Physique Mathématique

Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne
Programme de Bachelor en Physique

Prof. Claudio Scrucca

Institut de Théorie des Phénomènes Physiques, EPFL
CH-1015 Lausanne

Preface

Ces notes constituent le support au cours de Physique Mathématique du sixième semestre du Bachelor en Physique. Le but de ce cours est d'introduire une série d'instruments mathématiques avancés qui sont d'utilité générale dans la modélisation des phénomènes physiques. L'accent est mis sur l'application de ces concepts mathématiques à la physique. Le contenu est largement inspiré du cours de Physique Mathématique II donné précédemment par le Prof. H. Kunz et des notes de cours correspondantes, ainsi que du livre Geometry, Topology and Physics de M. Nakahara. Je remercie R. Rueedi and L. Brizi pour leur aide dans la préparation de ces notes.

Table des matières

1 Espaces, groupes et algèbres **1**

1.1 Préliminaires 1

1.1.1 Relations 1

1.1.2 Applications 2

1.2 Espaces vectoriels 2

1.2.1 Définition 2

1.2.2 Applications linéaires 4

1.2.3 Espace vectoriel dual 4

1.2.4 Produits interne et scalaire 5

1.2.5 Produit tensoriel 6

1.2.6 Tenseurs 6

1.3 Espaces topologiques 8

1.3.1 Définition 8

1.3.2 Applications continues 9

1.4 Espaces métriques 10

1.5 Groupes 10

1.5.1 Définition 11

1.5.2 Homomorphismes de groupes 11

1.5.3 Représentations 11

1.6 Algèbres de Lie 13

1.6.1 Définition 13

1.6.2 Homomorphismes d'algèbres 14

1.6.3 Représentations 14

2 Variétés **17**

2.1 Définitions 17

2.1.1 Variétés topologiques 17

2.1.2 Variétés différentiables 18

2.1.3 Variétés orientables 19

2.1.4 Variétés avec bords 19

2.2 Surfaces et hypersurfaces 20

2.2.1 Surfaces . . . 20
2.2.2 Hypersurfaces . . . 22
2.2.3 La sphère à n dimensions S^n . . . 23
2.3 Espaces quotients . . . 25
2.3.1 Espaces projectifs RP^n . . . 25
2.3.2 Les sphères S^n comme espaces quotients . . . 26
2.3.3 Espaces quotients par translations . . . 26
2.4 Groupes et leurs quotients . . . 27
2.5 Caractéristique d'Euler . . . 29
2.5.1 Définition . . . 29
2.5.2 Variétés de dimension 1 . . . 30
2.5.3 Variétés de dimension 2 . . . 31
2.6 Topologie et mécanique quantique . . . 31

3 Espaces tangents et tenseurs **35**
3.1 Applications différentiables . . . 35
3.2 Espaces tangents et cotangents . . . 36
3.3 Tenseurs . . . 40
3.4 Produit scalaire . . . 41

4 Homotopie **43**
4.1 Chemins et boucles . . . 43
4.2 Homotopie de chemins et boucles . . . 44
4.3 Groupe fondamental . . . 44
4.4 Groupes d'homotopie d'ordre supérieur . . . 46
4.5 Homotopie d'applications . . . 48
4.6 Brisure de symétrie et défauts . . . 48
4.6.1 Paramètres d'ordre et défauts . . . 48
4.6.2 Substances magnétiques planaires, supraconductrices et superfluides . . . 50
4.6.3 Substances magnétiques ordinaires . . . 52
4.6.4 Cristaux liquides nématiques . . . 53
4.7 Dégénérescence de valeurs propres d'une matrice . . . 54

5 Groupes de Lie **55**
5.1 Définition . . . 55
5.2 Difféomorphismes . . . 55
5.3 Groupes de Lie matriciels . . . 57
5.3.1 Le groupe $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ . . . 57
5.3.2 Le groupe $\mathrm{SL}(n, \mathbb{K})$ . . . 58
5.3.3 Les groupes $\mathrm{O}(n)$ et $\mathrm{SO}(n)$ . . . 58
5.3.4 Les groupes $\mathrm{U}(n)$ et $\mathrm{SU}(n)$ . . . 59

5.3.5 Les groupes $O(p, n-p)$ et $SO(p, n-p)$ 60
5.3.6 Le groupe $SP(2n, \mathbb{R})$ 61
5.4 Sous-groupes de Lie 62
5.5 Groupes de Lie à un paramètre 62

6 Algèbres de groupes de Lie **65**
6.1 Espaces tangents de groupes de Lie matriciels 65
6.2 Algèbre d'un groupe de Lie matriciel 66
6.2.1 Application exponentielle 67
6.3 Algèbres des principaux groupes de Lie matriciels 68
6.4 Groupes et algèbres de Lie plus généraux 70
6.5 Représentations 70
6.5.1 Représentation fondamentale 71
6.5.2 Representation adjointe 71
6.5.3 Opérateurs de Casimir 74

7 Symétries d'espace-temps **75**
7.1 Le groupe des rotations 75
7.1.1 Structure du groupe 76
7.1.2 Algèbre 77
7.1.3 Représentations 78
7.1.4 Relation avec $SU(2)$ 79
7.2 Le groupe de Lorentz 81
7.2.1 Structure du groupe 82
7.2.2 Algèbre 84
7.2.3 Représentations 85
7.2.4 Relation avec $SL(2, \mathbb{C})$ 88

8 Formes différentielles et applications **91**
8.1 Formes différentielles 91
8.2 Produit extérieur 92
8.3 Dérivée extérieure 93
8.4 Formes fermées et exactes 94
8.5 Dual de Hodge 95
8.6 Intégration de formes et théorème de Stokes 97
8.7 Forme de volume et intégration de fonctions 98
8.8 Calcul vectoriel dans $\mathbb{R}^n$ 99
8.8.1 Espace Euclidien 99
8.8.2 Espace de Minkowski 102
8.9 Reformulation de l'éléctromagnétisme 103

9 Variétés avec métrique et géométrie **107**

9.1 Variétés avec métrique 107
9.2 Hypersurfaces et métrique induite 108
9.3 Courbes et géodésiques 109
9.4 Différents types de géométries 112
9.4.1 Plan d'Euclide $\mathbb{R}^2$ 113
9.4.2 Sphère S^2 113
9.4.3 Espace de Poincaré H^2 113
9.5 Courbure 114
9.6 Applications à la mécanique 115
9.6.1 Particule non-relativiste 116
9.7 Particule relativiste 117

Chapitre 1

Espaces, groupes et algèbres

Pour décrire efficacement un phénomène physique, il est important de le caractériser avec un instrument mathématique approprié. Nous commencerons donc par résumer quelques notions de base sur les différents types d'ensembles et d'espaces.

1.1 Préliminaires

Avant même de spécifier la structure d'un ensemble abstrait d'éléments, il est possible de caractériser ces ensembles et leurs éléments à l'aide d'applications et de relations.

1.1.1 Relations

Une *relation* R entre paires d'éléments dans un ensemble X est un sous-ensemble de X^2. Une *relation d'équivalence* $\sim$ est une relation satisfaisant les propriétés suivantes, $\forall x, y, z \in X$:

1. $x \sim x$
2. $x \sim y \Leftrightarrow y \sim x$
3. $x \sim y$ et $y \sim z \Rightarrow x \sim z$

Si un ensemble X possède une telle relation d'équivalence, il peut être décomposé en des sous-ensembles disjoints appelés *classes d'équivalence*. La classe d'équivalence d'un point x, notée $[x]$, est définie comme étant

$$[x] = \{y \in X \mid y \sim x\} \tag{1.1}$$

Un élément d'une classe d'équivalence est appelé *représentant*. L'ensemble des classes d'équivalence de X, noté $X/\sim$, est appelé *espace quotient*.

1.1.2 Applications

Une *application* f d'un ensemble X à un autre Y est une règle assignant $\forall x \in X$ un $y = f(x) \in Y$. On la dénote par $f : X \to Y$. Elle est dite :

- *injective* : si $\forall x, x' \in X$ avec $x \neq x'$ on a $f(x) \neq f(x')$
- *surjective* : si $\forall y \in Y$, $\exists x \in X$ tel que $f(x) = y$
- *bijective* : si elle est injective et surjective, et donc inversible

Une application $f : X \to Y$ entre ensembles X et Y munis de structures algébriques (telles que l'addition, la multiplication ou la composition) est appelée *homomorphisme* si elle préserve ces structures. Un homomorphisme est ensuite appelé *monomorphisme* s'il est injectif, *epimorphisme* s'il est surjectif et *isomorphisme* s'il est bijectif. Deux ensemble X et Y sont dits *isomorphes* s'il existe un isomorphisme $f : X \to Y$ les reliant. On écrit alors $X \simeq Y$, car c'est une relation d'équivalence entre ensembles d'un même type.

Une application $f : X \to Y$ est appelée *fonction* quand elle prend des valeurs numériques, c'est-à-dire quand Y est un sous-espace de $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$.

1.2 Espaces vectoriels

Les espaces vectoriels sont des ensembles munis d'une opération d'addition de leurs éléments et d'une opération de multiplication par un nombre. Ils sont l'instrument de base utilisé pour décrire les configurations d'un système physique, comme par exemple le vecteur position en mécanique classique ou la fonction d'onde en mécanique quantique.

1.2.1 Définition

Un *espace vectoriel* V sur un corps $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) est un esemble muni de deux opérations, l'addition et la multiplication par un élément de $\mathbb{K}$, satisfaisant les propriétés suivantes :

1. $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$
2. $(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w})$
3. $\exists \mathbf{0} : \boldsymbol{v} + \mathbf{0} = \boldsymbol{v}$
4. $\forall \boldsymbol{u}$, $\exists -\boldsymbol{u} : \boldsymbol{u} + (-\boldsymbol{u}) = \mathbf{0}$
5. $a(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = a\boldsymbol{u} + a\boldsymbol{v}$
6. $(a + b)\boldsymbol{u} = a\boldsymbol{u} + b\boldsymbol{u}$
7. $(ab)\boldsymbol{u} = a(b\boldsymbol{u})$
8. $1\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$

Les éléments $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}, \mathbf{0} \in V$ sont appelés *vecteurs*, et les éléments $a, b, 1 \in \mathbb{K}$ sont appelés *scalaires*.

Exemple. L'exemple le plus commun d'espace vectoriel est $\mathbb{R}^3$ sur le corps $\mathbb{R}$. La notion abstraite de vecteur peut alors être identifiée plus concrètement avec le vecteur position entre l'origine et un point quelconque.

Un ensemble de k vecteurs $\{\boldsymbol{v}_i\}$ est dit *linéairement indépendant* s'il satisfait la propriété suivante (les indices répétés sont sommés)

$$a^i \boldsymbol{v}_i = \mathbf{0} \;\Rightarrow\; a^i = 0 \tag{1.2}$$

Une *base* de l'espace vectoriel V est un ensemble de n vecteurs $\{\boldsymbol{e}_i\}$ linéairement indépendant tel que tout vecteur $\boldsymbol{v}$ peut être écrit de façon unique comme combinaison linéaire des $\boldsymbol{e}_i$:

$$\boldsymbol{v} = v^i \boldsymbol{e}_i \tag{1.3}$$

Les nombres $v^i \in \mathbb{K}$ sont appelées *composantes* du vecteur $\boldsymbol{v}$ dans la base $\{\boldsymbol{e}_i\}$ et n définit la dimension (finie) de V.

A partir d'une base $\{\boldsymbol{e}_i\}$ on peut construire une infinité d'autres bases $\{\hat{\boldsymbol{e}}_i\}$ en applicant une transformation linéaire générale définie par une matrice $n \times n$ inversible $\Lambda^i{}_j$, c'est-à-dire avec $\det \Lambda \neq 0$. On peut également utiliser, de façon équivalente, l'inverse transposée de cette matrice, notée $\tilde{\Lambda}_i{}^j$, qui a aussi $\det \tilde{\Lambda} \neq 0$. On a donc

$$\tilde{\Lambda} = \Lambda^{-1\mathrm{T}}, \quad \Lambda = \tilde{\Lambda}^{-1\mathrm{T}} \tag{1.4}$$

satisfaisant par définition

$$\Lambda \tilde{\Lambda}^T = \tilde{\Lambda} \Lambda^T = \mathbb{1} \tag{1.5}$$

Il convient de paramétriser la transformation des vecteurs de base en utilisant $\tilde{\Lambda}$. On a alors

$$\hat{\boldsymbol{e}}_i = \tilde{\Lambda}_i{}^j \boldsymbol{e}_j \tag{1.6}$$

Etant donné que les vecteurs $\boldsymbol{v}$ de V existent indépendemment du choix d'une base, ils doivent être invariants sous changements de base. Ceci implique que leurs composantes changent lors d'un changement de base, et les nouvelles composantes sont données par

$$\hat{v}^i = \Lambda^i{}_j v^j \tag{1.7}$$

1.2.2 Applications linéaires

Une application $f : V \to W$ entre deux espaces vectoriels V et W est appelée *application linéaire* si elle satisfait la propriété :

$$f(a\boldsymbol{u} + b\boldsymbol{v}) = af(\boldsymbol{u}) + bf(\boldsymbol{v}), \quad \forall a, b \in \mathbb{K} \text{ and } \forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V \tag{1.8}$$

Les applications linéaires sont des *homomorphismes d'espaces vectoriels*, qui préservent l'addition vectorielle et la multiplication scalaire des espaces vectoriels. Quand elles admettent une inverse, elle aussi linéaire, elles correspondent à des *isomorphismes d'espaces vectoriels*.

Remarque. Tout espace vectoriel V de dimension n sur un corps $\mathbb{K}$ est isomophe à $\mathbb{K}^n$, $V \simeq \mathbb{K}^n$, l'isomorphisme étant une transformation linéaire générale dans $\mathbb{K}^n$.

1.2.3 Espace vectoriel dual

Soit V un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{K}$ et soit $\{\boldsymbol{e}_i\}$ une base pour cet espace, dans laquelle tout vecteur peut être décomposé comme $\boldsymbol{v} = v^i \boldsymbol{e}_i$. Pour une quelconque fonction linéaire $f : V \to \mathbb{K}$ on obtient alors la décomposition $f(\boldsymbol{v}) = v^i f(\boldsymbol{e}_i)$. En outre, toute combinaison linéaire de fonctions linéaires, définie comme $(af + bg)(\boldsymbol{v}) = af(\boldsymbol{v}) + bg(\boldsymbol{v})$, est encore une fonction linéaire. Il suit que l'ensemble de toutes les fonctions lineaires $f : V \to \mathbb{K}$ définit un nouvel espace vectoriel de dimension n, noté V^* et appelé *espace vectoriel dual*. Un élément $\boldsymbol{f} \in V^*$ est aussi appelé *vecteur dual*, ou *forme linéaire*, et est également noté $\boldsymbol{v}^* \in V^*$.

Soit $\{\boldsymbol{e}^{*i}\}$ une base de V^*, telle qu'un vecteur dual $\boldsymbol{v}^* \in V^*$ peut être décomposé de façon unique comme $\boldsymbol{v}^* = v_i^* \boldsymbol{e}^{*i}$. Chaque $\boldsymbol{e}^{*i}$ est une fonction linéaire de V à $\mathbb{K}$, et peut donc être caractérisée complètement en spécifiant la valeur de $\boldsymbol{e}^{*i}(\boldsymbol{e}_j)$ pour chaque j. On peut en particulier introduire la *base duale*, définie par les relations

$$\boldsymbol{e}^{*i}(\boldsymbol{e}_j) = \delta_j^i \tag{1.9}$$

Dans cette base, tout $\boldsymbol{v}^* \in V^*$ peut être décomposé comme

$$\boldsymbol{v}^* = v_i^* \boldsymbol{e}^{*i} \tag{1.10}$$

avec des composantes v_i^* données simplement par les valeurs de la fonction $\boldsymbol{v}^*$ sur les vecteurs de base $\boldsymbol{e}_i$ de V :

$$v_i^* = \boldsymbol{v}^*(\boldsymbol{e}_i) \tag{1.11}$$

Sous un changement de base de $\{\boldsymbol{e}_i\}$ à $\{\hat{\boldsymbol{e}}_i\}$ pour V, de la forme (1.6), la base duale pour V^* change elle aussi de $\{\boldsymbol{e}^{*i}\}$ à $\{\hat{\boldsymbol{e}}^{*i}\}$, de telle manière à preserver la relation (1.9), avec

$$\hat{\boldsymbol{e}}^{*i} = \Lambda^i{}_j \boldsymbol{e}^{*j} \tag{1.12}$$

Les nouvelles composantes des vecteurs duaux $\boldsymbol{v}^*$ sont alors données par

$$\hat{v}^*_i = \tilde{\Lambda}_i{}^j v^*_j \tag{1.13}$$

Remarque. Étant donné que V et V^* ont la même dimension, ils sont isomorphes : $V \simeq V^*$. En outre, au même titre que les vecteurs duaux $\boldsymbol{u}^* \in V^*$ sont des fonctions linéaires sur V, les vecteurs $\boldsymbol{v} \in V$ peuvent être vus comme fonctions linéaires sur V^*, en définissant $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{u}^*) = \boldsymbol{u}^*(\boldsymbol{v})$.

