2^{(+)} \phi_3^{(+)} \\ &\quad + \phi_1^{(+)} \phi_2^{(-)} \phi_3^{(-)} + \phi_1^{(-)} \phi_2^{(+)} \phi_3^{(-)} + \phi_1^{(-)} \phi_2^{(-)} \phi_3^{(+)} + \phi_1^{(-)} \phi_2^{(-)} \phi_3^{(-)} \\ :\phi_1 \phi_2 \phi_3: &= \phi_1^{(+)} \phi_2^{(+)} \phi_3^{(+)} + \phi_3^{(-)} \phi_1^{(+)} \phi_2^{(+)} \pm \phi_2^{(-)} \phi_1^{(+)} \phi_3^{(+)} + \phi_1^{(-)} \phi_2^{(+)} \phi_3^{(+)} \\ &\quad + \phi_2^{(-)} \phi_3^{(-)} \phi_1^{(+)} \pm \phi_1^{(-)} \phi_3^{(-)} \phi_2^{(+)} + \phi_1^{(-)} \phi_2^{(-)} \phi_3^{(+)} + \phi_1^{(-)} \phi_2^{(-)} \phi_3^{(-)} \end{aligned}$$

La différence entre ces quantités peut être calculée facilement en utilisant les règles de commutation ou d'anticommutation entre  $\phi_{i,j}^{(\pm)}$ .

On trouve :

$$\begin{aligned}
 \phi_1 \phi_2 \phi_3 - : \phi_1 \phi_2 \phi_3 : &= \left( \phi_1^{(+)} \phi_2^{(+)} \phi_3^{(-)} - \phi_3^{(-)} \phi_1^{(+)} \phi_2^{(+)} \right) + \left( \phi_1^{(+)} \phi_2^{(-)} - \phi_2^{(-)} \phi_1^{(+)} \right) \phi_3^{(+)} \\
 &\quad + \left( \phi_1^{(+)} \phi_2^{(-)} \phi_3^{(-)} - \phi_2^{(-)} \phi_3^{(-)} \phi_1^{(+)} \right) + \phi_1^{(-)} \left( \phi_2^{(+)} \phi_3^{(-)} - \phi_3^{(-)} \phi_2^{(+)} \right) \\
 &= \left[ \phi_1^{(+)} \phi_2^{(+)} , \phi_3^{(-)} \right] + \left[ \phi_1^{(+)} , \phi_2^{(-)} \right] \phi_3^{(+)} \\
 &\quad + \left[ \phi_1^{(+)} , \phi_2^{(-)} \phi_3^{(-)} \right] + \phi_1^{(-)} \left[ \phi_2^{(+)} , \phi_3^{(-)} \right] \\
 &= \left( \phi_1^{(+)} \left[ \phi_2^{(+)} , \phi_3^{(-)} \right] \pm \left[ \phi_1^{(+)} , \phi_3^{(-)} \right] \phi_2^{(+)} \right) + \left[ \phi_1^{(+)} , \phi_2^{(-)} \right] \phi_3^{(+)} \\
 &\quad + \left( \left[ \phi_1^{(+)} , \phi_2^{(-)} \right] \phi_3^{(-)} \pm \phi_2^{(-)} \left[ \phi_1^{(+)} , \phi_3^{(-)} \right] \right) + \phi_1^{(-)} \left[ \phi_2^{(+)} , \phi_3^{(-)} \right] \\
 &= \left( \phi_1^{(+)} + \phi_1^{(-)} \right) \left[ \phi_2^{(+)} , \phi_3^{(-)} \right] \pm \left( \phi_2^{(+)} + \phi_2^{(-)} \right) \left[ \phi_1^{(+)} , \phi_3^{(-)} \right] \\
 &\quad + \left( \phi_3^{(+)} + \phi_3^{(-)} \right) \left[ \phi_1^{(+)} , \phi_2^{(-)} \right] \\
 &= \phi_1 \langle 0 | \phi_2 \phi_3 | 0 \rangle \pm \phi_2 \langle 0 | \phi_1 \phi_3 | 0 \rangle \\
 &\quad + \phi_3 \langle 0 | \phi_1 \phi_2 | 0 \rangle
 \end{aligned} \tag{8.36}$$

Il suit que :

$$\begin{aligned}
 \phi_1 \phi_2 \phi_3 &= : \phi_1 \phi_2 \phi_3 : + \langle 0 | \phi_1 \phi_2 | 0 \rangle \phi_3 \\
 &\quad \pm \langle 0 | \phi_1 \phi_3 | 0 \rangle \phi_2 + \langle 0 | \phi_2 \phi_3 | 0 \rangle \phi_1
 \end{aligned} \tag{8.37}$$

Le produit chronologique de  $\phi_1(x_1)$ ,  $\phi_2(x_2)$  et  $\phi_3(x_3)$  est :

$$\begin{aligned}
 T(\phi_1 \phi_2 \phi_3) &= \theta(t_1 - t_2) \theta(t_2 - t_3) \phi_1 \phi_2 \phi_3 \pm \theta(t_2 - t_1) \theta(t_1 - t_3) \phi_2 \phi_1 \phi_3 \\
 &\quad + \theta(t_2 - t_3) \theta(t_3 - t_1) \phi_2 \phi_3 \phi_1 \pm \theta(t_3 - t_2) \theta(t_2 - t_1) \phi_3 \phi_2 \phi_1 \\
 &\quad + \theta(t_3 - t_1) \theta(t_1 - t_2) \phi_3 \phi_1 \phi_2 \pm \theta(t_1 - t_3) \theta(t_3 - t_2) \phi_1 \phi_3 \phi_2
 \end{aligned} \tag{8.38}$$

En utilisant la relation (8.37) et le fait que :

$$\begin{aligned} : \phi_1 \phi_2 \phi_3 : &= \pm : \phi_2 \phi_1 \phi_3 : = : \phi_2 \phi_3 \phi_1 : = \pm : \phi_3 \phi_2 \phi_1 : \\ &= \pm : \phi_3 \phi_1 \phi_2 : = \pm : \phi_1 \phi_3 \phi_2 : \end{aligned} \quad (8.39)$$

on obtient finalement :

$$\begin{aligned} T(\phi_1 \phi_2 \phi_3) &= \theta(t_1 - t_2) \theta(t_2 - t_3) \left( : \phi_1 \phi_2 \phi_3 : + \langle 0 | \phi_1 \phi_2 | 0 \rangle \phi_3 \right. \\ &\quad \left. \pm \langle 0 | \phi_1 \phi_3 | 0 \rangle \phi_2 + \langle 0 | \phi_2 \phi_3 | 0 \rangle \phi_1 \right) \\ &\quad \pm \theta(t_2 - t_1) \theta(t_1 - t_3) \left( : \phi_2 \phi_1 \phi_3 : + \langle 0 | \phi_2 \phi_1 | 0 \rangle \phi_3 \right. \\ &\quad \left. \pm \langle 0 | \phi_2 \phi_3 | 0 \rangle \phi_1 + \langle 0 | \phi_1 \phi_3 | 0 \rangle \phi_2 \right) \\ &\quad + \theta(t_2 - t_3) \theta(t_3 - t_1) \left( : \phi_2 \phi_3 \phi_1 : + \langle 0 | \phi_2 \phi_3 | 0 \rangle \phi_1 \right. \\ &\quad \left. \pm \langle 0 | \phi_2 \phi_1 | 0 \rangle \phi_3 + \langle 0 | \phi_3 \phi_1 | 0 \rangle \phi_2 \right) \\ &\quad \pm \theta(t_3 - t_2) \theta(t_2 - t_1) \left( : \phi_3 \phi_2 \phi_1 : + \langle 0 | \phi_3 \phi_2 | 0 \rangle \phi_1 \right. \\ &\quad \left. \pm \langle 0 | \phi_3 \phi_1 | 0 \rangle \phi_2 + \langle 0 | \phi_2 \phi_1 | 0 \rangle \phi_3 \right) \\ &\quad + \theta(t_3 - t_1) \theta(t_1 - t_2) \left( : \phi_3 \phi_1 \phi_2 : + \langle 0 | \phi_3 \phi_1 | 0 \rangle \phi_2 \right. \\ &\quad \left. \pm \langle 0 | \phi_3 \phi_2 | 0 \rangle \phi_1 + \langle 0 | \phi_1 \phi_2 | 0 \rangle \phi_3 \right) \\ &\quad \pm \theta(t_1 - t_3) \theta(t_3 - t_2) \left( : \phi_1 \phi_3 \phi_2 : + \langle 0 | \phi_1 \phi_3 | 0 \rangle \phi_2 \right. \\ &\quad \left. \pm \langle 0 | \phi_1 \phi_2 | 0 \rangle \phi_3 + \langle 0 | \phi_3 \phi_2 | 0 \rangle \phi_1 \right) \\ &= : \phi_1 \phi_2 \phi_3 : + \langle 0 | T(\phi_1 \phi_2) | 0 \rangle \phi_3 \\ &\quad \pm \langle 0 | T(\phi_1 \phi_3) | 0 \rangle \phi_2 + \langle 0 | T(\phi_2 \phi_3) | 0 \rangle \phi_1 \end{aligned} \quad (8.40)$$

Dans le cas général de  $n$  champs,  $\phi_1(x_1), \dots, \phi_n(x_n)$ , la forme de la décomposition peut être trouvée par induction. Le résultat est que le produit usuel peut être décomposé comme :

$$\begin{aligned} \phi_1 \phi_2 \dots \phi_n &= : \phi_1 \phi_2 \dots \phi_n : \\ &= \sum_{\text{perm.}} (-1)^{\text{perm.}} \langle 0 | \phi_1 \phi_2 | 0 \rangle : \phi_3 \dots \phi_n : \\ &\quad + \sum_{\text{perm.}} (-1)^{\text{perm.}} \langle 0 | \phi_1 \phi_2 | 0 \rangle \langle 0 | \phi_3 \phi_4 | 0 \rangle : \phi_5 \dots \phi_n : \\ &\quad + \dots \end{aligned} \tag{8.41}$$

Pour le produit chronologique, on obtient :

$$\begin{aligned} T(\phi_1 \dots \phi_n) &= : \phi_1 \phi_2 \dots \phi_n : \\ &\quad + \sum_{\text{perm.}} (-1)^{\text{perm.}} \langle 0 | T(\phi_1 \phi_2) | 0 \rangle : \phi_3 \dots \phi_n : \\ &\quad + \sum_{\text{perm.}} (-1)^{\text{perm.}} \langle 0 | T(\phi_1 \phi_2) | 0 \rangle \langle 0 | T(\phi_3 \phi_4) | 0 \rangle : \phi_5 \dots \phi_n : \\ &\quad + \dots \end{aligned} \tag{8.42}$$

Le résultat (8.42) permet de décomposer le produit chronologique d'un nombre arbitraire de champs  $\phi_i(x_i)$  en une somme de termes contenant seulement des produits normaux entre certains de ces champs, obtenus en faisant toutes les contractions possibles entre champs, définies par le propagateur de Feynman  $\langle 0 | T(\phi_i(x_i) \phi_j(x_j)) | 0 \rangle$ , avec un signe déterminé par le nombre de permutations de fermions ayant été nécessaires.

Il est possible d'étendre ce résultat au cas d'un produit chronologique de différents opérateurs  $\mathcal{O}_i(x_i)$  consistant eux-mêmes d'un produit normal de champs  $\phi_{ia}(x_i)$  au même point, de la forme :

$$\mathcal{O}_i(x_i) = : \phi_{i1}(x_i) \phi_{i2}(x_i) \dots \phi_{im_i}(x_i) : \quad (8.43)$$

Ceci est le cas relevant pour la simplification du calcul des éléments de la matrice  $S$ , où les opérateurs en jeu sont  $\mathcal{L}_{int}(x_i)$ , qui est assuré d'être dans l'ordre normal dès le début.

Le résultat représente le théorème de Wick et peut être obtenu de façon rapide et simple, même si peu rigoureuse. Le truc consiste à déformer chaque champ en déplaçant un peu le point où il est évalué, mais de façon opposée pour ses pentes à fréquence positive et négative. Plus précisément, au point de

$$\phi_{ia_i}(x_i) = \phi_{ia_i}^{(+)}(t_i, \vec{x}_i) + \phi_{ia_i}^{(-)}(t_i, \vec{x}_i) \quad (8.44)$$

et on le déforme en :

$$\phi_{ia_i}^\epsilon(x_i) = \phi_{ia_i}^{(+)}(t_i + \epsilon, \vec{x}_i) + \phi_{ia_i}^{(-)}(t_i - \epsilon, \vec{x}_i) \quad (8.45)$$

On a clairement :

$$\phi_{i_i}^\epsilon(x_i) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \phi_{i_i}^\epsilon(x_i) \quad (8.46)$$

L'avantage est toutefois que pour  $\epsilon \neq 0$ , le produit normal de champs définis pris au même point coïncide avec leur produit chronologique

$$: \phi_{i_1}^\epsilon \phi_{i_2}^\epsilon \dots \phi_{i_{m_i}}^\epsilon : = T(\phi_{i_1}^\epsilon \phi_{i_2}^\epsilon \dots \phi_{i_{m_i}}^\epsilon) \quad (8.47)$$

En prenant la limite  $\epsilon \rightarrow 0$  de cette équation, et en remarquant qu'elle commute avec l'opération d'ordre normal mais pas avec celle d'ordre chronologique, on trouve :

$$: \phi_{i_1} \phi_{i_2} \dots \phi_{i_{m_i}} : = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} T(\phi_{i_1}^\epsilon \phi_{i_2}^\epsilon \dots \phi_{i_{m_i}}^\epsilon) \quad (8.48)$$

Ceci nous permet de récrire les opérateurs (8.43) comme :

$$\mathcal{O}_i = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} T(\phi_{i_1}^\epsilon \phi_{i_2}^\epsilon \dots \phi_{i_{m_i}}^\epsilon) \quad (8.49)$$

Enfinement, on peut récrire le produit chronologique de différents  $\mathcal{O}_i(x_i)$ , avec des points  $x_i$  distincts, comme :

$$T(\mathcal{O}_1 \mathcal{O}_2 \dots \mathcal{O}_n) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} T \left[ \begin{array}{c} (\phi_{1_1}^\epsilon \phi_{1_2}^\epsilon \dots \phi_{1_{m_1}}^\epsilon) \dots \\ (\phi_{n_1}^\epsilon \phi_{n_2}^\epsilon \dots \phi_{n_{m_n}}^\epsilon) \end{array} \right] \quad (8.50)$$

Le membre de droite peut maintenant être décomposé en somme de produits normaux en utilisant le résultat (8.42) avant de prendre la limite  $\epsilon \rightarrow 0$ . Le seul effet de cette dernière limite est que les contracteurs sur les champs faisant partie d'un même opérateur  $\mathcal{O}_i(x_i)$  tendent alors à zéro, vu que dans cette limite on a, par la (8.47) :

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \langle 0 | T[\phi_{ia}^\epsilon \phi_{ib}^\epsilon] | 0 \rangle &= \langle 0 | : \phi_{ia} \phi_{ib} : | 0 \rangle \\ &= 0 \end{aligned} \tag{8.51}$$

Le résultat final est donc que la décomposition (8.42) peut être également appliquée au cas où chaque champ  $\phi_i(x_i)$  est remplacé par un opérateur  $\mathcal{O}_i(x_i)$  consistant d'un produit normal de champs  $\phi_{ia}(x_i)$ , avec comme seule prescription d'omettre les contracteurs à temps égaux :

$$\begin{aligned} T(\mathcal{O}_1 \mathcal{O}_2 \dots \mathcal{O}_n) &= T[(\phi_{11} \phi_{12} \dots \phi_{1m_1}) (\phi_{21} \phi_{22} \dots \phi_{2m_2}) \\ &\quad \dots (\phi_{n1} \phi_{n2} \dots \phi_{nm_n})] \\ &\quad (\text{sans contracteurs à temps égaux}) \end{aligned} \tag{8.52}$$

Le résultat (8.52) est la relation cruciale qui permet de décomposer chaque ordre de la matrice  $S$  comme une somme de termes en ordre normal. La valeur d'expectation de chacun de ces termes est alors facile à calculer, et est non-nulle seulement si les opérateurs de création et de destruction requis pour le type de transitions sont présents dans le terme en question. Plus précisément, l'opérateur peut contribuer à l'élément de matrice seulement s'il contient un opérateur de destruction pour chaque particule présente dans l'état initial mais pas dans l'état final, et un opérateur de création pour chaque particule présente dans l'état final mais pas l'état initial. En plus, il peut y avoir un certain nombre de propagateurs, qui représentent l'échange de particules virtuelles intermédiaires qui n'apparaissent ni dans l'état initial ni celui final.



## 8.4 Diagrammes de Feynman

Le calcul perturbatif des éléments de la matrice de transition  $S$  à l'aide du théorème de Wick peut être organisé de façon à faire émerger une série de règles très simple combinant sa structure. Les règles de Feynman permettent de donner une représentation graphique très utile du point de vue mnémotechnique du calcul perturbatif des amplitudes de transition, en termes de diagrammes de Feynman.

Pour illustrer le point, considérons d'abord de façon très schématisée un prototype de théorie contenant un champ  $\phi$  de type de matière et un champ  $A$  de type électromagnétique, avec une interaction entre les deux de type courant-potentiel :

$$\mathcal{L}_{int} = g : \phi \phi A : \quad (8.53)$$

Cette théorie peut être étudiée perturbativement à condition que le couplage  $g$ , dépendant de la charge, soit suffisamment petit.

Pour la discussion schématisée que nous allons faire, il est suffisant de prendre  $\phi$  et  $A$  tous deux réels et scalaires, avec des particules et antiparticules identifiées. Les développements en mode normaux de  $\phi$  et  $A$  peuvent alors être écrits comme :

$$\begin{cases} \phi(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} \left[ a(\vec{k}) e^{-ikx} + a^\dagger(\vec{k}) e^{ikx} \right] \\ A(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} \left[ c(\vec{k}) e^{-ikx} + c^\dagger(\vec{k}) e^{ikx} \right] \end{cases} \quad (8.54)$$

Les opérateurs de création et de destruction associés aux particules  $p$  et  $y$  des champs  $\phi$  et  $A$  sont  $a^\dagger, a$  et  $c^\dagger, c$  :

$$\begin{cases} p: \text{ particule du champ } \phi \\ \quad \text{créée par } a^\dagger \text{ et détruite par } a \\ y: \text{ particule du champ } A \\ \quad \text{créée par } c^\dagger \text{ et détruite par } c \end{cases} \quad (8.55)$$

Les états libres à une particule sont alors :

$$\begin{cases} |p(\vec{k})\rangle = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}} a^\dagger(\vec{k}) |0\rangle, \quad \langle p(\vec{k})| = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}} \langle 0| a(\vec{k}) \\ |y(\vec{k})\rangle = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}} c^\dagger(\vec{k}) |0\rangle, \quad \langle y(\vec{k})| = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}} \langle 0| c(\vec{k}) \end{cases} \quad (8.56)$$

Enfin, les propagateurs de Feynman des deux types de champs sont donnés par :

$$\left\{ \begin{aligned} \Delta_{\phi}(x-x') &= \langle 0 | T(\phi(x) \phi(x')) | 0 \rangle \\ &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ik(x-x')} \\ \Delta_A(x-x') &= \langle 0 | T(\phi(x) \phi(x')) | 0 \rangle \\ &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 + i\epsilon} e^{-ik(x-x')} \end{aligned} \right. \quad (8.57)$$

Avec ces définitions, considérons maintenant le développement perturbatif de la matrice de transition  $S$  :

$$\begin{aligned} S &= T e^{i \int d^4x \mathcal{L}_{int}(x)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} S_n \end{aligned} \quad (8.58)$$

Chaque terme contient un  $T$ -produit de plusieurs opérateurs  $\mathcal{L}_{int}(x)$  qui sont en ordre normal, et on peut tout d'abord utiliser le théorème de Wick pour simplifier ces expressions.

Le terme d'ordre  $g^0$  est banal

$$S_0 = \mathbb{1} \quad (8.59)$$

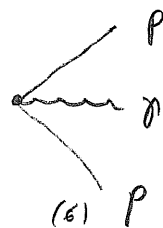
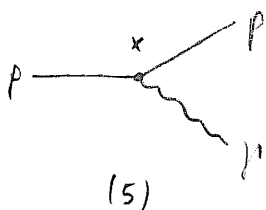
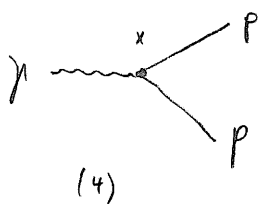
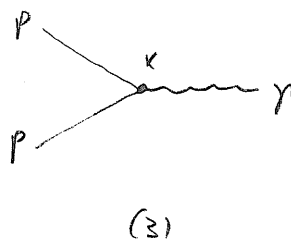
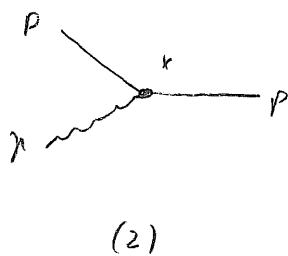
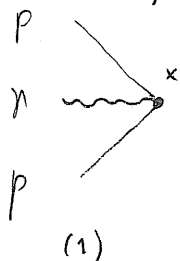
Le terme d'ordre  $g^1$  est le premier terme non-trivial, et il n'y a pas besoin de le réarranger, vu qu'il est déjà en ordre normal:

$$S_1 = i \int d^4x \mathcal{L}_{int}(x) = ig \int d^4x \phi(x) \phi(x) A(x) \tag{8.60}$$

Etant donné que chaque champ apparemment dans cet opérateur peut soit détruire une particule initiale soit créer une particule finale quand on l'évalue entre  $\langle f |$  et  $| i \rangle$ , il convient de décomposer chaque champ en deux parties de création et de destruction pour distinguer ces différentes possibilités. On trouve alors 6 types de termes:

$$S_1 = ig \int d^4x \left\{ \begin{aligned} &\phi^{(+)}(x) \phi^{(+)}(x) A^{(+)}(x) \\ &+ 2 \phi^{(-)}(x) \phi^{(+)}(x) A^{(+)}(x) \\ &+ A^{(-)}(x) \phi^{(+)}(x) \phi^{(+)}(x) \\ &+ \phi^{(-)}(x) \phi^{(-)}(x) A^{(+)}(x) \\ &+ 2 \phi^{(-)}(x) A^{(-)}(x) \phi^{(+)}(x) \\ &+ \phi^{(-)}(x) \phi^{(-)}(x) A^{(-)}(x) \end{aligned} \right\} = \sum_{a=1}^6 S_{1a} \tag{8.61}$$

Les processus auxquels les différents termes peuvent contribuer sont représentés graphiquement par les diagrammes suivants :



(8.62)

Le terme d'ordre  $g^2$  doit être décomposé en utilisant le théorème de Wick. On trouve :

$$\begin{aligned}
 S_2 &= \frac{i^2 g^2}{2!} \int d^4x \int d^4x' T(\mathcal{L}_{int}(x) \mathcal{L}_{int}(x')) \\
 &= \frac{i^2 g^2}{2!} \int d^4x \int d^4x' T(:\phi(x)\phi(x)A(x)::\phi(x')\phi(x')A(x')) \\
 &= \frac{i^2 g^2}{2!} \int d^4x \int d^4x' \left\{ \begin{aligned}
 &:\phi(x)\phi(x)A(x)\phi(x')\phi(x')A(x'): \\
 &+ 4 \Delta\phi(x-x') : \phi(x)A(x)\phi(x')A(x') : \\
 &+ \Delta A(x-x') : \phi(x)\phi(x)\phi(x')\phi(x') : \\
 &+ 2 \Delta\phi(x-x') \Delta\phi(x-x') : A(x)A(x') : \\
 &+ 4 \Delta\phi(x-x') \Delta A(x-x') : \phi(x)\phi(x') : \\
 &+ 2 \Delta\phi(x-x') \Delta\phi(x-x') \Delta A(x-x') \end{aligned} \right\}
 \end{aligned}$$

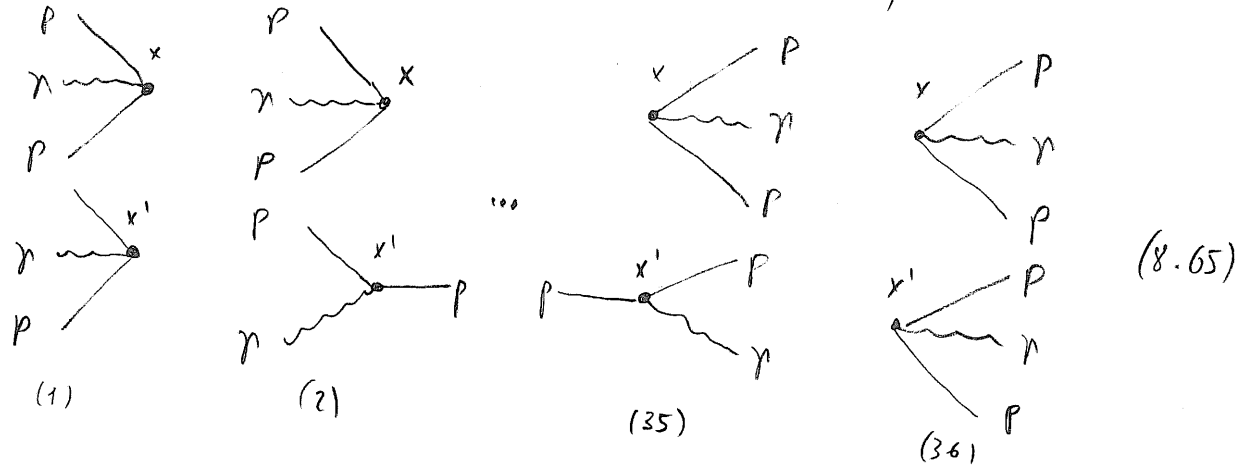
$$= \sum_{L=A}^F S_{2L}$$

(8.63)

Comme avant, pour déterminer les types de processus que chaque terme peut inclure, il convient de décomposer les drags en parties à fréquences positives et négatives et de développer explicitement les produits normaux. Pour le premier terme  $S_{2A}$ , on trouve simplement le produit de deux  $S_1$  en ordre normal, avec 36 termes :

$$\begin{aligned}
 S_{2A} &= \frac{i^{22}}{2!} \int d^4x \int d^4x' \left\{ \phi^{(+)}(x) \phi^{(+)}(x') A^{(+)}(x) \phi^{(+)}(x') \phi^{(+)}(x') A^{(+)}(x') \right. \\
 &\quad + 2 \phi^{(-)}(x') \phi^{(+)}(x) \phi^{(+)}(x) A^{(+)}(x) \phi^{(+)}(x') A^{(+)}(x') \\
 &\quad + \dots \\
 &\quad + 2 \phi^{(-)}(x) \phi^{(-)}(x) A^{(-)}(x) \phi^{(-)}(x') A^{(-)}(x') \phi^{(+)}(x') \\
 &\quad \left. + \phi^{(-)}(x) \phi^{(+)}(x) A^{(-)}(x) \phi^{(-)}(x') \phi^{(-)}(x') A^{(-)}(x') \right\} \\
 &= \sum_{\alpha=1}^{36} S_{2A\alpha} = \frac{1}{2} \sum_{a=1}^6 \sum_{b=1}^6 S_{1a} S_{1b} \tag{8.64}
 \end{aligned}$$

Les processus correspondants à ces termes sont donc toutes les combinaisons possibles de deux types de processus (8.62) - sans interférence :



Le deuxième terme  $S_{2B}$  contient 16 termes :

$$S_{2B} = \frac{i^2 g^2}{2!} \int d^4x \int d^4x' 4 \Delta(x-x')$$

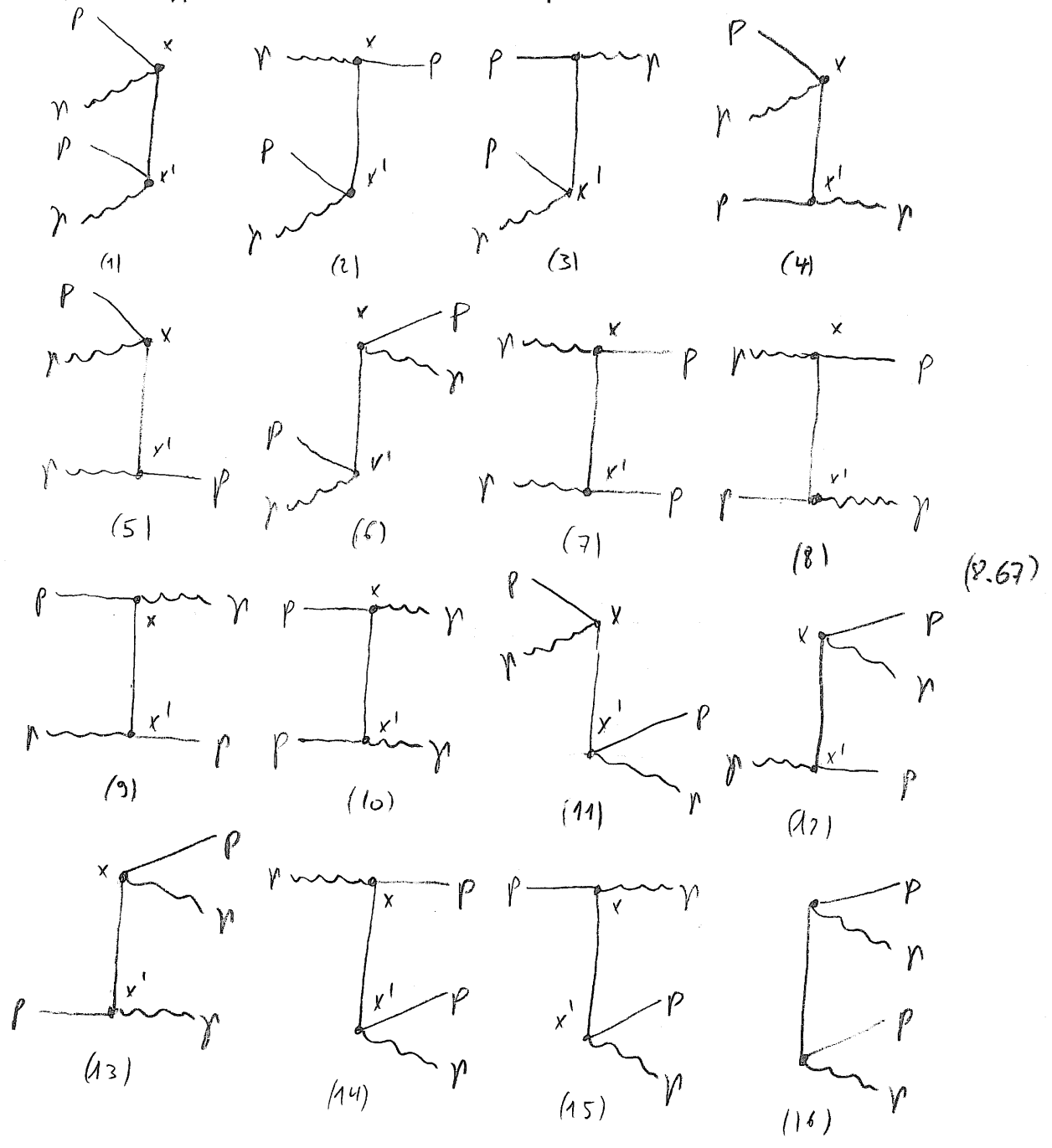
$$\left\{ \begin{aligned} & \phi^{(+)}(x) A^{(+)}(x) \phi^{(+)}(x') A^{(+)}(x') \\ & + \phi^{(-)}(x) A^{(-)}(x) \phi^{(+)}(x') A^{(+)}(x') \\ & + A^{(+)}(x) \phi^{(+)}(x) \phi^{(+)}(x') A^{(+)}(x') \\ & + \phi^{(-)}(x') \phi^{(+)}(x) A^{(+)}(x) A^{(+)}(x') \\ & + A^{(-)}(x') \phi^{(+)}(x) A^{(+)}(x) \phi^{(+)}(x') \\ & + \phi^{(-)}(x) A^{(-)}(x) \phi^{(+)}(x') A^{(+)}(x') \\ & + \phi^{(-)}(x) \phi^{(-)}(x') A^{(+)}(x) A^{(+)}(x') \\ & + \phi^{(-)}(x) A^{(-)}(x') A^{(+)}(x) \phi^{(+)}(x') \\ & + A^{(-)}(x) \phi^{(-)}(x') \phi^{(+)}(x) A^{(+)}(x') \\ & + A^{(-)}(x) A^{(-)}(x') \phi^{(+)}(x) \phi^{(+)}(x') \\ & + \phi^{(-)}(x') A^{(-)}(x') \phi^{(+)}(x) A^{(+)}(x) \\ & + \phi^{(-)}(x) A^{(-)}(x) \phi^{(-)}(x') A^{(+)}(x') \\ & + \phi^{(-)}(x) A^{(-)}(x) A^{(-)}(x') \phi^{(+)}(x') \\ & + \phi^{(-)}(x) \phi^{(-)}(x') A^{(-)}(x') A^{(+)}(x) \\ & + A^{(-)}(x) \phi^{(-)}(x') A^{(-)}(x') \phi^{(+)}(x) \\ & + \phi^{(-)}(x) A^{(-)}(x) \phi^{(-)}(x') A^{(-)}(x') \end{aligned} \right\}$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{16} S_{2B\alpha}$$

(8.66)

Les processus correspondants peuvent à nouveau être représentés par des diagrammes de Feynman.