1.2.4 Produits interne et scalaire

L'action d'une fonction linéaire $\boldsymbol{u}^* \in V^*$ sur un vecteur $\boldsymbol{v} \in V$ produit un nombre dans $\mathbb{K}$. On peut alors définir le *produit interne* $\langle\ ,\ \rangle : V^* \times V \to \mathbb{K}$ par la règle

$$\langle \boldsymbol{u}^*, \boldsymbol{v} \rangle = \boldsymbol{u}^*(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{u}^*) \tag{1.14}$$

Ce produit peut être interpreté comme la multiplication entre le vecteur colonne de composantes u^*_i et le vecteur ligne de composantes v^i :

$$\langle \boldsymbol{u}^*, \boldsymbol{v} \rangle = u^*_i \boldsymbol{e}^{*i}(v^j \boldsymbol{e}_j) = u^*_i v^j \boldsymbol{e}^{*i}(\boldsymbol{e}_j) = u^*_i v^i \tag{1.15}$$

On voit que ce produit est invariant sous changements de base, sous lesquels les composantes v^i et u^*_i se transforment comme dans (1.7) et (1.13).

Pour promouvoir ce produit d'éléments de V avec des éléments de V^* à un produit d'éléments du seul V entre eux, on peut utiliser un isomorphisme $\boldsymbol{g} : V \to V^*$ entre les espaces vectoriels V et V^*. Celui-ci est une transformation linéaire générale dans $\mathbb{K}^n$, et sa représentation en composantes dans une base arbitraire prend la forme $g : v^i \to g_{ij} v^j$, où g_{ij} est une matrice $n \times n$ inversible : $\det g \neq 0$. On peut alors définir le *produit scalaire* $(\cdot, \cdot) : V^2 \to \mathbb{K}$ comme

$$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \langle \bar{\boldsymbol{g}}(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{v} \rangle \tag{1.16}$$

En composantes, ceci signifie :

$$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \bar{u}^i g^\dagger_{ij} v^j \tag{1.17}$$

Ce produit satisfait $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \overline{(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u})}$ seulement si la matrice g est Hermitique, $g = g^\dagger$, et $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) \geq 0$ seulement si g est définie semi-positive. On remarque en outre que ce produit est invariant seulement sous les transformations de base laissant invariée la matrice g, dans le sens que $\Lambda^\dagger g \Lambda = g$.

1.2.5 Produit tensoriel

Le *produit tensoriel* de deux espaces vectoriels E et F de dimensions n et m, noté $E \otimes F$, est un espace vectoriel de dimension nm dont les éléments $\boldsymbol{T}$ sont les applications linéaires de $E^* \times F^*$ dans $\mathbb{K}$, qui associent à un couple ordonné $(\boldsymbol{u}^*, \boldsymbol{v}^*)$ avec $\boldsymbol{u}^* \in E^*$ et $\boldsymbol{v}^* \in F^*$ un nombre $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u}^*, \boldsymbol{v}^*) \in \mathbb{K}$. La linéarité doit être réalisée par rapport à chacun des arguments.

Des éléments particuliers de $E \otimes F$ peuvent être construits à l'aide du produit tensoriel de deux vecteurs $\boldsymbol{u} \in E$ et $\boldsymbol{v} \in F$, et agissent par définition sur $\boldsymbol{u}^* \in E^*$ et $\boldsymbol{v}^* \in F^*$ comme

$$(\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{v})(\boldsymbol{u}^*, \boldsymbol{v}^*) = \boldsymbol{u}^*(\boldsymbol{u})\boldsymbol{v}^*(\boldsymbol{v}) \tag{1.18}$$

En particulier, l'action du produit tensoriel des vecteurs des bases $\{\boldsymbol{e}_i\}$ et $\{\boldsymbol{f}_a\}$ de E et F donne

$$(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{f}_a)(\boldsymbol{u}^*, \boldsymbol{v}^*) = u_i^* v_a^* \tag{1.19}$$

Pour un élément plus général $\boldsymbol{T}$, l'action peut être décomposée en développant $\boldsymbol{u}^* = u_i^* \boldsymbol{e}^{*i}$ et $\boldsymbol{v}^* = v_a^* \boldsymbol{f}^{*a}$ à l'aide des bases duales $\{\boldsymbol{e}^{*i}\}$ et $\{\boldsymbol{f}^{*a}\}$ de E^* et F^*, et on obtient alors

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u}^*, \boldsymbol{v}^*) = T^{ia} u_i^* v_a^* \tag{1.20}$$

avec

$$T^{ia} = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}^{*i}, \boldsymbol{f}^{*a}) \tag{1.21}$$

En comparant (1.19) et (1.20) on voit que $\{\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{f}_a\}$ est une base de $E \otimes F$, et les T^{ia} définis par (1.21) sont les composantes de $\boldsymbol{T}$ dans cette base :

$$\boldsymbol{T} = T^{ia} \boldsymbol{e}_j \otimes \boldsymbol{f}_a \tag{1.22}$$

En itérant cette procédure, on peut construire de façon semblable le produit de plusieurs espaces vectoriels.

1.2.6 Tenseurs

On peut généraliser les notions de vecteurs d'un espace vectoriel V et de vecteurs duaux de son dual V^* en considérant le produit tensoriel de r copies de V et de s copies de son dual V^*, noté

$$V^{(r,s)} = \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{r \text{ fois}} \otimes \underbrace{V^* \otimes \cdots \otimes V^*}_{s \text{ fois}} \tag{1.23}$$

Un vecteur $\boldsymbol{v} \in V$ est un élément de $V^{(1,0)}$ et peut être vu comme une application linéaire de V^* dans $\mathbb{K}$. De la même manière, un vecteur dual $\boldsymbol{v}^* \in V^*$ est un élément de $V^{(0,1)}$ et peut être vu comme une application

linéaire de V dans $\mathbb{K}$. Plus en général, un élément $\boldsymbol{T} \in V^{(r,s)}$ est appelé *tenseur de type* (r,s), et correspond à une application linéaire de $V^{*r} \times V^s$ dans $\mathbb{K}$. Le *rang* d'un tel tenseur est défini comme $r+s$.

Un tenseur $\boldsymbol{T} \in V^{(r,s)}$ peut également être interprété comme une application linéaire de $V^{*p} \times V^q$ dans $V^{(r-p,s-q)}$, en vertu de la dualité entre V et V^*. En effet, en appliquant $\boldsymbol{T}$ à seulement p vecteurs et q covecteurs, on obtient une application linéaire des $r-p$ arguments covectoriels et $s-q$ arguments vectoriels restants dans $\mathbb{K}$, ce qui correspond par définition à un tenseur de type $(r-p, s-q)$. En particulier, un tenseur de type $(1,1)$ définit de cette manière une application linéaire de V dans V ou de V^* dans V^*.

Des bases $\{\boldsymbol{e}_i\}$ et $\{\boldsymbol{e}^{*j}\}$ de V et V^* définissent une base naturelle pour $V^{(r,s)}$ donnée par l'ensemble $\{\boldsymbol{e}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{e}_{i_r} \otimes \boldsymbol{e}^{*j_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{e}^{*j_r}\}$. Dans cette base, un tenseur $\boldsymbol{T} \in V^{(r,s)}$ se décompose avec certaines composantes notées $T^{i_1 \cdots i_r}_{j_1 \cdots j_s}$ comme

$$\boldsymbol{T} = T^{i_1 \cdots i_r}_{j_1 \cdots j_s} \boldsymbol{e}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{e}_{i_r} \otimes \boldsymbol{e}^{*j_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{e}^{*j_s} \tag{1.24}$$

Lors d'un changement de base défini par une transformation linéaire générale Λ et son inverse transposée $\tilde{\Lambda}$ dans $\mathbb{K}^n$, les vecteurs de base de V et V^* se transforment comme

$$\hat{\boldsymbol{e}}_i = \tilde{\Lambda}_i{}^j \boldsymbol{e}_j \,, \quad \hat{\boldsymbol{e}}^{*i} = \Lambda^i{}_j \boldsymbol{e}^{*j} \tag{1.25}$$

On voit alors que pour que le tenseur $\boldsymbol{T}$ soit invariant ses composantes doivent se transformer comme

$$\hat{T}^{i_1 \cdots i_r}_{j_1 \cdots j_s} = \Lambda^{i_1}_{\ k_1} \cdots \Lambda^{i_r}_{\ k_r} \tilde{\Lambda}_{j_1}^{\ l_1} \cdots \tilde{\Lambda}_{j_s}^{\ l_s} T^{k_1 \cdots k_r}_{l_1 \cdots l_s} \tag{1.26}$$

On peut montrer que cette propriété aurait pu être prise comme définition équivalente d'un tenseur de type (r,s). De ce fait, un tel tenseur est aussi appelé *tenseur contravariant d'ordre r et covariant d'ordre s*.

Propriétés.

1. La *combinaison linéaire* $\boldsymbol{U} = a\boldsymbol{S} + b\boldsymbol{T}$ de deux tenseurs $\boldsymbol{S}$ et $\boldsymbol{T}$ de même type (r,s), est par construction un nouveau tenseur de même type (r,s), avec composantes données par

$$U^{i_1 \cdots i_r}_{j_1 \cdots j_s} = aS^{i_1 \cdots i_r}_{j_1 \cdots j_s} + bT^{i_1 \cdots i_r}_{j_1 \cdots j_s} \tag{1.27}$$

2. Le *produit tensoriel* $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{S} \otimes \boldsymbol{T}$ d'un tenseur $\boldsymbol{S}$ de type (r,s) et d'un tenseur $\boldsymbol{T}$ de type (p,q) est défini par $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{u}_1^*, \cdots, \boldsymbol{u}_{r+p}^*, \boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_{s+q}) = \boldsymbol{S}(\boldsymbol{u}_1^* \cdots \boldsymbol{u}_r^*, \boldsymbol{u}_1 \cdots \boldsymbol{u}_s)\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u}_{r+1}^* \cdots \boldsymbol{u}_{r+p}^*, \boldsymbol{u}_{s+1} \cdots \boldsymbol{u}_{s+q})$. C'est un tenseur de type $(r+p, s+q)$ dont les composantes sont données par

$$U^{i_1 \cdots i_{r+p}}_{j_1 \cdots j_{s+q}} = S^{i_1 \cdots i_r}_{j_1 \cdots j_s} T^{i_{r+1} \cdots i_{r+p}}_{j_{s+1} \cdots j_{s+q}} \tag{1.28}$$

Un exemple familier est celui du produit tensoriel de deux matrices $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$, dont les composantes sont a^i_j et $b^{i'}_{j'}$ de sorte que $(\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b})^{ii'}_{jj'} = a^i_j b^{i'}_{j'}$.

3. La *contraction* d'un tenseur $\boldsymbol{T}$ de type (r,s) sur ses n-ième et m-ième arguments contravariants et covariants produit un nouveau tenseur $\boldsymbol{U}$ tel que $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{u}^*_1,\cdots,\boldsymbol{u}^*_{r-1},\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_{s-1}) = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{u}^*_1,\cdots,\boldsymbol{e}^{*k},\cdots,\boldsymbol{u}^*_r,\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_k,\cdots,\boldsymbol{u}_s)$, de type $(r-1,s-1)$. Sous un changement de base, les matrices Λ et $\tilde{\Lambda}$ provenant des transformations de $\boldsymbol{e}^{*k}$ et $\boldsymbol{e}_k$ se compensent. En composantes on a :

$$U^{i_1\cdots i_{n-1}i_{n+1}\cdots i_r}_{j_1\cdots j_{m-1}j_{m+1}\cdots j_q} = T^{i_1\cdots i_{n-1}k\,i_{n+1}\cdots i_r}_{j_1\cdots j_{m-1}k\,j_{m+1}\cdots j_s} \tag{1.29}$$

4. La *symétrisation* ou *antisymétrisation* d'un tenseur $\boldsymbol{T}$ de type (r,s) par rapport à k de ses arguments de même genre, définit un nouveau tenseur de même type (r,s). Ces opérations sont indiquées par les parenthèses $(\cdots)$ ou $[\cdots]$ sur les indices concernés. Par exemple, pour un tenseur de type $(0,2)$ de componsantes $T_{j_1j_2}$, on a :

$$T_{(j_1j_2)} = \frac{1}{2}\left(T_{j_1j_2} + T_{j_2j_1}\right), \quad T_{[j_1j_2]} = \frac{1}{2}\left(T_{j_1j_2} - T_{j_2j_1}\right) \tag{1.30}$$

Plus en général, pour un tenseur de type $(0,k)$ avec composantes $T_{j_1\cdots j_k}$, on peut définir la symétrisation et l'antisymétrisation à l'aide des permutations π de k objets :

$$T_{(j_1\cdots j_k)} = \frac{1}{n!}\sum_\pi T_{\pi(j_1)\cdots\pi(j_k)}, \quad T_{[j_1\cdots j_k]} = \frac{1}{n!}\sum_\pi (-1)^\pi T_{\pi(j_1)\cdots\pi(j_k)} \tag{1.31}$$

1.3 Espaces topologiques

Les espace topologiques sont des ensembles munis d'une structure permettant de qualifier la notion de proximité entre deux éléments, de telle façon à mettre en évidence certaines propriétés globales de l'ensemble qui sont invariantes sous déformations continues.

1.3.1 Définition

Un ensemble X est appelé *espace topologique* s'il est doté d'une *topologie* $T = \{O_i\}$, constituée d'un ensemble de sous-ensembles O_i de X tel que

1. $\emptyset, X \in T$
2. L'intersection d'un nombre fini de O_i appartient aussi à T.
3. L'union d'un nombre fini ou infini de O_i appartient aussi à T

Les ensembles O_i spécifiant la topologie T sont appelés *ouverts*. Un ensemble F_i est au contraire dit *fermé* s'il est le complément d'un ensemble ouvert : $\exists O_i \in T : F_i = X \backslash O_i$. Un ensemble F est fermé si et seulement si tout point d'accumulation de F est un élément de F.

La topologie T permet de définir une notion de proximité pour les éléments de X. Un sous-ensemble $U \in X$ est appelé *voisinage* de $x \in X$ s'il existe un ouvert $O_i \in T$ tel que $x \in O_i \subset U$.

Remarque. $T = \{\emptyset, X\}$ définit la topologie la moins détaillée possible et est appelé *topologie banale*. $T = \{\text{tous les sous-ensembles de } X\}$ définit la topologie la plus détaillée possible et est appelé *topologie discrète*. En général, la première est pas assez restrictive et la deuxième trop restrictive pour donner une structure intéressante.

Exemple. Pour l'espace $\mathbb{R}$, l'ensemble de tous les intervalles ouverts $]a, b[$ et leurs unions définit une topologie, applée *topologie usuelle*.

Un espace topologique X est dit *connexe* s'il n'existe pas de paire de sous-ensembles A et B ouverts et différents de $\emptyset$, X tels que $A \cup B = X$ et $A \cap B = \emptyset$. Si X n'est pas connexe, on peut le décomposer en *composantes connexes* X_i telles que $X = \bigcup_i X_i$, avec X_i connexe $\forall i$.

Un espace topologique X est dit *compact* si de tout recouvrement de X par des ouverts, on peut extraire un recouvrement fini.

Un espace topologique X est dit *séparé*, ou de *Hausdorff*, si $\forall x, y \in X$ avec $x \neq y$, il existe des voisinages de x et y sans points communs.

1.3.2 Applications continues

Soient X et Y des espaces topologiques. On dit que $f : X \to Y$ est *continue en* $x \in X$, si pour tout voisinage V de $f(x) \in Y$ il existe un voisinage U de $x \in X$ tel que $f(U) \subset V$. Si f est continue en tout point, alors on dit que f est *continue*. On a donc que f est continue si et seulement si l'image inverse de tout ouvert est un ouvert.

Une application f est appelée *homéomorphisme* si f est bijective et de plus f et f^{-1} sont continues. Une telle application est aussi dite *bicontinue*, et on a que l'image et l'image inverse d'ouverts sont des ouverts. Les homéomorphismes sont les isomorphismes qui préservent la structure topologique des espaces topologiques.

Deux espaces topologiques X et Y sont dits *homéomorphes* s'il existe un homéomorphisme les reliant, avec $f : X \to Y$ et $f^{-1} : Y \to X$. Ceci est noté $X \simeq Y$. C'est une relation d'équivalence fondamentale en topologie, qui caratérise les propriétés invariantes sous homéomorphismes, c'est-à-dire sous

déformations continues. Remarquons à titre d'exemple que des propriétés telles que la compacité, la connexité ou la séparabilité sont préservées par les homéomorphismes et caractérisent donc les classes d'équivalences topologiques. Plus en général, on cherche à définir des *invariants topologiques*, soit des grandeurs $I(X)$ invariantes sous homéomorphismes, de sorte que si $I(X) \neq I(Y)$ alors $X \not\simeq Y$.