Il correspondent à tous les diagrammes qui peuvent être obtenus en connectant deux diagrammes de type (8.62) par une particule  $p$  intermédiaire correspondant au propagateur  $\Delta\phi$  qui apparaît dans l'expression (8.66):

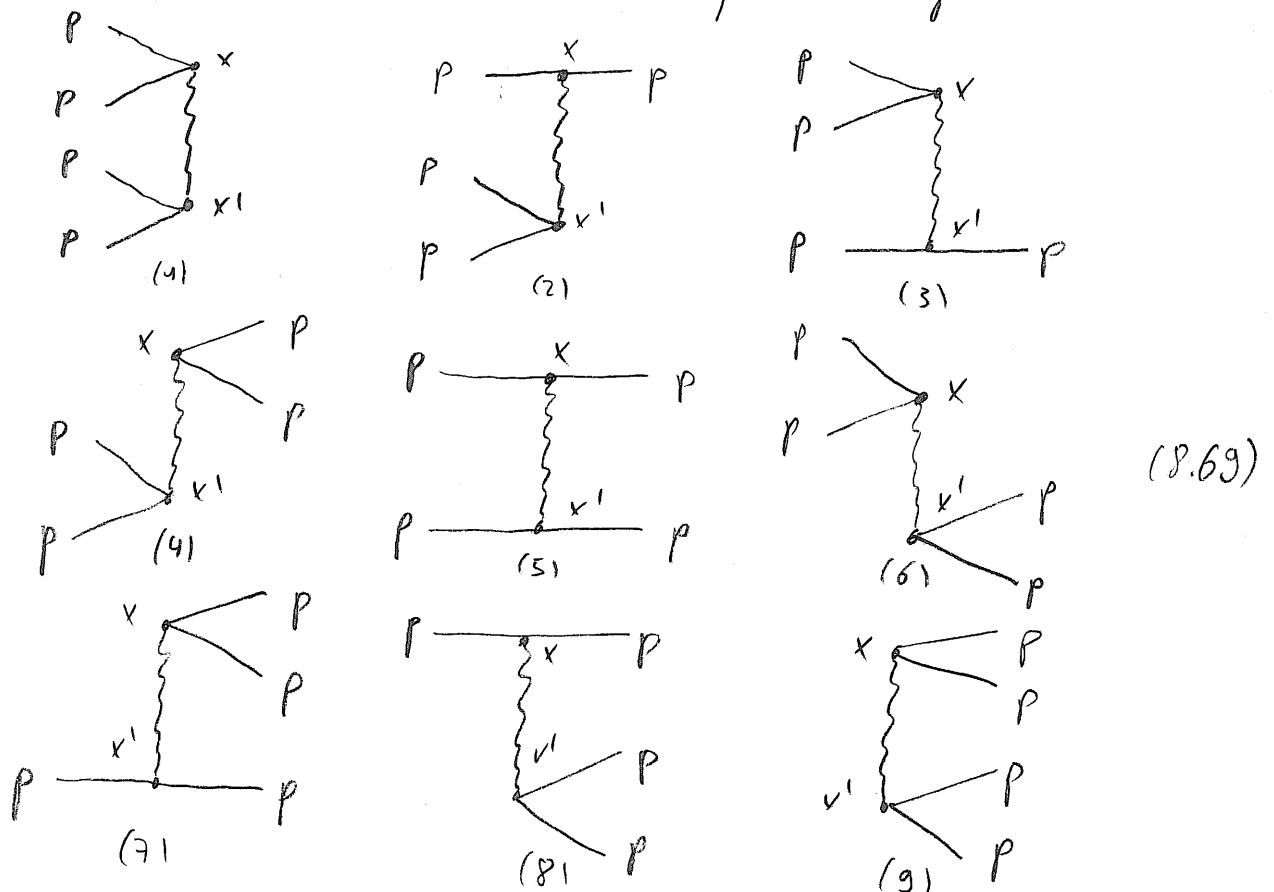




Le troisième type de terme  $S_{2c}$  contient 9 termes :

$$\begin{aligned}
 S_{2c} &= \frac{i^2 g^2}{2!} \int d^4x \int d^4x' \Delta_A(x-x') \\
 &\quad \left\{ \begin{aligned}
 &\phi^{(+)}(x) \phi^{(+)}(x) \phi^{(+)}(x') \phi^{(+)}(x') \\
 &+ 2 \phi^{(-)}(x) \phi^{(+)}(x) \phi^{(+)}(x') \phi^{(+)}(x') \\
 &+ 2 \phi^{(-)}(x') \phi^{(+)}(x) \phi^{(+)}(x) \phi^{(+)}(x') \\
 &+ \phi^{(-)}(x) \phi^{(-)}(x) \phi^{(+)}(x') \phi^{(+)}(x') \\
 &+ 4 \phi^{(-)}(x) \phi^{(-)}(x') \phi^{(+)}(x) \phi^{(+)}(x') \\
 &+ \phi^{(-)}(x') \phi^{(-)}(x') \phi^{(+)}(x) \phi^{(+)}(x) \\
 &+ 2 \phi^{(-)}(x) \phi^{(-)}(x) \phi^{(-)}(x') \phi^{(+)}(x') \\
 &+ 2 \phi^{(-)}(x) \phi^{(-)}(x') \phi^{(-)}(x') \phi^{(+)}(x) \\
 &+ \phi^{(-)}(x) \phi^{(-)}(x) \phi^{(-)}(x') \phi^{(-)}(x') \end{aligned} \right\} \\
 &= \sum_{\alpha=1}^9 S_{2c\alpha} \tag{8.68}
 \end{aligned}$$

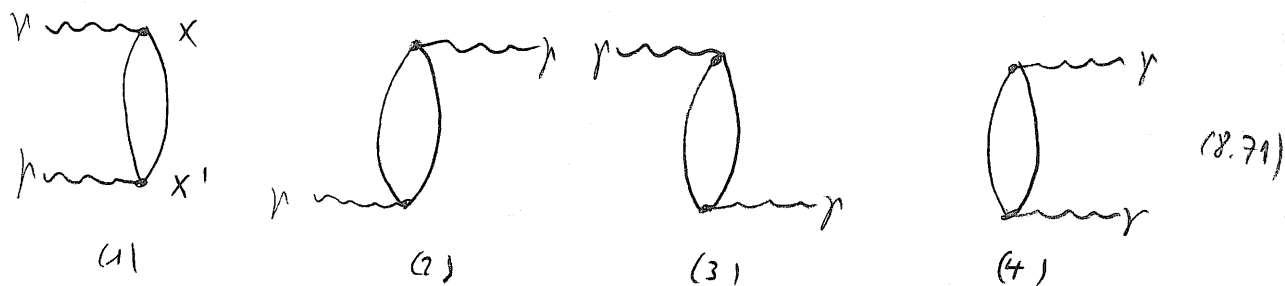
Les diagrammes correspondants sont tous ceux obtenus en connectant deux des (8.62) par un  $\gamma$  :



La quatrième type de terme  $S_{2D}$  contient 4 termes :

$$\begin{aligned}
 S_{2D} &= \frac{i^2 g^2}{2!} \int d^4x \int d^4x' 2 \Delta\phi(x-x') \Delta\phi(x-x') \\
 &\quad \left\{ A^{(+)}(x) A^{(+)}(x') + A^{(-)}(x) A^{(+)}(x') \right. \\
 &\quad \left. + A^{(-)}(x') A^{(+)}(x) + A^{(-)}(x) A^{(-)}(x') \right\} \\
 &= \sum_{\alpha=1}^4 S_{2D\alpha} \tag{8.70}
 \end{aligned}$$

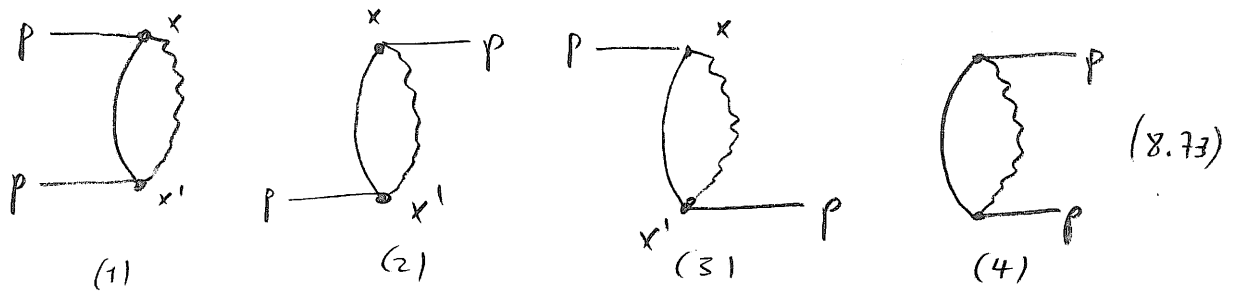
Les diagrammes correspondants sont tous ceux que l'on peut obtenir en connectant deux des (8.62) par deux  $p$  intermédiaires :



Le cinquième type de terme  $S_{2E}$  contient lui aussi 4 termes :

$$\begin{aligned}
 S_{2E} &= \frac{i^2 g^2}{2!} \int d^4x \int d^4x' 4 \Delta\phi(x-x') \Delta A(x-x') \\
 &\quad \left\{ \phi^{(+)}(x) \phi^{(+)}(x') + \phi^{(-)}(x) \phi^{(+)}(x') \right. \\
 &\quad \left. + \phi^{(-)}(x) \phi^{(+)}(x') + \phi^{(-)}(x) \phi^{(-)}(x') \right\} \\
 &= \sum_{\alpha=1}^4 S_{2E\alpha} \tag{8.72}
 \end{aligned}$$

Les diagrammes correspondants sont tous ceux qu'on peut obtenir en connectant deux des (8.62) par un  $p$  et un  $y$  intermédiaires :



Finalement, le dernier terme  $S_{2F}$  contient 1 seul terme :

$$S_{2F} = \frac{i^2 g^2}{2!} \int d^4x \int d^4x' 2 \Delta \phi(x-x') \Delta \phi(x-x') \Delta A(x-x') \quad (8.74)$$

Le diagramme correspondant est obtenu en joignant deux des diagrammes (8.62) par deux  $p$  et un  $y$  intermédiaires :



(8.75)

On découvre donc que le terme d'ordre  $g^2$  a une structure qui correspond à combiner tous les termes de l'ordre  $g^1$  par des propagateurs de particules virtuelles.

Les termes d'ordre  $g^3, g^4, \text{etc...}$  peuvent être analysés de façon identique, mais le nombre de termes augmente très rapidement. Le résultat est que pour tous ces termes aussi, la structure qu'on obtient correspond à combiner de toutes les façons possibles les termes d'ordre  $g^1$  en les joignant par des propagateurs associés à des particules virtuelles qui ne sont pas présentes dans les états externes.

Grâce à la diagrammatique de Feynman introduite ci-dessus, il est facile d'isoler directement le peu de termes de la matrice  $S$  qui peuvent contribuer à un certain processus donné à chaque ordre du développement perturbatif, sans avoir à recourir inutilement également les nombreux termes de  $S$  qui ne contribuent pas dans le cas en question. Ceci représente une simplification cruciale en rend les calculs plus systématiques, une fois établies certaines règles simples pour déterminer la valeur numérique de chaque terme.

## 8.5 Calcul des amplitudes

Une fois déterminés les diagrammes contribuant à un ordre donné à l'élément de matrice  $S$  qui est relevant pour un certain processus, les termes correspondants dans l'amplitude de transition peuvent être facilement calculés. Etant donné que tous les termes sont en ordre normal, la seule information nécessaire est l'action des parties à fréquences positives et négatives des champs sur les états libres asymptotiques et leurs conjugués. Dans le cas de figure considéré pour la description de la structure des diagrammes de Feynman, on a :

$$\begin{aligned}
 \phi^{(+)}(x) |p(\vec{k})\rangle &= \int \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3 2\omega_q} a(\vec{q}) e^{-iqx} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}} a^\dagger(\vec{k}) |0\rangle \\
 &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}} \int \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3 2\omega_q} e^{-iqx} [a(\vec{q}), a^\dagger(\vec{k})] |0\rangle \\
 &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}} e^{-ikx} |0\rangle \quad (8.76)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A^{(+)}(x) |p(\vec{k})\rangle &= \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3 2\omega_q} c(\vec{q}) e^{-iqx} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}} c^\dagger(\vec{k}) |0\rangle \\
 &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}} \int \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3 2\omega_q} e^{-iqx} [c(\vec{q}), c^\dagger(\vec{q})] |0\rangle \\
 &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}} e^{-ikx} |0\rangle \quad (8.77)
 \end{aligned}$$

et sur les états conjugués:

$$\bullet \langle p(\vec{k}) | \phi^{(-)}(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}} e^{ikx} \langle 0 | \tag{8.78}$$

$$\bullet \langle \gamma(k) | \phi^{(-)}(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}} e^{ikx} \langle 0 | \tag{8.79}$$

L'action de deux champs sur un état à deux particules peut être calculée de façon semblable.

On trouve :

$$\begin{aligned} \bullet \phi^{(+)}(x) \phi^{(+)}(x') | p(k_1) p(k_2) \rangle &= \prod_{i=1}^2 \left( \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_{k_i}}} \right) \int \frac{d^3 \vec{q}_1}{(2\pi)^3 2\omega_{q_1}} \int \frac{d^3 \vec{q}_2}{(2\pi)^3 2\omega_{q_2}} e^{-iq_1 x} e^{-iq_2 x'} \\ &\quad [a(\vec{q}_1) [a(\vec{q}_2), a^\dagger(\vec{k}_1) a^\dagger(\vec{k}_2)]] | 0 \rangle \\ &= \prod_{i=1}^2 \left( \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_{k_i}}} \right) (e^{-ik_1 x} e^{-ik_2 x'} + e^{-ik_2 x} e^{-ik_1 x'}) | 0 \rangle \tag{8.80} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet A^{(-)}(x) A^{(-)}(x') | \gamma(k_1) \gamma(k_2) \rangle &= \prod_{i=1}^2 \left( \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_{k_i}}} \right) \int \frac{d^3 \vec{q}_1}{(2\pi)^3 2\omega_{q_1}} \int \frac{d^3 \vec{q}_2}{(2\pi)^3 2\omega_{q_2}} e^{-iq_1 x} e^{-iq_2 x'} \\ &\quad [c(\vec{q}_1) [c(\vec{q}_2), c^\dagger(\vec{k}_1) c^\dagger(\vec{k}_2)]] | 0 \rangle \\ &= \prod_{i=1}^2 \left( \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_{q_i}}} \right) (e^{-ik_1 x} e^{-ik_2 x'} + e^{-ik_2 x} e^{-ik_1 x'}) | 0 \rangle \tag{8.81} \end{aligned}$$

et pour les conjugués :

$$\bullet \langle p(k_1) p(k_2) | \phi^{(-)}(x) \phi^{(-)}(x') = \prod_{i=1}^2 \left( \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_{q_i}}} \right) (e^{ik_1 x} e^{ik_2 x'} + e^{ik_2 x} e^{ik_1 x'}) \langle 0 | \tag{8.82}$$

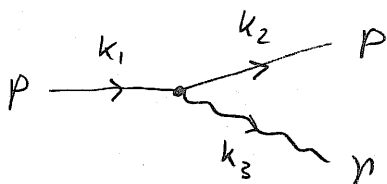
$$\bullet \langle \gamma(k_1) \gamma(k_2) | A^{(-)}(x) A^{(-)}(x') = \prod_{i=1}^2 \left( \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_{q_i}}} \right) (e^{ik_1 x} e^{ik_2 x'} + e^{ik_2 x} e^{ik_1 x'}) \langle 0 | \tag{8.83}$$

Les relations se généralisent facilement à l'action de  $n$  champs sur un état à  $n$  particules. Le résultat est simplement la somme sur toute les permutations possibles de fonctions exponentielles. Les relations permettent d'évaluer de façon banale la partie opérationnelle des éléments de matrice  $S$ , pour obtenir un résultat numérique de la forme d'une intégrale sur les positions  $x_i$  des vertex entre lesquels les propagateurs courent, ou, de façon équivalente, sur les impulsions  $k_i$  associées à leurs transformées de Fourier.

Pour les processus à l'ordre  $g^1$ , le calcul est banal. Par exemple, le processus  $p \rightarrow p + \gamma$  reçoit une contribution ajoutée au diagramme (5) des (8.62) donnée par

$$\begin{aligned} \langle p(k_2) \gamma(k_3) | S_{15} | p(k_1) \rangle &= \\ &= 2ig \prod_{i=1}^3 \left( \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega k_i}} \right) \int d^4x e^{-i(k_1 - k_2 - k_3)x} \\ &= 2ig \prod_{i=1}^3 \left( \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega k_i}} \right) (2\pi)^4 \delta^4(k_1 - k_2 - k_3) \end{aligned} \quad (8.84)$$

Le diagramme correspondant dans l'espace de Fourier est:



(8.85)

Des processus semblables, avec  $2p$  et  $1\gamma$  comme particules externes mais distribués de façons différentes entre état initial et final, reçoivent des contributions des autres diagrammes (8.62). Le résultat a toujours la même structure, avec une fonction  $\delta^4$  de Drac reflétant la conservation de la 4-impulsion dans le processus. On remarque toutefois que certains processus qui pourraient potentiellement être permis sont en fait interdits pour des raisons cinématiques, c'est-à-dire la conservation de la 4-impulsion et la contrainte de cône de masse pour chaque particule externe. Par exemple, les processus  $p+p+\gamma \rightarrow \text{rien}$  et  $\text{rien} \rightarrow p+p+\gamma$  associés aux diagrammes (1) et (6) sont interdits. On a aussi que les processus  $p+\gamma \rightarrow p$  et  $p+p \rightarrow \gamma$  associés aux diagrammes (2) et (3) seraient possibles seulement pour des choix exactement liés de 4-impulsions initiales, et sont donc irréalisables en pratique. Finalement, le processus  $\gamma \rightarrow p+p$  est interdit si la masse de  $\gamma$  est nulle alors que celle de  $p$  est non-nulle, par exemple.

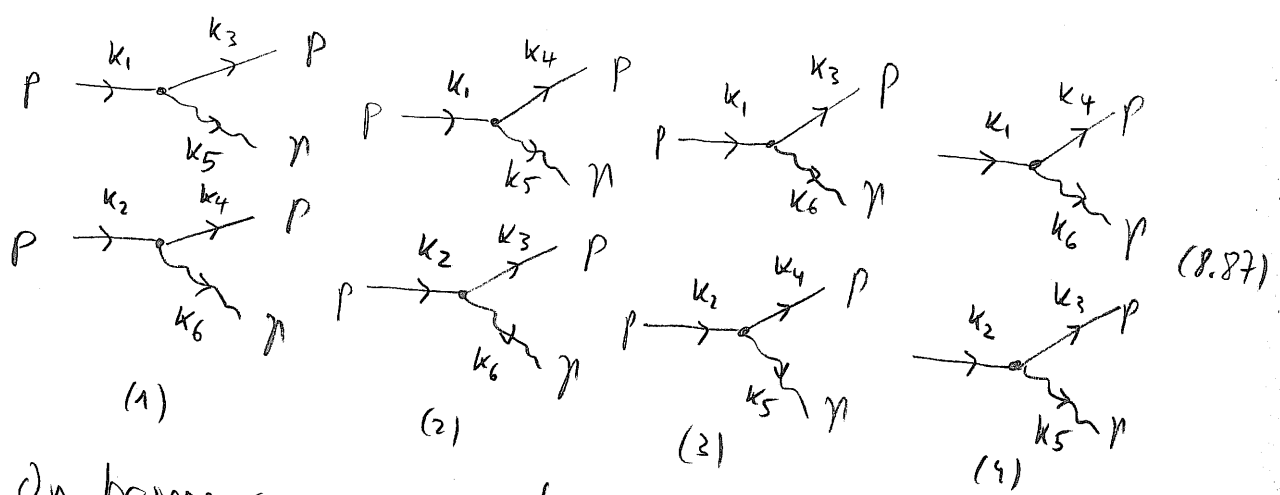


Pour les processus à l'ordre  $g^2$ , le calcul est moins banal mais toujours très simple. Considérons un exemple pour chacune des 6 catégories de diagrammes que nous avons catalogué.

Pour la catégorie A, on a supplément deux sub processus indépendents, et le calcul est à nouveau banal. Pour exemple, le processus  $p+p \rightarrow p+p+\gamma+\gamma$  reçoit une contribution du diagramme (29) des (8.65), correspondent à la combinaison de deux diagrammes (5) de (8.62) indépendents.

$$\begin{aligned}
 & \langle p(k_3) p(k_4) \gamma(k_5) \gamma(k_6) | S_{2A27} | p(k_1) \gamma(k_2) \rangle \\
 &= (2ig)^2 \prod_{i=1}^6 \left( \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_{k_i}}} \right) \int d^4x \int d^4x' \\
 & \quad \left\{ \begin{aligned} & e^{-i(k_1-k_3-k_5)x} e^{-i(k_2-k_4-k_6)x'} \\ & + e^{-i(k_1-k_4-k_5)x} e^{-i(k_2-k_3-k_6)x'} \\ & + e^{-i(k_1-k_3-k_6)x} e^{-i(k_2-k_4-k_5)x'} \\ & + e^{-i(k_1-k_4-k_6)x} e^{-i(k_2-k_3-k_5)x'} \end{aligned} \right\} \\
 &= (2ig)^2 \prod_{i=1}^6 \left( \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_{k_i}}} \right) (2\pi)^8 \\
 & \quad \sum_{p+q=3}^4 \sum_{r+s=5}^6 \delta^4(k_1-k_p-k_r) \delta^4(k_2-k_q-k_s) \quad (8.86)
 \end{aligned}$$

Les diagrammes associés aux 4 termes dans la somme, qui reflète la symétrie des états externes, dans l'espace de Fermi, sont donnés par les permutations suivantes :



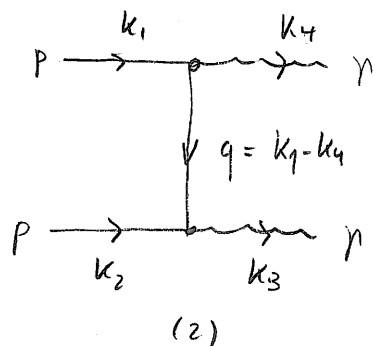
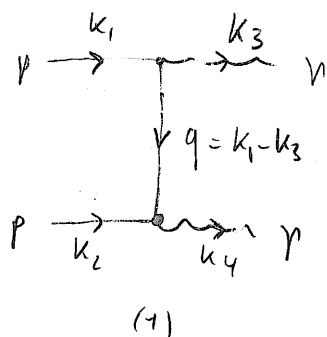
On trouve comme avant une fonction  $\delta^4$  de Dirac pour chaque vertex, reflétant la conservation de la 4-impulsion.

Pour la catégorie B, le calcul est différent et contient une nouveauté importante liée à la présence d'un propagateur, qui provient d'une contraction dans l'application du théorème de Wick. Prenons par exemple le processus  $p+p \rightarrow \pi+\pi$ . Ce processus reçoit une contribution du diagramme (10) des (8.67), qui correspond à l'échange d'un  $p$  virtuel.

On calcule:

$$\begin{aligned}
 & \langle \gamma(k_3) \gamma(k_4) | S_{2B10} | p(k_1) p(k_2) \rangle = \\
 & = (2ig)^2 \prod_{i=1}^4 \left( \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega k_i}} \right) \int d^4x \int d^4x' \Delta_\phi(x'-x) \\
 & \quad \left\{ e^{-i(k_1-k_3)x} e^{-i(k_2-k_4)x'} + e^{-i(k_1-k_4)x} e^{-i(k_2-k_3)x'} \right\} \\
 & = (2ig)^2 \prod_{i=1}^4 \left( \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega k_i}} \right) \int d^4x \int d^4x' \\
 & \quad \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{i}{q^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-iq(x'-x)} \\
 & \quad \left\{ e^{-i(k_1-k_3)x} e^{-i(k_2-k_4)x'} + e^{-i(k_1-k_4)x} e^{-i(k_2-k_3)x'} \right\} \\
 & = (2ig)^2 \prod_{i=1}^4 \left( \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega k_i}} \right) \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{i}{q^2 - m^2 + i\epsilon} \\
 & \quad \int d^4x \int d^4x' \left\{ e^{-i(k_1-k_3-q)x} e^{-i(k_2-k_4+q)x'} \right. \\
 & \quad \left. + e^{-i(k_1-k_4-q)x} e^{-i(k_2-k_3+q)x'} \right\} \\
 & = (2ig)^2 \prod_{i=1}^4 \left( \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega k_i}} \right) \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{i}{q^2 - m^2 + i\epsilon} \\
 & \quad (2\pi)^8 \left\{ \delta^4(k_1-k_3-q) \delta^4(k_2-k_4+q) \right. \\
 & \quad \left. + \delta^4(k_1-k_4-q) \delta^4(k_2-k_3+q) \right\} \\
 & = (2ig)^2 \prod_{i=1}^4 \left( \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega k_i}} \right) \left\{ \frac{i}{(k_1-k_3)^2 - m^2 + i\epsilon} + \frac{i}{(k_1-k_4)^2 - m^2 + i\epsilon} \right\} \\
 & \quad (2\pi)^4 \delta^4(k_1+k_2-k_3-k_4) \tag{8.88}
 \end{aligned}$$

Les diagrammes associés aux 2 termes de ce résultat, qui comme avant reflète la symétrie des états externes, sont donnés dans l'espace de Fermi par les deux permutations suivantes :



(8.89)

On trouve donc comme avant une fonction  $\delta^4$  de Drac pour chaque vertex, reflétant la conservation de la 4-impulsion. Ceci fixe la 4-impulsion de la particule virtuelle échangée en fonction des 4-impulsions des particules externes, et laisse une seule  $\delta^4$  de Drac reflétant la conservation de la 4-impulsion devant le processus complet.

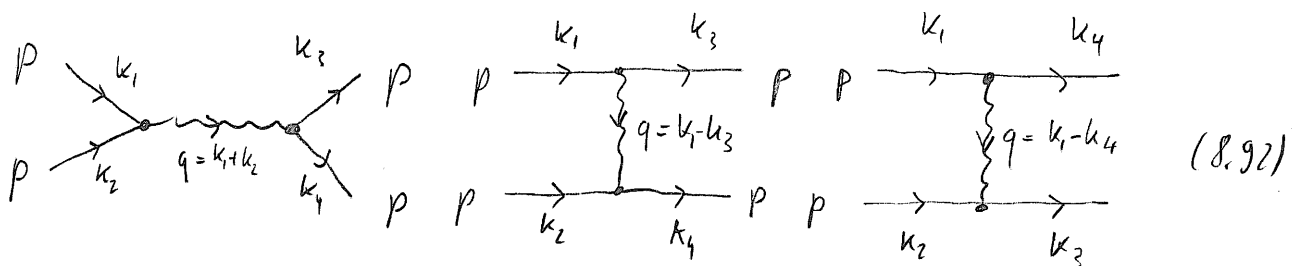
Pour la catégorie C, prenons par exemple le processus  $p+p \rightarrow p+p$ . Celui reçoit des contributions des diagrammes (4) et (6) des (8.69), qui donnent clairement le même résultat vu qu'ils se différencient que par une permutation des variables  $x$  et  $x'$  qui sont intégrées, et une contribution du diagramme (5) des (8.69), tous avec un  $\gamma$  virtuel.