1.4 Espaces métriques

Souvent il est possible de donner une définition plus quantitative de la notion de voisinage dans un ensemble X en introduisant une fonction $d : X \times X \to \mathbb{R}$, appelée *distance* et notée $d(x, y)$ pour deux points x et y, jouissant des propriétés suivantes $\forall x, y, z \in X$:

1. $d(x, y) = d(y, x)$
2. $d(x, y) \geq 0$ et $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \quad \forall x, y, z$

Un espace X muni d'une distance est appelé *espace métrique*. Un tel espace devient un espace topologique séparé en appellant ouverts les *boules ouvertes* de centre x et de rayon r, $B_r(x) = \{y \mid d(x, y) < r\}$, ainsi que toutes leurs unions possibles.

Exemple. Des exemples particulièrement importants d'espaces métriques sont les espaces $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$ avec la distance Euclidienne

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\delta_{ij}(x^i - y^i)(\bar{x}^j - \bar{y}^j)} \tag{1.32}$$

Dans ces espaces il existe une *base dénombrable d'ouverts*, c'est-à-dire un ensemble d'ouverts $\{O_i\}$ tel que tout ouvert O puisse s'écrire comme la réunion de certains de ces éléments de base $O = \cup_j O_j$. Cette base est construite à l'aide des boules $B_r(x)$ avec $r \in \mathbb{Q}$ et $x^i \in \mathbb{Q}$ ou $\mathbb{Q}^2$. Rappelons également le critère de *Bolzano–Weierstrass* : un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$ est compact si et seulement si il est fermé et borné.

1.5 Groupes

Les groupes sont des ensembles munis d'une opération de composition des differents éléments. Ils sont l'instrument approprié pour décrire les symétries d'un système physique. En pratique, le groupe doit être réalisé par

une représentation sur l'espace vectoriel décrivant les configurations du système. Les exemples les plus importants sont les transformations de référentiel, comme les rotations dans les théories Galiléenes ou les transformations de Lorentz dans les théories relativistes.

1.5.1 Définition

Un *groupe* est un ensemble G muni d'une loi de composition satisfaisant les propriétés suivantes $\forall g_1, g_2, g_3 \in G$:

1. $g_1 \cdot g_2 \in G$
2. $g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3) = (g_1 \cdot g_2) \cdot g_3$
3. $\exists e \in G : e \cdot g = g \cdot e = g$
4. $\exists g^{-1} \in G : g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot g = e$

Un groupe est dit *Abélien* si tous ses éléments commutent, c'est-à-dire si $g_1 \cdot g_2 = g_2 \cdot g_1$, $\forall g_1, g_2 \in G$. Dans le cas contraire il est dit *non-Abélien*.

Le *centre* d'un groupe est l'ensemble des éléments $\hat{g}$ qui commutent avec tous les élements du groupe g. C'est toujours un sous-groupe Abelien.

Exemples.

1. $\mathbb{Z}_2 = \{1, -1\}$ avec l'opération de multiplication est un groupe.
2. $\mathbb{R}$ avec l'opération d'addition est un groupe.
3. $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K}) = \{\Lambda \text{ matrices } n \times n \mid \det \Lambda \neq 0\}$ avec l'opération de multiplication matricielle est un groupe.

1.5.2 Homomorphismes de groupes

Soit G_1 et G_2 deux groupes. Une application $f : G_1 \to G_2$ est un *homomorphisme de groupes* si elle est compatible avec les lois de compositions de ces groupes, c'est-à-dire si elle satisfait la propriété suivante $\forall g_1, g_2 \in G_1$:

$$f(g_1 \cdot g_2) = f(g_1) \cdot f(g_2) \tag{1.33}$$

Une telle application représente un *isomorphisme de groupes* si elle est également inversible. La relation d'isomorphisme est notée $G_1 \simeq G_2$.

1.5.3 Représentations

Une *représentation* R d'un groupe G dans un espace vectoriel V de dimension n sur $\mathbb{K}$ est un homomorphisme $\phi : G \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ associant à chaque élément $g \in G$ une transformation linéaire générale $\phi(g) \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ agissant dans l'espace vectoriel V, c'est-à-dire $\phi(g) : V \to V$, avec la propriété suivante :

1. $\phi(g_1 \cdot g_2) = \phi(g_1)\phi(g_2)$

Étant donné que $e \cdot e = e$ on a $\phi(e)\phi(e) = \phi(e)$ et donc :

$$\phi(e) = \mathbb{1} \tag{1.34}$$

De la même manière, vu que $g \cdot g^{-1} = e$ il suit que $\phi(g)\phi(g^{-1}) = \mathbb{1}$ et par conséquent

$$\phi(g^{-1}) = \phi(g)^{-1} \tag{1.35}$$

Une telle représentation R associe donc à chaque élément du groupe G une matrice correspondant à une application linéaire dans l'espace vectoriel V, la loi de composition de G devenant la multiplication matricielle. Il existe en général de nombreuses représentations différentes d'un même groupe, sur des espaces vectoriels de différentes dimensions.

Une représentation R est dite *réductible* s'il elle possède un sous-espace invariant, c'est-à-dire tel que l'action de tout $\phi(g)$ sur un vecteur de ce sous-espace produit un vecteur appartenant toujours à cet espace. Il existe alors une base où toutes les matrices $\phi(g)$ ont un même bloc non-diagonal nul. Une représentation est au contraire dite *irréductible* si elle n'est pas réductible. Il n'existe alors aucune base où toutes les matrices $\phi(g)$ ont un même bloc non-diagonal nul. Finalement, une représentation R est dite *complètement réductible* si elle peut être décomposée comme somme directe de représentations irréductibles R_i agissant sur des sous-espaces disjoints V_i de l'espace vectoriel original V : $R = R_1 \oplus \cdots \oplus R_n$. Il existe alors une base où toutes les matrices $\phi(g)$ ont tous les blocs non-diagonaux nuls.

Deux représentations R et R' de même dimension avec éléments $\phi(g)$ et $\phi'(g)$ sont dites *équivalentes* s'il existe une transformation linéaire générale Λ telle que $\phi'(g) = \Lambda\phi(g)\Lambda^{-1}$, $\forall g \in G$. On note alors $R \simeq R'$. Dans ce cas, les deux représentations décrivent le même ensemble d'opérateurs linéaires, mais écrits dans des bases différentes, reliées par la transformation Λ, sous laquelle les opérateurs sont conjugués par une transformation de similitude. Ceci illustre également le fait que les opérateurs linéaires $\phi(g)$ peuvent être interprétés comme des tenseurs de type $(1, 1)$.

On définit le *produit tensoriel* de deux représentations R_A et R_B, noté $R_A \otimes R_B$, comme la nouvelle représentation définie par le produit des éléments de R_A et R_B sur l'espace vectoriel défini par le produit tensoriel des espaces vectoriels où elles sont définies, les éléments de matrices étant définis comme le produit des éléments de matrice dans R_A et R_B. Une telle représentation est en général complètement réductible, même si R_A et R_B sont irréductibles, et peut être décomposée en une somme de nouvelle représentations irréductibles R_i, c'est-à-dire $R_A \otimes R_B = R_1 \oplus \cdots \oplus R_n$. Ceci

tient au fait que les éléments de la représentation $R_A \otimes R_B$ sont des produits tensoriels de tenseurs, qui peuvent en général être décomposés en différentes parties à symétrie définie qui ne se mélangent pas.

Un résultat important concernant les représentations irréductibles est fourni par le *lemme de Schur*. Soit $R = \{\phi(g)\}$ une représentation irréductible de dimension n finie d'un groupe G, et soit C une matrice $n \times n$ arbitraire. Si C commute avec tous les éléments de R, alors C est proportionnelle à l'identité par une constante λ qui dépend de R :

$$[C, \phi(g)] = 0\,, \;\; \forall g \in G \;\Rightarrow\; C = \lambda \mathbb{1} \tag{1.36}$$

En effet, soit λ une valeur propre de la matrice C, solution de l'équation caractéristique $\det(C - \lambda\mathbb{1}) = 0$, et $\boldsymbol{v}$ le vecteur propre correspondant, satisfaisant $(C - \lambda\mathbb{1})\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$. Par hypothèse on a $(C - \lambda\mathbb{1})\phi(g) = \phi(g)(C - \lambda\mathbb{1})$, $\forall \phi(g) \in R$. Il suit alors que $(C - \lambda\mathbb{1})\phi(g)\boldsymbol{v} = \phi(g)(C - \lambda\mathbb{1})\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$, impliquant que $\boldsymbol{v}' = \phi(g)\boldsymbol{v}$ est encore un vecteur propre de C avec valeur propre λ. Mais étant donné que R est irréductible, l'espace vectoriel tout entier doit être un espace propre de C avec valeur propre λ, et on trouve donc que $C = \lambda\mathbb{1}$.

Il suit du résultat précédent que tout élément $\hat{g}$ du centre d'un groupe G est associé dans toute représentation irréductible R à une matrice $\phi(\hat{g})$ proportionnelle à l'identité $\mathbb{1}$.

1.6 Algèbres de Lie

Les algèbres de Lie sont des espaces vectoriels munis d'un crochet antisymétrique produisant à partir de deux éléments de l'espace un nouvel élément de cet espace. Elles jouent un rôle important dans la caractérisation des opérateurs agissant sur un espace vectoriel, comme ceux apparaissant en mécanique quantique, et également pour la description de transformations de symétrie infinitésimales.

1.6.1 Définition

Une *algèbre de Lie* $\mathfrak{g}$ est un espace vectoriel V sur un corps $\mathbb{K}$ muni d'un crochet entre deux éléments $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$, noté $[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}]$, satisfaisant les propriétés suivantes $\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$ and $a, b \in \mathbb{K}$:

1. $[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}] \in V$
2. $[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}] = -[\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}]$
3. $[\boldsymbol{u}, a\boldsymbol{v} + b\boldsymbol{w}] = a[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}] + b[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}]$
4. $[[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}], \boldsymbol{w}] + [[\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}], \boldsymbol{u}] + [[\boldsymbol{w}, \boldsymbol{u}], \boldsymbol{v}] = \mathbf{0}$ (propriété de Jacobi)

Une telle algèbre est dite réelle si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, même si les éléments $\boldsymbol{u}$ sont décrits par des objects complexes. Elle est dite complexe si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Exemples.

1. $V = \mathbb{R}^3$ sur $\mathbb{R}$ avec $[\vec{u}, \vec{v}] = \vec{u} \times \vec{v} =$ produit vectoriel.
2. $V = C^1(\mathbb{R}^{2n})$ sur $\mathbb{R}$ où $[f, g] = \{f, g\} =$ crochet de Poisson.
3. $V = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K}) = \{\text{matrices } n \times n\}$ sur $\mathbb{K}$ où $[A, B] =$ commutateur.

Dans une base $\{\boldsymbol{e}_i\}$ de V on peut caractériser entièrement l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ par l'action du crochet sur les éléments de cette base. On a en effet :

$$[\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j] = c_{ij}^k \boldsymbol{e}_k \tag{1.37}$$

Les nombres $c_{ij}^k \in \mathbb{K}$ sont appelés *constantes de structure* de $\mathfrak{g}$. L'antisymétrie du crochet et la propriété de Jacobi impliquent que ces constantes de structure satisfont les propriétés suivantes :

1. $c_{ij}^k = -c_{ji}^k$
2. $c_{ij}^l c_{lk}^m + c_{jk}^l c_{li}^m + c_{ki}^l c_{lj}^m = 0$

Sous un changement de base de l'espace vectoriel V, agissant sur les vecteurs de base comme $\hat{\boldsymbol{e}}_i = \tilde{\Lambda}_i{}^j \boldsymbol{e}_j$, les constantes de structure se transforment comme les composantes d'un tenseur de type $(1, 2)$:

$$\hat{c}_{ij}^k = \tilde{\Lambda}_i{}^m \tilde{\Lambda}_j{}^n \Lambda^k{}_l \, c_{mn}^l \tag{1.38}$$

1.6.2 Homomorphismes d'algèbres

Une application $f : \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$ entre deux algèbres de Lie $\mathfrak{g}_1$ et $\mathfrak{g}_2$, construites sur des espaces vectoriels V_1 et V_2 sur $\mathbb{K}$ avec des crochets $[\cdot, \cdot]_1$ et $[\cdot, \cdot]_2$, représente un *homomorphisme d'algèbres de Lie* si elle linéaire et compatible avec la structure des crochets, c'est-à-dire si $\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathfrak{g}_1$ et $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ elle satisfait :

1. $f(\alpha \boldsymbol{u} + \beta \boldsymbol{v}) = \alpha f(\boldsymbol{u}) + \beta f(\boldsymbol{v})$
2. $f([\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}]_1) = [f(\boldsymbol{u}), f(\boldsymbol{v})]_2$

Une telle application représente un *isomorphisme d'algèbres de Lie* si elle est également inversible. La relation d'isomorphisme est notée $\mathfrak{g}_1 \simeq \mathfrak{g}_2$.

1.6.3 Représentations

Une représentation R d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ dans un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{K}$ est un homomorphisme $\psi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ associant à chaque élément $\boldsymbol{u} \in \mathfrak{g}$ un élément $\psi(\boldsymbol{u}) \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$, avec les propriétés suivantes :

1. $\psi(\alpha \boldsymbol{u} + \beta \boldsymbol{v}) = \alpha\psi(\boldsymbol{u}) + \beta\psi(\boldsymbol{v})$
2. $\psi([\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}]) = [\psi(\boldsymbol{u}), \psi(\boldsymbol{v})] = \psi(\boldsymbol{u})\psi(\boldsymbol{v}) - \psi(\boldsymbol{v})\psi(\boldsymbol{u})$

Étant donné que $\mathbf{0} + \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$ on a $\psi(\mathbf{0}) + \psi(\boldsymbol{u}) = \psi(\boldsymbol{u})$ et donc :

$$\psi(\mathbf{0}) = 0 \tag{1.39}$$

De même, vu que $\boldsymbol{u} + -\boldsymbol{u} = 0$ on a $\psi(\boldsymbol{u}) + \psi(-\boldsymbol{u}) = 0$ et donc

$$\psi(-\boldsymbol{u}) = -\psi(\boldsymbol{u}) \tag{1.40}$$

Chapitre 2

Variétés

La notion de variété généralise la notion habituelle de courbe, surface ou hypersurface, mais d'un point de vue intrinsèque et non pas comme plongement dans un espace ambiant plus grand. Une variété est un espace topologique qui est localement semblable à $\mathbb{R}^n$, dans le sens de déformation continue, mais pas forcément globalement. Ceci permet d'introduire des coordonnées au voisinage de chaque point, mais en général plusieurs systèmes de coordonnées sont nécessaires pour décrire toute la variété. On peut également définir sur une variété un calcul différentiel à partir de celui sur $\mathbb{R}^n$.

2.1 Définitions

Pour définir une variété de façon intrinsèque, on procède de la même façon que pour décrire la surface de la Terre sans avoir à l'imaginer dans l'espace $\mathbb{R}^3$. On utilise un atlas, composés de cartes. Les cartes quadrillées décrivant une région de la Terre sont des ouverts de $\mathbb{R}^2$, et le quadrillage représente un système de coordonnées locales. On demande en outre que deux cartes différentes contenant une même région décrivent celle-ci de façons compatibles. Enfin, pour décrire toute la Terre, il faut considérer un ensemble de cartes où chaque région est décrite, et les réunir en un atlas.

2.1.1 Variétés topologiques

Un ensemble M est une *variété topologique à n dimensions* s'il satisfait les propriétés suivantes :

1. M est un espace topologique séparé possédant une base dénombrable d'ouverts M_α le recouvrant, de sorte que $M = \bigcup_\alpha M_\alpha$
2. Il existe une famille d'homéomorphismes ϕ_α reliant chaque ouvert M_α à un ouvert U_α de $\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire $\phi_\alpha : M_\alpha \to U_\alpha \subset \mathbb{R}^n$.

Les couples (M_α, ϕ_α) sont appelés *cartes*, et l'ensemble $A = \{(M_\alpha, \phi_\alpha)\}$ est appelé *atlas*. Ceci veut dire que si $y \in M_\alpha$, on peut caractériser y par des coordonnées locales $\phi_\alpha(y) \in U_\alpha$. On adopte alors la notation $x_\alpha = \phi_\alpha(y)$, avec $x_\alpha = (x_\alpha^1, \cdots, x_\alpha^n)$ (les indices α spécifiant la carte ne sont jamais sommés, même si répétés).