On calcule facilement :

$$\begin{aligned}
 & \langle p(k_3) p(k_4) | S_{c4} + S_{c6} | p(k_1) p(k_2) \rangle = \\
 & = (2ig)^2 \prod_{i=1}^4 \left( \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_{k_i}}} \right) \int d^4x \int d^4x' \Delta_H(x'-x) \\
 & \quad e^{-i(k_1+k_2)x} e^{i(k_3+k_4)x'} \\
 & = (2ig)^2 \prod_{i=1}^4 \left( \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_{k_i}}} \right) \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{i}{q^2+i\epsilon} \\
 & \quad (2\pi)^8 \left\{ \delta^4(k_1+k_2-q) \delta^4(k_3+k_4-q) \right\} \\
 & = (2ig)^2 \prod_{i=1}^4 \left( \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_{k_i}}} \right) \frac{i}{(k_1+k_2)^2+i\epsilon} (2\pi)^4 \delta^4(k_1+k_2-k_3-k_4) \quad (8.90)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \langle p(k_3) p(k_4) | S_{c5} | p(k_1) p(k_2) \rangle = \\
 & = (2ig)^2 \prod_{i=1}^4 \left( \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_{k_i}}} \right) \int d^4x \int d^4x' \Delta_H(x'-x) \\
 & \quad \left. \begin{aligned} & e^{-i(k_1-k_3)x} e^{-i(k_2-k_4)x'} + e^{-i(k_1-k_4)x} e^{-i(k_2-k_3)x'} \end{aligned} \right\} \\
 & = (2ig)^2 \prod_{i=1}^4 \left( \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_{k_i}}} \right) \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{i}{q^2+i\epsilon} \\
 & \quad (2\pi)^8 \left\{ \delta^4(k_1-k_3-q) \delta^4(k_2-k_4+q) \right. \\
 & \quad \left. + \delta^4(k_1-k_4-q) \delta^4(k_2-k_3+q) \right\} \\
 & = (2ig)^2 \prod_{i=1}^4 \left( \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_{k_i}}} \right) \left\{ \frac{i}{(k_1-k_3)^2+i\epsilon} + \frac{i}{(k_1-k_4)^2+i\epsilon} \right\} (2\pi)^4 \delta^4(k_1+k_2-k_3-k_4) \quad (8.91)
 \end{aligned}$$

Les diagrammes correspondant dans l'espace de Feynman sont les suivants :



Pour la caligonne  $D$ , prenons par exemple le processus  $\gamma \rightarrow \gamma$ . Celui-ci reçoit des contributions identiques des diagrammes (2) et (3) des (8.71).

On trouve :

$$\begin{aligned}
 \langle \gamma(k_2) | (S_{202} + S_{203}) | \gamma(k_1) \rangle &= \\
 &= \frac{1}{2} (2ig)^2 \prod_{i=1}^2 \left( \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3} \omega k_i} \right) \int d^4x \int d^4x' \Delta\phi(x'-x) \Delta\phi(x-x') \\
 &\quad e^{-ik_1 x} e^{ik_2 x'} \\
 &= \frac{1}{2} (2ig)^2 \prod_{i=1}^2 \left( \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3} \omega k_i} \right) \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4q'}{(2\pi)^4} \frac{i}{q^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i}{q'^2 - m^2 + i\epsilon} \\
 &\quad (2\pi)^8 \delta^4(k_1 - q - q') \delta^4(k_2 - q - q') \\
 &= \frac{1}{2} (2ig)^2 \prod_{i=1}^2 \left( \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3} \omega k_i} \right) \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{i}{q^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i}{(k_1 - q)^2 - m^2 + i\epsilon} \\
 &\quad (2\pi)^4 \delta^4(k_1 - k_2) \tag{8.93}
 \end{aligned}$$

Le diagramme correspondant dans l'espace de Fermi est donné par :



$$\tag{8.94}$$

Dans ce cas, il reste une intégrale sur la 4-impulsion de l'une des particules virtuelles, qui n'est pas fixée par la conservation de la 4-impulsion.

Pour la catégorie E, prenons le processus  $p \rightarrow p$ . Celui-ci reçoit des contributions identiques des diagrammes (2) et (3) des (8.73). On trouve:

$$\begin{aligned}
 \langle p(k_2) | (S_{ZE2} + S_{ZE3}) | p(k_1) \rangle &= \\
 &= (2ig)^2 \prod_{i=1}^2 \left( \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega k_i}} \right) \int d^4x \int d^4x' \Delta\phi(x'-x) \Delta_A(x'-x) \\
 &\quad e^{-ik_1x} e^{ik_2x'} \\
 &= (2ig)^2 \prod_{i=1}^2 \left( \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega k_i}} \right) \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4q'}{(2\pi)^4} \frac{i}{q^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i}{q'^2 + i\epsilon} \\
 &\quad (2\pi)^8 \delta^4(k_1 - q - q') \delta^4(k_2 - q - q') \\
 &= (2ig)^2 \prod_{i=1}^2 \left( \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega k_i}} \right) \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{i}{q^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i}{(k_1 - q)^2 + i\epsilon} \\
 &\quad (2\pi)^4 \delta^4(k_1 - k_2) \tag{8.95}
 \end{aligned}$$

Le diagramme correspondant dans l'espace de l'impulsion est donné par:

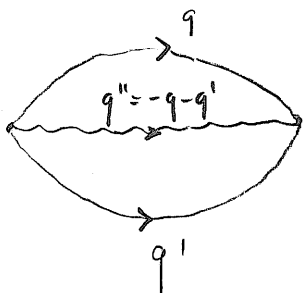


Comme dans le cas précédent, il reste une intégrale sur la 4-impulsion de l'une des particules virtuelles, qui n'est pas fixée par la conservation de la 4-impulsion.

Finalement, pour la contrainte  $F$ , le seul processus possible est le processus  $\text{nein} \rightarrow \text{nein}$ . Le diagramme (8.75) donne :

$$\begin{aligned}
 \langle 0 | S_{2F} | 0 \rangle &= \frac{1}{4} (2ig)^2 \int d^4x \int d^4x' \Delta\phi(x'-x) \Delta\phi(x'-x) \Delta_A(x'-x) \\
 &= \frac{1}{4} (2ig)^2 \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4q'}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4q''}{(2\pi)^4} \frac{i}{q^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i}{q'^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i}{q''^2 + i\epsilon} \\
 &\quad (2\pi)^8 \delta^4(q + q' + q'') \delta^4(q + q' + q'') \\
 &= \frac{1}{4} (2ig)^2 \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4q'}{(2\pi)^4} \frac{i}{q^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i}{q'^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i}{(q + q')^2 + i\epsilon} \\
 &\quad (2\pi)^4 \delta^4(0) \tag{8.97}
 \end{aligned}$$

Le diagramme correspondant dans l'espace de Fourier est donné par :



(8.98)

Dans ce cas, il reste des intégrales sur les 4-impulsions de deux des particules virtuelles, qui ne sont pas fixées par la conservation de la 4-impulsion. En outre, la fonction  $\delta^4$  de Dirac reflétant la conservation de la 4-impulsion est dans ce cas une constante infinie.



## 8.6 Règles de Feynman

Il apparaît très clairement des exemples traités que l'élément de matrice  $S$  correspondait à un certain diagramme à une structure qui est fixée de façon simple et unique. On peut alors formuler un ensemble de règles très simples permettant d'écrire immédiatement l'expression de l'amplitude à partir du diagramme.

Considérons les diagrammes pertinents, où le nombre de particules externes est non-nul et le diagramme est connexe, c'est-à-dire qu'il ne peut pas être subdivisé en sous-diagrammes disjoints. Dans ces cas, l'élément de matrice  $S$  a la forme universelle suivante :

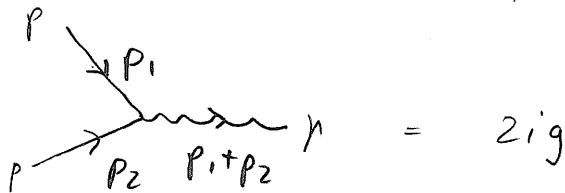
$$S_{fi} = (2\pi)^4 \delta^4(\sum_f k_f - \sum_i k_i) \prod_i \left( \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_{k_i}}} \right) \prod_f \left( \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_{k_f}}} \right) M_{fi} \quad (8.99)$$

où les indices  $i$  et  $f$  dans les sommes et les produits dénombrement respectivement les particules initiales et finales, et  $M_{fi}$  représente une amplitude Lorentz invariante :

$$M_{fi} = \text{amplitude de transition} \\ \text{Lorentz invariante} \quad (8.100)$$

Pour calculer  $M_{pi}$  à l'ordre  $n$  du développement perturbatif, on commence par dessiner tous les diagrammes topologiquement distincts qu'il est possible de construire en joignant  $n$  vertex de base par des particules virtuelles et laissant le juste nombre de particules initiales et finales requises. On évalue ensuite la contribution de chaque diagramme en suivant les règles suivantes :

- 1) On fixe les 4-impulsions  $k_i$  et  $k_f$  des particules externes, et on assigne des 4-impulsions  $q_\alpha$  aux particules virtuelles de la façon la plus générale possible compatible avec la conservation de la 4-impulsion à chaque vertex.
- 2) À chaque vertex on assigne un facteur  $2ig$  :



- 3) Pour chaque particule externe on impose la relation de couche de masse :

- particules initiales :  $k_i^2 = m_i^2$

- particules finales :  $k_f^2 = m_f^2$

- 4) A chaque particule virtuelle on assigne un propagateur approprié :

$$p \longrightarrow p \quad q_\alpha = \frac{i}{q_\alpha^2 - m^2 + i\epsilon}$$

$$p \rightsquigarrow p \quad q_\alpha = \frac{i}{q_\alpha^2 + i\epsilon}$$

- 5) On intègre sur toutes les 4-impulsions de particules virtuelles qui sont rotées libre, chacune avec un facteur  $(2\pi)^{-4}$  :

$$q_\alpha \text{ libre} \Rightarrow \int \frac{d^4 q_\alpha}{(2\pi)^4}$$

- 6) On divise le résultat par un facteur de symétrie donné par le nombre des permutations de vertex et de lignes internes qui le laissent la structure du diagramme inchangée :

$$\text{Groupe de symétrie d'ordre } S \Rightarrow \frac{1}{S}$$

On remarque que la différence cruciale entre les particules réelles externes et les particules virtuelles internes repose sur les valeurs que la 4-impulsion peut assumer. La distribution de  $p^2$  est :

$$\left. \begin{array}{l} \text{particule réelle :} \\ \text{particule virtuelle :} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \delta(p^2 - m^2) \\ \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \end{array}$$

## 9. QUANTITES OBSERVABLES ET CINEMATIQUE

### 9.1 Taux de transition efficace

Considérons un processus de diffusion géométrique avec un état initial  $|i\rangle$  composé de  $n_i$  particules  $\alpha_i$  avec impulsions  $p_i^\mu$ , et un état final  $|f\rangle$  composé de  $n_f$  particules  $\beta_f$  avec impulsions  $p_f^\mu$ :

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{n_i} \longrightarrow \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_{n_f} \quad (9.1)$$

L'amplitude de transition est donnée par l'élément de matrice  $S_{fi} = \langle f | S | i \rangle$  pour le processus en question. Par une normalisation arbitraire des états, de la forme  $|\vec{p}\rangle = \frac{N}{\sqrt{(2\pi)^3 2E}} a^\dagger(\vec{p}) |0\rangle$ , on trouve la forme générale:

$$S_{fi} = (2\pi)^4 S^4 (\sum_f p_f^\mu - \sum_i p_i^\mu) \prod_i \left( \frac{N}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_i}} \right) \prod_f \left( \frac{N}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_f}} \right) M_{fi} \quad (9.1)$$

La partie cinématique de cette amplitude est:

$$\left\{ \begin{array}{l} (2\pi)^4 S^4 (\sum_f p_f^\mu - \sum_i p_i^\mu) : \text{conservation de la 4-impulsion} \\ \frac{N}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_i}} : \text{normalisation de chaque état } \alpha_i \\ \frac{N}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_f}} : \text{normalisation de chaque état } \beta_f \end{array} \right. \quad (9.3)$$

La partie dynamique est au contraire:

$$M_{fi} = \text{amplitude lorentz-invariante} \quad (9.4)$$

Pour définir des quantités observables à partir de cette amplitude de transition, il convient de régulariser la théorie en la mettant dans une boîte de volume  $V$  avec des conditions aux bords périodiques pour les champs, et de limiter le temps à un intervalle fini  $T$ . Les nombres d'ondes  $\vec{p}$  et les pulsations  $E$  des ondes libres sont alors discrétisés :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{p} = \frac{2\pi}{V^{1/3}} \vec{n} \\ E = \sqrt{\frac{(2\pi)^2}{V^{2/3}} \vec{n}^2 + m^2} \end{array} \right. \quad (9.5)$$

Les correspondants fonctionnels  $\delta$  de Dirac deviennent des fonctions  $\delta$  de Kronecker multipliées par  $V$  ou  $T$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p}_1 - \vec{p}_2) = \int_V d^3x e^{i(\vec{p}_1 - \vec{p}_2) \cdot x} \\ \quad = V \delta_{\vec{n}_1, \vec{n}_2} \\ (2\pi) \delta(E_1 - E_2) = \int_T dt e^{-i(E_1 - E_2)t} \\ \quad = T \delta_{\vec{n}_1, \pm \vec{n}_2} \end{array} \right. \quad (9.6)$$

Il suit alors également que :

$$\left\{ \begin{array}{l} (2\pi)^3 \delta^3(\vec{0}) = V \\ (2\pi) \delta(0) = T \end{array} \right. \quad (9.7)$$

Dans un volume fini, il devient possible et il est physiquement opportun de normaliser de façon strictement canonique les états libres à une fonction  $\delta$  de Kronecker et non pas à une fonction  $\delta$  de Dirac.

Avec les conventions utilisées pour les états libres  $|\vec{p}\rangle = \frac{N}{\sqrt{(2\pi)^3 2E}} a^\dagger(\vec{p}) |0\rangle$  on trouve :

$$\begin{aligned} \langle \vec{p}_1 | \vec{p}_2 \rangle &= N^2 \delta^3(\vec{p}_1 - \vec{p}_2) \\ &= N^2 \frac{V}{(2\pi)^3} \delta_{\vec{n}_1, \vec{n}_2} \end{aligned} \quad (9.8)$$

Dans la limite de volume infini, la normalisation la plus simple était obtenue en prenant  $N=1$ . Mais pour un volume fini, il est préférable de prendre :

$$N = \sqrt{\frac{(2\pi)^3}{V}} \quad (9.9)$$

De cette façon, les états libres ont norme unitaire, et l'interprétation de probabilité devient plus simple à utiliser physiquement. Avec ce choix, on trouve finalement que l'amplitude de transition régularisée est donnée par :

$$S_{fi} = TV \int_{\vec{n}_i} \int_{\vec{n}_f} \Pi_i \left( \frac{1}{\sqrt{V 2E_i}} \right) \Pi_f \left( \frac{1}{\sqrt{V 2E_f}} \right) M_{fi} \quad (9.10)$$

Le taux de transition entre états initiaux et finaux exactement fixés est défini comme la probabilité de transition par unité de temps, et est donné par :

$$W_{fi} = \frac{|S_{fi}|^2}{T} \\ = TV^2 \delta_{\Sigma_i \vec{n}_i, \Sigma_f \vec{n}_f} \prod_i \left( \frac{1}{V 2E_i} \right) \prod_f \left( \frac{1}{V 2E_f} \right) |M_{fi}|^2 \quad (9.11)$$

En pratique, il est impossible de déterminer les états finaux de façon exacte. Le mieux qu'on puisse faire est de déterminer que l'impulsion de chaque particule finale est comprise entre  $\vec{p}_f$  et  $\vec{p}_f + d\vec{p}_f$ . Le nombre d'états quantiques distincts compris par cet interval est donné, toujours dans un volume fini  $V$ , par :

$$dN_f = \frac{d^3 \vec{p}_f}{(\Delta p_v)^3} = \frac{d^3 \vec{p}_f}{\left( \frac{2\pi}{V^{1/3}} \right)^3} \\ = V \frac{d^3 \vec{p}_f}{(2\pi)^3} \quad (9.12)$$

On définit alors le taux de transition différentiel comme comme le taux de transition (9.11) multiplié par  $\prod_f dN_f$  :

$$d\Gamma_{fi} = W_{fi} \prod_f dN_f \\ = TV^2 \delta_{\Sigma_i \vec{n}_i, \Sigma_f \vec{n}_f} \prod_i \left( \frac{1}{V 2E_i} \right) \prod_f \left( \frac{d^3 \vec{p}_f}{(2\pi)^3 2E_f} \right) |M_{fi}|^2 \quad (9.13)$$

Finalement, pour arriver à une grandeur qui soit vraiment concrètement mesurable, il est nécessaire de tenir compte de la valeur du flux relatif de particules incidentes. La définition précise de ce flux dépend du nombre de particules initiales, mais dimensionnellement il prend la forme :

$$F_i = \left( \frac{v_{rel}}{V} \right)^{n_i-1} \tag{9.14}$$

On peut alors définir un taux efficace de transition différentiel en divisant le taux de transition différentiel (9.13) par le flux initial (9.14) :

$$d\Sigma_{fi} = \frac{d\Gamma_{fi}}{F_i} = TV \int_{\Sigma_i \vec{n}_i, \Sigma_f \vec{n}_f} \frac{1}{v_{rel}^{n_i-1} \pi_i Z E_i} \prod_f \left( \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3 2E_f} \right) |\mathcal{M}_{fi}|^2 \tag{9.15}$$

On remarque enfin que la quantité (9.15) a une limite bien définie pour  $V, T \rightarrow \infty$ . En effet, la seule dépendance de  $VT$  est celle requise pour transformer  $\int_{\Sigma_i \vec{n}_i, \Sigma_f \vec{n}_f}$  en  $(2\pi)^4 \delta^4(\Sigma_f p_f^\mu - \Sigma_i p_i^\mu)$ . En fait, en utilisant les (9.6) on trouve :

$$TV \int_{\Sigma_i \vec{n}_i, \Sigma_f \vec{n}_f} = (2\pi)^4 \delta^4(\Sigma_f p_f^\mu - \Sigma_i p_i^\mu) \tag{9.16}$$



Le résultat final pour le taux efficace de transition différentiel prend alors la forme :

$$d\Sigma_{fi} = \frac{|M_{fi}|^2}{D_i} dQ_f \quad (9.17)$$

Où :

$$\left\{ \begin{array}{l} \cdot |M_{fi}|^2 = \text{amplitude Lorentz invariante} \\ \quad \text{dépendant des interactions} \\ \cdot D_i = v_{rel}^{n_i-1} \prod_i 2\omega_{k_i} \\ \quad = \text{facteur de flux initial} \\ \cdot dQ_f = \prod_f \left( \frac{d^3\vec{p}_f}{(2\pi)^3 2E_f} \right) (2\pi)^4 \delta^4(\sum_f \vec{p}_f - \sum_i \vec{p}_i) \\ \quad = \text{espace des phases Lorentz invariant} \end{array} \right. \quad (9.18)$$

## 9.2 Cinématique

Le taux efficace de transition différentiel (9.17) dépend en général du référentiel, comme les détails de la cinématique du processus. Il est donc nécessaire de choisir un référentiel particulier pour décrire le processus.

Le premier référentiel particulier qui est très utile est le référentiel du centre de masse, celui-ci est défini par rapport aux particules de l'état initial.

Il est défini comme le référentiel où l'impulsion spatiale totale des particules incidentes est nulle :

$$\text{CM : } \vec{P}_{\text{init.}} = \sum_i \vec{p}_i = 0 \quad (9.19)$$

Un autre référentiel particulier qui est très utile est le référentiel du laboratoire. Celui-ci est défini par rapport à une des particules de l'état initial. Il est défini comme le référentiel où l'impulsion spatiale de l'une des particules initiales est nulle :

$$\text{LAB : } \vec{p}_i = 0 \text{ pour un certain } i \quad (9.20)$$

Ces deux référentiels n'existent pas toujours. Pour déterminer les conditions sous lesquelles ils existent, on commence par remarquer que le produit entre les 4-impulsions de deux des particules initiales satisfait :

$$\begin{aligned} p_i \cdot p_j &= E_i E_j - \vec{p}_i \cdot \vec{p}_j = \sqrt{\vec{p}_i^2 + m_i^2} \sqrt{\vec{p}_j^2 + m_j^2} - \vec{p}_i \cdot \vec{p}_j \\ &\geq \sqrt{\vec{p}_i^2 + m_i^2} \sqrt{\vec{p}_j^2 + m_j^2} - |\vec{p}_i| |\vec{p}_j| \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

$$[ = 0 \text{ seulement si } m_i = m_j = 0 \text{ et } \vec{p}_i \parallel \vec{p}_j ]$$

Pour le référentiel du CM, on note que :

$$P_{\text{init}}^2 = (\sum_i p_i)^2 = \sum_i p_i^2 + \sum_{i \neq j} p_i p_j$$

$$\geq \sum_i m_i^2$$

Le référentiel du CM existe si cette quantité est positive et  $P_{\text{init}}^M$  est donc de genre temps. Ceci est le cas si les  $m_i$  ne sont pas toutes nulles.

Pour le référentiel du LAB, on considère :

$$P_i^2 = m_i^2$$

Le référentiel du LAB existe si cette quantité est positive et  $P_i^M$  est de genre temps. Ceci est le cas si  $m_i \neq 0$ .

Le nombre de variables nécessaires à décrire un processus est évidemment le même dans tous les référentiels. Il est déterminé par le nombre de produits  $p_\alpha p_\beta$  entre 4-impulsions externes qui ne sont pas fixés par les conditions de couche de masse et par la loi de conservation de la 4-impulsion. La représentation de ces variables, elle, dépend toujours du référentiel qui est choisi pour décrire le processus dans ses détails.

### 9.3 Désintégration d'une particule

Une désintégration est un processus avec une seule particule initiale  $\alpha$  et plusieurs particules finales  $\beta_f$  :

$$\alpha \rightarrow \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_{n_f} \quad (9.21)$$

Etant donné que l'état initial est constitué d'une seule particule, le facteur de flux initial est simplement donné par :

$$D_i = 2E \quad (9.22)$$

L'espace des phases Lorentz invariant pour l'état final est donné par :

$$dQ_f = \prod_f \left( \frac{d^3\vec{k}_f}{(2\pi)^3 2E_f} \right) (2\pi)^4 \delta^4(\sum_f p_f^\mu - p^\mu) \quad (9.23)$$

Dans ce cas, le taux efficace de transition a les dimensions d'une longueur et définit une quantité nommée largeur de désintégration différentielle

$$d\Gamma_f = \frac{|M_f|^2}{2E} dQ_f \quad (9.24)$$

La correspondante largeur de désintégration est obtenue en intégrant sur  $dQ_f$  :

$$\Gamma_f = \frac{1}{2E} \int |M_f|^2 dQ_f \quad (9.25)$$

La largeur de désintégration  $\Gamma_i$  a la forme d'un invariant de Lorentz divisé par une énergie, qui tient compte de la densité de particules initiales et dépend du référentiel. Elle décrit l'efficacité avec laquelle la particule peut se désintégrer dans les particules  $\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n$ .

On définit le temps de vie de la particule  $\alpha$  par rapport à la désintégration en  $\beta_1 + \dots + \beta_n$  comme :

$$\tau_i = \frac{1}{\Gamma_i} \quad (9.26)$$

Cette appellation est due au fait que le nombre  $N_i(t)$  de particules  $\alpha$  à un temps  $t$  dans un volume arbitraire décroît exponentiellement avec un temps caractéristique donné par  $\tau_i$  :

$$N_i(t) = N_i(t_0) e^{-\frac{t-t_0}{\tau_i}} \quad (9.27)$$

Le temps de vie dépend du référentiel, à cause de la contraction du temps dans les transformations de Lorentz. Il est maximal dans le référentiel où la particule qui se désintègre est au repos. On peut alors définir un temps de vie propre, qui est un invariant, comme le temps de vie au repos :

$$\tau_i = 2m_i \left( \int |\mathcal{M}_i|^2 d\Omega_f \right)^{-1} \quad (9.28)$$

### 9.4 Diffusion de deux particules

Une diffusion est un processus avec deux particules initiales  $\alpha_i$  et plusieurs particules finales  $\beta_f$ :

$$\alpha_1 + \alpha_2 \rightarrow \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n \quad (9.29)$$

Dans ce cas, l'état initial est constitué de deux particules et le facteur de flux relatif initial est donc non-borné. Pour le définir de façon précise, considérons d'abord les référentiels où les vitesses initiales sont parallèles:  $\vec{v}_1 \parallel \vec{v}_2$ . Dans ce cas, il est clair que la seule quantité qui peut intervenir est la vitesse relative  $v_{12}$ , et on a:

$$D_i = v_{12} 2E_1 2E_2 \quad (9.30)$$

Pour généraliser cette expression à des référentiels arbitraires, on remarque que dans le référentiel du LAB, l'expression (9.30) avec  $v_1 = v_{12}$ ,  $v_2 = 0$ ,  $E_1 = m_1 \gamma_1$  et  $E_2 = m_2$  peut être écrite en fonction des 4-impulsions  $p_1^\mu = (m_1 \gamma_1, m_1 \gamma_1 \vec{v}_1)$  et  $p_2^\mu = (m_2, \vec{0})$  comme:

$$D_i = 4 \sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2} \quad (9.31)$$

Etant donné que cette expression est manifestement Lorentz-invariante, elle est valable en général.

l'espace des phases Lorentz invariant des états finaux est comme avant :

$$dQ_f = \prod_f \left( \frac{d^3 \vec{p}_f}{(2\pi)^3 2E_f} \right) (2\pi)^4 \delta^4(\sum_f p_f^\mu - p_i^\mu - p_e^\mu) \quad (9.32)$$

Dans ce cas, le taux efficace de transition a les dimensions d'une surface et définit une quantité appelée section de diffusion différentielle :

$$d\sigma_f = \frac{|M_f|^2}{4\sqrt{(p_1 p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}} dQ_f \quad (9.33)$$

La correspondante section de diffusion est obtenue en intégrant sur  $dQ_f$  :

$$\sigma_f = \frac{1}{4\sqrt{(p_1 p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}} \int |M_f|^2 dQ_f \quad (9.34)$$

La section de diffusion  $\sigma_f$  est un invariant de Lorentz, à cause de la forme particulière du facteur de flux initial (9.34). Elle décrit la surface transversale effective de la particule cible, à l'intérieur de laquelle la diffusion est significative, par rapport à la direction de la particule projectile.

### 9.5 Désintégration à deux corps

Une désintégration à deux corps est un processus du type suivant :

$$a \rightarrow c + d \quad (9.35)$$

La conservation de la 4-impulsion s'écrit :

$$P_a^\mu = P_c^\mu + P_d^\mu \quad (9.36)$$

On a en outre :

$$P_a^2 = m_a^2, \quad P_c^2 = m_c^2, \quad P_d^2 = m_d^2 \quad (9.37)$$

Il suit que :

$$\begin{aligned} P_a \cdot P_c &= \frac{1}{2} [P_a^2 + P_c^2 - (P_a - P_c)^2] = \frac{1}{2} (P_a^2 + P_c^2 - P_d^2) \\ &= \frac{1}{2} (m_a^2 + m_c^2 - m_d^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_a \cdot P_d &= \frac{1}{2} [P_a^2 + P_d^2 - (P_a - P_d)^2] = \frac{1}{2} (P_a^2 + P_d^2 - P_c^2) \\ &= \frac{1}{2} (m_a^2 + m_d^2 - m_c^2) \end{aligned} \quad (9.38)$$

$$\begin{aligned} P_c \cdot P_d &= -\frac{1}{2} [P_c^2 + P_d^2 - (P_c + P_d)^2] = -\frac{1}{2} (P_c^2 + P_d^2 - P_a^2) \\ &= -\frac{1}{2} (m_c^2 + m_d^2 - m_a^2) \end{aligned}$$

Tous les invariants possibles sont donc complètement déterminés par les trois masses, et la cinématique est complètement fixée, sans aucune variable.

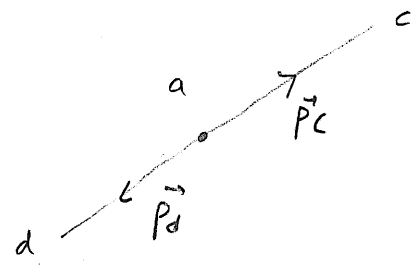


Dans le référentiel du CM, où  $\vec{p}_a = 0$ , on peut paramétriser les 4-impulsions comme :

$$p_a^\mu = (m_a, \vec{0})$$

$$p_c^\mu = (E_c, \vec{p}_c)$$

$$p_d^\mu = (E_d, \vec{p}_d)$$



$$(9.39)$$

avec :

$$E_c = \sqrt{m_c^2 + p_c^2}$$

$$E_d = \sqrt{m_d^2 + p_d^2}$$

$$(9.40)$$

La conservation de la 4-impulsion (9.36) implique

$$E_c + E_d = m_a$$

$$\vec{p}_c + \vec{p}_d = \vec{0}$$

$$(9.41)$$

En prenant la différence des carrés des (9.40) et en utilisant la seconde des (9.41) on trouve :

$$E_c^2 - E_d^2 = m_c^2 - m_d^2$$

et donc, en utilisant la première des (9.41) :

$$E_c - E_d = \frac{E_c^2 - E_d^2}{E_c + E_d} = \frac{m_c^2 - m_d^2}{m_a}$$

$$(9.42)$$

En combinant les (9.41) et (9.42) on trouve finalement :

$$\left\{ \begin{array}{l} E_c = \frac{m_a^2 + m_c^2 - m_d^2}{2m_a} \\ E_d = \frac{m_a^2 + m_d^2 - m_c^2}{2m_a} \end{array} \right.$$

$$(9.43)$$

La norme des impulsions est déterminée par les équations (9.40). On obtient :

$$|\vec{p}_c| = |\vec{p}_d| = \frac{\sqrt{(m_a^2 - m_c^2 - m_d^2)^2 - 4m_c^2 m_d^2}}{2m_a} \quad (9.44)$$

La direction commune des deux impulsions reste arbitraire, vu que le problème est isotrope.

Pour que le processus soit permis, l'expression (9.44) pour des impulsions sortantes doit être réelle. Cette condition est remplie si :

$$(m_a^2 - m_c^2 - m_d^2) \geq 2m_c m_d$$

$$m_a^2 \geq (m_c + m_d)^2$$

c'est-à-dire :

$$m_a \geq m_c + m_d \Rightarrow \text{processus possible} \quad (9.45)$$

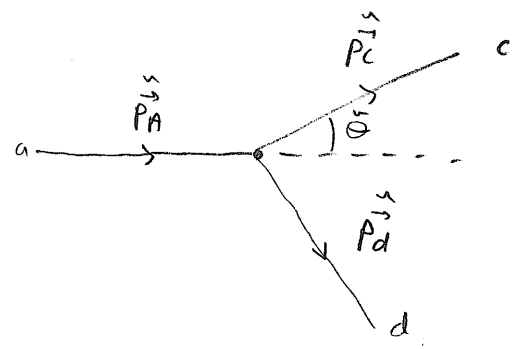
Cette relation reflète le fait que dans le CM l'énergie initiale disponible est l'énergie au repos de  $a$ , et que durant la collision celle-ci doit être convertie en énergie au repos pour  $c$  et  $d$  plus éventuellement de l'énergie cinétique. La condition (9.45) revient donc à demander qu'il y ait assez d'énergie à disposition pour pouvoir créer les deux particules finales.