Les x_α^i sont des fonctions continues de y et, inversement, y dépend continûment des x_α^i. Lorsque deux cartes décrivent la même région, c'est-à-dire lorsque $M_\alpha \cap M_\beta \neq \emptyset$, deux coordonnées locales, x_α et x_β, peuvent être introduite. Ces deux coordonnées locales sont toutefois reliées par des fonctions $f_{\alpha\beta} = \phi_\alpha \cdot \phi_\beta^{-1} : \phi_\beta(M_\alpha \cap M_\beta) \to \phi_\alpha(M_\alpha \cap M_\beta)$ bicontinues, appelées *fonctions de transition* :

$$x_\alpha = f_{\alpha\beta}(x_\beta)\,, \quad f_{\alpha\beta} = \phi_\alpha \cdot \phi_\beta^{-1} \quad \text{bicontinue} \tag{2.1}$$

2.1.2 Variétés différentiables

Un ensemble M est appelé *variété différentiable* s'il satisfait les propriétés suivantes :

1. M est une variété topologique dotée d'un atlas de cartes.
2. Les fonctions de transitions $f_{\alpha\beta}$ entre différentes cartes M_α, M_β de l'atlas de M avec $M_\alpha \cap M_\beta \neq \emptyset$ sont non seulement bicontinues, mais aussi différentiables, c'est-à-dire C^∞.

Une variété différentiable est donc une variété topologique sur laquelle on peut définir un calcul différentiel semblable à celui sur $\mathbb{R}^n$. On dit qu'il existe une *structure différentiable*. Celle-ci n'est toutefois pas toujours unique. Pour la définir plus précisément, on introduit le concept de compatibilité entre cartes. Deux cartes (M_α, ϕ_α) et (M_β, ϕ_β) sont dites *compatibles* si la fonction de transition $f_{\alpha\beta}$ est différentiable quand $M_\alpha \cap M_\beta \neq \emptyset$. On dit alors aussi que deux atlas formés de cartes compatibles sont équivalents si leur union est encore un atlas de cartes compatibles. Ceci définit une relation d'équivalence, et on peut alors définir la structure différentiable comme la classe d'équivalence correspondante.

Il est important de souligner qu'en partant d'une variété topologique donnée on obtient la même variété différentiable en utilisant tout atlas faisant partie de la même classe d'équivalence associée à une certaine structure différentiable. Dans les applications physiques, ceci correspond au principe selon lequel aucun système de coordonnées n'a de sens physique et n'est donc privilégié.

Finalement, on remarque que l'absence de structure différentiable pour une variété topologique signale la présence de la généralisation de ce que

sont les arêtes pour les surfaces. Par exemple, comme nous allons le voir une sphère est une variété différentiable tandis qu'un polyèdre dans $\mathbb{R}^3$ est une variété topologique mais non différentiable.

Propriétés.

1. Si M est une variété, alors tout sous-ensemble ouvert $V \subset M$ est lui aussi une variété.
2. Si M_1 et M_2 sont deux variétés, alors $M_1 \times M_2$ est une variété. En effet, $M_1 \times M_2 = \{\text{couples ordonnés } (x_1, x_2) \mid x_i \in M_i\}$ et la topologie produit est définie en appelant ouverts de $M_1 \times M_2$ les $O = O_1 \times O_2$ avec O_1, O_2 des ouverts de M_1, M_2 respectivement.

Exemples.

1. $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$ sont des variétés.
2. Tout ouvert de $\mathbb{R}^n$ ou de $\mathbb{C}^n$ est une variété.
3. $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) = \{g \text{ matrices } n \times n \mid \det g \neq 0\}$ est une variété. En effet, c'est un ouvert de $\mathbb{R}^{n^2}$, puisque son complément $\{g \mid \det g = 0\}$ est fermé car si $\det g_n = 0$, alors $\lim_{n\to\infty} \det g_n = \det(\lim_{n\to\infty} g_n) = 0$.
4. $S^n = \{y \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|y\| = 1\}$ est une variété différentiable.

2.1.3 Variétés orientables

Une variété différentiable est dite *orientable* si elle admet un atlas *orienté*, pour lequel le Jacobien $\det(\partial x^i_\alpha / \partial x^j_\beta)$ associé à tout changement de carte dans $M_\alpha \cap M_\beta$ est positif. Remarquons que le Jacobien ne peut s'annuler, étant donné que les fonctions $f_{\alpha\beta}$ sont bicontinues et différentiables. Toutefois, $M_\alpha \cap M_\beta$ n'est en général pas connexe et le Jacobien peut avoir des signes différents dans les différentes composantes. Pour une variété orientable il est possible de définir de façon globalement consistante un vecteur normal à la variété, et donc une face interne et une face externe distinctes.

2.1.4 Variétés avec bords

Il est possible de généraliser la définition de variété de telle façon à inclure la possibilité qu'il y ait un bord. Une variété M est alors un espace topologique localement homéomorphe à $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x^n \geq 0\}$. On appelle *bord* de M, noté ∂M, l'ensemble des points $y \in M$ appliqué dans $\partial\mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x^n = 0\}$ par l'homéomorphisme ϕ_α de M_α contenant y dans un ouvert U_α de $\mathbb{R}^n_+$. Si $\partial M = \emptyset$ on dit que la variété est sans bord.

2.2 Surfaces et hypersurfaces

Les exemples les plus élémentaires de variétés sont les courbes, surfaces ou hypersurfaces définies de façon implicite par une ou plusieurs équations représentant des contraintes sur les coordonnées de $\mathbb{R}^n$. Nous allons d'abord examiner le cas illustratif d'une surface de dimension 2 définie par une équation dans $\mathbb{R}^3$, et ensuite mentionner la généralisation à une hypersurface de dimension n définie par m équations dans $\mathbb{R}^{n+m}$.

2.2.1 Surfaces

Un *surface* bidimensionnelle S est un sous-espace de l'espace tridimensionnel $\mathbb{R}^3$ défini par une contrainte :

$$S = \left\{ y \in \mathbb{R}^3 \mid F(y) = 0 \right\} \tag{2.2}$$

Une surface S est un espace topologique séparé, dont les ouverts sont obtenus comme intersections des ouverts de $\mathbb{R}^3$ avec S. On dit en outre que S est *régulière* en un point y_0 si le vecteur ∇F des dérivées partielles de F n'est pas identiquement nul en y_0. On a alors le théorème suivant :

Théorème. Une surface S régulière en tout point et telle que la fonction F la définissant est différentiable est une variété différentiable. De plus, S est orientable.

Preuve. En chaque point y_0, au moins une des composantes du vecteur ∇F est non-nulle, vu que la surface est régulière. En dénotant par α la valeur de l'indice correspondant à cette composante et par α' et α'' les deux autres valeurs possibles ($\alpha, \alpha', \alpha'' = 1, 2$ ou 3), on a donc $\partial_\alpha F(y_0) \neq 0$. La continuité de $\partial_\alpha F(y)$ implique qu'il existe en fait un voisinage ouvert $O_\alpha \subset \mathbb{R}^3$ de y_0 tel que $\partial_\alpha F(y) \neq 0, \forall y \in O_\alpha$. Le théorème des fonctions implicites garantit alors qu'il est possible de résoudre la contrainte $F(y) = 0$ pour déterminer $y^\alpha = g^\alpha(y^{\alpha'}, y^{\alpha''})$ dans un ouvert $M_\alpha \subset O_\alpha$, les variables $(y^{\alpha'}, y^{\alpha''})$ jouant donc le rôle de coordonnées locales. En effet, en développant en série l'équation $F(y^\alpha, y^{\alpha'}, y^{\alpha''}) = 0$ en y^α autour de y_0^α, on obtient :

$$F(y_0^\alpha, y^{\alpha'}, y^{\alpha''}) + \partial_\alpha F(y_0^\alpha, y^{\alpha'}, y^{\alpha''})(y^\alpha - y_0^\alpha) + \mathcal{O}(|y^\alpha - y_0^\alpha|^2) = 0 \tag{2.3}$$

On a donc

$$(y^\alpha - y_0^\alpha) = -\frac{F(y_0^\alpha, y^{\alpha'}, y^{\alpha''})}{\partial_\alpha F(y_0^\alpha, y^{\alpha'}, y^{\alpha''})} + \mathcal{O}(|y^\alpha - y_0^\alpha|^2) \tag{2.4}$$

Cette équation définit une contraction dans une boule $|y^\alpha - y_0^\alpha| \leq \epsilon$, si ϵ est assez petit. Il suit que si F est différentiable alors

$$y^\alpha = g^\alpha(y^{\alpha'}, y^{\alpha''}) \quad \text{différentiable} \tag{2.5}$$

Ceci permet de décrire le voisinage de y_0 par une carte (M_α, ϕ_α), avec coordonnées $\phi_\alpha(y) = (y^{\alpha'}, y^{\alpha''}) \equiv (x^1_\alpha, x^2_\alpha)$, qui définissent un homéomorphisme de $M_\alpha \subset S$ à $U_\alpha \subset \mathbb{R}^2$. Pour le passage d'une carte (M_α, ϕ_α) à une carte (M_β, ϕ_β), dans $M_\alpha \cap M_\beta$, on a

$$\begin{cases} y^\alpha = g^\alpha(x^1_\alpha, x^2_\alpha) \\ y^{\alpha'} = x^1_\alpha \\ y^{\alpha''} = x^2_\alpha \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} y^\beta = g^\beta(x^1_\beta, x^2_\beta) \\ y^{\beta'} = x^1_\beta \\ y^{\beta''} = x^2_\beta \end{cases} \tag{2.6}$$

On voit que les fonctions de transition entre (x^1_α, x^2_α) et (x^1_β, x^2_β) sont différentiables, comme conséquence de la différentiabilité de g^α et g^β :

$$x^i_\alpha(x^j_\beta) \quad \text{différentiables} \tag{2.7}$$

On remarque finalement que le Jacobien de ces changements de coordonnées peut être rendu positif en choisissant de façon appropriée le signe des coordonnées dans chacun des ouverts M_α, essentiellement par continuité. On a donc une variété différentiable et orientable.

Remarques.

1. Géométriquement le vecteur ∇F est normal à S, donc la condition de régularité signifie qu'en chaque point de la surface on peut définir une normale.
2. L'orientabilité signifie que l'on peut définir une normale extérieure (distincte de la normale intérieure) en tout point de S, de manière consistante. Le trièdre formé de la normale extérieure et de deux vecteurs tangents à la surface reste droit quand on se déplace sur la surface. Un tel déplacement est décrit par une matrice, et le signe du déterminant de cette matrice caractérise l'orientation du trièdre.

Exemples.

1. La sphère de rayon r est une surface régulière, décrite par l'équation

$$F(y) = (y^1)^2 + (y^2)^2 + (y^3)^2 - r^2 = 0$$

2. Le cône d'angle α est une surface régulière en tout point sauf l'apex, décrite par l'équation

$$\sin^2\alpha\,(y^1)^2 - \cos^2\alpha\,(y^2)^2 - \cos^2\alpha\,(y^3)^2 = 0$$

2.2.2 Hypersurfaces

Une *hypersurface* S de dimension n est un objet défini par m contraintes dans l'espace $\mathbb{R}^{n+m}$:

$$S = \left\{ y \in \mathbb{R}^{n+m} \mid F^a(y) = 0\,, \;\; a = 1, \cdots, m \right\} \tag{2.8}$$

Une hypersurface S est un espace topologique séparé, dont les ouverts sont obtenus comme intersections des ouverts de $\mathbb{R}^{n+m}$ avec S. Elle est dite *régulière* en y_0 si la matrice $m \times (m+n)$ ∇F des dérivées partielles des fonctions F, dont les éléments sont donnés par $(\nabla F)^a{}_A = \partial F^a / \partial y^A$ avec $a = 1, \cdots, m$ et $A = 1, \cdots, m+n$, est de rang m en y_0. On a alors le théorème suivant :

Théorème. Une hypersurface de dimension n régulière en tout point est une variété différentiable si toutes les F^a sont différentiables. C'est aussi une variété orientable.

Preuve. La démonstration est en grande partie la même que dans le cas des surfaces et résulte à nouveau essentiellement du théorème des fonctions implicites. Le fait que la matrice ∇F soit de rang m en chaque y_0 garantit que l'on peut décomposer $y = (x, z)$ au voisinage de y_0, avec $x \in \mathbb{R}^n$ et $z \in \mathbb{R}^m$, de telle façon que la matrice $\partial F^a / \partial z^b$, avec $a, b \in 1, \cdots, m$ soit inversible. Il suit alors du théorème des fonctions implicites que l'on peut résoudre les contraintes pour exprimer les variables z comme des fonctions différentiables des variables x :

$$z^a = g^a(x^1, \cdots, x^n), \quad a = 1, \cdots, m \tag{2.9}$$

On peut alors utiliser les variables x^i, $i = 1, \cdots, n$, comme coordonnées locales dans le voisinage de y_0.

Remarques.

1. La condition de régularité en y_0 a l'interprétation géométrique suivante : au point y_0, le plan tangent à S a la dimension n de l'hypersurface.
2. On rencontre souvent le problème suivant : déterminer le maximum d'une fonction $g(y)$ lorsque y satisfait les m contraintes $F^a(y) = 0$. On voit que ceci est équivalent à déterminer le maximum lorsque y appartient à une hypersurface S.
3. Une variété non orientable ne peut pas être décrite comme une hypersurface, étant donné que toute hypersurface est automatiquement orientable.

2.2.3 La sphère à n dimensions S^n

La sphère à n dimensions de rayon unitaire est définie comme l'hypersurface donnée par

$$S^n = \left\{ y \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|y\| = 1 \right\} \tag{2.10}$$

C'est une variété à n dimensions différentiable et orientable, par le théorème de la section précédente. Elle n'a pas de bord, et est compacte. Elle représente en quelque sorte pour chaque n l'exemple le plus simple de variété non-banale, c'est-à-dire qui est équivalente à $\mathbb{R}^n$ localement mais pas globalement, ce qui se traduit par l'impossibilité de la décrire à l'aide d'une seule carte.

Considérons d'abord le cas le plus simple du cercle S^1, correspondant à $n = 1$. En utilisant des coordonnées polaires on peut paramétriser $y \in S^1$ comme $y = (\cos(\theta + \theta_0), \sin(\theta + \theta_0))$. Toutefois, pour définir une carte il est nécessaire de considerer un domaine ouvert et une fonction coordonnée bicontinue. Une seule carte ne suffit alors pas à couvrir tout S^1, car il reste toujours un point exclu. Par exemple, en prenant $\theta \in]0, 2\pi[$ le point exclu est $P_0 = (\cos\theta_0, \sin\theta_0)$. Il est donc nécessaire de considérer au moins deux cartes qui se chevauchent, pour que chaque point soit dans une carte. On peut par exemple prendre deux cartes avec θ_0 égal à 0 et π, qui excluent respectivement les points $P_+ = (1, 0)$ et $P_- = (-1, 0)$:

- Première carte : (M_+, ϕ_+) avec $M_+ = S^1 \backslash \{P_+\}$, $U_+ =]0, 2\pi[$ et coordonnée $\phi_+ : M_+ \to U_+$ donnée par

$$\phi_+(y) = \text{angle}(y, P_+) \equiv \theta_+ \tag{2.11}$$

- Deuxième carte : (M_-, ϕ_-) avec $M_- = S^1 \backslash \{P_-\}$, $U_- =]0, 2\pi[$ et coordonnée $\phi_- : M_- \to U_-$ donnée par

$$\phi_-(y) = \text{angle}(y, P_-) \equiv \theta_- \tag{2.12}$$

On a $M_+ \cap M_- = S^1 \backslash \{P_+, P_-\}$ et

$$\phi_+(M_+ \cap M_-) = \phi_-(M_+ \cap M_-) =]0, \pi[\cup]\pi, 2\pi[\tag{2.13}$$

La fonction de transition entre les deux cartes est alors banalement

$$\theta_+(\theta_-) = \begin{cases} \theta_- + \pi\,, & \text{if } \theta_- \in]0, \pi[\\ \theta_- - \pi\,, & \text{if } \theta_- \in]\pi, 2\pi[\end{cases} \tag{2.14}$$

La fonction de transition est différentiable, et S^1 est donc une variété différentiable. Le Jacobien associé est positif, $\det(\partial\theta_+ / \partial\theta_-) = 1$, et ceci montre que S^1 est orientable.