Dans le référentiel du LAB, où  $\vec{p}_a \neq 0$ , on peut paramétriser les 4-impulsions comme :

$$\vec{p}_a^u = (\vec{E}_a, \vec{p}_a)$$

$$\vec{p}_c^u = (\vec{E}_c, \vec{p}_c)$$

$$\vec{p}_d^u = (\vec{E}_d, \vec{p}_d)$$



(9.46)

avec :

$$\vec{E}_a = \sqrt{m_a^2 + \vec{p}_a^2}$$

$$\vec{E}_c = \sqrt{m_c^2 + \vec{p}_c^2}$$

$$\vec{E}_d = \sqrt{m_d^2 + \vec{p}_d^2}$$

(9.47)

La conservation de la 4-impulsion (9.36) donne :

$$\vec{E}_c + \vec{E}_d = \vec{E}_a$$

$$\vec{p}_c + \vec{p}_d = \vec{p}_a$$

(9.48)

On peut paramétriser l'état initial par son énergie  $\vec{E}_a$ , et l'état final par l'angle  $\vec{\theta}$ .

Pour déterminer la cinématique, on peut procéder comme avant. Une méthode plus simple consiste à appliquer une transformation de Lorentz avec vitesse  $-\vec{v}_a$  aux résultats obtenus dans le CM.

On remarque que la restriction (9.45) reste valable même dans le LAB, vu qu'elle est manifestement invariante de Lorentz.

l'espace de phases Lorentz invariant intégré est donné par :

$$\begin{aligned} Q_f &= (2\pi)^{-2} \int \frac{d^3\vec{p}_c}{2E_c} \int \frac{d^3\vec{p}_d}{2E_d} \delta^4(p_a^\mu - p_c^\mu - p_d^\mu) \\ &= (2\pi)^{-2} \int \frac{d^3\vec{p}_c}{2E_c} \int d^4p_d \delta(p_d^2 - m_d^2) \Theta(E_d) \delta^4(p_a^\mu - p_c^\mu - p_d^\mu) \\ &= (2\pi)^{-2} \int \frac{d^3\vec{p}_c}{2E_c} \delta[(p_a - p_c)^2 - m_d^2] \Theta(E_a - E_c) \end{aligned}$$

Pour l'évaluer, il convient d'utiliser le référentiel du CM, où  $p_a^\mu = (m_a, \vec{0})$  et  $p_c^\mu = (E_c, \vec{p}_c)$ . On a alors :

$$\begin{aligned} Q_f &= \frac{1}{8\pi^2} \int d^3\vec{p}_c E_c^{-1} \delta(m_a^2 + m_c^2 - m_d^2 - 2m_a E_c) \Theta(m_a - E_c) \\ &= \frac{1}{8\pi^2} \int d\Omega_c \int_0^{+\infty} dp_c p_c^2 E_c^{-1} \frac{1}{2m_a} \delta\left(E_c - \frac{m_a^2 + m_c^2 - m_d^2}{2m_a}\right) \Theta(m_a - E_c) \\ &= \frac{1}{16\pi^2 m_a} \int_{m_c}^{+\infty} dE_c E_c p_c E_c^{-1} \delta\left(E_c - \frac{m_a^2 + m_c^2 - m_d^2}{2m_a}\right) \Theta(m_a - E_c) \\ &= \frac{1}{16\pi^2 m_a} \int_{m_c}^{m_d} dE_c \sqrt{E_c^2 - m_c^2} \delta\left(E_c - \frac{m_a^2 + m_c^2 - m_d^2}{2m_a}\right) \int d\Omega_c \\ &= \frac{1}{16\pi^2 m_a} |\vec{p}_f| \int d\Omega_f \tag{9.49} \\ &= \frac{1}{32\pi^2 m_a^2} \sqrt{(m_a^2 - m_c^2 - m_d^2)^2 - 4m_c^2 m_d^2} \int d\Omega_f \end{aligned}$$

Le temps de vie propre est alors donné simplement par :

$$\tau_{fi} = \frac{64\pi^2 m_a^3}{\sqrt{(m_a^2 - m_c^2 - m_d^2)^2 - 4m_c^2 m_d^2}} \left( \int d\Omega_f |\mathcal{M}_{fi}|^2 \right)^{-1} \tag{9.50}$$

On remarque ce temps devient grand à cause de la cinématique si le  $Q_f$  devient petit, indépendamment de l'amplitude dynamique  $(\mathcal{M}_{fi})^2$ .

### 9.6 Diffusion à deux corps

Une diffusion à deux corps est un processus du type suivant :

$$a + b \rightarrow c + d \quad (9.51)$$

La conservation de la 4-impulsion s'écrit :

$$P_a^\mu + P_b^\mu = P_c^\mu + P_d^\mu \quad (9.52)$$

Où a :

$$P_a^2 = m_a^2 ; P_b^2 = m_b^2 ; P_c^2 = m_c^2 ; P_d^2 = m_d^2 \quad (9.53)$$

Il existe dans ce cas six invariants cinématiques qui peuvent être formés en prenant le produit de deux 4-impulsions externes différentes. Mais ces six quantités ne sont pas toutes indépendantes. Pour les paramétriser, il est très utile d'introduire les variables de Mandelstam :

$$\left\{ \begin{array}{l} s = (P_a + P_b)^2 = (P_c + P_d)^2 \\ t = (P_a - P_c)^2 = (P_b - P_d)^2 \\ u = (P_a - P_d)^2 = (P_b - P_c)^2 \end{array} \right. \quad (9.54)$$

Tous les six produits définissant les variables cinématiques peuvent être écrits en termes des (9.54)

On trouve :

$$\begin{aligned}
 p_a p_b &= \frac{1}{2} [(p_a + p_b)^2 - p_a^2 - p_b^2] = \frac{1}{2} [s - (m_a^2 + m_b^2)] \\
 p_a p_c &= -\frac{1}{2} [(p_a - p_c)^2 - p_a^2 - p_c^2] = -\frac{1}{2} [t - (m_a^2 + m_c^2)] \\
 p_a p_d &= -\frac{1}{2} [(p_a - p_d)^2 - p_a^2 - p_d^2] = -\frac{1}{2} [u - (m_a^2 + m_d^2)] \\
 p_b p_c &= -\frac{1}{2} [(p_b - p_c)^2 - p_b^2 - p_c^2] = -\frac{1}{2} [u - (m_b^2 + m_c^2)] \\
 p_b p_d &= -\frac{1}{2} [(p_b - p_d)^2 - p_b^2 - p_d^2] = -\frac{1}{2} [t - (m_b^2 + m_d^2)] \\
 p_c p_d &= \frac{1}{2} [(p_c + p_d)^2 - p_c^2 - p_d^2] = \frac{1}{2} [s - (m_c^2 + m_d^2)]
 \end{aligned} \tag{9.55}$$

Toutefois, les variables  $s, t, u$  ne sont pas indépendantes. En effet, en prenant la norme de (9.52) on obtient :

$$\begin{aligned}
 0 &= (p_a + p_b - p_c - p_d)^2 \\
 &= p_a^2 + p_b^2 + p_c^2 + p_d^2 + 2(p_a p_b - p_a p_c - p_a p_d - p_b p_c - p_b p_d + p_c p_d) \\
 &= -2(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 + m_d^2) + 2(s + t + u)
 \end{aligned}$$

Donc :

$$s + t + u = m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 + m_d^2 \tag{9.56}$$

Il y a donc dans ce cas deux paramètres invariants libres. On peut caractériser complètement l'état initial avec  $s$ , et l'état final avec  $t$  ou  $u$ , par exemple.

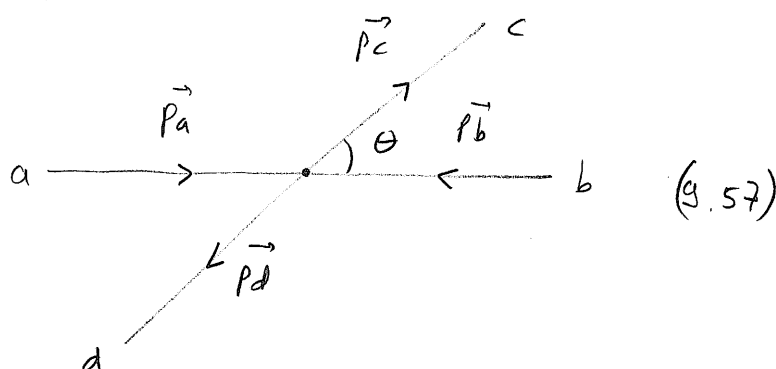
Dans le référentiel du CM, où  $\vec{p}_a + \vec{p}_b = 0$ , on peut prendre la paramétrisation suivante :

$$p_a^M = (E_a, \vec{p}_a)$$

$$p_b^M = (E_b, \vec{p}_b)$$

$$p_c^M = (E_c, \vec{p}_c)$$

$$p_d^M = (E_d, \vec{p}_d)$$



(9.57)

avec :

$$E_a = \sqrt{m_a^2 + \vec{p}_a^2}$$

$$E_c = \sqrt{m_c^2 + \vec{p}_c^2}$$

$$E_b = \sqrt{m_b^2 + \vec{p}_b^2}$$

$$E_d = \sqrt{m_d^2 + \vec{p}_d^2}$$

(9.58)

La variable  $s$  est reliée à l'énergie totale disponible dans l'état initial. En effet, dans le CM on trouve :  $(p_a + p_b)^M = (E_a + E_b, \vec{0})$  et donc  $s = (E_a + E_b)^2$ . Les variables  $t$  ou  $u$  sont liées à l'angle  $\theta$  pour l'état final. La conservation (9.52) peut alors être écrite comme :

$$E_a + E_b = E_c + E_d = \sqrt{s}$$

$$\vec{p}_a + \vec{p}_b = \vec{p}_c + \vec{p}_d = \vec{0}$$

(9.59)

Toutes les énergies et les valeurs absolues des impulsions sont déterminées en fonction de  $s$ , tandis que la direction des impulsions est en fonction de  $t$  et  $s$  ou  $u$  et  $s$ , indifféremment.

En effet, en prenant les différences des carrés des (9.58) on trouve :

$$E_a^2 - E_b^2 = m_a^2 - m_b^2$$

$$E_c^2 - E_d^2 = m_c^2 - m_d^2 \quad (9.60)$$

Il suit que :

$$E_a - E_b = \frac{E_a^2 - E_b^2}{E_a + E_b} = \frac{m_a^2 - m_b^2}{\sqrt{S}}$$

$$E_c - E_d = \frac{E_c^2 - E_d^2}{E_c + E_d} = \frac{m_c^2 - m_d^2}{\sqrt{S}} \quad (9.61)$$

En combinant alors les (9.59) et (9.61) on trouve :

$$\left\{ \begin{array}{l} E_a = \frac{S + m_a^2 - m_b^2}{2\sqrt{S}} \\ E_b = \frac{S + m_b^2 - m_a^2}{2\sqrt{S}} \\ E_c = \frac{S + m_c^2 - m_d^2}{2\sqrt{S}} \\ E_d = \frac{S + m_d^2 - m_c^2}{2\sqrt{S}} \end{array} \right. \quad (9.62)$$

En utilisant les (9.58) on déduit alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} |P_a| = |P_b| = \frac{\sqrt{(S - m_a^2 - m_b^2)^2 - 4m_a^2 m_b^2}}{2\sqrt{S}} \\ |P_c| = |P_d| = \frac{\sqrt{(S - m_c^2 - m_d^2)^2 - 4m_c^2 m_d^2}}{2\sqrt{S}} \end{array} \right. \quad (9.63)$$

la direction relative des impulsions initiales et finales dépend de  $t$  ou  $v$ .



Le processus peut se réaliser seulement si les impulsions déterminées par (9.63) sont réelles.

Pour la première, on trouve :

$$\sqrt{s} \geq m_a + m_b \Rightarrow \text{états initiaux existent} \quad (9.64)$$

Pour la deuxième on a :

$$\sqrt{s} \geq m_c + m_b \Rightarrow \text{états finaux existent} \quad (9.65)$$

La (9.64) est vérifiée par hypothèse, et il suit donc que :

$$\left. \begin{array}{l} m_a + m_b \geq m_c + m_d \Rightarrow \text{possible } \forall s, \text{ car } \sqrt{s} \geq m_a + m_b \\ m_a + m_b \leq m_c + m_d \Rightarrow \text{possible seulement si } \sqrt{s} \geq m_c + m_d \end{array} \right\} (9.66)$$

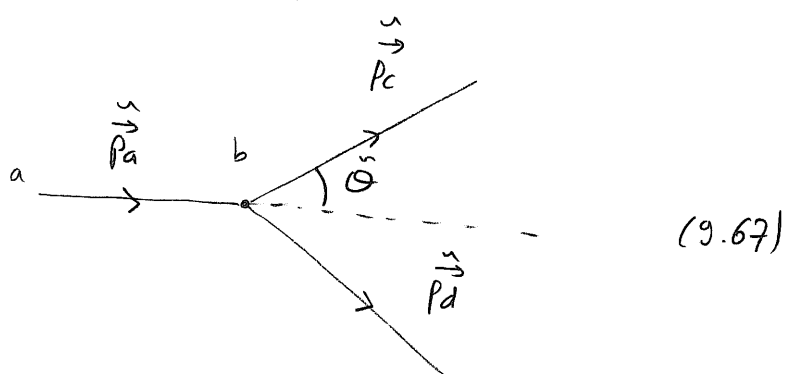
Dans le référentiel du LAB, où  $\vec{p}_b = 0$ , on peut prendre les 4-impulsions de la forme :

$$\tilde{P}_a^\mu = (E_a, \vec{p}_a)$$

$$\tilde{P}_b^\mu = (m_b, \vec{0})$$

$$\tilde{P}_c^\mu = (E_c, \vec{p}_c)$$

$$\tilde{P}_d^\mu = (E_d, \vec{p}_d)$$



(9.67)

avec :

$$E_a = \sqrt{m_a^2 + \vec{p}_a^2}$$

$$E_c = \sqrt{m_c^2 + \vec{p}_c^2}$$

$$E_d = \sqrt{m_d^2 + \vec{p}_d^2}$$

(9.68)

La variable  $s$  est liée à l'énergie de la particule incidente  $a$ . En effet, dans le LAB on a que  $(\vec{p}_a + \vec{p}_b)^\mu = (\vec{E}_a + m_b c, \vec{p}_a)$  et donc  $s = 2\vec{E}_a m_b + m_a^2 + m_b^2$ . Les variables  $t$  ou  $u$ , au contraire, sont reliées à l'angle de diffusion  $\Theta$ . La conservation de la 4-impulsion s'écrit donc :

$$\begin{aligned} E_a + m_b c &= E_c + E_d = \text{fonction de } s \\ \vec{p}_a &= \vec{p}_c + \vec{p}_d = \text{fonction de } s \text{ et } t \text{ ou } u \end{aligned} \quad (9.69)$$

Pour déterminer les énergies et les impulsions, on peut procéder comme avant, ou appliquer simplement une transformation de Lorentz avec vitesse  $-\vec{v}_b$  aux résultats obtenus dans le CM

Les restrictions (9.66) restent valables même dans le référentiel du LAB, vu que leur forme est manifestement Lorentz-invariante.

L'espace des phases Lorentz-invariant intégré peut être calculé comme pour la décomposition à deux corps. Le résultat est obtenu en remplaçant  $m_a \rightarrow \sqrt{s}$  dans la (9.49), obtenue en passant par le CM :

$$\begin{aligned} Q_f &= \frac{1}{16\pi^2 \sqrt{s}} |\vec{p}_c| \int d\Omega_c \\ &= \frac{1}{32\pi^2 s} \sqrt{(s - m_c^2 - m_d^2)^2 - 4m_c^2 m_d^2} \int d\Omega_f \end{aligned} \quad (9.70)$$

Le facteur de flux incident est lui aussi facilement calculer. On trouve, en passant par le CM:

$$\begin{aligned}
 D_i &= 4 \sqrt{(p_a p_b)^2 - m_a^2 m_b^2} \\
 &= 4\sqrt{s} |\vec{p}_i| \\
 &= 2 \sqrt{(s - m_a^2 - m_b^2)^2 - 4m_a^2 m_b^2} \quad (9.71)
 \end{aligned}$$

La section de diffusion est alors donnée supplément par :

$$\sigma_{fi} = \frac{1}{64\pi^2 s} \sqrt{\frac{(s - m_c^2 - m_d^2)^2 - 4m_c^2 m_d^2}{(s - m_a^2 - m_b^2)^2 - 4m_a^2 m_b^2}} \int |M_{fi}|^2 d\Omega_f \quad (9.72)$$

On remarque que si  $s$  n'est pas assez grand par rapport au seuil du processus,  $\Omega_f$  est petit et donne un facteur de suppression cinématique, indépendamment de l'amplitude dynamique  $|M_{fi}|^2$ .

## 10. ELECTRODYNAMIQUE QUANTIQUE

### 10.1 Généralités

En électrodynamique quantique, on décrit les interactions entre des particules de matière chargées, scalaires ou vectorielles, et des photons, les particules associées à la radiation électromagnétique.

Le calcul perturbatif des éléments de la matrice de transition  $S$  se fait de façon semblable à ce que nous avons vu pour le cas académique d'un chapitre précédent. L'interaction minimale entre matière et radiation est fixée par l'invariance de jauge de la théorie, et est du type courant potentiel. Il y a toutefois quelques nouveautés dont il faut tenir compte, par rapport au cas que nous avons étudié, où tous les champs avaient été pris scalaires et réels, pour simplifier.

Un premier point nouveau est que les champs de matière sont complexes, et les particules et antiparticules correspondantes sont distinguées par leur charge électrique. Le champ potentiel électromagnétique est au contraire réel, et les particules et anti-

particules correspondantes ont charges nulles et sont indistinguibles. Les interactions préservent la charge électrique, comme conséquence de l'invariance de jauge  $U(1)$  locale.

Un deuxième point nouveau est que les particules en jeu peuvent avoir des polarisations de spin arbitraires. Les polarisations apparaissent dans les amplitudes, car le spin interagit avec le champ électromagnétique.

Un troisième point nouveau est que les propagateurs des particules de matière et des photons ont un numérateur non-barat par rapport à celui d'un champ scalaire, lié au fait que les particules virtuelles peuvent elles aussi avoir des polarisations de spin arbitraires, sur lesquelles ont à somme implicite.

Après avoir tenu compte de ces nouveautés, on peut déterminer des règles de Feynman très semblables à celles déjà rencontrées dans le cas académique étudié dans un chapitre précédent, qui permettent de calculer les amplitudes facilement.

## 10.2 Electrodynamique scalaire

Considérons d'abord le cas où les particules de matière sont des scalaires. Dans ce cas, l'interaction est donnée par :

$$\mathcal{L}_{int}(x) = -ig \phi^\dagger(x) \overleftrightarrow{\partial}^\mu \phi(x) A_\mu(x) + g^2 \phi^\dagger(x) \phi(x) A_\mu(x) A^\mu(x) \quad (10.1)$$

Il y a donc deux types de vertex d'interaction : un vertex cubique et un vertex quadratique. Pour déterminer la nature de ces vertex, évaluons les actions d'interaction correspondantes en utilisant les développements en modes normaux des champs :

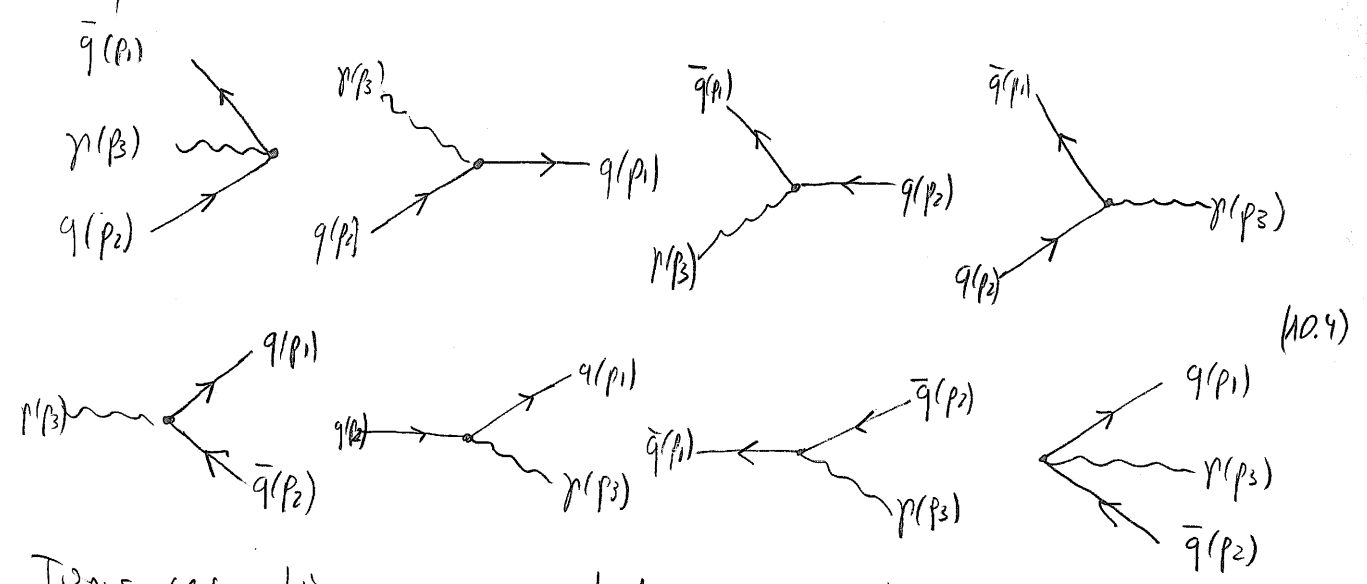
$$\left\{ \begin{array}{l} \phi(x) = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3 2E} [a(\vec{p}) e^{-ipx} + b^\dagger(\vec{p}) e^{ipx}] \\ \phi^\dagger(x) = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3 2E} [b(\vec{p}) e^{-ipx} + a^\dagger(\vec{p}) e^{ipx}] \\ A^\mu(x) = \sum_{r=0}^3 \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3 2E} [\xi_r^\mu(\vec{p}) c_r(\vec{p}) e^{-ipx} + \xi_r^{\mu*}(\vec{p}) c_r^\dagger(\vec{p}) e^{ipx}] \end{array} \right. \quad (10.2)$$

En faisant l'intégrale sur la position de  $\mathcal{L}_{int}(x)$  on trouve alors des fonctions  $\delta^4$  de conservation de la 4-impulsion dans les vertex correspondants, avec des signes des impulsions qui dépendent de quel terme on prend dans chacun des champs.

Pour le vertex cubique on trouve un total de  $2^3 = 8$  termes différents :

$$iS_{\text{int}}^{\text{cubique}} = i g \int \prod_{i=1}^3 \frac{d^3 \vec{p}_i}{(2\pi)^3 E_i} \sum_{r=0}^3 (2\pi)^4 \left\{ \begin{aligned} & b(p_1) a(p_2) c_r(p_3) (p_1 - p_2)_\mu \xi_r^\mu(p_3) \delta^4(p_1 + p_2 + p_3) \\ & + a^\dagger(p_1) a(p_2) c_r^\dagger(p_3) (-p_1 - p_2)_\mu \xi_r^\mu(p_3) \delta^4(-p_1 + p_2 + p_3) \\ & + b(p_1) b^\dagger(p_2) c_r(p_3) (p_1 + p_2)_\mu \xi_r^\mu(p_3) \delta^4(p_1 - p_2 + p_3) \\ & + b(p_1) a(p_2) c_r^\dagger(p_3) (p_1 - p_2)_\mu \xi_r^{\mu*}(p_3) \delta^4(p_1 + p_2 - p_3) \\ & + a^\dagger(p_1) b^\dagger(p_2) c_r(p_3) (-p_1 + p_2)_\mu \xi_r^\mu(p_3) \delta^4(-p_1 - p_2 + p_3) \\ & + a^\dagger(p_1) a(p_2) c_r^\dagger(p_3) (-p_1 - p_2)_\mu \xi_r^{\mu*}(p_3) \delta^4(-p_1 + p_2 - p_3) \\ & + b(p_1) b^\dagger(p_2) c_r^\dagger(p_3) (p_1 + p_2)_\mu \xi_r^{\mu*}(p_3) \delta^4(p_1 - p_2 - p_3) \\ & + a^\dagger(p_1) b^\dagger(p_2) c_r^\dagger(p_3) (-p_1 + p_2)_\mu \xi_r^{\mu*}(p_3) \delta^4(-p_1 - p_2 - p_3) \end{aligned} \right\} \quad (10.3)$$

Les diagrammes correspondants sont donnés par les figures suivantes :



Tous ces diagrammes ont la même structure, et diffèrent seulement par l'échange de particules ou antiparticules initiales avec des antiparticules ou particules finales.

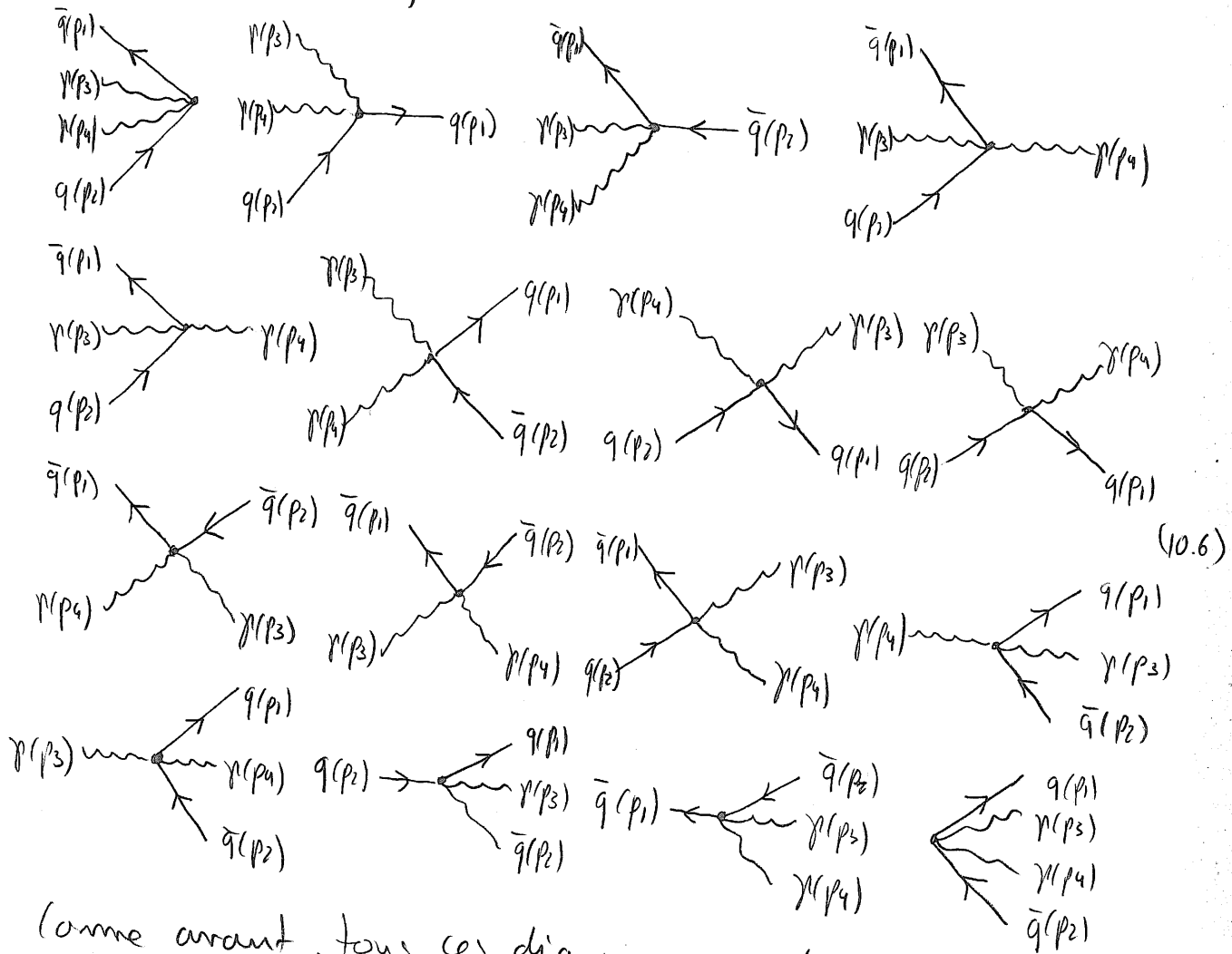
Pour le vertex quartique, on trouve un total de  
 $2^4 = 16$  termes différents :

$$iS_{int}^{quartic} = i g^2 \sum_{r,s=0}^3 \prod_{i=1}^4 \left( \frac{d^3 p_i}{(2\pi)^3 2E_i} \right) (2\pi)^4 \left\{ \begin{aligned} & b(p_1) a(p_2) c_r(p_3) c_s(p_4) \xi_r^\mu(p_3) \xi_{s\mu}(p_4) \delta^4(p_1+p_2+p_3+p_4) \\ & + a^\dagger(p_1) a(p_2) c_r(p_3) c_s(p_4) \xi_r^\mu(p_3) \xi_{s\mu}(p_4) \delta^4(-p_1+p_2+p_3+p_4) \\ & + b(p_1) b^\dagger(p_2) c_r(p_3) c_s(p_4) \xi_r^\mu(p_3) \xi_{s\mu}(p_4) \delta^4(p_1-p_2+p_3+p_4) \\ & + [b(p_1) a(p_2) c_r^\dagger(p_3) c_s(p_4) \xi_r^\mu(p_3) \xi_{s\mu}^*(p_4) \delta^4(p_1+p_2-p_3+p_4) \\ & + b(p_1) a(p_2) c_r(p_3) c_s^\dagger(p_4) \xi_r^\mu(p_3) \xi_{s\mu}^*(p_4) \delta^4(p_1+p_2+p_3-p_4)] \\ & + a^\dagger(p_1) b^\dagger(p_2) c_r(p_3) c_s(p_4) \xi_r^\mu(p_3) \xi_{s\mu}^*(p_4) \delta^4(p_1-p_2+p_3+p_4) \\ & + [a^\dagger(p_1) a(p_2) c_r^\dagger(p_3) c_s(p_4) \xi_r^\mu(p_3) \xi_{s\mu}^*(p_4) \delta^4(-p_1+p_2-p_3+p_4) \\ & + a^\dagger(p_1) a(p_2) c_r(p_3) c_s^\dagger(p_4) \xi_r^\mu(p_3) \xi_{s\mu}^*(p_4) \delta^4(-p_1+p_2+p_3-p_4)] \\ & + [b(p_1) b^\dagger(p_2) c_r^\dagger(p_3) c_s(p_4) \xi_r^\mu(p_3) \xi_{s\mu}^*(p_4) \delta^4(p_1-p_2-p_3+p_4) \\ & + b(p_1) b^\dagger(p_2) c_r(p_3) c_s^\dagger(p_4) \xi_r^\mu(p_3) \xi_{s\mu}^*(p_4) \delta^4(p_1-p_2+p_3-p_4)] \\ & + b(p_1) a(p_2) c_r^\dagger(p_3) c_s^\dagger(p_4) \xi_r^\mu(p_3) \xi_{s\mu}^*(p_4) \delta^4(p_1+p_2-p_3-p_4) \\ & + [a^\dagger(p_1) b^\dagger(p_2) c_r^\dagger(p_3) c_s(p_4) \xi_r^\mu(p_3) \xi_{s\mu}^*(p_4) \delta^4(-p_1-p_2-p_3+p_4) \\ & + a^\dagger(p_1) b^\dagger(p_2) c_r(p_3) c_s^\dagger(p_4) \xi_r^\mu(p_3) \xi_{s\mu}^*(p_4) \delta^4(-p_1-p_2+p_3-p_4)] \\ & + a^\dagger(p_1) a(p_2) c_r^\dagger(p_3) c_s^\dagger(p_4) \xi_r^\mu(p_3) \xi_{s\mu}^*(p_4) \delta^4(-p_1+p_2-p_3-p_4) \\ & + b(p_1) b^\dagger(p_2) c_r^\dagger(p_3) c_s^\dagger(p_4) \xi_r^\mu(p_3) \xi_{s\mu}^*(p_4) \delta^4(p_1-p_2-p_3-p_4) \\ & + a^\dagger(p_1) b^\dagger(p_2) c_r^\dagger(p_3) c_s^\dagger(p_4) \xi_r^\mu(p_3) \xi_{s\mu}^*(p_4) \delta^4(-p_1-p_2-p_3-p_4) \end{aligned} \right\} \quad (10.5)$$

Les termes entre [ ] donnent le même résultat et ont donc été groupés. Il y a donc 16 diagrammes en tout mais certains diffèrent seulement par les noms de  $p_i$ .



On trouve les diagrammes suivants :



Comme avant, tous ces diagrammes ont la même structure, et diffèrent seulement par l'échange de particules ou antiparticules initiales et finales.

Par calculer les éléments de matrice  $M$  correspondants aux diagrammes (10.4) et (10.6), on considère les états à une particule normalisés de telle façon à omettre le facteur de ligne externe qui intervient dans la définition de  $M_{fi}$  par rapport à  $S_{fi}$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} |q(\vec{p})\rangle = a^\dagger(\vec{p})|0\rangle ; |\bar{q}(\vec{p})\rangle = b^\dagger(\vec{p})|0\rangle \\ |\gamma(\vec{p}), r\rangle = c_r^\dagger(\vec{p})|0\rangle \end{array} \right. \quad (10.7)$$

Tous les diagrammes cubiques et quartiques donnent des résultats semblables, qui diffèrent seulement par des signes - sur les impulsions et des conjugués complexes sur les polarisations des photons. On peut alors identifier les deux vertex de base, avec les règles suivantes:

A Feynman diagram showing a vertex where two fermion lines meet. The incoming fermion line on the left is labeled  $P_1$  and the outgoing fermion line on the right is labeled  $P_2$ . A wavy photon line is attached to the vertex, labeled  $P_3$  and  $\mu$ . An arrow points from this diagram to the expression  $-iq(P_1+P_2)_\mu$ .

$$\Rightarrow -iq(P_1+P_2)_\mu$$

A Feynman diagram showing a vertex where two fermion lines meet. The incoming fermion line on the left is labeled  $P_1$  and the outgoing fermion line on the right is labeled  $P_2$ . Two wavy photon lines are attached to the vertex, labeled  $P_3$  and  $\mu$  on the left, and  $P_4$  and  $\nu$  on the right. An arrow points from this diagram to the expression  $2iq^2\eta_{\mu\nu}$ .

$$\Rightarrow 2iq^2\eta_{\mu\nu}$$

(10.8)

En outre, pour chaque photon externe il faut ajouter une polarisation. Pour les lignes externes, on a donc:

$$p \longrightarrow \text{---} \Rightarrow 1$$

$$\text{---} \longrightarrow p \Rightarrow 1$$

$$p \longleftarrow \text{---} \Rightarrow 1$$

$$\text{---} \longleftarrow p \Rightarrow 1$$

$$\begin{matrix} M, r \\ p \end{matrix} \text{---} \Rightarrow \sum_r^M(p)$$

$$\text{---} \begin{matrix} M, r \\ p \end{matrix} \Rightarrow \sum_r^{M*}(p)$$

(10.9)

Le développement perturbatif de  $M_{fi}$  dicté par le théorème de Wick peut être analysé comme pour le cas de figure étudié précédemment.

En réalité il y a dans ce cas deux complications dues au fait que les interactions (10.1) contiennent des dérivées. La première est que  $\mathcal{H}_{int}(x)$  diffère de  $-\mathcal{H}_{int}(x)$  par des termes non-covariants induits par le changement des moments canoniques. La deuxième est que les densités des champs ne sont pas transparentes au T-produit, et une contraction du type  $\langle 0 | T(\partial^\mu \phi(x) \phi^\dagger(x')) | 0 \rangle$  diffère de la dérivée du propagateur,  $\partial^\mu \langle 0 | T(\phi(x) \phi^\dagger(x')) | 0 \rangle$  par des termes qui ne sont eux non-plus pas covariants. On peut toutefois montrer que les non-covariants induits par ces deux sources se compensent exactement dans toutes les amplitudes, leur apparition étant seulement liée à la nécessité d'introduire une formulation Hamiltonienne dans la mise en place de la théorie des perturbations pour la matrice de transition  $M_{fi}$ . On trouve alors finalement des règles de Feynman très simples.

Les propagateurs qui émergent des contractions de matière sont des propagateurs scalaires usuels. Les propagateurs qui émergent des contractions de jauge, de carbone, ont un numérateur qui a une structure tensorielle non-triviale dictant la propagation des différentes polarisations: On doit alors compter ces propagateurs comme suit:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{q} &\Rightarrow \frac{i}{q^2 - m^2 + i\epsilon}, & \overleftarrow{-q} &\Rightarrow \frac{i}{q^2 - m^2 + i\epsilon} \\ \mu \text{ wavy } \nu &\Rightarrow \frac{i(-\eta_{\mu\nu})}{q^2 - m^2 + i\epsilon} \end{aligned} \quad (10.10)$$

Finalement, les règles de Feynman permettant de calculer l'amplitude Lorentz-invariante  $M_f$  pour des états initiaux et finaux fixés sont très simples. On doit simplement considérer tous les diagrammes qu'il est possible de construire en joignant les vertex par des propagateurs, en laissant les justes états externes. La contribution de chaque diagramme est calculée en utilisant les règles (10.8), (10.9) et (10.10), et en divisant finalement par le facteur de symétrie du diagramme.

### 10.3 Electrodynamique spinorielle

Considérons maintenant le cas où les particules de matière sont des spinours. Dans ce cas, l'interaction est donnée par :

$$\mathcal{L}_{int}(x) = -g \bar{\psi}_a(x) \gamma^{\mu}_{ab} \psi_b(x) \quad (10.11)$$

Il y a donc dans ce cas un seul type de vertex d'interaction : un vertex cubique. Pour déterminer sa nature, évaluons comme avant l'action d'interaction correspondante en utilisant les développements en modes normaux des champs :

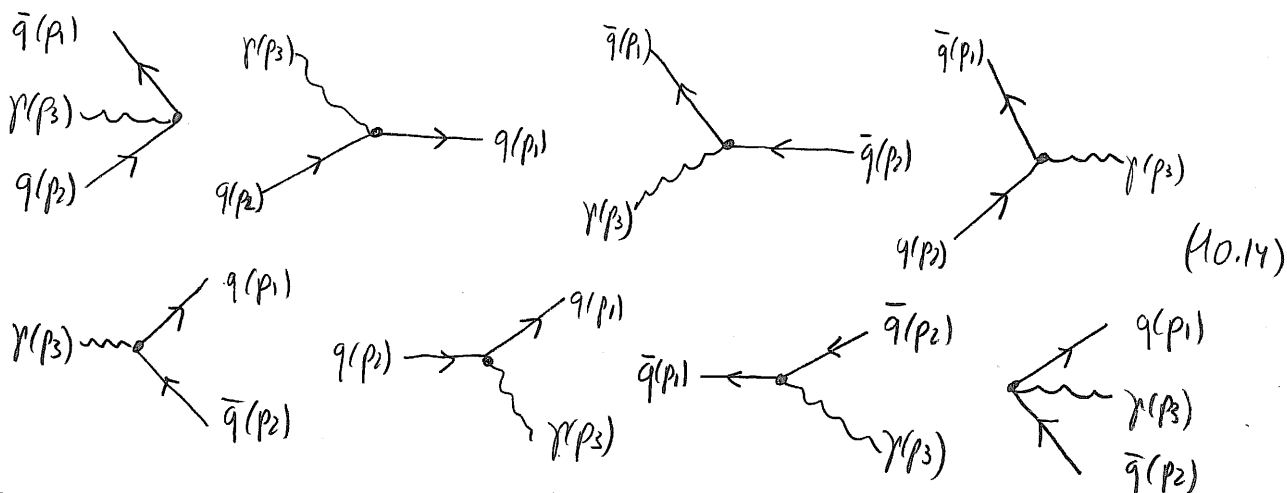
$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_a(x) = \sum_{\alpha=1}^2 \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3 2E} \left[ u_{\alpha}(\vec{p}) b(\vec{p}) e^{-ipx} + v_{\alpha}(\vec{p}) d^{\dagger}(\vec{p}) e^{ipx} \right] \\ \bar{\psi}_a(x) = \sum_{\alpha=1}^2 \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3 2E} \left[ \bar{v}_{\alpha}(\vec{p}) d(\vec{p}) e^{-ipx} + \bar{u}_{\alpha}(\vec{p}) b^{\dagger}(\vec{p}) e^{ipx} \right] \\ A^{\mu}(x) = \sum_{r=0}^3 \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3 2E} \left[ \xi_r^{\mu}(\vec{p}) c(\vec{p}) e^{-ipx} + \xi_r^{*\mu}(\vec{p}) c^{\dagger}(\vec{p}) e^{ipx} \right] \end{array} \right. \quad (10.12)$$

En faisant l'intégrale sur la position de  $\mathcal{L}_{int}(x)$  au brane, comme avant, une fonction  $\delta^4$  de conservation de la 4-impulsion dans le vertex correspondra, avec des signes des impulsions qui dépendent de quel terme on prend pour chacun des champs.

Par le vertex cubique on obtient un total de  $2^3 = 8$  termes différents :

$$i S_{int}^{cubique} = -iq (2m) \prod_{i=1}^3 \int \frac{d^3 \vec{p}_i}{(2\pi)^3 2E_i} \sum_{\alpha, \beta=1}^2 \sum_{r=0}^3 (2\pi)^4 \left\{ \begin{aligned} & d_{\alpha}(p_1) b_{\beta}(p_2) c_r(p_3) \bar{V}(p_1) \gamma_{\mu} U(p_2) \xi_r^{\mu}(p_3) \delta^4(p_1+p_2+p_3) \\ & + b_{\alpha}^+(p_1) b_{\beta}(p_2) c_r(p_3) \bar{U}(p_1) \gamma_{\mu} U(p_2) \xi_r^{\mu}(p_3) \delta^4(-p_1+p_2+p_3) \\ & + d_{\alpha}(p_1) d_{\beta}^+(p_2) c_r(p_3) \bar{V}(p_1) \gamma_{\mu} V(p_2) \xi_r^{\mu}(p_3) \delta^4(p_1-p_2+p_3) \\ & + d_{\alpha}(p_1) b_{\beta}(p_2) c_r^{\dagger}(p_3) \bar{V}(p_1) \gamma_{\mu} U(p_2) \xi_r^{\mu}(p_3) \delta^4(p_1+p_2-p_3) \\ & + b_{\alpha}^+(p_1) d_{\beta}^+(p_2) c_r(p_3) \bar{U}(p_1) \gamma_{\mu} V(p_2) \xi_r^{\mu}(p_3) \delta^4(p_1-p_2+p_3) \\ & + b_{\alpha}^+(p_1) b_{\beta}(p_2) c_r^{\dagger}(p_3) \bar{U}(p_1) \gamma_{\mu} U(p_2) \xi_r^{\mu}(p_3) \delta^4(-p_1+p_2-p_3) \\ & + d_{\alpha}(p_1) d_{\beta}^+(p_2) c_r^{\dagger}(p_3) \bar{V}(p_1) \gamma_{\mu} V(p_2) \xi_r^{\mu}(p_3) \delta^4(p_1-p_2+p_3) \\ & + b_{\alpha}^+(p_1) d_{\beta}^+(p_2) c_r^{\dagger}(p_3) \bar{U}(p_1) \gamma_{\mu} V(p_2) \xi_r^{\mu}(p_3) \delta^4(-p_1-p_2-p_3) \end{aligned} \right\} \quad (10.13)$$

Les diagrammes correspondants sont donnés par les figures suivantes :

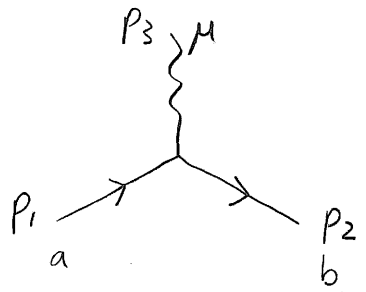


Tous ces diagrammes ont la même structure, comme dans le cas des scalaires, et diffèrent seulement par l'échange de particules-antiparticules entre états initiaux-finaux.

Pour calculer les éléments de matrice  $M$  correspondants aux diagrammes (10.14), on considère les états à une particule normalisés de telle façon à omettre le facteur de ligne externe qui intervient dans la définition de  $M_{fi}$  par rapport à  $S_{fi}$ :

$$\left. \begin{aligned} |q(\vec{p}), \alpha\rangle &= b_{\alpha}^{+}(\vec{p})|0\rangle & ; & \quad | \bar{q}(\vec{p}), \beta\rangle = d_{\beta}^{+}(\vec{p})|0\rangle \\ |p(\vec{p}), r\rangle &= c_r^{+}(\vec{p})|0\rangle \end{aligned} \right\} \quad (10.15)$$

Tous les diagrammes donnent des résultats semblables, ne différant que par des signes - sur les hypothèses, des échanges  $u \leftrightarrow v$  sur les polarisations des particules de matière et des conjugués complexes sur les polarisations des particules de jauge. On peut alors facilement identifier le vertex de base, avec la règle suivante:



$$\Rightarrow -iq(\gamma_{\mu})_{ab} \quad (10.16)$$

En outre, il faut ajouter les polarisations appropriées pour chaque particule externe, qui dépend du type de particule et du fait qu'elle soit dans l'état initial ou au contraire dans le final.

On donne les règles suivantes:

$$\begin{array}{c} a, \alpha \\ \longrightarrow \\ p \end{array} \text{---} \Rightarrow U_{\alpha}(\vec{p}) \sqrt{2m}$$

$$\text{---} \longrightarrow \begin{array}{c} a, \alpha \\ p \end{array} \Rightarrow \bar{U}_{\alpha}(\vec{p}) \sqrt{2m}$$

$$\begin{array}{c} a, \alpha \\ \longleftarrow \\ p \end{array} \text{---} \Rightarrow \bar{V}_{\alpha}(\vec{p}) \sqrt{2m}$$

$$\text{---} \longleftarrow \begin{array}{c} a, \alpha \\ p \end{array} \Rightarrow V_{\alpha}(\vec{p}) \sqrt{2m}$$

(10.A)

$$\begin{array}{c} u, r \\ \text{~~~~~} \\ p \end{array} \text{---} \Rightarrow \sum_r(\vec{p})$$

$$\text{---} \text{~~~~~} \begin{array}{c} u, r \\ p \end{array} \Rightarrow \sum_r^*(\vec{p})$$

Le développement perturbatif de  $M_f$  dicté par le théorème de Wick peut être analysé comme dans le cas de figure étudié précédemment. Dans ce cas, la seule complication est le signe de chaque contribution, qui est déterminé par le nombre de permutations de fermions ayant été nécessaires pour faire la contraction. Mais finalement on trouve à nouveau des règles de Feynman très simples, qui sont très semblables à celles obtenues dans le cas de l'électrodynamique scalaire étudié plus haut.



Les propagateurs qui émergent des interactions de champs de matière et de jauge ont tous les deux des numérateurs avec une structure tensorielle non-kovariante décrivant la propagation des différentes polarisations possibles. On a alors les identifications suivantes :

$$\begin{array}{l}
 \begin{array}{c} \xrightarrow{q} \\ a \quad b \end{array} \Rightarrow \frac{i(\not{q} + m)_{ba}}{q^2 - m^2 + i\epsilon} \quad / \quad \begin{array}{c} \xleftarrow{-q} \\ a \quad b \end{array} \Rightarrow \frac{i(-\not{q} + m)_{ab}}{q^2 - m^2 + i\epsilon} \\
 \begin{array}{c} \text{---} \\ \mu \quad \text{---} \\ q \end{array} \Rightarrow \frac{i(-\eta_{\mu\nu})}{q^2 + i\epsilon} \quad (10.18)
 \end{array}$$

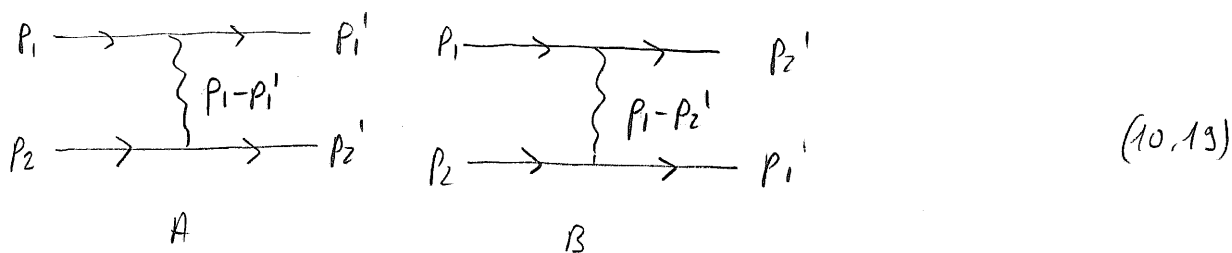
Finalement, les règles de Feynman permettant de calculer l'amplitude Lorentz-invariante  $M_f$  pour des états initiaux et finaux fixés sont semblables à celles obtenues dans le cas scalaire. On doit considérer tous les diagrammes que l'on peut construire en joignant des vertex par des propagateurs, en laissant le juste nombre d'états externes. La contribution de chaque diagramme est ensuite calculée en utilisant les règles (10.16), (10.17) et (10.18), et en divisant finalement par le facteur de symétrie du diagramme. L'ordre dans lequel les indices spinoriels sont contractés correspond à écrire les différents facteurs de gauche à droite, avec des multiplications matricielles, en remontant chaque ligne fermionique du diagramme dans le sens inverse à la flèche du flux de charge.

### 10.4 Exemples de processus à deux corps

Considérons quelques exemples de processus et appliquons les règles de Feynman données en général pour écrire les amplitudes  $M$  correspondantes.

a)  $q + q \rightarrow q + q$

En général, il y a deux diagrammes :



Dans le cas où  $q$  est une scalaire, on trouve :

$$\begin{aligned}
 \bullet M_A &= (-iq)(p_1 + p_2')^{\mu} \frac{-i\eta_{\mu\nu}}{(p_1 - p_1')^2} (-iq)(p_2 + p_2')^{\nu} \\
 &= iq^2 \frac{(p_1 + p_2') \cdot (p_2 + p_2')}{(p_1 - p_1')^2}
 \end{aligned}$$

(10.20)

$$\begin{aligned}
 \bullet M_B &= (-iq)(p_1 + p_2')^{\mu} \frac{-i\eta_{\mu\nu}}{(p_1 - p_2')^2} (-iq)(p_2 + p_1')^{\nu} \\
 &= iq^2 \frac{(p_1 + p_2') \cdot (p_2 + p_1')}{(p_1 - p_2')^2}
 \end{aligned}$$

(10.21)

Dans le cas où  $q$  est un spinneur, on trouve :

$$\begin{aligned}
 \bullet M_A &= (2m)^2 \bar{u}(p_1') (-iq\gamma^{\mu}) u(p_1) \frac{-i\eta_{\mu\nu}}{(p_1 - p_1')^2} \bar{u}(p_2') (-iq\gamma^{\nu}) u(p_2) \\
 &= iq^2 (2m)^2 \frac{\bar{u}(p_1') \gamma^{\mu} u(p_1) \bar{u}(p_2') \gamma_{\mu} u(p_2)}{(p_1 - p_1')^2}
 \end{aligned}$$

(10.22)

$$\begin{aligned}
 \bullet M_B &= -(2m)^2 \bar{u}(p_2') (-iq\gamma^{\mu}) u(p_1) \frac{-i\eta_{\mu\nu}}{(p_1 - p_2')^2} \bar{u}(p_1') (-iq\gamma^{\nu}) u(p_2) \\
 &= -iq^2 (2m)^2 \frac{\bar{u}(p_2') \gamma^{\mu} u(p_1) \bar{u}(p_1') \gamma_{\mu} u(p_2)}{(p_1 - p_2')^2}
 \end{aligned}$$

(10.23)

$$b) \bar{q} + \bar{q} \rightarrow \bar{q} + \bar{q}$$

En general, il y a deux diagrammes :

$$\begin{array}{cc}
 \begin{array}{c}
 P_1 \leftarrow \leftarrow P_1' \\
 \left. \vphantom{P_1 \leftarrow \leftarrow P_1'} \right\} P_1 - P_1' \\
 P_2 \leftarrow \leftarrow P_2' \\
 A
 \end{array}
 &
 \begin{array}{c}
 P_1 \leftarrow \leftarrow P_2' \\
 \left. \vphantom{P_1 \leftarrow \leftarrow P_2'} \right\} P_1 - P_2' \\
 P_2 \leftarrow \leftarrow P_1' \\
 B
 \end{array}
 \end{array}
 \quad (10.24)$$

Dans le cas où  $q$  est un scalaire, on trouve :

$$\begin{aligned}
 \cdot M_A &= (-iq)(-P_1 - P_1')^\mu \frac{-i\eta_{\mu\nu}}{(P_1 - P_1')^2} (-iq)(-P_2 - P_2')^\nu \\
 &= iq^2 \frac{(P_1 + P_1')(P_2 + P_2')}{(P_1 - P_1')^2}
 \end{aligned}
 \quad (10.25)$$

$$\begin{aligned}
 \cdot M_B &= (-iq)(-P_1 - P_2')^\mu \frac{-i\eta_{\mu\nu}}{(P_1 - P_2')^2} (-iq)(-P_2 - P_1')^\nu \\
 &= iq^2 \frac{(P_1 + P_2')(P_2 + P_1')}{(P_1 - P_2')^2}
 \end{aligned}
 \quad (10.26)$$

Dans le cas où  $q$  est un spinneur, on trouve :

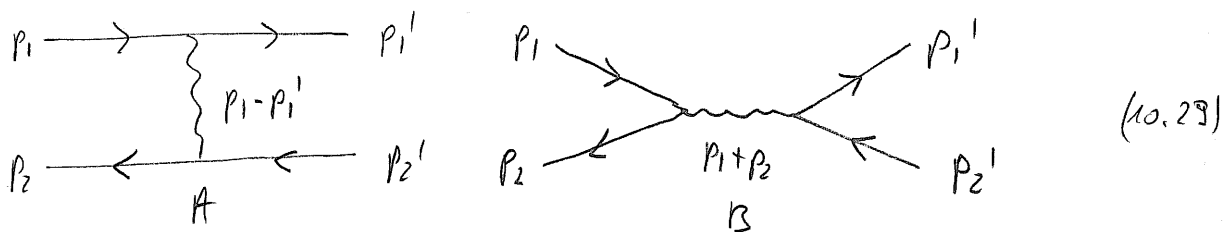
$$\begin{aligned}
 \cdot M_A &= (2m)^2 \bar{V}(P_1) (-iq\gamma^\mu) V(P_1') \frac{-i\eta_{\mu\nu}}{(P_1 - P_1')^2} \bar{V}(P_2) (-iq\gamma^\nu) V(P_2') \\
 &= iq^2 (2m)^2 \frac{\bar{V}(P_1) \gamma^\mu V(P_1') \bar{V}(P_2) \gamma_\mu V(P_2')}{(P_1 - P_1')^2}
 \end{aligned}
 \quad (10.27)$$

$$\begin{aligned}
 \cdot M_B &= -(2m)^2 \bar{V}(P_1) (-iq\gamma^\mu) V(P_2') \frac{-i\eta_{\mu\nu}}{(P_1 - P_2')^2} \bar{V}(P_2) (-iq\gamma^\nu) V(P_1') \\
 &= -iq^2 (2m)^2 \frac{\bar{V}(P_1) \gamma^\mu V(P_2') \bar{V}(P_2) \gamma_\mu V(P_1')}{(P_1 - P_2')^2}
 \end{aligned}
 \quad (10.28)$$

On remarque que les résultats sont très semblables à ceux du point a), les seules différences étant imputables à des effets liés au spin et à la statistique.

c)  $q + \bar{q} \rightarrow q + \bar{q}$

En general, il y a deux diagrammes:



Dans le cas où  $q$  est un scalaire, on trouve:

$$\begin{aligned}
 \cdot M_A &= (-iq)(p_1 + p_1')^\mu \frac{-i\eta_{\mu\nu}}{(p_1 - p_1')^2} (-iq)(p_2 - p_2')^\nu \\
 &= -iq^2 \frac{(p_1 + p_1') \cdot (p_2 + p_2')}{(p_1 - p_1')^2}
 \end{aligned}$$

(10.30)

$$\begin{aligned}
 \cdot M_B &= (-iq)(p_1 - p_2)^\mu \frac{-i\eta_{\mu\nu}}{(p_1 + p_2)^2} (-iq)(-p_2' + p_1')^\nu \\
 &= iq^2 \frac{(p_1 - p_2) \cdot (p_1' - p_2')}{(p_1 + p_2)^2}
 \end{aligned}$$

(10.31)

Dans le cas où  $q$  est un spinneur, on trouve:

$$\begin{aligned}
 \cdot M_A &= -(2m)^2 \bar{u}(p_1') (-iq\gamma^\mu) u(p_1) \frac{-i\eta_{\mu\nu}}{(p_1 - p_1')^2} \bar{v}(p_2) (-iq\gamma^\nu) v(p_2') \\
 &= -iq^2 (2m)^2 \frac{\bar{u}(p_1') \gamma^\mu u(p_1) \bar{v}(p_2) \gamma_\mu v(p_2')}{(p_1 - p_1')^2}
 \end{aligned}$$

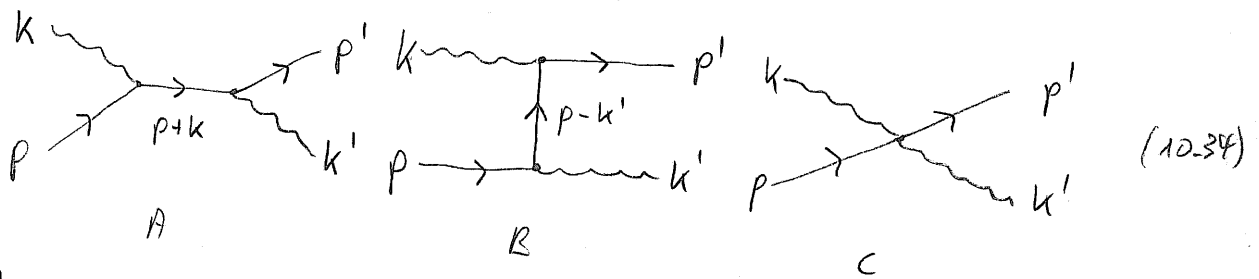
(10.32)

$$\begin{aligned}
 \cdot M_B &= (2m)^2 \bar{v}(p_2) (-iq\gamma^\mu) u(p_1) \frac{-i\eta_{\mu\nu}}{(p_1 + p_2)^2} \bar{u}(p_1') (-iq\gamma^\nu) v(p_2') \\
 &= iq^2 (2m)^2 \frac{\bar{v}(p_2) \gamma^\mu u(p_1) \bar{u}(p_1') \gamma_\mu v(p_2')}{(p_1 + p_2)^2}
 \end{aligned}$$

(10.33)

d)  $q + \gamma \rightarrow q + \gamma$

En général, il y a trois diagrammes :



Les diagrammes A et B sont toujours présents, alors que le diagramme C n'existe que pour les particules scalaires, et pas pour celles spinorielles. Dans le cas où q est un scalaire, on a :

$$\begin{aligned} M_A &= (-iq) (2p+k)^\nu \frac{i}{(p+k)^2 - m^2} (-iq) (2p+k)^\mu \xi_\mu(k) \xi_\nu^*(k') \\ &= -iq^2 \frac{(2p+k) \cdot \xi(k) (2p+k) \cdot \xi^*(k')}{(p+k)^2 - m^2} \end{aligned} \quad (10.35)$$

$$\begin{aligned} M_B &= (-iq) (2p-k)^\mu \frac{i}{(p-k)^2 - m^2} (-iq) (2p-k)^\nu \xi_\mu(k) \xi_\nu^*(k') \\ &= -iq^2 \frac{(2p-k) \cdot \xi(k) (2p-k) \cdot \xi^*(k')}{(p-k)^2 - m^2} \end{aligned} \quad (10.36)$$

$$\begin{aligned} M_C &= 2iq^2 \eta^{\mu\nu} \xi_\mu(k) \xi_\nu^*(k') \\ &= 2iq^2 \xi(k) \cdot \xi^*(k') \end{aligned} \quad (10.37)$$

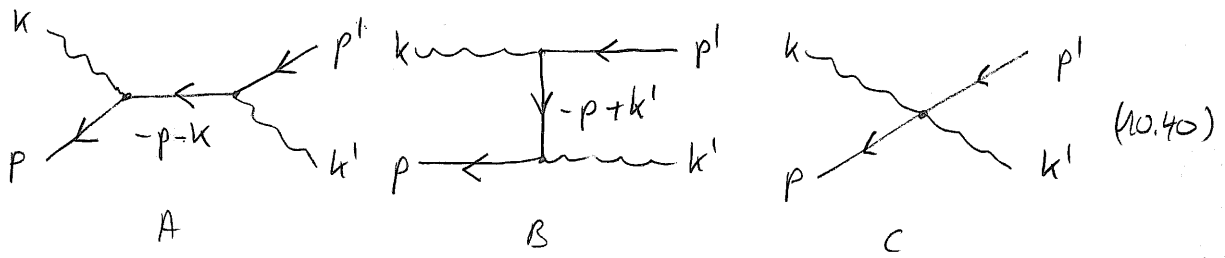
Dans le cas où q est un spinneur, on a :

$$\begin{aligned} M_A &= (2m) \bar{U}(p') (-iq\gamma^\nu) \frac{i(\not{p} + \not{k} + m)}{(p+k)^2 - m^2} (-iq\gamma^\mu) U(p) \xi_\mu(k) \xi_\nu^*(k') \\ &= -iq^2 (2m) \frac{\bar{U}(p') \not{\xi}^*(k') (\not{p} + \not{k} + m) \not{\xi}(k) U(p)}{(p+k)^2 - m^2} \end{aligned} \quad (10.38)$$

$$\begin{aligned} M_B &= 2m \bar{U}(p') (-iq\gamma^\mu) \frac{i(\not{p} - \not{k}' + m)}{(p-k')^2 - m^2} (-iq\gamma^\nu) U(p) \xi_\mu(k) \xi_\nu^*(k') \\ &= -iq^2 (2m) \frac{\bar{U}(p') \not{\xi}(k) (\not{p} - \not{k}' + m) \not{\xi}^*(k') U(p)}{(p-k')^2 - m^2} \end{aligned} \quad (10.39)$$

e)  $\bar{q} + \gamma \rightarrow \bar{q} + \gamma$

En general, il y a comme avant trois diagrammes:



Les diagrammes A et B sont toujours présents, alors que le diagramme C existe seulement pour les scalaires.