Considérons maintenant le cas de la sphère S^2, correspondant à $n = 2$. Pour la décrire on peut produire les cartes par la méthode de la *projection stéréographique*. Soient N le pôle nord et S le pôle sud, et P un point arbitraire de S^2 :

- Première carte : On trace une droite joignant N à P. Cette droite coupe le plan équatorial en P'. La carte correspondante s'écrit (M_+, ϕ_+) avec $M_+ = S^2 \backslash \{N\}$, $U_+ = \mathbb{R}^2$ et $\phi_+ : M_+ \to U_+$ donnée par

$$\phi_+(y) = \left(\frac{y^1}{1-y^3}, \frac{y^2}{1-y^3} \right) \equiv x_+ \tag{2.15}$$

- Deuxième carte : On trace une droite joignant S à P. Cette droite coupe le plan équatorial en P''. La carte correspondante s'écrit (M_-, ϕ_-) avec $M_- = S^2 \backslash \{S\}$, $U_- = \mathbb{R}^2$ et $\phi_- : M_- \to U_-$ donnée par

$$\phi_-(y) = \left(\frac{y^1}{1+y^3}, \frac{y^2}{1+y^3} \right) \equiv x_- \tag{2.16}$$

Notons que $M_- \cap M_+ = S^2 \backslash \{S, N\}$ et observons que

$$\phi_-(M_- \cap M_+) = \phi_+(M_- \cap M_+) = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \tag{2.17}$$

Posons en plus $x_+ = (x_+^1, x_+^2)$ et $x_- = (x_-^1, x_-^2)$. Alors

$$x_+^i \equiv \frac{x_-^i}{(x_-^1)^2 + (x_-^2)^2} \tag{2.18}$$

La fonction de transition $x_+(x_-)$ est différentiable, et S^2 est donc une variété différentiable. De plus, le Jacobien associé est toujours negatif :

$$\det\left(\frac{\partial x_+}{\partial x_-} \right) = -\left[(x_+^1)^2 + (x_+^2)^2 \right]^{-2} < 0 \tag{2.19}$$

Ceci indique que les deux cartes utilisées ont des orientations opposées. Il est toutefois possible d'obtenir la même orientation dans les deux cartes en réfléchissant une des deux coordonnées dans l'une d'entre elles. De cette façon les Jacobiens changent de signe et restent positifs. Ceci montre que S^2 est orientable.

Les n-sphères S^n avec $n \geq 3$ sont toutes des variétés différentiables orientables. Une façon simple de les cartographier qui s'applique à chaque n consiste à utiliser les projections de chacune des $2n$ hemisphères avec y^i positive ou négative sur l'hyperplan $y^i = 0$. On considère donc les ouverts

$$M_{i+} = \left\{ y \in S^n \mid y^i > 0 \right\}, \quad M_{i-} = \left\{ y \in S^n \mid y^i < 0 \right\} \tag{2.20}$$

et on prend comme coordonnées les homéomorphismes $\phi_{i\pm} : M_{i\pm} \to \mathbb{R}^n$ définis par :

$$\phi_{i\pm}(y) = (y^1, \cdots, y^{i-1}, y^{i+1}, \cdots, y^{n+1}) \equiv (x_{i\pm}^1, \cdots, x_{i\pm}^n) \tag{2.21}$$

2.3 Espaces quotients

A partir d'un ensemble X muni d'une relation d'équivalence $\sim$ entre ses éléments x, on peut définir l'*espace quotient* $X/\sim$ constitué de l'ensemble des classes d'équivalence $[x]$ de X.

On peut toujours définir une topologie sur un espace quotient à partir de la topologie sur X. Soit p la projection de X sur $X/\sim$ définie par $p(x) = [x]$. On peut alors définir les ouverts $\widetilde{O}$ de $X/\sim$ par $\widetilde{O} = p(O)$ où O est un ouvert de X. Cette topologie s'appelle *topologie quotient*.

Si X est une variété, $X/\sim$ est souvent, mais pas toujours, une variété.

2.3.1 Espaces projectifs RP^n

L'espace RP^n est l'espace des droites passant par l'origine dans $\mathbb{R}^{n+1}$. Pour le construire comme espace quotient, considérons $X = \mathbb{R}^{n+1}\backslash\{0\}$ et introduisons la relation d'équivalence

$$x \sim y \;\Leftrightarrow\; \exists a \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \text{ tel que } x = ay \tag{2.22}$$

Les classes d'équivalence correspondantes $[y] = [y^1, \cdots, y^{n+1}]$ sont appelées *coordonnées homogènes*. On a alors $\mathrm{RP}^n = X/\sim$. On peut montrer que c'est un espace topologique séparé. Pour montrer que c'est une variété, on considère les $n+1$ ouverts $O_\alpha = \{y \in X \mid y^\alpha \neq 0\}$ de X, pour $\alpha = 1, \cdots, n+1$. Ces ouverts recouvrent X : $\bigcup_\alpha O_\alpha = X$. Les ouverts correspondants $M_\alpha = \widetilde{O}_\alpha$ sur l'espace quotient $X/\sim$ peuvent alors être utilisées comme domaines de définition de $n+1$ cartes. Dans chacune de ces cartes, on introduit des coordonnées locales $(x^1_\alpha, \cdots, x^n_\alpha)$, dites *coordonnées inhomogènes*, définies par l'homéomorphisme $\phi_\alpha : M_\alpha \to \mathbb{R}^n$ donné par

$$\phi_\alpha([y]) = \left(\frac{y^1}{y^\alpha}, \cdots, \frac{y^{\alpha-1}}{y^\alpha}, \frac{y^{\alpha+1}}{y^\alpha}, \cdots, \frac{y^{n+1}}{y^\alpha}\right) \equiv x_\alpha \tag{2.23}$$

Notons que ces coordonnées sont effectivement indépendantes du choix du représentant y choisi pour la classe d'équivalence $[y]$. Les fonctions de transitions entre deux cartes avec $\beta > \alpha$ sont données par :

$$x^i_\beta = \begin{cases} \dfrac{x^i_\alpha}{x^{\beta-1}_\alpha}, & i \in [1, \alpha-1] \\ \dfrac{1}{x^{\beta-1}_\alpha}, & i = \alpha \\ \dfrac{x^{i-1}_\alpha}{x^{\beta-1}_\alpha}, & i \in [\alpha+1, \beta-1] \\ \dfrac{x^i_\alpha}{x^{\beta-1}_\alpha}, & i \in [\beta+1, n] \end{cases} \tag{2.24}$$

Elles sont différentiables, vu que $x_\alpha^{\beta-1} = y^\beta/y^\alpha \neq 0$ dans $M_\alpha \cap M_\beta$. Par conséquent, RP^n est une variété différentiable. Les Jacobiens sont facilement calculés. Par exemple pour $\beta = \alpha + 1$ on obtient $J \equiv \det(\partial x_\beta/\partial x_\alpha) = -1/(x_\alpha^{\beta-1})^{n+1}$. Si n est impair $J < 0$, mais si n est pair on peut avoir $J > 0$ ou $J < 0$. On voit alors que RP^n est orientable si n est impair, et non orientable si n est pair.

On peut également construire RP^n d'une autre manière. Pour définir une droite passant par l'origine dans $\mathbb{R}^{n+1}$, on peut prendre un vecteur unité $u \in \mathbb{R}^{n+1}$ avec $\|u\| = 1$ et donc $u \in S^n$. Mais comme $\pm u$ définissent la même droite, on a $\mathrm{RP}^n \simeq S^n/\sim$, où la relation d'équivalence $\sim$ consiste à identifier les points antipodaux.

2.3.2 Les sphères S^n comme espaces quotients

Dans $\mathbb{R}^n$, considérons le *disque* unitaire à n dimensions, défini comme $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$. Cet espace a un bord $\partial D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$. Identifions maintenant tous les points de ce bord entre eux. En plongeant le disque dans $\mathbb{R}^{n+1}$ et en le déformant continûment, on obtient alors la sphère S^n, qui est donc homéomorphe à cet espace. Par exemple le cercle S^1 peut être obtenu en identifiant les deux points extrêmes d'un segment unitaire D^1. De la même manière, la sphère S^2 peut être obtenue du disque unitaire D^2 en identifiant les points du cercle qui le délimitent (fig. 2.1).

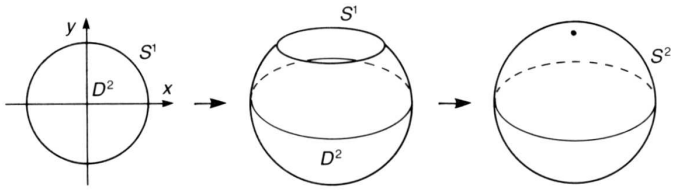

FIGURE 2.1 – La sphère comme espace quotient. On identifie les points du bord du disque unité D^2. Par déformation continue et en plongeant le disque dans $\mathbb{R}^3$, on obtient la sphère S^2.

2.3.3 Espaces quotients par translations

Dans $\mathbb{R}$, on peut définir une relation d'équivalence sous translation d'une longueur de référence 2π :

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y = 2\pi n\,, \quad n \in \mathbb{Z} \tag{2.25}$$

On a alors $[x] = \{\cdots, x - 2\pi, x, x + 2\pi, \cdots\}$. L'espace quotient $\mathbb{R}/\sim$ associé aux classes d'équivalence distinctes est donc l'intervalle $[0, 2\pi]$ avec 0 à 2π identifiés. Cet espace est homéomorphe à S^1.

Dans $\mathbb{R}^2$, on peut considérer plusieurs relations d'équivalence différentes de ce type. En utilisant une seule translation on peut par example définir les relations d'équivalence :

1. $x \sim y \Leftrightarrow x^1 - y^1 = 2\pi n\,,\ \ x^2 = y^2\,,\ \ n \in \mathbb{Z}$
2. $x \sim y \Leftrightarrow x^1 - y^1 = 2\pi n\,,\ \ x^2 = (-1)^n y^2\,,\ \ n \in \mathbb{Z}$

En utilisant deux translations orthogonales, on peut également définir les relations d'équivalence :

3. $x \sim y \Leftrightarrow x^1 - y^1 = 2\pi n_1\,,\ \ x^2 - y^2 = 2\pi n_2\,,\ \ n_i \in \mathbb{Z}$
4. $x \sim y \Leftrightarrow x^1 = (-1)^{n_2} y^1 + 2\pi n_1\,,\ \ x^2 - y^2 = 2\pi n_2\,,\ \ n_i \in \mathbb{Z}$
5. $x \sim y \Leftrightarrow x^1 = (-1)^{n_2} y^1 + 2\pi n_1\,,\ \ x^2 = (-1)^{n_1} y^2 + 2\pi n_2\,,\ \ n_i \in \mathbb{Z}$

Les espaces quotients $\mathbb{R}^2/\sim$ correspondants sont des variétés. Dans le cas 1, on a identifié $(0, x^2) \sim (2\pi, x^2)$. Cet espace est donc homéomorphe à $S^1 \times \mathbb{R}$ c'est-à-dire le *cylindre*. Dans le cas 2, on a $(0, x^2) \sim (2\pi, -x^2)$. L'orientation du bord $(0, x^2)$ est opposée à celle de $(2\pi, x^2)$. Si on veut plonger cette variété dans $\mathbb{R}^3$, il faut recoller ces bords pour que les orientations coïncident, et on obtient donc le *ruban de Moebius*. Celui-ci a la particularité de ne plus être orientable, c'est-à-dire de ne pas avoir un côté intérieur bien défini. Dans le cas 3, on a $(x^1, 0) \sim (x^1, 2\pi)$ et $(0, x^2) \sim (2\pi, x^2)$. On trouve alors le *tore* $T^2 \simeq S^1 \times S^1$ (fig. 2.2). Dans le cas 4, on a $(x^1, 0) \sim (2\pi - x^1, 2\pi)$ et $(0, x^2) \sim (2\pi, x^2)$. Cette variété est appelée la *bouteille de Klein* (fig. 2.3.a). Elle est non orientable. Dans le cas 5, on a $(x^1, 0) \sim (2\pi - x^1, 2\pi)$ et $(0, x^2) \sim (2\pi, 2\pi - x^2)$. C'est une variété homéomorphe à RP^2 (fig. 2.3.b), elle aussi non orientable.

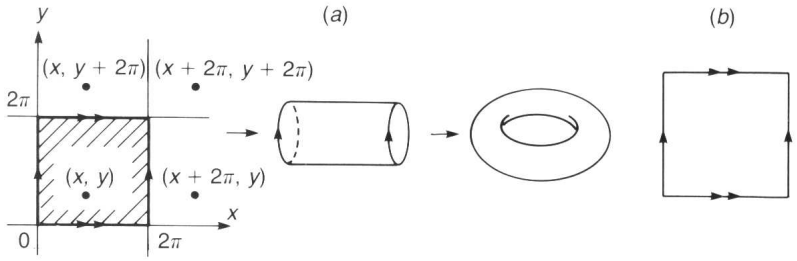

FIGURE 2.2 – Le cylindre et le tore

2.4 Groupes et leurs quotients

Un groupe G dont les éléments $g(\alpha_i)$ dépendent de certains paramètres continus $\alpha_i \in \mathbb{R}$ a souvent une structure de variété différentiable. Nous verrons plus loin que ceci permet d'étudier de façon efficace ces groupes, malgré le fait qu'ils contiennent une infinité non dénombrable d'éléments.

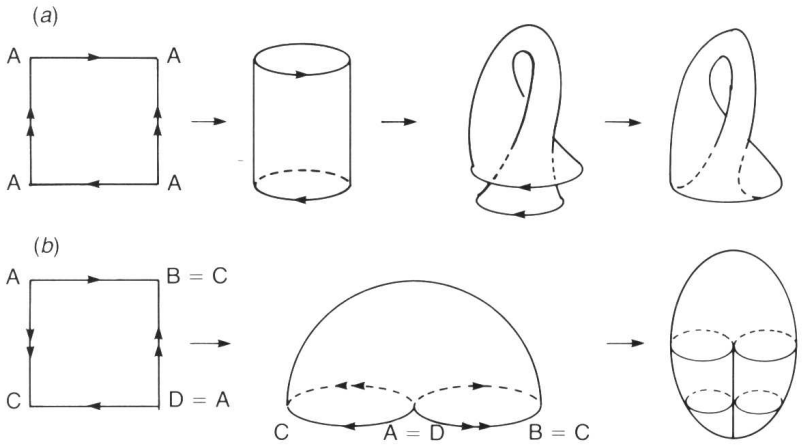

FIGURE 2.3 – (a) La bouteille de Klein est homéomorphe au cylindre dont les bords sont identifiés dans des sens contraires. (b) Le plan projectif RP^2 est homéomorphe au carré dont les côtés opposés sont identifiés dans des directions contraires.

Exemples.

1. Les *translations* dans $\mathbb{R}^n$: $x \to x + a$. Ce groupe peut s'identifier à $\mathbb{R}^n$ muni de l'addition. Ses éléments sont paramétrisés par un vecteur a, dont les composantes peuvent être vues comme coordonnées. C'est une variété différentiable non-compacte de dimension n.
2. Le *groupe des rotations* dans $\mathbb{R}^n$, $x \to gx$, noté $\mathrm{SO}(n)$:

$$\mathrm{SO}(n) = \{\text{matrices } g \text{ réelles } n \times n \mid g^T g = \mathbb{1},\ \det g = 1\} \tag{2.26}$$

   C'est une variété différentiable compacte à $n(n-1)/2$ dimensions. On a par exemple :

   (a) $n = 2$: rotations dans $\mathbb{R}^2$. Les matrices 2×2 peuvent être caractérisées par un angle θ, qui fait office de coordonnée.

   (b) $n = 3$: rotations dans $\mathbb{R}^3$. Les matrices 3×3 peuvent être caractérisées par les trois angles d'Euler θ, ϕ, ψ, qui peuvent être considérés comme des coordonnées.

Soit G un groupe et H un sous-groupe. On peut définir la relation d'équivalence (droite ou gauche) :

$$g \sim g' \Leftrightarrow \begin{cases} g = g'h\,, & h \in H \ \text{(droite)} \\ g = hg'\,, & h \in H \ \text{(gauche)} \end{cases} \tag{2.27}$$

L'espace quotient droit est noté G/H, l'espace quotient gauche est noté $H\backslash G$. En général, ces espaces quotients ne sont pas des groupes. Toutefois, si le groupe G est une variété, l'espace quotient est lui aussi une variété.

Exemples.

1. $G = \mathbb{R}$ et $H = \mathbb{Z}$ avec l'addition. Dans ce cas on a $H\backslash G = G/H \simeq S^1$.
2. $G = \mathbb{R}^2$ et $H = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ avec l'addition. Dans ce cas on a $H\backslash G = G/H \simeq T^2 \simeq S^1 \times S^1$.
3. $G = \mathrm{SO}(3)$ et $H = \mathrm{SO}(2)$. Dans ce cas $H\backslash G \simeq G/H \simeq S^2$. En effet, $g \in SO(3)$ correspond à une rotation dans $\mathbb{R}^3$ et $h \in SO(2)$ à une rotation autour d'un axe particulier défini par un vecteur unitaire e. Pour construire G/H, on remarque que $x(g) \equiv$ apex(g e) définit des points sur S^2, et vu que $he = e$ on a $x(gh) = x(g) = x([g])$. Pour $H\backslash G$ on procède de façon semblable.