Dans le cas où  $q$  est un scalaire, on a:

$$\begin{aligned} M_A &= (-iq)(-2p-k)^\mu \frac{i}{(p+k)^2 - m^2} (-iq)(-2p'-k')^\nu \xi_\mu(k) \xi_\nu^*(k') \\ &= -iq^2 \frac{(2p+k) \cdot \xi(k) (2p'+k') \cdot \xi^*(k')}{(p+k)^2 - m^2} \end{aligned} \quad (10.41)$$

$$\begin{aligned} M_B &= (-iq)(-2p+k')^\nu \frac{i}{(p-k')^2 - m^2} (-iq)(-2p'+k)^\mu \xi_\mu(k) \xi_\nu^*(k') \\ &= -iq^2 \frac{(2p'-k) \cdot \xi(k) (2p-k) \cdot \xi^*(k')}{(p-k')^2 - m^2} \end{aligned} \quad (10.42)$$

$$\begin{aligned} M_C &= 2iq^2 \eta^{\mu\nu} \xi_\mu(k) \xi_\nu^*(k') \\ &= 2iq^2 \xi(k) \cdot \xi^*(k') \end{aligned} \quad (10.43)$$

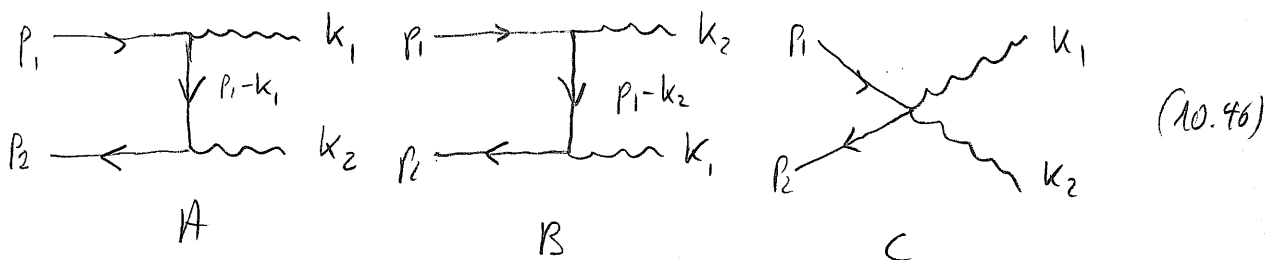
Dans le cas où  $q$  est un spinneur, on a:

$$\begin{aligned} M_A &= -(2m) \bar{V}(p) (-iq\gamma^\mu) \frac{i(-\not{p}-\not{k}+m)}{(p+k)^2 - m^2} (-iq\gamma^\nu) V(p') \xi_\mu(k) \xi_\nu^*(k') \\ &= iq^2(2m) \frac{\bar{V}(p) \not{\xi}(k) (-\not{p}-\not{k}+m) \not{\xi}^*(k') V(p')}{(p+k)^2 - m^2} \end{aligned} \quad (10.44)$$

$$\begin{aligned} M_B &= -(2m) \bar{V}(p) (-iq\gamma^\nu) \frac{i(\not{p}+\not{k}'+m)}{(p+k')^2 - m^2} (-iq\gamma^\mu) V(p') \xi_\mu(k) \xi_\nu^*(k') \\ &= iq^2(2m) \frac{\bar{V}(p) \not{\xi}^*(k') (\not{p}+\not{k}'+m) \not{\xi}(k) V(p')}{(p-k')^2 - m^2} \end{aligned} \quad (10.45)$$

$$f) q + \bar{q} \rightarrow \gamma + \gamma'$$

En général, il y a trois diagrammes :



(comme toujours les deux diagrammes A et B avec des vertex cubiques sont toujours présents, alors que le diagramme C avec le vertex quartic seulement pour les scalaires.

Dans le cas où q est un scalaire ou une bosone :

$$\begin{aligned} M_A &= (-iq)(2p_2 - k_2)^\nu \frac{i}{(p_1 - k_1)^2 - m^2} (-iq)(2p_1 - k_1)^\mu \xi_\mu^*(k_1) \xi_\nu^*(k_2) \\ &= -iq^2 \frac{(2p_1 - k_1) \cdot \xi^*(k_1) (2p_2 - k_2) \xi^*(k_2)}{(p_1 - k_1)^2 - m^2} \end{aligned} \quad (10.47)$$

$$\begin{aligned} M_B &= (-iq)(2p_2 - k_1)^\mu \frac{i}{(p_1 - k_2)^2 - m^2} (-iq)(2p_1 - k_2)^\nu \xi_\mu^*(k_1) \xi_\nu^*(k_2) \\ &= -iq^2 \frac{(2p_2 - k_1) \xi^*(k_1) (2p_1 - k_2) \xi^*(k_2)}{(p_1 - k_2)^2 - m^2} \end{aligned} \quad (10.48)$$

$$\begin{aligned} M_C &= 2iq^2 \eta^{\mu\nu} \xi_\mu^*(k_1) \xi_\nu^*(k_2) \\ &= 2iq^2 \xi^*(k_1) \cdot \xi^*(k_2) \end{aligned} \quad (10.49)$$

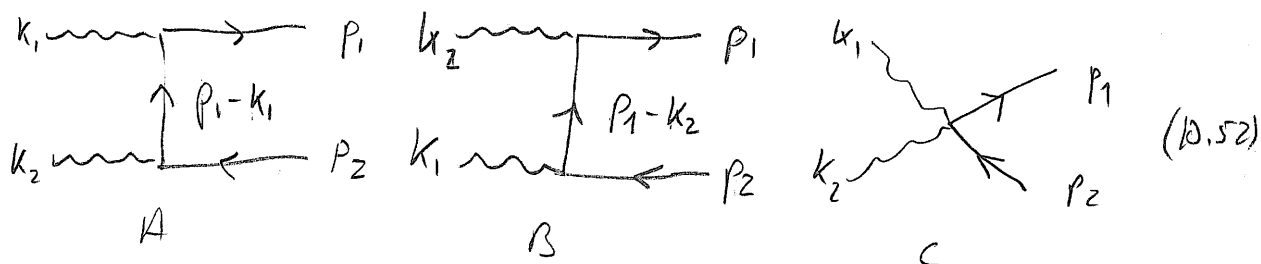
Dans le cas où q est un spinneur, on a :

$$\begin{aligned} M_A &= (2m) \bar{V}(p_2) (-iq\gamma^\nu) \frac{i(p_1 - k_1 + m)}{(p_1 - k_1)^2 - m^2} (-iq\gamma^\mu) U(p_1) \xi_\mu^*(k_1) \xi_\nu^*(k_2) \\ &= -iq^2 (2m) \frac{\bar{V}(p_2) \xi^*(k_2) (p_1 - k_1 + m) \not{\xi}^*(k_1) U(p_1)}{(p_1 - k_1)^2 - m^2} \end{aligned} \quad (10.50)$$

$$\begin{aligned} M_B &= (2m) \bar{V}(p_2) (-iq\gamma^\mu) \frac{i(p_1 - k_2 + m)}{(p_1 - k_2)^2 - m^2} (-iq\gamma^\nu) U(p_1) \xi_\mu^*(k_1) \xi_\nu^*(k_2) \\ &= -iq^2 (2m) \frac{\bar{V}(p_2) \not{\xi}^*(k_1) (p_1 - k_2 + m) \xi^*(k_2) U(p_1)}{(p_1 - k_2)^2 - m^2} \end{aligned} \quad (10.51)$$

$$3) \underline{\gamma + \gamma \rightarrow q + \bar{q}}$$

En général, il y a trois diagrammes :



Comme avant, les diagrammes A et B sont toujours présents, alors que C existe seulement pour les scalaires.

Dans le cas où  $q$  est un scalaire, on a :

$$\begin{aligned} M_A &= (-iq) (2p_1 - k_1)^\mu \frac{i}{(p_1 - k_1)^2 - m^2} (-iq) (2p_2 - k_2)^\nu \xi_\mu(k_1) \xi_\nu(k_2) \\ &= -iq^2 \frac{(2p_1 - k_1)_\mu \xi(k_1) (2p_2 - k_2)_\nu \xi(k_2)}{(p_1 - k_1)^2 - m^2} \end{aligned} \quad (10.53)$$

$$\begin{aligned} M_B &= (-iq) (2p_1 - k_2)^\nu \frac{i}{(p_1 - k_2)^2 - m^2} (-iq) (2p_2 - k_1)^\mu \xi_\mu(k_1) \xi_\nu(k_2) \\ &= -iq^2 \frac{(2p_1 - k_2)_\nu \xi(k_2) (2p_2 - k_1)_\mu \xi(k_1)}{(p_1 - k_2)^2 - m^2} \end{aligned} \quad (10.54)$$

$$\begin{aligned} M_C &= 2iq^2 \eta^{\mu\nu} \xi_\mu(k_1) \xi_\nu(k_2) \\ &= 2iq^2 \xi(k_1) \cdot \xi(k_2) \end{aligned} \quad (10.55)$$

Dans le cas où  $q$  est un spinor, on a :

$$\begin{aligned} M_A &= (2m) \bar{U}(p_1) (-iq\gamma^\mu) \frac{i(\not{p}_1 - \not{k}_1 + m)}{(p_1 - k_1)^2 - m^2} (-iq\gamma^\nu) V(p_2) \xi_\mu(k_1) \xi_\nu(k_2) \\ &= -iq^2 (2m) \bar{U}(p_1) \not{\xi}(k_1) (\not{p}_1 - \not{k}_1 + m) \not{\xi}(k_2) V(p_2) \end{aligned} \quad (10.56)$$

$$\begin{aligned} M_B &= (2m) \bar{U}(p_1) (-iq\gamma^\nu) \frac{i(\not{p}_1 - \not{k}_2 + m)}{(p_1 - k_2)^2 - m^2} (-iq\gamma^\mu) V(p_2) \xi_\mu(k_1) \xi_\nu(k_2) \\ &= -iq^2 (2m) \bar{U}(p_1) \not{\xi}(k_2) (\not{p}_1 - \not{k}_2 + m) \not{\xi}(k_1) V(p_2) \end{aligned} \quad (10.57)$$



### 10.5 Sommes sur les polarisations

Les particules élémentaires ont en général une polarisation de spin arbitraire, qui doit être spécifiée. Plus précisément, pour les particules scalaires, spinorielles et vectorielles correspondantes aux spins  $s=0, 1/2$  et  $1$ , on a la situation suivante :

$s=0$  particules : 1 polarisation : 1  
 antiparticules : 1 polarisation : 1

$s=1/2$  : particules : 2 polarisations :  $U_\alpha(\vec{p})$ ,  $\alpha=1,2$   
 antiparticules : 2 polarisations :  $V_\alpha(\vec{p})$ ,  $\alpha=1,2$

Ces polarisations forment des ensembles complets, dans le sens que :

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha=1}^2 U_{\alpha a}(\vec{p}) \bar{U}_{\alpha b}(\vec{p}) &= \frac{1}{2} \left( \mathbb{1} + \frac{\not{p}}{m} \right)_{ab} = \Lambda_{ab}^+(\vec{p}) \\ \sum_{\alpha=1}^2 V_{\alpha a}(\vec{p}) \bar{V}_{\alpha b}(\vec{p}) &= -\frac{1}{2} \left( \mathbb{1} - \frac{\not{p}}{m} \right)_{ab} = -\Lambda_{ab}^-(\vec{p}) \quad (10.58) \\ \sum_{\alpha=1}^2 U_{\alpha a}(\vec{p}) \bar{U}_{\alpha b}(\vec{p}) - \sum_{\alpha=1}^2 V_{\alpha a}(\vec{p}) \bar{V}_{\alpha b}(\vec{p}) &= \mathbb{1}_{ab} \end{aligned}$$

$s=1$  : particules = antiparticules : 4 polarisations :  $\sum_r^\mu(\vec{p})$ ,  $r=0,1,2,3$   
 Les polarisations forment un ensemble complet, dans le sens que :

$$\sum_{r=0}^3 \sum_r^\mu(\vec{p}) \sum_r^\nu(\vec{p}) = \eta^{\mu\nu} \quad (10.59)$$

Pour les particules externes réelles, les règles de Feynman dictent les facteurs suivants :

$$\begin{aligned}
 \underline{S=0} : & \quad \begin{array}{c} \longrightarrow \\ p \end{array} \text{---} = 1, & \quad \text{---} \begin{array}{c} \longrightarrow \\ p \end{array} = 1 \\
 & \quad \begin{array}{c} \longleftarrow \\ p \end{array} \text{---} = 1, & \quad \text{---} \begin{array}{c} \longleftarrow \\ p \end{array} = 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \underline{S=1/2} : & \quad \begin{array}{c} \alpha, a \\ \longrightarrow \\ p \end{array} \text{---} = \sqrt{2m} U_{\alpha a}(p), & \quad \text{---} \begin{array}{c} \alpha, a \\ \longrightarrow \\ p \end{array} = \sqrt{2m} \bar{U}_{\alpha a}(p) \\
 & \quad \begin{array}{c} \alpha, a \\ \longleftarrow \\ p \end{array} \text{---} = \sqrt{2m} \bar{V}_{\alpha a}(\vec{p}), & \quad \text{---} \begin{array}{c} \alpha, a \\ \longleftarrow \\ p \end{array} = \sqrt{2m} V_{\alpha a}(\vec{p})
 \end{aligned}$$

$$\underline{S=1} : \quad \begin{array}{c} r, \mu \\ \text{~~~~~} \\ \longrightarrow \\ p \end{array} \text{---} = \sum_r \epsilon_r^{\mu}(\vec{p}), \quad \text{---} \begin{array}{c} r, \mu \\ \text{~~~~~} \\ \longrightarrow \\ p \end{array} = \sum_r \epsilon_r^{*\mu}(\vec{p})$$

Pour les particules internes virtuelles, les règles de Feynman dictent au contraire les facteurs suivants :

$$\begin{aligned}
 \underline{S=0} : & \quad \begin{array}{c} \longrightarrow \\ q \end{array} = \frac{i}{q^2 - m^2 + i\epsilon} \\
 & \quad \begin{array}{c} \longleftarrow \\ -q \end{array} = \frac{i}{q^2 - m^2 + i\epsilon}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \underline{S=1/2} : & \quad \begin{array}{c} \longrightarrow \\ a \quad q \quad b \end{array} = \frac{i(\not{q} + m)_{ba}}{q^2 - m^2 + i\epsilon} \\
 & \quad \begin{array}{c} \longleftarrow \\ a \quad -q \quad b \end{array} = \frac{i(-\not{q} + m)_{ab}}{q^2 - m^2 + i\epsilon}
 \end{aligned}$$

$$\underline{S=1} : \quad \begin{array}{c} \text{~~~~~} \\ \mu \quad q \quad \nu \end{array} = \frac{i(-\eta_{\mu\nu})}{q^2 - m^2 + i\epsilon}$$

On remarque que, en utilisant les relations qui impliquent que les polarisations forment des ensembles complets, (10.60) et (10.61), on peut écrire:

$$\underline{S=0}: \quad \begin{array}{c} \longrightarrow \\ q \end{array} = \begin{array}{c} \longrightarrow \\ q \end{array} \cdots \frac{i}{q^2 - m^2 + i\epsilon} \cdots \begin{array}{c} \longrightarrow \\ q \end{array} = \frac{i}{q^2 - m^2 + i\epsilon}$$

$$\begin{array}{c} \longleftarrow \\ -q \end{array} = \begin{array}{c} \longleftarrow \\ -q \end{array} \cdots \frac{i}{q^2 - m^2 + i\epsilon} \cdots \begin{array}{c} \longleftarrow \\ q \end{array} = \frac{i}{q^2 - m^2 + i\epsilon}$$

$$\underline{S=1/2}: \quad \begin{array}{c} \longrightarrow \\ a \quad q \quad b \end{array} = \sum_{\alpha=1}^2 \begin{array}{c} \alpha \\ b \quad q \end{array} \cdots \frac{i}{q^2 - m^2 + i\epsilon} \cdots \begin{array}{c} \alpha \\ q \quad a \end{array} = \frac{i}{q^2 - m^2 + i\epsilon} \sum_{\alpha=1}^2 U_{\alpha b}(\vec{p}) \bar{U}_{\alpha a}(\vec{p})$$

$$\begin{array}{c} \longleftarrow \\ a \quad -q \quad b \end{array} = - \sum_{\alpha=1}^2 \begin{array}{c} \alpha \\ b \quad q \end{array} \cdots \frac{i}{q^2 - m^2 + i\epsilon} \cdots \begin{array}{c} \alpha \\ q \quad a \end{array} = \frac{-i}{q^2 - m^2 + i\epsilon} \sum_{\alpha=1}^2 V_{\alpha a}(\vec{p}) \bar{V}_{\alpha b}(\vec{p})$$

$$\underline{S=1}: \quad \begin{array}{c} \text{~~~~~} \\ \mu \quad q \quad \nu \end{array} = \sum_{r=0}^3 \begin{array}{c} r \\ \nu \quad q \end{array} \cdots \frac{i}{q^2 + i\epsilon} \cdots \begin{array}{c} r \\ q \quad \mu \end{array} = \frac{-i}{q^2 + i\epsilon} \sum_{r=0}^3 \sum_r^{\mu}(\vec{p}) \sum_r^{\nu}(\vec{p})$$

On voit donc que les structures matricielles apparaissant dans chaque propagateur correspondent à la propagation de toutes les polarisations de spin possibles.

Experimentalement, il est intéressant de considérer un certain type de processus en faisant la moyenne sur les polarisations initiales et la somme sur les polarisations finales possibles, si ces différentes polarisations ne sont pas distinguées dans la mesure des grandeurs observables. On parle alors de grandeurs observables non-polarisées.

Le processus de moyenne / somme sur les polarisations des particules externes permet de simplifier considérablement les amplitudes correspondantes. En effet, on peut utiliser les relations (10.58) et (10.59) pour réexprimer le résultat en fonction des impulsions externes uniquement.

Considérons par exemple un processus avec une particule de spin 1/2 dans l'état initial et une autre dans l'état final. L'amplitude pour des polarisations  $\alpha=1,2$  et  $\beta=1,2$  fixées a alors la forme :

$$M_{\alpha\beta}(p,p') = \bar{u}_{\beta a}(p') M_{ab}(p,p') u_{\alpha b}(p)$$

$$M_{\alpha\beta}^*(p,p') = \bar{u}_{\alpha c}(p) \tilde{M}_{cd}(p,p') u_{\beta d}(p') \tag{10.60}$$

avec :

$$\tilde{M}_{cd}(p,p') = \gamma_{cp}^0 \Gamma_{pq}^+(p,p') \gamma_{qd}^0 \tag{10.61}$$

L'amplitude carrée non-polarisée est alors donnée par :

$$|\bar{M}|^2 = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{\beta=1}^2 |M_{\alpha\beta}(p,p')|^2$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{\beta=1}^2 \bar{u}_{\beta a}(p') M_{ab}(p,p') u_{\alpha b}(p) \bar{u}_{\alpha c}(p) \tilde{M}_{cd}(p,p') u_{\beta d}(p')$$

$$= \frac{1}{2} \left( \sum_{\beta=1}^2 u_{\beta d}(p') \bar{u}_{\beta a}(p') \right) M_{ab}(p,p') \left( \sum_{\alpha=1}^2 u_{\alpha b}(p) \bar{u}_{\alpha c}(p) \right) \tilde{M}_{cd}(p,p')$$

$$= \frac{1}{2} \Lambda_{da}^+(p') M_{ab}(p,p') \Lambda_{bc}^+(p) \tilde{M}_{cd}(p,p')$$

$$= \frac{1}{2} \text{Tr} \left[ \Lambda^+(p') M(p,p') \Lambda^+(p) \tilde{M}(p,p') \right] \tag{10.62}$$

Dans le cas où on a une antiparticule de spin  $\frac{1}{2}$  dans l'état initial et une autre dans l'état final, l'amplitude pour des polarisations  $\alpha=1,2$  et  $\beta=1,2$  prend à la forme:

$$M_{\alpha\beta}(p,p') = \bar{V}_{\beta a}(p') M_{ab}(p,p') V_{\alpha b}(p)$$

$$M_{\alpha\beta}^*(p,p') = \bar{V}_{\alpha c}(p) \tilde{M}_{cd}(p,p') V_{\beta d}(p')$$
(10.63)

avec :

$$\tilde{M}_{cd}(p,p') = \gamma_{c\rho}^0 M_{pq}^+(p,p') \gamma_{q\sigma}^0$$
(10.64)

L'amplitude corrigée non-polarisée est alors :

$$|M|^2 = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{\beta=1}^2 |M_{\alpha\beta}(p,p')|^2$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{\beta=1}^2 \bar{V}_{\beta a}(p') M_{ab}(p,p') V_{\alpha b}(p) \bar{V}_{\alpha c}(p) \tilde{M}_{cd}(p,p') V_{\beta d}(p')$$

$$= \frac{1}{2} \left( \sum_{\beta=1}^2 V_{\beta d}(p) \bar{V}_{\beta a}(p') \right) M_{ab}(p,p') \left( \sum_{\alpha=1}^2 V_{\alpha b}(p) \bar{V}_{\alpha c}(p) \right) \tilde{M}_{cd}(p,p')$$

$$= \frac{1}{2} (-\Lambda_{da}^-(p')) M_{ab}(p,p') (-\Lambda_{bc}^-(p)) \tilde{M}_{cd}(p,p')$$

$$= \frac{1}{2} \text{Tr} \left[ \Lambda^-(p') M_{ab}(p,p') \Lambda^-(p) \tilde{M}_{cd}(p,p') \right]$$
(10.65)

Dans les cas mixtes contenant une particule de spin  $\frac{1}{2}$  et une antiparticule de spin  $\frac{1}{2}$  dans les états initiaux ou finaux, au lieu des résultats semblables, qui ont toujours la forme de traces sur les matrices symétriques avec des projecteurs  $\Lambda^\pm$ .

considérons maintenant le cas où on a une particule de spin 1 dans l'état initial et une particule de spin 1 dans l'état final. L'amplitude pour des polarisations  $r=0,1,2,3$  et  $s=0,1,2,3$  fixées a la forme :

$$M_{rs}(k, k') = \sum_r^\mu(k) \Gamma_{\mu\nu}(k, k') \sum_s^{\nu*}(k')$$

$$M_{rs}^*(k, k') = \sum_s^\nu(k') \Gamma_{\nu\mu}^*(k, k') \sum_r^{\mu*}(k)$$
(10.66)

L'invariance de jauge de ces amplitudes implique qu'elles s'annulent si un des deux photons a une polarisation longitudinale non-physique, proportionnelle à  $k^\mu$  :

$$k^\mu \Gamma_{\mu\nu}(k, k') = 0$$

$$\Gamma_{\mu\nu} k'^\nu(k, k') = 0$$
(10.67)

Pour obtenir l'amplitude non-polarisée, on peut alors étudier la somme des polarisations sur toutes les possibilités  $r=0,1,2,3,4$ . Ceci inclut les deux polarisations physiques, mais aussi les deux autres, qui toutefois ne contribuent pas vu qu'elles sont longitudinales, c'est-à-dire proportionnelles à  $k^\mu, k'^\nu$ .

Finalement, on obtient alors :

$$\begin{aligned}
 |\overline{M}|^2 &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^3 \sum_{s=0}^3 |M_{rs}(k, k')|^2 \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^3 \sum_{s=0}^3 \sum_r^\mu(k) \Gamma_{\mu\nu}(k, k') \xi_s^\nu(k') \xi_s^\beta(k') \Gamma_{\beta\alpha}^\nu(k, k') \xi_r^\alpha(k) \\
 &= \frac{1}{2} \left( \sum_{r=0}^3 \xi_r^\alpha(k) \xi_r^\mu(k) \right) \Gamma_{\mu\nu}(k, k') \left( \sum_{s=0}^3 \xi_s^\nu(k') \xi_s^\beta(k') \right) \Gamma_{\beta\alpha}^\nu(k, k') \\
 &= \frac{1}{2} \eta^{\alpha\mu} \Gamma_{\mu\nu}(k, k') \eta^{\nu\beta} \Gamma_{\beta\alpha}^\nu(k, k') \\
 &= \frac{1}{2} \Gamma_{\mu\nu}(k, k') \Gamma^{*\nu\mu}(k, k') \quad (10.68)
 \end{aligned}$$

On voit donc que les amplitudes carrées non-polarisées ont la forme de traces sur les indices de la représentation. Les traces sur les indices vectoriels sont simplement des produits scalaires de Minkowski avec la métrique  $\eta$ , et sont donc faciles à calculer. Les traces sur les indices spinoriels sont un peu plus compliquées à évaluer. Mais on peut toujours évaluer la trace en utilisant seulement les propriétés algébriques de définition des matrices  $\gamma^\mu$ , sans avoir à faire un choix particulier pour leur représentation.

Les amplitudes carrées non-polarisées sont donc plus faciles à évaluer, car on ne doit utiliser aucune polarisation de spin explicite. Toutefois, elles contiennent moins d'information sur la dynamique liée au spin.

### 10.6 Identités algébriques utiles

En utilisant la propriété de définition des matrices  $\gamma^\mu$ , c'est-à-dire

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu} \tag{10.69}$$

on peut facilement dériver toute une série d'identités algébriques très utiles pour le calcul pratique des amplitudes de transition.

Par les traces vectorielles, on a les identités suivantes :

- $\gamma^\mu \gamma_\mu = 4$
- $\gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma_\mu = -2\gamma^\alpha$
- $\gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma_\mu = 4\eta^{\alpha\beta}$
- $\gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\gamma \gamma_\mu = -2\gamma^\gamma \gamma^\beta \gamma^\alpha$
- $\gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\gamma \gamma^\delta \gamma_\mu = 2(\gamma^\delta \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\gamma + \gamma^\delta \gamma^\beta \gamma^\alpha \gamma^\gamma)$

(10.70)

Par les traces spinorielles, on a les identités suivantes :

- $\text{Tr}(\gamma^\alpha) = 0$
- $\text{Tr}(\gamma^\alpha \gamma^\beta) = 4\eta^{\alpha\beta}$
- $\text{Tr}(\gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\gamma) = 0$
- $\text{Tr}(\gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\gamma \gamma^\delta) = 4(\eta^{\alpha\beta} \eta^{\gamma\delta} - \eta^{\alpha\gamma} \eta^{\beta\delta} + \eta^{\alpha\delta} \eta^{\beta\gamma})$

(10.71)



## 11 EXEMPLES D'APPLICATIONS

### 11.1 Diffusion de Rutherford

La diffusion de Rutherford est le processus de diffusion élastique entre deux particules chargées distinctes,  $q$  et  $Q$ , avec charge  $q$  et  $Q$ , et masses  $m$  et  $M$ :

$$q + Q \rightarrow q + Q \quad (11.1)$$

Il n'y a dans ce cas qu'un seul diagramme:



Les conditions de couche de masse sont:

$$\begin{aligned} k^2 &= k'^2 = m^2 \\ p^2 &= p'^2 = M^2 \end{aligned} \quad (11.3)$$

La conservation de la 4-impulsion implique:

$$k^\mu + p^\mu = k'^\mu + p'^\mu \quad (11.4)$$

Il suit alors que:

$$\begin{aligned} k \cdot p' &= k \cdot p \\ k \cdot p' &= k' \cdot p \\ p \cdot p' &= k k' + M^2 - m^2 \end{aligned} \quad (11.5)$$

Les amplitudes de transitions pour des scalaires ( $s=0$ ) et des spinneurs ( $s=1/2$ ) sont données par :

$$\cdot M^{(0)} = i g Q \frac{(k+k')(p+p')}{(k-k')^2} \quad (11.6)$$

$$\cdot M^{(1/2)} = i g Q (2m)(2M) \frac{\bar{U}(k') \gamma^\mu U(k) \bar{U}(p') \gamma^\nu U(p)}{(k-k')^2} \quad (11.7)$$

Les amplitudes carrées non polarisées sont facilement calculées. Pour les scalaires on a simplement :

$$\begin{aligned} |\bar{M}|^{2(0)} &= |M^{(0)}|^2 \\ &= \left( \frac{k \cdot p + k' \cdot p + k \cdot p' + k' \cdot p'}{(k-k')^2} \right)^2 \\ &= 4 \frac{(k \cdot p + k' \cdot p)^2}{(k-k')^4} \end{aligned} \quad (11.8)$$

Pour les spinneurs, on obtient :

$$\begin{aligned} |\bar{M}|^{2(1/2)} &= \frac{1}{4} \sum_{\text{spin } k} \sum_{\text{spin } p} |M^{(1/2)}|^2 \\ &= \frac{(gQ)^2}{4} \frac{(2m)^2 (2M)^2 \text{tr}[\Lambda^+(k') \gamma^\mu \Lambda^+(k) \gamma^\nu] \text{tr}[\Lambda^+(p') \gamma_\mu \Lambda^+(p) \gamma_\nu]}{(k-k')^4} \\ &= \frac{(gQ)^2}{4} \frac{\text{tr}[(k'+m) \gamma^\mu (k+m) \gamma^\nu] \text{tr}[(p'+M) \gamma_\mu (p+M) \gamma_\nu]}{(k-k')^4} \end{aligned}$$

Pour calculer les deux traces sur les indices spinoriels, on utilise les identités algébriques données par les équations (10.71), qui résultent de la définition des  $\gamma^\mu$ .