2.5 Caractéristique d'Euler

Pour caractériser les différents types de variétés inéquivalentes, c'est-à-dire qui ne peuvent pas être reliées par un homéomorphisme, on cherche à définir des quantités appelées génériquement *invariants topologiques*. Les valeurs de tels invariants topologiques permettent de distinguer différentes classes d'équivalence de variétés. On peut alors tenter de classifier, dans une certaine mesure, les différents types de variétés pouvant exister pour une certaine dimension. Pour cela, on considère seulement les variétés connexes, vu que les variétés non-connexes sont nécessairement l'union de plusieurs variétés connexes. L'exemple le plus important d'invariant topologique est la caractéristique d'Euler.

2.5.1 Définition

Par simplicité, nous nous restreindrons au cas de variétés de dimension $n \leq 3$, c'est-à-dire des variétés dans $\mathbb{R}^3$. Toute variété M de ce type peut être déformée à un *polyèdre* K, formé de morceaux de plans appelés *faces*, qui se rencontrent en des segments appelés *côtés*, ces mêmes côtés se rencontrant en des points appelés *sommets*. Ce polyèdre K est par construction homéomorphe à la variété de départ M. Il n'est pas unique, mais étant donné que nous voulons définir un invariant topologique prenant la méme valeur sur tous les éléments de chaque classe d'équivalence de variétés homéomorphes, il est suffisant de considérer un représentant arbitraire.

On définit la *caractéristique d'Euler* d'un polyèdre K de $\mathbb{R}^3$ comme le nombre entier donné par

$$\chi(K) \;=\; s - c + f \tag{2.28}$$

où s est le nombre de sommets, c le nombre de côtés et f le nombre de faces de K. On a alors le théorème suivant, dû à Poincaré-Alexander :

Théorème. Soient K_1 et K_2 deux polyèdres de $\mathbb{R}^3$. Si $K_1 \simeq K_2$ alors on a $\chi(K_1) = \chi(K_2)$.

En vertu de ce théorème, on peut définir la caractéristique d'Euler d'une variété M comme la caractéristique d'Euler d'un quelconque polyèdre K qui lui est homéomorphe, $M \simeq K$:

$$\chi(M) = \chi(K) \tag{2.29}$$

Exemples.

1. $\chi(\text{Segment}) = 1$
2. $\chi(\text{Cercle}) = 0$
3. $\chi(\text{Disque}) = 1$
4. $\chi(\text{Sphère}) = 2$
5. $\chi(\text{Tore}) = 0$
6. $\chi(\text{Cylindre}) = 0$
7. $\chi(\text{Moebius}) = 0$
8. $\chi(\text{Klein}) = 0$

Remarque. On appelle graphe planaire (fig. 2.4) un ensemble de s points et de c côtés dans $\mathbb{R}^2$, les côtés reliant les points sans se croiser. C'est un polyèdre généralisé. On a alors le résultat important, utile en mécanique statistique, en physique des particules et en théorie des circuits électriques, que si f est le nombre de faces, $s - c + f = 1$. Ceci tient au fait qu'un tel graphe est essentiellement homéomorphe au disque et $\chi(D^2) = 1$.

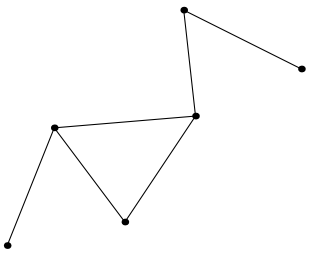

FIGURE 2.4 – Un graphe planaire.

2.5.2 Variétés de dimension 1

Considerons d'abord le cas des variétés compactes et connexes de dimension 1. Dans ce cas, il existe seulement deux possibilités topologiquement différentes, qui sont le segment D^1 et le cercle S^1. Celles-ci sont distinguées par leur caracteristique d'Euler. On a en effet $\chi(D^1) = 1$ et $\chi(S^1) = 0$.

2.5.3 Variétés de dimension 2

Dans le cas des variétés compactes et connexes de dimension 2, il y a beaucoup plus de possibilités, en fait un nombre infini. En partant du cas le plus simple d'une sphère, par exemple, on peut rajouter un nombre arbitraire g de anses, un nombre arbitraire b de bords circulaires et un nombre arbitraire p de terminaisons projectives. On peut alors montrer que pour une telle variété, la caractéristique d'Euler est donnée par

$$\chi = 2 - 2g - b - p \tag{2.30}$$

Exemple. La sphère à g anses a $\chi = 2 - 2g$. Pour le vérifier, on peut partir d'un polyèdre formé de cubes représentant la sphère et créer un trou dans g de ces cubes comme représenté dans la fig. 2.5.

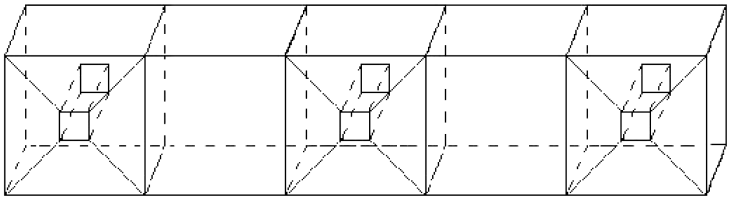

FIGURE 2.5 – Un polyèdre homéomorphe à la sphère à $g = 3$ anses. Avant de creuser les g trous il y a s sommets, c côtés et f faces. Comme $\chi = s - c + f = 2$, le polyèdre est homéomorphe à la sphère. Après avoir creusé les g trous pour décrire la sphère à g anses, on obteint $s + 8g$ sommets, $c + 20g$ côtés et $f + 10g$ faces. On a bien $\chi = 2 + g(8 - 20 + 10) = 2 - 2g$.

Théorème. Toute variété compacte et connexe à deux dimensions est homéomorphe à la sphère avec g anses, b bords circulaires et p terminaisons projectives. En fait, tous les cas sont couverts en se restreignant aux cas où soit g soit p sont non-nuls.

Exemples.

1. Le cylindre est homéomorphe à la sphère avec $b = 2$ bords.
2. Le ruban de Moebius est homéomorphe à la sphère avec $b = 1$ bords et $p = 1$ terminaison projective.
3. La bouteille de Klein est homéomorphe à la sphère avec $p = 2$ terminaisons projectives.

2.6 Topologie et mécanique quantique

La topologie de la variété décrivant l'espace des configurations d'un système physique peut avoir des effets observables. Voyons un exemple

particulièrement illustratif pour des particules chargées dans un potential vecteur. Rappelons d'abord que dans ce cas le Lagrangien est donné par $L = 1/2\, m\, \dot{\vec{x}}^2 + e/c\, \vec{A}\, \dot{\vec{x}}$. En effet, l'équation d'Euler-Lagrange correspondante reproduit l'équation du mouvement d'une particule sujette à la force de Lorentz, $m\ddot{\vec{x}} = e/c\, \dot{\vec{x}} \times \vec{B}$, avec $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$. Le moment canonique conjugué à la position $\vec{x}$ de la particule dépend alors de $\vec{A}$ et est donné par $\vec{\pi} = m\dot{\vec{x}} + e/c\, \vec{A}$. Il suit que l'Hamiltonien prend la forme

$$H = \frac{1}{2} m \vec{v}^2 \tag{2.31}$$

où la vitesse $\vec{v} \equiv \dot{\vec{x}}$ est toutefois donnée par

$$\vec{v} = \frac{1}{m} \left(\vec{\pi} - \frac{e}{c}\, \vec{A} \right) \tag{2.32}$$

Au niveau classique, $\vec{A}$ ne donne pas directement d'effet physique, car seul le champs magnétique $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ produit un effet observable. Mais au niveau quantique, un effet induit directement par $\vec{A}$, sans qu'il y ait de champ magnétique non-nul, peut émerger dans certaines circonstances particulières.

Considérons d'abord le cas le plus simple d'une particule se mouvant sur une variété unidimensionnelle, avec A constant et $B = 0$. Il y a alors deux possibilités topologiquement distinctes : $\mathbb{R}$ et S^1. Sur $\mathbb{R}$, on peut utiliser comme coordonnée $x \in \,]-\infty, +\infty[$ et des fonctions d'onde du type $\psi(x) \in C^1 \cap L^2(\mathbb{R})$. On peut alors écrire,

$$v = \frac{1}{m} \left(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{e}{c} A \right) = \frac{\hbar}{m} S(A) \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x} S^{-1}(A) \tag{2.33}$$

à l'aide de l'opérateur unitaire

$$S(A) = \exp\left(i \frac{eA}{\hbar c} x \right) \tag{2.34}$$

Toutefois, on a la droit de faire une transformation unitaire sur l'espace de Hilbert à l'aide d'un opérateur unitaire U, ce qui change la fonction d'onde comme $\psi \to U\psi$ et les opérateurs comme $O \to UOU^{-1}$, mais pas les observables. En prenant $U = S(\Delta A)$ on voit alors qu'on peut changer A en $A + \Delta A$ dans le nouveau v. Deux potentiels qui diffèrent par une constante sont donc physiquement équivalents, et il n'y a aucune obstruction à se réduire à $A = 0$. C'est l'invariance de jauge. Finalement les états propres de H sont des ondes planes e^{ikx} avec nombre d'onde arbitraire, $k \in \mathbb{R}$, et énergie

$$E_k = \frac{1}{2} \frac{\hbar^2}{m} k^2\,, \quad k \in \mathbb{R} \tag{2.35}$$

Sur un cercle S^1 de rayon r, au contraire, on peut prendre $x = \theta r$ et utiliser comme coordonnée $\theta \in [0, 2\pi]$ et des fonctions d'onde $\Psi(\theta) \in C^1 \cap L^2(S^1)$ périodiques. On peut alors écrire :

$$v = \frac{1}{m}\left(\frac{\hbar}{ir}\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{e}{c}A\right) = \frac{\hbar}{mr}S(A)\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\theta}S^{-1}(A) \tag{2.36}$$

à l'aide de l'opérateur

$$S(A) = \exp\left(i\frac{erA}{\hbar c}\theta\right) \tag{2.37}$$

Comme avant, on a la droit de faire une transformation unitaire sur l'espace de Hilbert à l'aide d'un opérateur unitaire U, ce qui change la fonction d'onde comme $\psi \to U\psi$ et les opérateurs comme $O \to UOU^{-1}$, mais pas les observables. Toutefois, l'opérateur U doit dans ce cas être tel que la nouvelle fonction d'onde soit elle aussi périodique. En prenant $U = S(\Delta A)$ on voit alors qu'on peut changer A en $A + \Delta A$ dans le nouveau v. Mais ΔA est limité à être un multiple entier de $\hbar c/(er)$: $\Delta A = n(\hbar c)/(er)$. Dans ce cas, deux potentiels qui diffèrent par une constante sont donc physiquement équivalents seulement si cette constante est un multiple de $A_0 = (\hbar c)/(er)$, et toutes les valeurs $A \in [0, A_0[$ sont physiquement différentes. C'est l'invariance de jauge restreinte. En effet, les états propres de H sont des ondes planes $e^{in\theta}$ avec nombre d'onde entier, $n \in \mathbb{Z}$, et énergie donnée par

$$E_n(A) = \frac{1}{2}\frac{\hbar^2}{mr^2}\left(n - \frac{A}{A_0}\right)^2, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad A_0 = \frac{\hbar c}{er} \tag{2.38}$$

Ce phénomène peut être obtenu dans une situation réelle de la manière suivante. Supposons que l'on ait forcé une particule dans $\mathbb{R}^3$ à se déplacer sur un cercle S^1 de rayon r. Considérons en outre un solénoïde créant un champ magnétique B sur une section de rayon $a < r$ le long d'un axe orthogonal à S^1 et passant par son centre. Sur le cercle, il n'y a pas de champ magnétique, mais étant donné qu'il y a un flux $\phi = \pi a^2 B$ au travers du disque que celui-ci délimite, on a un potentiel vecteur A non-nul tangent à S^1 et donné par

$$A = \frac{\phi}{2\pi r}, \quad \phi = \pi a^2 B \tag{2.39}$$

Le potential caractéristique $A_0 = \hbar c/(er)$ correspond d'autre part à un *quantum de flux* donné par $\phi_0 = hc/e$:

$$A_0 = \frac{\phi_0}{2\pi r}, \quad \phi_0 = \frac{hc}{e} \tag{2.40}$$

Cette appellation se justifie par le fait que les flux ϕ et $\phi + n\phi_0$ sont physiquement équivalents $\forall n \in \mathbb{Z}$. On obtient alors un effet mesurable sur les niveaux d'énergie quantiques dès que $\phi \neq n\phi_0$.

Cet effet a été découvert par Bohm et Aharonov et peut être observé expérimentalement, par exemple dans l'expérience classique d'interférence entre faisceaux d'électrons. L'expérience de Bohm-Aharonov est représentée dans la figure 2.6. Des faisceaux d'électrons partent d'un point P, et forment une figure d'interférence sur l'écran. Un solénoïde crée un champ magnétique B, nul à l'extérieur du solénoïde. Les fentes empêchent la pénétration des électrons dans le solénoïde ; par conséquent, les électrons ne sont pas soumis au champ B. Et pourtant, les figures d'interférence sont déplacées par le champ créé par le solénoïde.

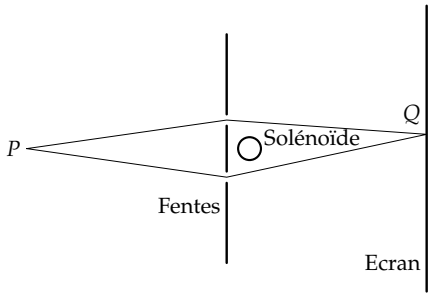

FIGURE 2.6 – Effet Bohm-Aharonov : les franges d'interférence crées sur l'écran par le faisceau d'électrons partant de P sont déplacées par l'effet du solénoïde, bien que le champ magnétique soit nul sur le parcours des électrons.

Plus en général, un potentiel $\vec{A}$ peut avoir un effet physique direct quand la variété décrivant l'espace des configurations du système possède une boucle non-contractible. On a alors une nouvelle quantité physique qui peut intervenir : la ligne de Wilson $W = \oint \vec{A} \cdot d\vec{s}$ calculée sur cette boucle. Cette quantité est invariante sous transformations de jauge $\vec{A} \to \vec{A} + \vec{\nabla}\lambda$.

Chapitre 3

Espaces tangents et tenseurs

Il est possible de donner une définition d'espace tangent à une variété différentiable en un point en généralisant l'idée de plan tangent à une surface régulière. Cette construction utilise plus concrètement le fait qu'une variété est localement homéomorphe à $\mathbb{R}^n$ pour y développer un calcul différentiel. L'idée de base est de construire l'espace tangent comme l'espace vectoriel contenant tous les vecteurs tangents à la variété en un certain point, après avoir défini ces vecteurs à partir de dérivées directionnelles le long de courbes passant par le point et appartenant à la variété. De cette façon, on a une définition intrinsèque qui ne fait pas référence à un espace ambiant où la variété serait immergée.

3.1 Applications différentiables

Soient M et N deux variétés différentiables de dimensions m et n, et soit $f : M \to N$ une application les reliant. Un point $q \in M$ est appliqué à un point $f(q) \in N$. En prenant alors un carte (U, ϕ) de M contenant q et un carte (V, ψ) de N contenant $f(q)$, on peut construire une fonction $\tilde{f}$ représentant l'application f en terme de coordonnées locales :

$$\tilde{f} = \psi \cdot f \cdot \phi^{-1} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n \tag{3.1}$$

En dénotant par $x = (x^1, \cdots, x^m) = \phi(q)$ les coordonnées de M et par $y = (y^1, \cdots, y^n) = \psi(f(q))$ celles dans N, $\tilde{f}$ est simplement une fonction à valeurs vectorielles $y = \tilde{f}(x)$ de plusieurs variables x. En explicitant les différentes composantes, on a n fonctions de m variables : $y^a = \tilde{f}^a(x^i)$.

Une telle application $f : M \to N$ est dite *différentiable* si la fonction $\tilde{f}$ la représentant en coordonnées locales l'est, dans le sens usuel du calcul différentiel sur $\mathbb{R}^m$. Cette propriété ne dépend pas du choix de carte et de coordonnées locales utilisées pour décrire les variétés M et N. En effet, l'ef-

fet d'un changement de carte est de composer ultérieurement $\tilde{f}$ avec une fonction de transition, mais étant donné que celle ci est par hypothèse différentiable, la nouvelle fonction $\tilde{f}$ reste différentiable.

Une application $f : M \to N$ qui est à la fois un homéomorphisme et telle que f et f^{-1} sont différentiables dans le sens défini ci-dessus est appelée *difféomorphisme*. Dans ce cas, la fonction différentiable $\tilde{f} = \psi \cdot f \cdot \phi^{-1}$ admet une inverse $\tilde{f}^{-1} = \phi \cdot f^{-1} \cdot \psi^{-1}$ qui est elle aussi différentiable. Il est clair que ceci est possible seulement si $m = n$. Deux variétés M et N pouvant être reliées par un difféomorphisme sont dites *difféomorphes*. Les deux variétés sont alors considérées comme essentiellement identiques, et on écrit $M \simeq N$. Ceci est une relation d'équivalence, qui caractérise les propriétés invariantes sous difféomorphismes, c'est-à-dire sous déformations qui sont non seulement continues mais également différentiables.