On calcule :

$$\begin{aligned}
 \bullet \operatorname{tr} [(k+m) \gamma^\mu (k+m) \gamma^\nu] &= \operatorname{tr} [k' \gamma^\mu k \gamma^\nu] + m^2 \operatorname{tr} [\gamma^\mu \gamma^\nu] \\
 &= 4(k'^\mu k^\nu - k' \cdot k \eta^{\mu\nu} + k'^\nu k^\mu) + m^2 4 \eta^{\mu\nu} \\
 &= 4[(k'^\mu k'^\nu + k'^\nu k'^\mu) + (m^2 - k k') \eta^{\mu\nu}]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bullet \operatorname{tr} [(\not{p}+M) \gamma_\mu (\not{p}+M) \gamma_\nu] &= \operatorname{tr} [p' \gamma_\mu p \gamma_\nu] + M^2 \operatorname{tr} [\gamma_\mu \gamma_\nu] \\
 &= 4(p'_\mu p'_\nu - p' \cdot p \eta_{\mu\nu} + p'_\nu p'_\mu) + M^2 4 \eta_{\mu\nu} \\
 &= 4[(p'_\mu p'_\nu + p'_\nu p'_\mu) + (M^2 - p p') \eta_{\mu\nu}]
 \end{aligned}$$

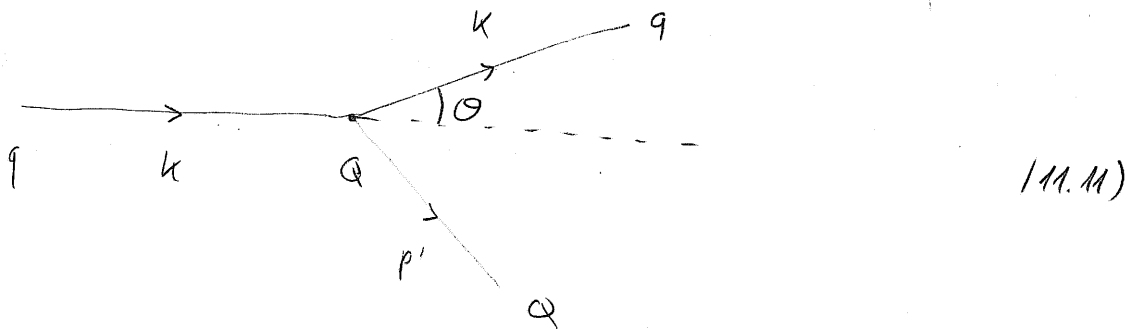
Il suit que :

$$\begin{aligned}
 \operatorname{tr} [(k+m) \gamma^\mu (k+m) \gamma^\nu] \operatorname{tr} [(\not{p}+M) \gamma_\mu (\not{p}+M) \gamma_\nu] &= \\
 &= 16 \left[ 2(k \cdot p k' p' + k \cdot p' k' p) + 4(m^2 k k') (M^2 p p') \right. \\
 &\quad \left. + 2 k k' (M^2 - p p') + 2 p p' (m^2 - k k') \right] \\
 &= 16 \left[ 2 k p k' p' + 2 k p' k' p + 4 m^2 M^2 \right. \\
 &\quad \left. - 2 M^2 k \cdot k' - 2 m^2 p \cdot p' \right] \\
 &= 32 \left[ (k p)^2 + (k p')^2 + 2 m^2 M^2 - M^2 k k' - m^2 (k \cdot k' + M^2 - m^2) \right] \\
 &= 32 \left[ (k \cdot p)^2 + (k \cdot p')^2 + (m^2 + M^2) (m^2 - k k') \right]
 \end{aligned}$$

On a donc finalement :

$$|\bar{M}|^{2(1/2)} = 8(g_0)^2 \frac{(k \cdot p)^2 + (k \cdot p')^2 + (m^2 + M^2) (m^2 - k k')}{(k - k')^4} \quad (11.9)$$

La cinématique a sa forme la plus simple dans le référentiel du CM, et dans le référentiel du LAB elle devient bien plus compliquée. Toutefois, ce genre de processus est typiquement réalisé expérimentalement avec une cible au repos, et il est dans ce cas plus intéressant de décrire le résultat dans le LAB. Le processus a alors l'allure suivante:



En utilisant la conservation de la 4-impulsion pour exprimer  $p'^{\mu}$  en fonction de  $k^{\mu}$ ,  $k'^{\mu}$  et  $p^{\mu}$ , on trouve:

$$k^{\mu} = (E, \vec{p})$$

$$p^{\mu} = (M, \vec{0})$$

$$k'^{\mu} = (E', \vec{p}')$$

$$p'^{\mu} = (M+E-E', \vec{p}-\vec{p}')$$

(11.12)

les relations de cadre de masse donnent ensuite:

$$E^2 - \vec{p}^2 = E'^2 - \vec{p}'^2 = m^2$$

$$(M+E-E') - (\vec{p}-\vec{p}')^2 = M^2$$

(11.13)

l'état initial peut être caractérisé par l'énergie incidente  $E$ , alors que l'état final peut être caractérisé par l'angle de diffusion  $\theta$ .

Pour simplifier un peu la cinématique, nous allons considérer la situation où :

$$E \ll M \tag{11.14}$$

Dans ce cas, le recul de la cible peut être négligé, et la deuxième des (11.13) donne alors :

$$\begin{aligned} E' &\approx E \\ p' &\approx p \end{aligned} \tag{11.15}$$

Dans cette situation, on trouve :

$$\begin{aligned} k \cdot p &\approx ME \\ k' \cdot p &\approx ME \\ kk' &\approx E^2 - (E^2 - m^2) \cos \theta \end{aligned} \tag{11.16}$$

et donc :

$$\begin{aligned} (k - k')^2 &= 2(m^2 - kk') \\ &\approx -2(E^2 - m^2)(1 - \cos \theta) \\ &\approx -4(E^2 - m^2) \sin^2 \frac{\theta}{2} \end{aligned} \tag{11.17}$$

Les amplitudes deviennent alors :

$$\begin{aligned} |\overline{M}|^{2(\text{co})} &\approx 4(qQ)^2 \left( \frac{2ME}{-4(E^2 - m^2) \sin^2 \frac{\theta}{2}} \right)^2 \\ &\approx (qQ)^2 \frac{M^2 E^2}{(E^2 - m^2)^2} \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} \end{aligned} \tag{11.18}$$

$$\begin{aligned} |\overline{M}|^{2(\text{in})} &\approx 8(qQ)^2 \left( \frac{2M^2 E^2 - 2M^2(E^2 - m^2) \sin^2 \frac{\theta}{2}}{16(E^2 - m^2) \sin^4 \frac{\theta}{2}} \right) \\ &\approx (qQ)^2 \frac{M^2 E^2}{(E^2 - m^2)^2} \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} \left( 1 - \frac{E^2 - m^2}{E^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \end{aligned} \tag{11.19}$$

Finalement, la section efficace de diffusion différentielle est calculée comme :

$$\frac{d\sigma^{(s)}}{d\Omega'} = \frac{\hat{Q}_F}{D_i} |\bar{M}|^{2(s)} \tag{11.20}$$

avec :

$$\begin{aligned} \cdot D_i &= 4\sqrt{(k \cdot p)^2 - m^2 M^2} \\ &= 4\sqrt{E^2 M^2 - m^2 M^2} \\ &= 4\sqrt{E^2 - m^2} M \end{aligned} \tag{11.21}$$

$$\begin{aligned} \cdot \hat{Q}_F &= \int \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3 2E_{k'}} \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3 2E_{p'}} (2\pi)^4 \delta^4(k+p-k'-p') \\ &= \frac{1}{8\pi^2} \int_0^{+\infty} \frac{dk' k'^2}{E'} \int d^4 p' \delta(p'^2 - M^2) \Theta(E_{p'}) \delta^4(k+p-k'-p') \\ &= \frac{1}{8\pi^2} \int_M^{+\infty} dE' k' \delta[(p+k-k')^2 - M^2] \Theta(M+E-E') \\ &= \frac{1}{8\pi^2} \int_M^{M+E} dE' k' \delta[(M+E-E')^2 - (\vec{p}-\vec{p}')^2 - M^2] \\ &\simeq \frac{1}{8\pi^2} \int_M^{M+E} dE' k' \delta[2M(E-E')] \\ &\simeq \frac{1}{8\pi^2} \frac{k'}{2M} \\ &\simeq \frac{1}{16\pi^2} \frac{\sqrt{E^2 - M^2}}{M} \end{aligned} \tag{11.22}$$

On a donc :

$$\frac{d\sigma^{(s)}}{d\Omega'} \simeq \frac{1}{64\pi^2 M^2} |\bar{M}|^{2(s)} \tag{11.23}$$

Les sections efficaces de diffusion sont finalement données par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\sigma^{(0)}}{d\Omega'} = \frac{(qQ)^2}{64\pi^2 m^2} \frac{m^2 E^2}{(E^2 - m^2)^2} \frac{1}{\sin^4 \frac{4\theta}{2}} \\ \frac{d\sigma^{(1/2)}}{d\Omega'} = \frac{(qQ)^2}{64\pi^2 m^2} \frac{m^2 E^2}{(E^2 - m^2)^2} \frac{1}{\sin^4 \frac{4\theta}{2}} \left( 1 - \frac{E^2 m^2}{E^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \end{array} \right. \quad (11.24)$$

Ces expressions peuvent être écrites en fonction des paramètres relativistes  $\beta$  et  $\gamma$  caractérisant la particule incidente. En effet, on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} E^2 = m^2 \gamma^2 \\ E^2 - m^2 = m^2 \gamma^2 \beta^2 \end{array} \right. \quad (11.25)$$

En introduisant le rayon effectif :

$$r_0 = \frac{qQ}{4\pi m} \quad (11.26)$$

On trouve alors finalement :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\sigma^{(0)}}{d\Omega'} = \frac{r_0^2}{4\gamma^2 \beta^4 \sin^4 \frac{4\theta}{2}} \\ \frac{d\sigma^{(1/2)}}{d\Omega'} = \frac{r_0^2}{4\gamma^2 \beta^4 \sin^4 \frac{4\theta}{2}} \left( 1 - \beta^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \end{array} \right. \quad (11.27)$$

Dans la limite non-relativiste, on retrouve dans les deux cas l'expression classique de Rutherford :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega'} \approx \frac{r_0^2}{4\beta^4 \sin^4 \frac{4\theta}{2}} \quad (11.28)$$

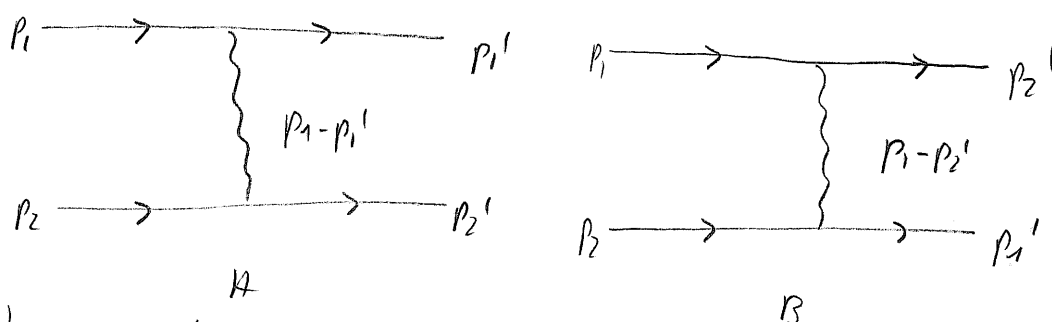
## 11.2 Diffusion de Moeller

La diffusion de Moeller est le processus de diffusion élastique entre deux particules chargées identiques, de charge  $q$  et masse  $m$ :

$$q + q \rightarrow q + q$$

(11.29)

Dans ce cas, il y a deux diagrammes, un direct et un d'échange:



(11.30)

Les conditions de couche de masse sont:

$$p_i^2 = p_i'^2 = m^2$$

(11.31)

La conservation de la 4-impulsion implique:

$$p_1^\mu + p_2^\mu = p_1'^\mu + p_2'^\mu$$

(11.32)

Il suit alors que:

$$p_1' p_2' = p_1 p_2$$

$$p_1 p_2' = p_1' p_2$$

$$p_2 p_2' = p_1 p_1'$$

(11.33)



Les amplitudes de transition pour des scalaires ( $s=0$ )  
et des spinneurs ( $s=1/2$ ) sont données par :

$$\begin{cases} M_A^{(0)} = i q^2 \frac{(p_1 + p_1')(p_2 + p_2')}{(p_1 - p_1')^2} \\ M_B^{(0)} = i q^2 \frac{(p_1 + p_2')(p_2 + p_1')}{(p_1 - p_2')^2} \end{cases} \quad (11.34)$$

$$\begin{cases} M_A^{(1/2)} = i q^2 (2m)^2 \frac{\bar{u}(p_1') \gamma^\mu u(p_1) \bar{u}(p_2') \gamma_\mu u(p_2)}{(p_1 - p_1')^2} \\ M_B^{(1/2)} = -i q^2 (2m)^2 \frac{\bar{u}(p_2') \gamma^\mu u(p_1) \bar{u}(p_1') \gamma_\mu u(p_2)}{(p_1 - p_2')^2} \end{cases} \quad (11.35)$$

Les amplitudes canoïques non-polarisées sont ensuite  
facilement calculées. Pour les scalaires, on a :

$$\begin{aligned} |\bar{M}|^{2(0)} &= |M^{(0)}|^2 \\ &= q^4 \left( \frac{(p_1 + p_1')(p_2 + p_2')}{(p_1 - p_1')^2} + (p_1' \leftrightarrow p_2') \right)^2 \\ &= q^4 \left( \frac{(2p_1 + p_2 - p_2')(p_2 + p_2')}{(p_1 - p_1')^2} + (p_1' \leftrightarrow p_2') \right)^2 \\ &= q^4 \left( \frac{2p_1(p_2 + p_2')}{(p_1 - p_1')^2} + (p_1' \leftrightarrow p_2') \right)^2 \\ &= 4q^4 \left( \frac{p_1 p_2 + p_1 p_2'}{(p_1 - p_1')^2} + (p_1' \leftrightarrow p_2') \right)^2 \end{aligned} \quad (11.36)$$

Pour les spinneurs, on peut calculer la somme sur  
les polarisations externes de la façon usuelle.

On obtient :

$$\begin{aligned}
 |\bar{M}|^{2(\frac{1}{2})} &= \frac{1}{4} \sum_{\text{not int}} \sum_{\text{not fin}} |M^{(\frac{1}{2})}|^2 \\
 &= \frac{g^4}{4} (2m)^4 \left\{ \frac{\text{tr}[\Lambda^+(\mathbf{p}_1) \gamma^\mu \Lambda^+(\mathbf{p}_1) \gamma^\nu] \text{tr}[\Lambda^+(\mathbf{p}_2') \gamma_\mu \Lambda^+(\mathbf{p}_2) \gamma_\nu]}{(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_1')^2} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\text{tr}[\Lambda^+(\mathbf{p}_1) \gamma^\mu \Lambda^+(\mathbf{p}_1) \gamma^\nu \Lambda^+(\mathbf{p}_2') \gamma_\mu \Lambda^+(\mathbf{p}_2) \gamma_\nu]}{(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_1')^2 (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2')^2} \right. \\
 &\quad \left. + (\mathbf{p}_1' \leftrightarrow \mathbf{p}_2') \right\} \\
 &= \frac{g^4}{4} \left\{ \frac{\text{tr}[(\mathbf{p}_1' + m) \gamma^\mu (\mathbf{p}_1 + m) \gamma^\nu] \text{tr}[(\mathbf{p}_2' + m) \gamma_\mu (\mathbf{p}_2 + m) \gamma_\nu]}{(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_1')^4} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\text{tr}[(\mathbf{p}_1' + m) \gamma^\mu (\mathbf{p}_1 + m) \gamma^\nu (\mathbf{p}_2' + m) \gamma_\mu (\mathbf{p}_2 + m) \gamma_\nu]}{(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_1')^2 (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2')^2} \right. \\
 &\quad \left. + (\mathbf{p}_1' \leftrightarrow \mathbf{p}_2') \right\}
 \end{aligned}$$

Le premier terme est facilement évalué en procédant comme dans le cas de la diffusion Rutherford.

On calcule d'abord :

$$\begin{aligned}
 \cdot \text{tr}[(\mathbf{p}_1' + m) \gamma^\mu (\mathbf{p}_1 + m) \gamma^\nu] &= \text{tr}[\mathbf{p}_1' \gamma^\mu \mathbf{p}_1 \gamma^\nu + m^2 \gamma^\mu \gamma^\nu] \\
 &= 4 \left[ (\mathbf{p}_1'^\mu \mathbf{p}_1^\nu + \mathbf{p}_1^\mu \mathbf{p}_1'^\nu) + (m^2 - \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_1') \eta^{\mu\nu} \right] \\
 \cdot \text{tr}[(\mathbf{p}_2' + m) \gamma_\mu (\mathbf{p}_2 + m) \gamma_\nu] &= \text{tr}[\mathbf{p}_2' \gamma_\mu \mathbf{p}_2 \gamma_\nu + m^2 \gamma_\mu \gamma_\nu] \\
 &= 4 \left[ (\mathbf{p}_2'_\mu \mathbf{p}_2^\nu + \mathbf{p}_2^\mu \mathbf{p}_2'_\nu) + (m^2 - \mathbf{p}_2 \mathbf{p}_2') \eta_{\mu\nu} \right]
 \end{aligned}$$

Il suit que :

$$\begin{aligned}
& \text{tr} [(\not{p}_1 + m) \gamma^\mu (\not{p}_1 + m) \gamma^\nu] \text{tr} [(\not{p}_2 + m) \gamma_\mu (\not{p}_2 + m) \gamma_\nu] = \\
& = 16 \left[ 2(p_1 p_2 p_1' p_2' + p_1 p_2' p_2 p_1') + 4(m^2 - p_1 p_1')(m^2 - p_2 p_2') \right. \\
& \quad \left. + 2 p_1 p_1' (m^2 - p_2 p_2') + 2 p_2 p_2' (m^2 - p_1 p_1') \right] \\
& = 16 \left[ 2(p_1 p_2)^2 + 2(p_1 p_2')^2 + 4(m^2 - p_1 p_1')^2 \right. \\
& \quad \left. + 4 p_1 p_1' (m^2 - p_1 p_1') \right] \\
& = 16 \left[ 2(p_1 p_2)^2 + 2(p_1 p_2')^2 + 4m^2 - 4m^2 p_1 p_1' \right] \\
& = 32 \left[ (p_1 p_2)^2 + (p_1 p_2')^2 + 2m^2(m^2 - p_1 p_1') \right]
\end{aligned}$$

Pour le deuxième terme, on commence par observer qu'en utilisant de propriétés algébriques (10.70), on peut écrire :

$$\begin{aligned}
& \gamma^\mu (\not{p}_1 + m) \gamma^\nu (\not{p}_2 + m) \gamma_\mu = \gamma^\mu \not{p}_1 \gamma^\nu \not{p}_2 \gamma_\mu + m \gamma^\mu (\not{p}_1 \gamma^\nu + \gamma^\nu \not{p}_2) \gamma_\mu \\
& \quad + m^2 \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_\mu \\
& = -2 \not{p}_2' \gamma^\nu \not{p}_1 + 4m (p_1 + p_2)^\nu - 2m^2 \gamma^\nu \\
& = -2 \left[ \not{p}_2' \gamma^\nu \not{p}_1 - 2m (p_1 + p_2)^\nu + m^2 \gamma^\nu \right]
\end{aligned}$$

La trace à calculer peut alors être ultérieurement manipulée à l'aide des relations (10.70) et enfin être calculée en utilisant les relations (10.71).

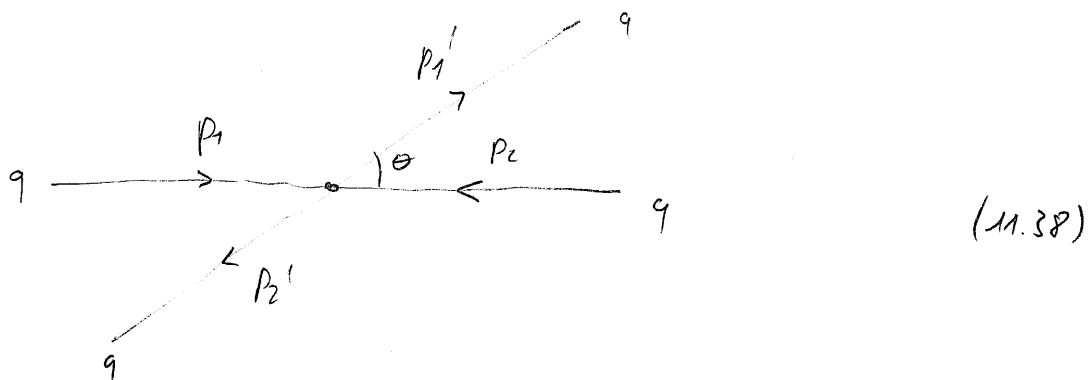
On obtient :

$$\begin{aligned}
 \text{tr} [(\not{p}_1 + m) \gamma^\mu (\not{p}_1 + m) \gamma^\nu (\not{p}_2 + m) \gamma_\mu (\not{p}_2 + m) \gamma_\nu] &= \\
 &= -2 \text{tr} [(\not{p}_1 + m) (\not{p}_2' \gamma^\nu \not{p}_1 - 2m(p_1 + p_2)'_\nu + m^2 \gamma^\nu) (\not{p}_2 + m) \gamma_\nu] \\
 &= -2 \text{tr} [ \not{p}_1' \not{p}_2' \gamma^\nu \not{p}_1 \not{p}_2 \gamma_\nu + m^2 \not{p}_2' \gamma^\nu \not{p}_1 \gamma_\nu \\
 &\quad - 2m^2 \not{p}_1' (p_1 + p_2)' - 2m^2 \not{p}_2 (p_1 + p_2)' \\
 &\quad + m^2 \not{p}_1' \gamma^\nu \not{p}_2 \gamma_\nu + m^4 \gamma^\nu \gamma_\nu ] \\
 &= -2 \text{tr} [ 4 p_1 p_2 p_1' p_2' - 2m^2 \not{p}_2' \not{p}_1 - 2m^2 (\not{p}_2 + \not{p}_1') (p_1 + p_2)' \\
 &\quad - 2m^2 \not{p}_1' \not{p}_2 + 4m^4 ] \\
 &= -2 [ 16 p_1 p_2 p_1' p_2' - 8m^2 p_2' p_1 - 8m^2 (p_2 + p_1') (p_1 + p_2)' \\
 &\quad - 8m^2 p_1' p_2 + 16m^4 ] \\
 &= -2 [ 16(p_1 p_2)^2 - 16m^2 p_1 p_2' - 8m^2 (2p_1 p_2 + 2p_1 p_1') + 16m^4 ] \\
 &= -32 [ (p_1 p_2)^2 - m^2 p_1 (p_2 + p_1' + p_2') + m^4 ] \\
 &= -32 [ (p_1 p_2)^2 - m^2 p_1 (p_1' + 2p_2) + m^4 ] \\
 &= -32 [ (p_1 p_2)^2 - 2m^2 p_1 p_2 ]
 \end{aligned}$$

Le résultat final est alors :

$$|\overline{M}|^2^{(1)} = 894 \left\{ \frac{(p_1 p_2)^2 + (p_1 p_2')^2 + 2m^2(m^2 - p_1 p_1')}{(p_1 - p_1')^4} + \frac{(p_1 p_2)^2 - 2m^2 p_1 p_2}{(p_1 - p_1')^2 (p_1 - p_2')^2} + (p_1' \leftrightarrow p_2') \right\} \quad (11.57)$$

La cinématique est comme toujours la plus simple dans le référentiel du CM, tandis que dans le référentiel des LAB elle devient nettement plus compliquée. Dans ce cas, il est en fait naturel de donner les résultats dans le CM, vu que les particules sont identiques, et que expérimentalement ce type de processus est réalisé en faisant collisionner deux particules avec des vitesses égales et opposées issues d'un accélérateur. Dans le CM, il est facile de considérer la cinématique exacte, sans aucune approximation. Le processus a alors l'allure suivante :



En utilisant la conservation de la 4-impulsion, on trouve :

$$p_1^M = (E, \vec{p})$$

$$p_2^M = (E, -\vec{p})$$

$$p_1'^M = (E', \vec{p}')$$

$$p_2'^M = (E', -\vec{p}')$$

(11.39)

Les relations de conservation de masse impliquent ensuite :

$$E^2 - \vec{p}^2 = E'^2 - \vec{p}'^2 = m^2 \quad (11.40)$$

On a finalement :

$$\begin{cases} E' = E \\ p' = p \end{cases} \quad (11.41)$$

On peut alors caractériser l'état initial par l'énergie  $E$ , portée par chacune des particules, et l'état final par l'angle de diffusion  $\theta$  de chaque particule.

On trouve :

$$\begin{aligned} p_1 p_2 &= 2E^2 - m^2 \\ p_1 p_1' &= E^2 - (E^2 - m^2) \cos \theta \\ p_1 p_2' &= E^2 + (E^2 - m^2) \cos \theta \end{aligned} \quad (11.42)$$

Il suit que :

$$\begin{aligned} (p_1 - p_1')^2 &= 2(m^2 - p_1 p_1') \\ &= -2(E^2 - m^2)(1 - \cos \theta) \\ &= -4(E^2 - m^2) \sin^2 \frac{\theta}{2} \end{aligned} \quad (11.43)$$

$$\begin{aligned} (p_1 - p_2')^2 &= 2(m^2 - p_1 p_2') \\ &= -2(E^2 - m^2)(1 + \cos \theta) \\ &= -4(E^2 - m^2) \cos^2 \frac{\theta}{2} \end{aligned} \quad (11.44)$$

Les amplitudes deviennent alors.

$$\begin{aligned}
 |\bar{M}|^{2(1)} &= 4g^4 \left[ \frac{2E^2m^2 + E^2 + (E^2m^2)\cos\theta}{-2(E^2-m^2)(1-\cos\theta)} + (\cos\theta - \cos\theta) \right]^2 \\
 &= 4g^4 \left[ \frac{(2E^2m^2) + (E^2m^2)\cos\theta}{(E^2-m^2)(1-\cos\theta)} + \frac{(2E^2m^2) + (E^2m^2)\cos\theta}{(E^2-m^2)(1+\cos\theta)} \right]^2 \\
 &= 4g^4 \left[ \frac{2(2E^2m^2) + 2(E^2m^2)\cos^2\theta}{(E^2-m^2)(1-\cos^2\theta)} \right]^2 \\
 &= 4g^4 \left[ \frac{2(2E^2m^2) - (E^2-m^2)\sin^2\theta}{(E^2-m^2)\sin^2\theta} \right]^2 \\
 &= 4g^4 \left( \frac{2E^2m^2}{E^2-m^2} \right)^2 \left[ \frac{2}{\sin^2\theta} - \frac{E^2-m^2}{2E^2m^2} \right]^2 \quad (11.45)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 |\bar{M}|^{2(2)} &= 8g^4 \left[ \frac{(2E^2m^2)^2 + (E^2 + (E^2m^2)\cos\theta)^2 - 2m^2(E^2-m^2)(1-\cos\theta)}{4(E^2-m^2)^2(1-\cos\theta)^2} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{(2E^2m^2)^2 - 2m^2(2E^2m^2)}{4(E^2-m^2)^2(1-\cos^2\theta)} + (\cos\theta - \cos\theta) \right] \\
 &= 2g^4 \left[ \frac{(2E^2m^2)^2 + (E^2 + (E^2m^2)\cos\theta)^2}{(E^2-m^2)^2(1-\cos\theta)^2} - \frac{2m^2}{(E^2-m^2)(1-\cos\theta)} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{(2E^2m^2)(2E^2-3m^2)}{(E^2-m^2)^2(1-\cos^2\theta)} + (\cos\theta - \cos\theta) \right] \\
 &= 2g^4 \left[ \frac{(2E^2m^2)^2 + E^4 + (E^2m^2)\cos^2\theta + 2E^2(E^2m^2)\cos\theta}{(E^2-m^2)^2(1-\cos\theta)^2} \right. \\
 &\quad + \frac{(2E^2m^2)^2 + E^4 + (E^2m^2)\cos^2\theta - 2E^2(E^2m^2)\cos\theta}{(E^2-m^2)^2(1+\cos\theta)^2} \\
 &\quad - \frac{2m^2}{(E^2-m^2)(1-\cos\theta)} - \frac{2m^2}{(E^2-m^2)(1+\cos\theta)} \\
 &\quad \left. + 2 \frac{(2E^2m^2)(2E^2-3m^2)}{(E^2-m^2)^2(1-\cos^2\theta)} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 2q^4 \left[ \frac{2 \left[ (E^2 - m^2)^2 + E^4 + (E^2 - m^2)^2 \cos^2 \theta \right] (1 + \cos^2 \theta) + 8E^2 (E^2 - m^2) \cos^2 \theta}{(E^2 - m^2) (1 - \cos^2 \theta)^2} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{4m^2}{(E^2 - m^2) (1 - \cos^2 \theta)} + \frac{2(2E^2 - m^2)(2E^2 - 3m^2)}{(E^2 - m^2)^2 (1 - \cos^2 \theta)} \right] \\
 &= 4q^4 \left[ \frac{\left[ (2E^2 - m^2)^2 + E^4 + (E^2 - m^2)^2 (1 - \sin^2 \theta) \right] (2 - \sin^2 \theta) + 4E^2 (E^2 - m^2) (1 - \sin^2 \theta)}{(E^2 - m^2)^2 \sin^4 \theta} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{(2E^2 - m^2)(2E^2 - 3m^2) - 2m^2 (E^2 - m^2)}{(E^2 - m^2)^2 \sin^2 \theta} \right] \\
 &= 4q^4 \left[ \frac{4(2E^2 - m^2)^2 - 2 \left[ (2E^2 - m^2)^2 + (E^2 - m^2)(2E^2 - m^2) \right] \sin^2 \theta + (E^2 - m^2)^2 \sin^4 \theta}{(E^2 - m^2)^2 \sin^4 \theta} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{(2E^2 - m^2)(2E^2 - 3m^2) - 2m^2 (E^2 - m^2)}{(E^2 - m^2)^2 \sin^2 \theta} \right] \\
 &= 4q^4 \left[ \frac{4(2E - m^2)^2}{(E^2 - m^2)^2 \sin^4 \theta} + \frac{-8E^4 + 4m^2 E^2 + m^4}{(E^2 - m^2)^2 \sin^4 \theta} + 1 \right] \\
 &= 4q^4 \left[ \frac{4(2E - m^2)^2}{(E^2 - m^2)^2 \sin^4 \theta} + \frac{-3(2E^2 - m^2)^2 + 4(E^2 - m^2)^2}{(E^2 - m^2)^2 \sin^2 \theta} + 1 \right] \\
 &= 4q^4 \left( \frac{2E^2 - m^2}{E^2 - m^2} \right)^2 \left[ \frac{4}{\sin^4 \theta} - \frac{3}{\sin^2 \theta} + \left( \frac{E^2 - m^2}{2E^2 - m^2} \right)^2 \left( 1 + \frac{4}{\sin^2 \theta} \right) \right] \quad (11.46)
 \end{aligned}$$

Finalement, la section de diffusion efficace différentielle est calculée comme :

$$\frac{d\sigma^{(s)}}{d\Omega} = \frac{\hat{Q}_f}{D_i} |\bar{M}|^2(s) \quad (11.47)$$

Les facteurs cinématiques sont simples à calculer dans le référentiel du CM, et on retrouve les résultats (9.70) et (9.71).