3.2 Espaces tangents et cotangents

Pour définir l'espace tangent à une variété différentiable M à n dimensions en un point q, on procède de la manière suivante. Soit $c(t)$ une courbe arbitraire sur M, paramétrisée par $t \in \mathbb{R}$ et passant par q pour $t = 0$, de sorte que $c(0) = q$. Cette courbe peut être interprétée comme l'image d'une application $c : \mathbb{R} \to M$. Pour pouvoir calculer des dérivées en appliquant le calcul différentiel ordinaire sur $\mathbb{R}$, introduisons en outre une fonction arbitraire $f : M \to \mathbb{R}$, et considérons sa restriction sur la courbe, $f(c(t))$. De cette façon on obtient l'application $f \cdot c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, qui est une fonction ordinaire et peut donc être dérivée. La dérivée directionnelle de $f(c(t))$ le long de la courbe $c(t)$ en $t = 0$ est alors donnée par

$$v[f] = \dot{f}(c(t))\Big|_{t=0} \tag{3.2}$$

Dans une carte (M_α, ϕ_α) contenant le point q avec coordonnées x_α, la courbe c correspond à la fonction $\tilde{c}_\alpha = \phi_\alpha \cdot c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, avec $\tilde{c}_\alpha(t) = \phi_\alpha(c(t))$, et la fonction f correspond à l'autre fonction $\tilde{f}_\alpha = f \cdot \phi_\alpha^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, avec $\tilde{f}_\alpha(x_\alpha) = f(\phi_\alpha^{-1}(x_\alpha))$. On a donc $\tilde{f}_\alpha \cdot \tilde{c}_\alpha = f \cdot c$, avec $\tilde{f}_\alpha(\tilde{c}_\alpha(t)) = f(c(t))$. On peut alors évaluer la dérivée directionnelle $v[f] = \dot{\tilde{f}}_\alpha(\tilde{c}_\alpha(t))|_{t=0}$ comme dérivée de fonction de fonction, et on obtient :

$$v[f] = v_\alpha^i \frac{\partial \tilde{f}_\alpha}{\partial x_\alpha^i}\bigg|_{t=0} \tag{3.3}$$

en termes des vitesses v_α^i définies par

$$v_\alpha^i = \dot{\tilde{c}}_\alpha^i \tag{3.4}$$

En prenant en particulier $f = x^j_\alpha \cdot \phi_\alpha$ et donc $\tilde{f}_\alpha = x^j_\alpha$, avec j fixé à une valeur quelconque et x^j_α vue comme fonction de $\mathbb{R}^n$ à $\mathbb{R}$, on voit que les vitesses peuvent être identifiées avec les dérivées directionnelles des coordonnées le long de la courbe :

$$v[x^j_\alpha \phi_\alpha] = v^i_\alpha \frac{\partial}{\partial x^i_\alpha} x^j_\alpha = v^i_\alpha \delta^j_i = v^j_\alpha \tag{3.5}$$

On peut alors définir de façon intrinsèque et abstraite le *vecteur tangent* à la courbe c au point q comme l'opérateur linéaire suivant :

$$\boldsymbol{v} = v^i_\alpha \frac{\partial}{\partial x^i_\alpha} \tag{3.6}$$

Plus précisement, ce vecteur tangent est associé à la classe d'équivalence de toutes les courbes c passant par le point q avec la même vitesse. L'ensemble de tous les vecteurs tangents au point q, obtenus en considérant toutes le courbes possibles passant par le point q, forme un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ appelé *espace tangent au point q* et noté $T_q(M)$. Sa dimension est égale a celle de la variété, n, et il est isomorphe à $\mathbb{R}^n$. En outre, de la forme de l'expression (3.6) il est clair que les coordonnées de la carte utilisée pour décrire le voisinage du point q définissent naturellement une base, appelée *base des coordonnées* et constituée des n vecteurs suivants :

$$\boldsymbol{e}_{\alpha i} = \frac{\partial}{\partial x^i_\alpha} \tag{3.7}$$

Dans cette base, les vitesses v^i_α sont directement identifiées avec les composantes du vecteur et on a

$$\boldsymbol{v} = v^i_\alpha \boldsymbol{e}_{\alpha i} \tag{3.8}$$

Remarque. Dans le cas particulier d'une hypersurface régulière S de dimension n définie par m constraintes $F^a(y) = 0$ dans un espace ambiant $\mathbb{R}^{n+m}$, on vérifie facilement que cette définition d'espace tangent correspond à la notion de plan tangent en un point. En effet l'espace ambiant $\mathbb{R}^{n+m}$ est lui-même un espace vectoriel, dont les éléments $\boldsymbol{y}$ sont caracterisés par leurs $n+m$ composantes y^A par rapport à une base $\{\boldsymbol{e}_A\}$, avec $A = 1, \cdots, n+m$. L'espace tangent en un point q de S est alors manifestement un sous-espace de cet espace vectoriel. Plus precisément, c'est le sous-ensemble de vecteurs $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^{n+m}$ orthogonaux au m vecteurs normaux $\nabla \boldsymbol{F}^a$, et donc $T_q(S) = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^{n+m} \mid (\boldsymbol{y}, \nabla \boldsymbol{F}^a) = 0\}$, où $(\cdot, \cdot)$ est le produit scalaire ordinaire dans $\mathbb{R}^{n+m}$. Pour trouver une base de cet espace, on peut appliquer les formules ci-dessus dans le cas particulier où la fonction $\tilde{f}_\alpha$ est donnée successivement par les $n+m$ différentes coordonnées y^A de l'espace ambiant vues comme fonctions des n coordonnées locales x^i sur S. La

quantité $\partial \tilde{f}_\alpha / \partial x^i_\alpha$ donne alors $\partial y^A / \partial x^i_\alpha$, qui sont les composantes des vecteur $\partial \boldsymbol{y} / \partial x^i_\alpha$. Il est facile de voir que ces n vecteurs appartiennent effectivement à $T_q(S)$. En effet, on a

$$\left(\frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial x^i_\alpha}, \nabla \boldsymbol{F}^a \right) = \frac{\partial y^A}{\partial x^i_\alpha} \frac{\partial F^a}{\partial y^A} = \frac{\partial F^a}{\partial x^i_\alpha} = 0 \tag{3.9}$$

De plus, il forment une base complète, car comme S est par hypothèse régulière au point q considéré, la matrice $\partial F^a / \partial y^A$ a rang m.

L'espace vectoriel dual à l'espace tangent au point q est appelé *espace cotangent au point q* et est noté $T^*_q(M)$. Les éléments $\boldsymbol{v}^* \in T^*_q(M)$ sont appelés *vecteurs cotangents* et sont associés aux fonctions linéaires de vecteurs $\boldsymbol{v} \in T_p(M)$. Plus précisemment, leur action sur les vecteurs est définie à partir de l'action (3.2) d'un vecteur sur une fonction comme :

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{v}) = v[f] \tag{3.10}$$

Dans une carte (M_α, ϕ_α) contenant le point q avec coordonnées x_α, on trouve, en utilisant (3.3)

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{v}) = \frac{\partial \tilde{f}_\alpha}{\partial x^i_\alpha} v^i_\alpha \tag{3.11}$$

On peut alors identifier de façon abstraite le vecteur cotangent $\boldsymbol{f}$ avec le différentiel $d\tilde{f}_\alpha$ de la représentation en coordonnées de la fonction associée, c'est-à-dire

$$\boldsymbol{f} = d\tilde{f}_\alpha = f_{\alpha i}\, dx^i_\alpha \tag{3.12}$$

avec

$$f_{\alpha i} = \frac{\partial \tilde{f}_\alpha}{\partial x^i_\alpha} \tag{3.13}$$

On voit que les coordonnées de la carte utilisée dans le voisinage de q définissent à nouveau une base naturelle de cet espace vectoriel, constituée par les n différentiels

$$\boldsymbol{e}^{*i}_\alpha = dx^i_\alpha \tag{3.14}$$

Dans cette base, les quantités $f_{i\alpha}$ sont alors les composantes du covecteur $\boldsymbol{f}$ et on a :

$$\boldsymbol{f} = f_{\alpha i}\, \boldsymbol{e}^{*i}_\alpha \tag{3.15}$$

On remarque finalement que cette base pour $T^*_q(M)$ est en fait la base duale à la base des coordonnées de $T_q(M)$. En effet, en utilisant (3.7) et (3.14) dans (3.11) on calcule facilement

$$\boldsymbol{e}^{*j}_\alpha(\boldsymbol{e}_{\alpha i}) = \frac{\partial x^j_\alpha}{\partial x^i_\alpha} = \delta^j_i \tag{3.16}$$

Ayant défini l'espace vectoriel $T_q(M)$ et son dual $T_q^*(M)$, on peut également définir un produit interne $\langle \cdot, \cdot \rangle : T_q^*(M) \times T_q(M) \to \mathbb{R}$ comme :

$$\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v} \rangle = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{v}) = v[f] \tag{3.17}$$

Dans les bases duales de coordonnées introduites ci-dessus, on trouve :

$$\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v} \rangle = f_{\alpha i} v_\alpha^i \tag{3.18}$$

Un point important à souligner est que les définitions données de vecteurs tangent et cotangents, ainsi que de leur produit, sont indépendantes du choix de coordonnées locales. Ceci implique que les composantes dans les bases de coordonnées, qui dépendent au contraire du choix de ces dernières, se transforment de façon rigidement fixée sous changement de coordonnées $x_\alpha^i \to x_\beta^i$, au travers des matrices de transformation

$$\Lambda^i{}_j = \frac{\partial x_\beta^i}{\partial x_\alpha^j}, \quad \tilde{\Lambda}_i{}^j = \frac{\partial x_\alpha^j}{\partial x_\beta^i} \tag{3.19}$$

satisfaisant

$$\Lambda \tilde{\Lambda}^T = \tilde{\Lambda} \Lambda^T = \mathbb{1} \tag{3.20}$$

En effet, par leur définitions les vecteurs et covecteurs de base $\boldsymbol{e}_{\alpha i}$ et $\boldsymbol{e}_\alpha^{*i}$ se transforment comme :

$$\boldsymbol{e}_{\beta i} = \tilde{\Lambda}_i{}^j \boldsymbol{e}_{\alpha j}, \quad e_\beta^{*i} = \Lambda^i{}_j e_\alpha^{*j} \tag{3.21}$$

Les composantes v_α^i et $v_{\alpha i}^*$ des vecteurs et des covecteurs se transforment alors de façon contravariante et covariante :

$$v_\beta^i = \Lambda^i{}_j v_\alpha^j, \quad v_{\beta i}^* = \tilde{\Lambda}_i{}^j v_{\alpha j}^* \tag{3.22}$$

Ceci garanti que les vecteurs $\boldsymbol{v} = v_\alpha^i \boldsymbol{e}_{\alpha i}$ et covecteurs $\boldsymbol{v}^* = v_{\alpha i}^* \boldsymbol{e}_\alpha^{*i}$ restent invariants. Il suit également des règles de transformation (3.21) et (3.22) que le produit interne $\langle \boldsymbol{v}^*, \boldsymbol{v} \rangle = v_\alpha^i v_{\alpha i}^*$ reste lui aussi invariant. Ces résultats montrent qu'un changement de coordonnées locales équivaut en fait à un changement de base dans les espaces vectoriels tangents et cotangents, la matrice Λ et son inverse transposée $\tilde{\Lambda}$ correspondant à la transformation linéaire générale de $\mathbb{R}^n$ qui réalise ce changement de base.

Ayant construit l'espace tangent $T_q(M)$ et l'espace cotangent $T_q^*(M)$ en un point donné q de M, on peut maintenant varier le point q. Les ensembles $T(M) = \cup_{q \in M} T_q(M)$ et $T^*(M) = \cup_{q \in M} T_q^*(M)$ sont appelés *fibré tangent à M* et *fibré cotangent à M*. On peut montrer que ces espaces sont des variétés différentiables.

Exemple. Il existe une application importante de ces notions en mécanique. Soit une particule qui évolue sur une variété M avec un Lagrangien de la forme $L = T(\dot{q}) - V(q)$, où q sont les coordonnées locales sur M. Le fibré tangent correspond à l'espace $(q, \dot{q})$, avec $q \in M$ et $\dot{q} \in T_q(M)$, tandis que le fibré cotangent correspond à l'espace (q, p), avec $q \in M$ et $p \in T_q^*(M)$. L'équation $p = \partial L / \partial \dot{q}$ permet de relier les deux espaces.

3.3 Tenseurs

Comme pour tout espace vectoriel, on peut construire à partir de $T_q(M)$ et son dual $T_q^*(M)$ de nouveaux espaces vectoriels en faisant des produits tensoriels. Les vecteurs de $T_q(M)$ et covecteurs de $T_q(M)$ sont alors généralisés à des tenseurs de type (r, s) appartenant au produit tensoriel de r copies de $T_q(M)$ et s copies de $T_q^*(M)$:

$$T_q^{(r,s)}(M) = \underbrace{T_q(M) \otimes \cdots \otimes T_q(M)}_{r \text{ fois}} \otimes \underbrace{T_q^*(M) \otimes \cdots \otimes T_q^*(M)}_{s \text{ fois}} \tag{3.23}$$

Les bases $\{\boldsymbol{e}_{\alpha i}\}$ et $\{\boldsymbol{e}_\alpha^{*j}\}$ de $T_q(M)$ et $T_q^*(M)$ définissent une base de $T_q^{(r,s)}$ donnée par $\{\boldsymbol{e}_{\alpha i_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{e}_{\alpha i_r} \otimes \boldsymbol{e}_\alpha^{*j_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{e}_\alpha^{*j_s}\}$. Dans cette base, un tenseur $\boldsymbol{T} \in T_q^{(r,s)}(M)$ se décompose avec certaines composantes $T^{i_1 \cdots i_r}_{\alpha j_1 \cdots j_s}$ comme

$$\boldsymbol{T} = T^{i_1 \cdots i_r}_{\alpha j_1 \cdots j_s} \, \boldsymbol{e}_{\alpha i_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{e}_{\alpha i_r} \otimes \boldsymbol{e}_\alpha^{*j_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{e}_\alpha^{*j_s} \tag{3.24}$$

Lors d'un changement de coordonnées on obtient un changement de base défini par

$$\boldsymbol{e}_{\beta i} = \tilde{\Lambda}_i{}^j \boldsymbol{e}_{\alpha j}\,, \quad \boldsymbol{e}_\beta^{*i} = \Lambda^i{}_j \boldsymbol{e}_\alpha^{*j} \tag{3.25}$$

et les composantes du tenseur T se transforment comme

$$T^{i_1 \cdots i_r}_{\beta j_1 \cdots j_s} = \Lambda^{i_1}_{k_1} \cdots \Lambda^{i_r}_{k_r} \tilde{\Lambda}_{j_1}^{l_1} \cdots \tilde{\Lambda}_{j_s}^{l_s} T^{k_1 \cdots k_r}_{\alpha l_1 \cdots l_s} \tag{3.26}$$

Un tenseur d'une variété M est toujours associé à un certain point $q \in M$, et appartient à $T_q^{(r,s)}(M)$. On peut effectuer les mêmes opérations sur ces tenseurs que sur ceux de tout espace vectoriel, mais à un même point q. On ne peut au contraire pas mélanger des tenseurs associés à des points différents de la variété, puisque qu'ils appartiennent à des espaces vectoriels distincts. On peut toutefois définir un champ tensoriel appartenant à $T^{(r,s)}(M) = \cup_{q \in M} T_q^{(r,s)}(M)$ en spécifiant pour chaque point $q \in M$ un élément de $T_q^{(r,s)}$, de telle façon que les composantes soient des fonctions différentiables des coordonnées locales.