Plus précisément, on a :

$$\begin{aligned}
 \cdot D_i &= 4 \sqrt{(p_1 p_2)^2 - m^4} \\
 &= 4 \sqrt{(2E^2 - m^2)^2 - m^4} \\
 &= 4 \sqrt{4E^4 - 4m^2 E^2} \\
 &= 8E \sqrt{E^2 - m^2}
 \end{aligned} \tag{11.48}$$

$$\begin{aligned}
 \cdot \hat{Q}_f &= \int \frac{d^3 |p_1|}{(2\pi)^3 2E_1} \int \frac{d^3 p_2'}{(2\pi)^3 2E_2'} (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p_1' - p_2') \\
 &= \frac{1}{8\pi^2} \int_0^{+\infty} \frac{d^3 p_1' p_1'^2}{E_1'} \int d^4 p_2' \delta(p_2'^2 - m^2) \Theta(E_2') \delta^4(p_1 + p_2 - p_1' - p_2') \\
 &= \frac{1}{8\pi^2} \int_M^{+\infty} dE' p' \delta[(p_2 + p_1 - p_1')^2 - m^2] \Theta(2E - E') \\
 &= \frac{1}{8\pi^2} \int_M^{2E} dE' p' \delta[(E' - 2E)^2 - p_1'^2 - m^2] \\
 &= \frac{1}{8\pi^2} \int_M^{2E} dE' p' \delta[4E(E - E')] \\
 &= \frac{1}{8\pi^2} \frac{p'}{4E} \\
 &= \frac{1}{32\pi^2} \frac{\sqrt{E^2 - m^2}}{E}
 \end{aligned} \tag{11.49}$$

On a donc finalement :

$$\frac{d\sigma^{(s)}}{d\Omega'} = \frac{1}{256\pi^2 E^2} |\bar{M}|^{2(s)} \tag{11.50}$$

Cette expression coïncide avec la formule (9.72),  
vu que toutes les masses sont identiques et que  $s = 4E^2$ .

Les sections efficaces de diffusion sont finalement :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d\sigma^{(0)}}{d\Omega'} &= \frac{q^4}{64\pi^2 m^2} \frac{m^2}{E^2} \left( \frac{2E^2 m^2}{E^2 m^2} \right)^2 \left[ \frac{2}{\sin^2 \theta} - \frac{E^2 m^2}{2E^2 m^2} \right]^2 \\ \frac{d\sigma^{(1/2)}}{d\Omega'} &= \frac{q^4}{64\pi^2 m^2} \frac{m^2}{E^2} \left( \frac{2E^2 m^2}{E^2 m^2} \right)^2 \left[ \frac{4}{\sin^4 \theta} - \frac{3}{\sin^2 \theta} + \left( \frac{E^2 m^2}{2E^2 m^2} \right) \left( 1 + \frac{4}{\sin^2 \theta} \right) \right] \end{aligned} \right. \quad (11.51)$$

Les expressions peuvent être écrites en termes des paramètres  $\beta$  et  $\mu$  des particules incidentes en utilisant :

$$\begin{aligned} E^2 &= m\gamma^2 \\ E^2 m^2 &= m\gamma^2 \beta^2 \\ 2E^2 m^2 &= m^2 \gamma^2 (1 + \beta^2) \end{aligned} \quad (11.52)$$

En introduisant également le rayon effectif :

$$r_0 = \frac{q^2}{4\pi m} \quad (11.53)$$

on trouve finalement :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d\sigma^{(0)}}{d\Omega'} &= \frac{r_0^2}{4\gamma^2} \left( \frac{1 + \beta^2}{\beta^2} \right)^2 \left[ \frac{2}{\sin^2 \theta} - \frac{\beta^2}{1 + \beta^2} \right]^2 \\ \frac{d\sigma^{(1/2)}}{d\Omega'} &= \frac{r_0^2}{4\gamma^2} \left( \frac{1 + \beta^2}{\beta^2} \right)^2 \left[ \frac{4}{\sin^4 \theta} - \frac{3}{\sin^2 \theta} + \left( \frac{\beta^2}{1 + \beta^2} \right)^2 \left( 1 + \frac{4}{\sin^2 \theta} \right) \right] \end{aligned} \right. \quad (11.54)$$

Dans la limite non-relativiste, on obtient :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d\sigma^{(0)}}{d\Omega'} &\approx \frac{r_0^2}{\beta^4 \sin^4 \theta} \\ \frac{d\sigma^{(1/2)}}{d\Omega'} &\approx \frac{r_0^2}{\beta^4 \sin^4 \theta} (1 - 3 \sin^2 \theta) \end{aligned} \right. \quad (11.55)$$

Pour  $\theta$  petit, on retrouve la formule de Rutherford, avec  $r_0^{\text{eff}} = 2r_0$  correspondant à  $m^{\text{eff}} = \frac{m}{2}$ .

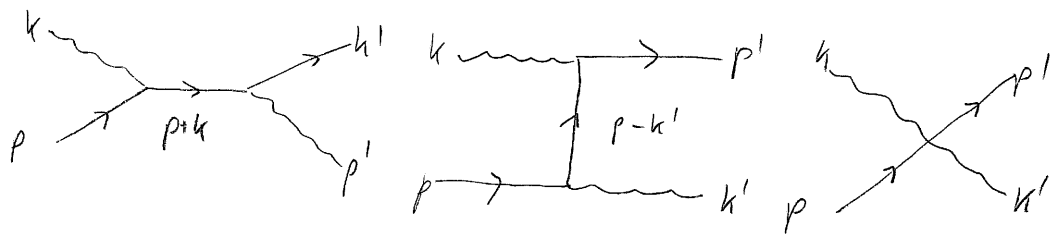
### 11.3 Diffusion de Compton

La diffusion de Compton est le processus de diffusion élastique entre un photon et une particule chargée de charge  $q$  et masse  $m$ :

$$\gamma + q \rightarrow \gamma + q$$

(11.56)

Il y a en général trois diagrammes :



(11.57)

Les conditions de couche de masse sont :

$$k^2 = k'^2 = 0$$

$$p^2 = p'^2 = m^2$$

(11.58)

La conservation de la 4-impulsion implique :

$$k^\mu + p^\mu = k'^\mu + p'^\mu$$

(11.59)

Il suit alors que :

$$k \cdot p' = k' \cdot p$$

$$k \cdot p' = k' \cdot p$$

$$p \cdot p' = k \cdot k' + m^2$$

(11.60)

Les polarisations des photons sont réelles et transversales :

$$\left. \begin{array}{l} k \cdot \xi(k) = 0 \\ k' \cdot \xi(k') = 0 \end{array} \right\}$$

(11.61)

Les amplitudes de transitions pour des scalaires ( $s=0$ ) et des spineurs ( $s=1/2$ ) sont données par :

$$\begin{aligned}
 M^{(0)} &= -iq^2 \frac{(2p+k) \cdot \xi(k) (2p+k') \cdot \xi(k')}{(p+k)^2 - m^2} \\
 &\quad - iq^2 \frac{(2p-k) \cdot \xi(k) (2p-k') \cdot \xi(k')}{(p-k)^2 - m^2} \\
 &\quad + 2iq^2 \xi(k) \cdot \xi(k')
 \end{aligned}
 \tag{11.62}$$

$$\begin{aligned}
 M^{(1/2)} &= -iq^2 \frac{\bar{U}(p') \xi(k') (p+k+m) \cdot \xi(k) U(p)}{(p+k)^2 - m^2} \\
 &\quad - iq^2 \frac{\bar{U}(p') \xi(k) (p-k'+m) \cdot \xi(k') U(p)}{(p-k')^2 - m^2}
 \end{aligned}
 \tag{11.63}$$

On peut simplifier le calcul des amplitudes correctes en faisant la somme/moyenne sur les polarisations initiales/finales des particules chargées, et en choisissant les polarisations pour les photons initiaux et finaux qui sont réels et qui satisfient les ultérieures conditions :

$$\begin{cases} p \cdot \xi(k) = 0 \\ p \cdot \xi'(k') = 0 \end{cases}
 \tag{11.64}$$

On peut considérer ces relations comme un choix de jauge particulièrement utile pour simplifier le calcul. Elles impliquent que les polarisations sont totalement transversales dans le référentiel du LAB.

Dans la jauge (11.64), les amplitudes (11.62) et (11.63) se simplifient substantiellement. Pour les scalaires on trouve simplement que les deux premiers termes ne contribuent pas. Pour les spinors, on peut utiliser la propriété :

$$\begin{aligned}
 \cdot (\not{p} + m) \xi(k) &= \not{p} \xi(k) + m \xi(k) \\
 &= -\xi(k) \not{p} + 2 \cancel{\not{p} \xi(k)} + m \xi(k) \\
 &= -\xi(k) (\not{p} - m)
 \end{aligned} \tag{11.65}$$

$$\begin{aligned}
 \cdot (\not{p} + m) \xi(k') &= \not{p} \xi(k') + m \xi(k') \\
 &= -\xi(k') \not{p} + 2 \cancel{\not{p} \xi(k')} + m \xi(k') \\
 &= -\xi(k') (\not{p} - m)
 \end{aligned} \tag{11.66}$$

Etant donné que  $(\not{p} - m) u(p) = 0$ , on trouve alors que bon nombre de termes tombent ici aussi. On trouve également :

$$\cdot M^{(0)} = 2iq^2 \xi(k) \cdot \xi(k') \tag{11.67}$$

$$\begin{aligned}
 \cdot M^{(1/2)} &= -iq^2(2m) \frac{\bar{u}(p') \xi(k') \cancel{\not{k}} \xi(k) u(p)}{2p \cdot k} \\
 &\quad - iq^2(2m) \frac{\bar{u}(p') \xi(k) \cancel{\not{k}'} \xi(k') u(p)}{2p \cdot k'}
 \end{aligned} \tag{11.68}$$

Les amplitudes corrigées sont calculées en faisant la moyenne et la somme sur les polarisations des particules chargées initiales et finales. Pour les scalaires, on trouve simplement:

$$\begin{aligned} \cdot |\bar{M}|^{2(0)} &= |M^{(0)}|^2 \\ &= 4g^4 (\xi(k) \cdot \xi(k'))^2 \end{aligned} \quad (11.69)$$

Pour les spineurs, on obtient:

$$\begin{aligned} \cdot |\bar{M}|^{2(1/2)} &= \frac{1}{2} \sum_{\substack{\text{part} \\ \text{int}}} \sum_{\substack{\text{part} \\ \text{final}}} |M^{(1/2)}|^2 \\ &= \frac{g^4}{8} \left\{ \frac{X_{AA}}{(p \cdot k)^2} + \frac{X_{BB}}{(p \cdot k')^2} + \frac{X_{AB} + X_{BA}}{(p \cdot k)(p \cdot k')} \right\} \end{aligned} \quad (11.70)$$

où :

$$\begin{aligned} X_{AA} &= (2m)^2 \text{tr} [\Lambda^+(p') \xi(k) \not{k} \xi(k) \Lambda^+(p) \xi(k) \not{k} \xi(k')] \\ X_{BB} &= (2m)^2 \text{tr} [\Lambda^+(p) \xi(k) \not{k}' \xi(k') \Lambda^+(p) \xi(k') \not{k} \xi(k)] \\ X_{AB} &= (2m)^2 \text{tr} [\Lambda^+(p') \xi(k) \not{k} \xi(k) \Lambda^+(p) \xi(k') \not{k}' \xi(k)] \\ X_{BA} &= (2m)^2 \text{tr} [\Lambda^+(p) \xi(k) \not{k}' \xi(k') \Lambda^+(p') \xi(k') \not{k} \xi(k)] \end{aligned} \quad (11.71)$$

On remarque facilement que les deux termes dans l'amplitude originale diffèrent par l'échange de  $k \leftrightarrow -k'$  et  $\xi(k) \leftrightarrow \xi^*(k')$ . Il suit que:

$$\begin{aligned} X_{BB} &= X_{AA} \quad \left| \begin{array}{l} k \leftrightarrow -k' \\ \xi(k) \leftrightarrow \xi(k') \end{array} \right. \\ X_{BA} &= X_{AB} \quad \left| \begin{array}{l} k \leftrightarrow k' \\ \xi(k) \leftrightarrow \xi(k') \end{array} \right. \end{aligned} \quad (11.77)$$

En utilisant la définition des projecteurs  $A^\pm$ , on peut récrire les (11.71) comme :

$$\begin{aligned} X_{AA} &= \text{tr} [(\not{p} + m) \not{\xi}(k') \not{K} \not{\xi}(k) (\not{p} + m) \not{\xi}(k) \not{K} \not{\xi}(k')] \\ X_{BB} &= \text{tr} [(\not{p}' + m) \not{\xi}(k) \not{K}' \not{\xi}(k') (\not{p}' + m) \not{\xi}(k') \not{K}' \not{\xi}(k)] \\ X_{AB} &= \text{tr} [(\not{p}' + m) \not{\xi}(k') \not{K} \not{\xi}(k) (\not{p} + m) \not{\xi}(k') \not{K}' \not{\xi}(k)] \\ X_{BA} &= \text{tr} [(\not{p} + m) \not{\xi}(k) \not{K}' \not{\xi}(k') (\not{p}' + m) \not{\xi}(k) \not{K} \not{\xi}(k')] \end{aligned} \quad (11.73)$$

Ces traces peuvent être calculées en utilisant les propriétés algébriques de matrices  $\gamma^\mu$ . En particulier, on a :

$$\begin{aligned} \not{a} \not{a} &= a^2 \\ \not{a} \not{b} &= -\not{b} \not{a} + 2ab \end{aligned} \quad (11.74)$$

Il suit par exemple que :

$$\begin{aligned} \not{p} \not{p} &= \not{p}' \not{p}' = m^2 \\ \not{K} \not{K} &= \not{K}' \not{K}' = 0 \\ \not{\xi}(k) \not{\xi}(k) &= \not{\xi}(k') \not{\xi}(k') = -1 \\ \not{K} \not{\xi}(k) &= -\not{\xi}(k) \not{K} ; \not{K}' \not{\xi}(k') = -\not{\xi}(k') \not{K}' \\ \not{p} \not{\xi}(k) &= -\not{\xi}(k) \not{p} ; \not{p} \not{\xi}(k') = -\not{\xi}(k') \not{p} \end{aligned} \quad (11.75)$$

On peut également utiliser les propriétés algébriques (10.70) et (10.71) pour calculer ensuite la trace.

On trouve :

$$\begin{aligned}
 \cdot X_{AA} &= \text{tr} [\not{p}' \not{\xi}(k') \not{k} \not{\xi}(k) \not{p} \not{\xi}(k) \not{k} \not{\xi}(k')] \\
 &\quad + m^2 \text{tr} [\not{\xi}(k') \not{k} \not{\xi}(k) \not{\xi}(k) \not{k} \not{\xi}(k')] \\
 &= -\text{tr} [\not{p}' \not{\xi}(k') \not{k} \not{p} \not{\xi}(k) \not{\xi}(k) \not{k} \not{\xi}(k')] \\
 &\quad - m^2 \text{tr} [\not{\xi}(k') \not{k} \not{k} \not{\xi}(k')] \\
 &= \text{tr} [\not{p}' \not{\xi}(k') \not{k} \not{p} \not{k} \not{\xi}(k')] \\
 &= \text{tr} [\not{p}' \not{\xi}(k') (-\not{p} \not{k} + 2p \cdot k) \not{k} \not{\xi}(k')] \\
 &= 2p \cdot k \text{tr} [\not{p}' \not{\xi}(k') \not{k} \not{\xi}(k')] \\
 &= 8p \cdot k [p' \cdot \not{\xi}(k') \not{k} \cdot \not{\xi}(k') - p' \cdot k \not{\xi}(k') \not{\xi}(k') + p' \not{\xi}(k') \not{k} \cdot \not{\xi}(k')] \\
 &= 8p \cdot k [p \cdot k' + p' \not{\xi}(k') \cdot k \not{\xi}(k') + p' \not{\xi}(k') \not{k} \cdot \not{\xi}(k')] \\
 &= 8pk [p \cdot k' + (p+k-k') \not{\xi}(k') \not{k} \not{\xi}(k') + (p+k-k') \not{\xi}(k') \not{k} \cdot \not{\xi}(k')] \\
 &= 8pk (p \cdot k' + 2(k \cdot \not{\xi}(k'))^2) \tag{11.76}
 \end{aligned}$$

En utilisant la correspondance (11.71) au numérateur  
alors également que :

$$\cdot X_{BB} = 8p \cdot k' (p \cdot k - 2 |k' \cdot \not{\xi}(k)|^2) \tag{11.77}$$

Les autres deux traces sont plus difficile à évaluer,  
mais elles donnent en réalité le même résultat.



On trace:

$$\begin{aligned}
X_{AB} &= \text{tr} [(\rho+m)\xi(k') K \xi(k) (\rho+m)\xi(k') K' \xi(k)] \\
&= \text{tr} [(\rho+m)\xi(k') K \xi(k) (\rho+m)\xi(k') K' \xi(k)] \\
&\quad + \text{tr} [(\rho-\rho)\xi(k') K \xi(k) (\rho+m)\xi(k') K' \xi(k)] \\
&= \text{tr} [\xi(k') \xi(k) (\rho+m) K (\rho+m) K' \xi(k') \xi(k)] \\
&\quad + \text{tr} [(K-K') \xi(k') \xi(k) K (\rho+m) K' \xi(k') \xi(k)] \\
&= \text{tr} [(\rho+m) K (\rho+m) K' \xi(k') \xi(k) \xi(k') \xi(k)] \\
&\quad + \text{tr} [K \xi(k') \xi(k) K (\rho+m) K' \xi(k') \xi(k)] \\
&\quad - \text{tr} [\xi(k') \xi(k) K (\rho+m) K' \xi(k') \xi(k) K'] \\
&= \text{tr} [(\rho K \rho + m^2 K) \xi(k') \xi(k) \xi(k') \xi(k)] \\
&\quad + 2k \cdot \xi(k') \text{tr} [\xi(k) K \rho K' \xi(k') \xi(k)] \\
&\quad - 2k' \cdot \xi(k) \text{tr} [\xi(k') \xi(k) K \rho K' \xi(k')] \\
&= 2\rho \cdot k \text{tr} [\rho K \xi(k') \xi(k) \xi(k') \xi(k)] \\
&\quad + 2k \cdot \xi(k') \text{tr} [K \rho K' \xi(k') \xi(k) \xi(k)] \\
&\quad - 2k' \cdot \xi(k) \text{tr} [\xi(k) K \rho K' \xi(k') \xi(k')] \\
&= 2\rho \cdot k \text{tr} [\rho K' \xi(k') (-\xi(k') \xi(k) + 2\xi(k) \cdot \xi(k')) \xi(k)] \\
&\quad - 2k \cdot \xi(k') \text{tr} [K \rho K' \xi(k')] \\
&\quad + 2k' \cdot \xi(k) \text{tr} [K \rho K' \xi(k)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 2pk \left( -\text{tr} [pk'] + 2 \xi(k) \xi(k') \text{tr} [pk' \xi(k) \xi(k')] \right) \\
 &\quad - 2k \xi(k') \text{tr} [kpk' \xi(k')] + 2k' \xi(k) \text{tr} [kpk' \xi(k)] \\
 &= 8pk \left( -pk' + 2 \xi(k) \cdot \xi(k') \cdot pk' \xi(k) \xi(k') \right) \\
 &\quad - 8k \cdot \xi(k') \cdot k \xi(k') \cdot p \cdot k' + 8k' \xi(k) \cdot p \cdot k \cdot k' \xi(k) \\
 &= 8pkpk' \left( 2(\xi(k) \cdot \xi(k'))^2 - 1 \right) \\
 &\quad + 8pk(k' \xi(k))^2 - 8pk'(k \xi(k'))^2 \tag{11.78}
 \end{aligned}$$

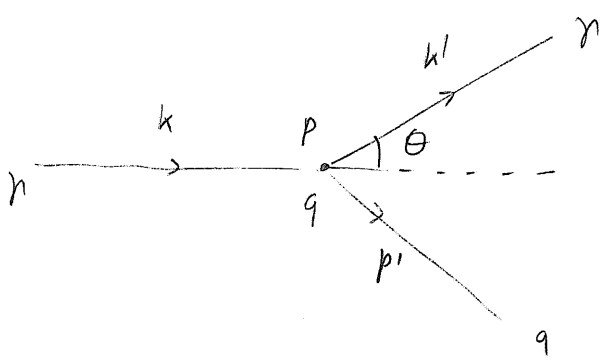
En utilisant la propriété (11.72), on obtient ensuite également

$$\begin{aligned}
 X_{RA} &= 8pkpk' \left( 2(\xi(k) \xi(k'))^2 - 1 \right) \\
 &\quad + 8pk(k' \xi(k))^2 - 8pk'(k \xi(k'))^2 \tag{11.79}
 \end{aligned}$$

Finalement, en utilisant les résultats (11.76), (11.78), (11.79) et (11.79) dans (11.70), on obtient le résultat final suivant:

$$\begin{aligned}
 |\bar{M}|^{2(n)} &= q^4 \left[ \frac{pk' + 2(k \xi(k'))^2}{p \cdot k} + \frac{pk - 2(k' \xi(k))^2}{p \cdot k'} \right. \\
 &\quad \left. + 2 \frac{pkpk'(2(\xi(k) \cdot \xi(k'))^2 - 1) + pk(k' \xi(k))^2 - pk'(k \xi(k'))^2}{p \cdot k \cdot pk'} \right] \\
 &= q^4 \left[ \frac{pk'}{p \cdot k} + \frac{pk}{p \cdot k'} + 4(\xi(k) \cdot \xi(k'))^2 - 2 \right] \tag{11.80}
 \end{aligned}$$

La cinématique est dans ce cas un peu plus simple, grâce au fait que les photons ont masse nulle. Il est plus intéressant de calculer le résultat dans le référentiel du LAB, qui correspond aux expériences dans lesquelles ce type de processus est mesuré. Le processus a alors l'allure suivante:



(11.81)

En utilisant la conservation de la 4-impulsion, on trouve :

$$k^\mu = (\omega, \vec{k})$$

$$p^\mu = (m, \vec{0})$$

$$k'^\mu = (\omega', \vec{k}')$$

(11.82)

$$p^\mu = (m + \omega - \omega', \vec{k} - \vec{k}')$$

Les relations de conservation de masse donnent :

$$\omega = k ; \omega' = k'$$

$$(m + \omega - \omega')^2 - (\vec{k} - \vec{k}')^2 = m^2$$

(11.83)

En utilisant ces deux équations, il est alors possible d'exprimer  $\omega'$  en fonction de  $\omega$  et  $\theta$ .

On trouve :

$$\cancel{m^2} + \cancel{w^2} + \cancel{w'^2} + 2m(w-w') - 2ww' - \cancel{w^2} - \cancel{w'^2} + 2ww'\cos\theta = \cancel{m^2}$$

$$w'(m + w(1 - \cos\theta)) = mw$$

c'est-à-dire la condition de Compton :

$$w' = \frac{w}{1 + \frac{w}{m}(1 - \cos\theta)} \quad (11.84)$$

On peut donc caractériser l'état initial par la pulsation  $w$  et l'état final par l'angle de diffusion  $\theta$ .

On trouve ensuite facilement :

$$p \cdot k = mw$$

$$p \cdot k' = mw' \quad (11.85)$$

Les amplitudes sont donc finalement données par les expressions suivantes :

$$|\bar{M}|^{2(0)} = g^4 [4(\xi(k)\xi(k'))^2]$$

$$|\bar{M}|^{2(1/2)} = g^4 [4(\xi(k)\xi(k'))^2 + \frac{w'}{w} + \frac{w}{w'} - 2] \quad (11.86)$$

Dans ces expressions et celles qui suivent, il est sous-entendu que  $w'$  doit être exprimé en fonction de  $w$  et  $\theta$  en utilisant la relation de Compton (11.84).

Finalement, la section efficace de diffusion différentielle est calculée comme :

$$\frac{d\sigma^{(s)}}{d\Omega'} = \frac{\hat{Q}_f}{D_i} |\bar{M}|^{2(s)} \quad (11.87)$$

Les facteurs cinématiques calculés dans le référentiel du LAB utilisés ici sont donnés par :

$$\begin{aligned} D_i &= 4\sqrt{(p \cdot k)^2} \\ &= 4 \cdot p \cdot k \\ &= 4m\omega \end{aligned} \quad (11.88)$$

$$\begin{aligned} \hat{Q}_f &= \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3 2E_{k'}} \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3 2E_{p'}} (2\pi)^4 \delta^4(k+p-k'-p') \\ &= \frac{1}{8\pi^2} \int \frac{d^4k' k'^2}{\omega'} \int d^4p' \delta(p'^2 - m^2) \Theta(E_{p'}) \delta^4(k+p-k'-p') \\ &= \frac{1}{8\pi^2} \int_0^{+\infty} d\omega' \omega' \delta[(p+k-k')^2 - m^2] \Theta(\omega' - \omega - M) \\ &= \frac{1}{8\pi^2} \int_0^{M+\omega} d\omega' \omega' \delta\left[2m\omega' \left(1 + \frac{\omega}{m} (1 - \cos\theta)\right) - 2m\omega\right] \\ &= \frac{1}{8\pi^2} \frac{\omega' \omega'}{2\omega' \left(1 + \frac{\omega}{m} (1 - \cos\theta)\right)} \\ &= \frac{1}{16\pi^2} \frac{\omega'^2}{m\omega} \end{aligned} \quad (11.89)$$

On a donc finalement :

$$\frac{d\sigma^{(s)}}{d\Omega'} = \frac{1}{64\pi^2 m^2} \left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2 |\bar{M}|^{2(s)} \quad (11.90)$$

avec, de la (11.84) :

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{1}{1 + 2\frac{\omega}{m} \sin^2 \frac{\theta}{2}} \quad (11.91)$$

Les sections efficaces de diffusion sont finalement données par les expressions

$$\begin{cases} \frac{d\sigma_{rr}^{(0)}}{d\Omega'} = r_0^2 \left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2 \left[ \left( \xi_r(k) \cdot \xi_r(k') \right)^2 \right] \\ \frac{d\sigma_{rr}^{(1/2)}}{d\Omega'} = r_0^2 \left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2 \left[ \left( \xi_r(k) \cdot \xi_{r'}(k') \right)^2 + \frac{1}{4} \left( \frac{\omega'}{\omega} + \frac{\omega}{\omega'} - 2 \right) \right] \end{cases} \quad (11.92)$$

où :

$$r_0 = \frac{q^2}{4\pi m} \quad (11.93)$$

Dans la limite non-relativiste,  $\omega/m \ll 1$  ou lorsque  $\omega'/\omega \approx 1$  et les deux expressions (11.92) se réduisent à la formule de Thomson :

$$\frac{d\sigma_{rr}}{d\Omega'} \approx r_0^2 \left( \xi_r(k) \cdot \xi_{r'}(k') \right)^2 \quad (11.94)$$

On peut également faire la moyenne / somme sur les deux polarisations physiques possibles des photons de l'état initial/final. Etant donné que nous avons déjà fixé la jauge, toutefois, on ne peut plus utiliser le fait que toutes les polarisations indépendantes forment un ensemble complet. On peut toutefois utiliser le fait que dans notre choix de jauge les deux polarisations possibles forment un ensemble complet de vecteurs spatiaux orthogonaux au vecteur d'onde :

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^2 \xi_r^i(k) \xi_r^j(k) &= \delta^{ij} - \frac{k^i k^j}{k^2} \\ \sum_{r=1}^2 \xi_r^i(k') \xi_r^j(k') &= \delta^{ij} - \frac{k'^i k'^j}{k'^2} \end{aligned} \quad (11.95)$$

On calcule alors facilement:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \sum_{r=1}^2 \sum_{r'=1}^2 (\xi_r(k) \cdot \xi_{r'}(k'))^2 &= \frac{1}{2} \sum_{r=1}^2 \xi_r^i(k) \xi_r^i(k) \sum_{r'=1}^2 \xi_{r'}^j(k') \xi_{r'}^j(k') \\
 &= \frac{1}{2} \left( \delta_{ii} - \frac{k^i k^i}{k^2} \right) \left( \delta_{jj} - \frac{k'^j k'^j}{k'^2} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left( 3 - 1 - 1 + \frac{(\vec{k} \cdot \vec{k}')^2}{k^2 k'^2} \right) \\
 &= \frac{1}{2} (1 + \cos^2 \theta)
 \end{aligned} \tag{11.96}$$

La version non-polarisée des sections efficaces de diffusion (11.92),  $\frac{d\bar{\sigma}^{(s)}}{d\Omega} = \frac{1}{2} \xi_r \xi_{r'} \frac{d\sigma_{r'}}{d\Omega}$ , est donnée par:

$$\begin{cases} \frac{d\bar{\sigma}^{(s)}}{d\Omega} = r_0^2 \left( \frac{\omega'}{\omega} \right)^2 \left[ \frac{1}{2} (1 + \cos^2 \theta) \right] \\ \frac{d\bar{\sigma}^{(M)}}{d\Omega} = r_0^2 \left( \frac{\omega'}{\omega} \right)^2 \left[ \frac{1}{2} (1 + \cos^2 \theta) + \frac{1}{2} \left( \frac{\omega'}{\omega} + \frac{\omega}{\omega'} - 2 \right) \right] \end{cases} \tag{11.97}$$

La version non-polarisée du résultat non-relativiste de Thomson (11.94) est elle donnée par:

$$\frac{d\bar{\sigma}}{d\Omega} \approx r_0^2 \left[ \frac{1}{2} (1 + \cos^2 \theta) \right] \tag{11.98}$$