3.4 Produit scalaire

Sur de nombreuses variétés M, il est possible de définir en chaque point $q \in M$ un *tenseur métrique* $\boldsymbol{g}$ de type $(0,2)$, de composantes g_{ij}, avec $\det g \neq 0$ et $g_{ij} = g_{ji}$, $\forall q$. On peut alors aussi définir un autre tenseur $\boldsymbol{g}^{-1}$ de type $(2,0)$, de composantes g^{ij} définies comme inverses matricielles des g_{ij}, c'est-à-dire telles que

$$g^{ik} g_{kj} = \delta^i_j \tag{3.27}$$

La métrique et son inverse définissent point par point un isomorphisme entre $T_q(M)$ et $T^*_q(M)$. En effet, en les appliquant à un seul vecteur cotangent ou tangent, on obtient une fonction d'un autre vecteur cotangent ou tangent, qui est par définition un vecteur tangent ou cotangent. On a donc $\boldsymbol{g} : T_q(M) \to T^*_q(M)$ et $\boldsymbol{g}^{-1} : T^*_q(M) \to T_q(M)$. Il est alors possible de construire à partir du produit interne entre un vecteur et un covecteur un *produit scalaire* entre deux vecteurs et deux covecteurs, en chaque point :

$$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \langle \boldsymbol{g}(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{v} \rangle = u^i g_{ij} v^j \tag{3.28}$$

$$(\boldsymbol{u}^*, \boldsymbol{v}^*) = \langle \boldsymbol{u}^*, \boldsymbol{g}^{-1}(\boldsymbol{v}^*) \rangle = v^*_i g^{ij} v^*_j \tag{3.29}$$

Plus en général, la métrique et son inverse permettent de relier les composantes covariantes et contravariantes d'un quelconque tenseur, dans le sens que $\boldsymbol{g} : T^{(p,q)}_q \to T^{(p-1,q+1)}_q$ et $\boldsymbol{g}^{-1} : T^{(p,q)}_q \to T^{(p+1,q-1)}_q$. En composantes, ceci permet de baisser ou hausser un quelconque indice. Par exemple

$$(gT)^{i_2 \cdots i_p}_{i_1 j_1 \cdots j_q} = g_{i_1 k} T^{k i_2 \cdots i_p}_{j_1 \cdots j_q} \tag{3.30}$$

$$(g^{-1} T)^{j_1 i_1 \cdots i_p}_{j_2 \cdots j_q} = g^{j_1 k} T^{i_1 \cdots i_p}_{k j_2 \cdots j_q} \tag{3.31}$$

Exemples.

1. L'espace Euclidien est caractérisé par la métrique $g_{ij} = \delta_{ij}$, $\forall q \in \mathbb{R}^3$. Dans cet espace on peut donc négliger la position des indices, et il n'y a plus de distinction fondamentale entre contravariance et covariance.
2. L'espace de Minkowski est caractérisé par la métrique $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ avec $\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$, $\forall q \in \mathbb{R}^4$. Dans ce cas, la position des indices implique des signes différents pour les composantes.
3. Lorsqu'on étudie le mouvement d'une particule sur une hypersurface en mécanique, l'énergie cinétique prend la forme $T = \frac{1}{2} g_{ij}(q) \dot{q}^i \dot{q}^j$, de sorte que $p_i = \partial T / \partial \dot{q}^i = g_{ij}(q) \dot{q}^j$. On voit alors que g agit comme un tenseur métrique qui produit un covecteur p à partir d'un vecteur $\dot{q}$.

Chapitre 4

Homotopie

Un instrument important pour la caractérisation des espaces topologiques est l'homotopie. L'idée de base est de considérer des fonctions définies sur un espace simple de référence comme S^n avec images dans l'espace topolgique, et d'étudier les classes d'équivalence de ces fonctions par rapport aux déformations continues de ces images. Ceci permet en particulier de caractériser la présence de boucles non contractibles dans l'espace topologique.

4.1 Chemins et boucles

Soit M un espace topologique et $I = [0,1]$ l'intervalle unité. Un *chemin* d'origine x et d'extrémité y est une application continue $c : I \to M$ telle que $c(0) = x$ et $c(1) = y$. On peut alors considérer :

- Le *chemin inverse* c^{-1} de c, défini par

$$c^{-1}(s) = c(1-s)\,, \quad \forall\, s \in I \tag{4.1}$$

- Le *produit de chemins* c joignant x à y et c' joignant y à z, défini par

$$cc'(s) = \begin{cases} c(2s) & , \ \ s \in [0, \frac{1}{2}] \\ c'(2s-1) & , \ \ s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} \tag{4.2}$$

- Le *chemin constant* c_x, défini par

$$c_x(s) = x\,, \quad \forall\, s \in I \tag{4.3}$$

Un espace M est dit *connexe par arcs* si $\forall x, y \in M$ il existe un chemin joignant x à y. Nous supposerons que M jouit de cette propriété.

Une *boucle* α basée en x est un chemin dont l'origine et l'extrémité coïncident avec $x \in M : \alpha(0) = \alpha(1) = x$. Dans ce cas les deux points extrêmes de

l'intervalle ont la même image et peuvent donc être identifiés. I devient alors S^1. Étant donné que c'est un cas particulier de chemin, on peut appliquer les mêmes définitions qu'avant pour l'inverse d'une boucle et le produit de deux boucles. En outre, la boucle constante est simplement le chemin constant.

On remarque que l'inverse d'une boucle est encore un boucle et le produit de deux boucles est encore un boucle. Ceci suggère que l'espace des boucles donne lieu à une structure de groupe. Le candidat naturel pour l'élément neutre est la boucle constante. Toutefois, avec les définitions données le produit d'une boucle et de son inverse peut être déformé continûment au chemin constant, mais ne coincide pas avec celui-ci, et on a donc pas encore une vraie structure de groupe. Pour définir un groupe, il est nécessaire de définir une relation d'équivalence représentant les déformations continues de chemins et boucles.

4.2 Homotopie de chemins et boucles

Deux chemins c et c' ayant même origine x et même extrémité y sont dits *homotopes* s'il existe une application continue $F : I \times I \to M$ telle que

1. $F(s,0) = c(s)\,,\ \ F(s,1) = c'(s)$
2. $F(0,t) = x\,,\ \ F(1,t) = y$

Cette relation est notée $c \sim c'$, car c'est une relation d'équivalence dans l'ensemble des chemins. Les classes d'équivalence de chemins correspondantes sont notées $[c]$.

Proposition. Si $c \sim \gamma$ et $c' \sim \gamma'$, alors $c^{-1} \sim \gamma^{-1}$ et $cc' \sim \gamma\gamma'$. Les opérations d'inverse et de produit de chemins sont donc bien définies sur les classes d'homotopie de chemins, avec $[c]^{-1} = [c^{-1}]$, $[c_1][c_2] = [c_1 c_2]$.

Preuve. En effet, si $c \sim \gamma$ par $F(s,t)$, alors $c^{-1} \sim \gamma^{-1}$ par $\overline{F}(s,t) = F(1-s,t)$. En outre, si $c \sim \gamma$ par $F(s,t)$ et $c' \sim \gamma'$ par $F'(s,t)$, alors $cc' \sim \gamma\gamma'$ par $H(s,t)$ égal à $F(2s,t)$ si $s \in [0, \frac{1}{2}]$ et $F'(2s-1,t)$ pour $s \in [\frac{1}{2}, 1]$.

Le concept d'homotopie s'applique également au cas particulier représenté par les boucles. Les classes d'équivalence des boucles sont notée $[\alpha]$ et sont appelée simplement *classes d'homotopie*.

4.3 Groupe fondamental

On appelle $\Pi_1(M,x)$ l'espace quotient des boucles basées en x, la relation d'équivalence étant l'homotopie des boucles. Nous désignerons alors par $[\alpha]$ la classe d'équivalence de la boucle α et par $e = [c_x]$ l'ensemble des boucles

contractibles en x. Comme nous avons vu que l'inverse et le produit de deux boucles ne dépendent pas des représentants dans la classe d'équivalence, nous pouvons définir l'inverse et le produit sur les classes d'équivalence. On a alors le résultat suivant :

Proposition. $\Pi_1(M, x)$ est un groupe dont e est l'élément neutre :

1. $[\alpha]\,([\beta]\,[\gamma]) = ([\alpha]\,[\beta])\,[\gamma]$
2. $[\alpha]\,e = e\,[\alpha] \;=\; [\alpha]$
3. $[\alpha]\,[\alpha^{-1}] = [\alpha^{-1}]\,[\alpha] = e$ et donc $[\alpha]^{-1} = [\alpha^{-1}]$

Preuve. La preuve de cette proposition est simple et constitue un exercice.

Avec cette définition, le groupe fondamental $\Pi_1(M, x)$ dépend du point x auquel sont basées les boucles utilisées. Les groupes $\Pi_1(M, x)$ et $\Pi_1(M, y)$ associés à deux points x et y distincts sont donc différents. Toutefois, on a le résultat suivant :

Théorème. Soit M un espace topologique connexe par arcs. Les groupes fondamentaux $\Pi_1(M, x)$ et $\Pi_1(M, y)$ associés à deux points différents x et y de M sont isomorphes, c'est-à-dire que la structure des groupes est la même. On peut alors écrire $\Pi_1(M)$ sans référence à un point particulier de M.

Preuve. Si M est connexe par arcs, il existe un chemin c d'origine x et d'extrémité y. On peut alors construire une application $p_c : \Pi_1(M, y) \to \Pi_1(M, x)$ définie sur tout élément $[\alpha]$ de $\Pi_1(M, y)$ comme

$$p_c([\alpha]) = [c\,\alpha\,c^{-1}] = [c]\,[\alpha]\,[c]^{-1} \tag{4.4}$$

Cette application est telle que

$$p_c([\alpha][\alpha']) \;=\; p_c([\alpha])\,p_c([\alpha']) \tag{4.5}$$

$$p_c(e_y) \;=\; e_x \tag{4.6}$$

Elle représente donc un homomorphisme entre les groupes $\Pi_1(M, y)$ et $\Pi_1(M, x)$. En outre elle inversible et on montre facilement qu'elle est bijective. C'est donc un isomorphisme.

Remarque. L'isomorphisme entre $\Pi_1(M, x)$ et $\Pi_1(M, y)$ dépend du chemin choisi pour relier x et y. En effet, en prenant c' au lieu de c on trouve $p_{c'}([\alpha]) = [d]\,p_c([\alpha])\,[d]^{-1}$ avec $[d] = [c'c^{-1}] \in \Pi_1(M, x)$. Les groupes correspondant à c et c' sont donc conjugués, sauf quand ils sont Abéliens.

Ce qui rend le groupe fondamental intéressant c'est que c'est un invariant topologique. C'est-à-dire que si $X \simeq Y$ alors $\Pi_1(X) \simeq \Pi_1(Y)$, pour X et Y connexes par arcs. La structure du groupe fondamental d'un espace topologique connexe par arcs porte donc une information sur sa topologie, et plus précisément sur la structure de ses boucles non-contractibles.

Un espace topologique M connexe par arcs est dit *simplement connexe* si son groupe fondamental est trivial, c'est-à-dire $\Pi_1(M) = \{e\}$.

Exemples.

1. $\Pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$. En effet, les classes d'homotopies $[\alpha]$ sont caractérisées par le nombre $n \in \mathbb{Z}$ de fois que leurs boucles s'enroulent autour de S^1 avant de se fermer, le signe tenant compte de la direction. La loi de composition du groupe est l'addition de ces nombres de rotations.
2. $\Pi_1(T^n) = \mathbb{Z}^n$ car $T^n = S^1 \times S^1 \times \cdots \times S^1$ et à chaque cercle S^1 est associé un nombre de rotations.
3. $\Pi_1(S^n) = \{e\}$, $\forall n \geq 2$, car dans ces cas toute boucle est contractible. La sphère et ses généralisations à plus de deux dimensions sont donc simplement connexe.
4. $\Pi_1(\mathrm{RP}^n) = \mathbb{Z}_2$, pour $n \geq 2$, où $\mathbb{Z}_2 = \{1, -1\}$ avec la multiplication. En effet, on peut voir qu'il y a deux types de boucles. Le premier type est $[\alpha] = e$, et le deuxième type est tel que $[\alpha] \neq e$ mais $[\alpha][\alpha] = e$.

Le groupe fondamental peut être non-Abélien. La figure 4.1 illustre un exemple simple d'un tel groupe. Soit $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{a_1, a_2\}$, avec a_1, a_2 deux petits disques. Au point $x \in M$ sont rattachées trois boucles simples : e, la boucle α entourant a_1, et la boucle β entourant a_2 (fig. 4.1.a). Par déformation continue, on peut obtenir une courbe homotope à $\alpha\beta$ qui entoure les deux disques (fig. 4.1.b). En rajoutant α^{-1}, on obtient la courbe (fig. 4.1.c). Finalement, on obtient la courbe (fig. 4.1.d), homotope à $\alpha\beta\alpha^{-1}$. Cette dernière courbe ne peut pas être déformée continuement pour devenir β, donc $\alpha\beta\alpha^{-1} \not\sim \beta$, ou $[\alpha][\beta] \neq [\beta][\alpha]$. Dans ce cas, $\Pi_1(M)$ est le groupe libre engendré par $[\alpha]$ et $[\beta]$ dont tout les éléments ont une représentation unique de la forme $[\alpha]^{n_1}[\beta]^{n_2}[\alpha]^{n_3}[\beta]^{n_4} \cdots$, avec $n_i \in \mathbb{Z}$.

4.4 Groupes d'homotopie d'ordre supérieur

On peut définir de façon semblable des groupes d'homotopie d'ordre supérieur $\Pi_n(M)$ d'un espace topologique M, avec $n \geq 2$, en considérant comme espace de référence S^n. Ceux-ci décrivent les n-recouvrements de M par l'image de S^n.

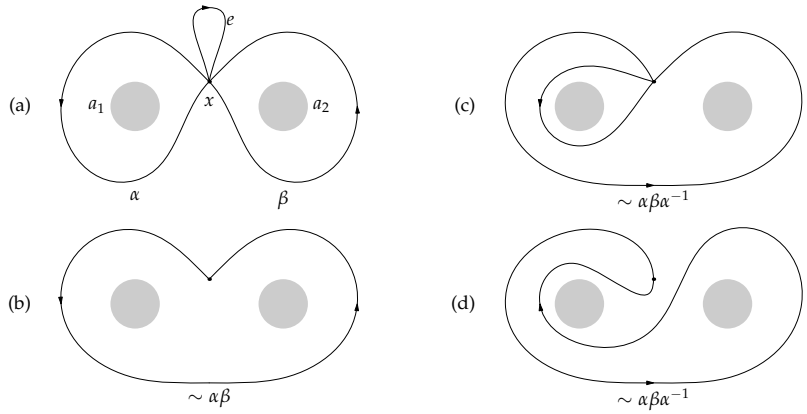

FIGURE 4.1 – Exemple d'un groupe $\Pi_1(M)$ non abélien, avec $M = \mathbb{R}^2 \setminus (a_1, a_2)$. (a) Les trois types de boucles rattachées au point $x \in M$. (b) Boucle homotope à $\alpha\beta$. (c) Combinaison de $\alpha\beta$ avec α^{-1}. (d) Boucle homotope à $\alpha\beta\alpha^{-1}$, mais non homotope à β.

On part d'un cube $I^n = \{s_i \in [0,1],\ i = 1, \cdots, n\}$, dont le bord est $\partial I^n = \{s_i \in [0,1] | \exists i : s_i = 0 \text{ ou } 1\}$. Une n-boucle basée en x est une application $\alpha : I^n \to M$ telle que l'image de ∂I^n est le point $x \in M$. Il est alors possible d'identifier les faces du cube, de sorte que I^n devient S^n. Comme avant, on peut considérer :

- La *boucle inverse* α^{-1} de α, définie par

$$\alpha^{-1}(s_1, \cdots, s_n) = \alpha(1 - s_1, s_2, \cdots, s_n) \tag{4.7}$$

- Le *produit de deux boucles* α et β, défini par

$$\alpha\beta(s_1, \cdots, s_n) = \begin{cases} \alpha(2s_1, s_2, \cdots, s_n) & ,\ s_1 \in [0, \frac{1}{2}] \\ \beta(2s_1 - 1, s_2, \cdots, s_n) & ,\ s_1 \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} \tag{4.8}$$

- La *boucle constante* c_x, définie par

$$c_x(s_1, \cdots, s_n) = x \tag{4.9}$$

Pour ces n-boucles, la relation d'homotopie est définie comme avant en demandant qu'il existe une application continue $F : I^n \times I \to M$ qui interpole continûment entre elles. En d'autres termes, deux n-boucles α et α' sont homotopes, $\alpha \sim \alpha'$, s'il existe une telle application avec :

$$F(s,0) = \alpha(s),\ \ F(s,1) = \alpha'(s) \tag{4.10}$$

Les classes d'équivalence d'homotopie sont indiquées comme avant par $[\alpha]$.

On définit alors $\Pi_n(M, x)$ comme l'espace des classes d'équivalence d'homotopie des n-boucles basées en x. C'est un groupe et pour $n \geq 2$ il est toujours Abélien. Comme avant, si M est connexe par arcs les groupes $\Pi_n(M, x)$ et $\Pi_n(M, y)$ construits en deux points différents $x, y \in M$ sont isomorphes, et on peut donc parler simplement de $\Pi_n(M)$.

Exemples.

1. $\Pi_n(S^1) = \Pi_n(\mathbb{R}) = \{e\}\,, \quad \forall n \geq 2$
2. $\Pi_n(S^n) = \mathbb{Z}\,, \quad \forall n \geq 2$
3. $\Pi_n(\mathrm{RP}^m) = \Pi_n(S^m)\,, \quad \forall n \geq 2$

4.5 Homotopie d'applications

La définition d'homotopie donnée pour les chemins et les boucles peut être généralisée à des applications arbitraires. Soient $f, g : X \to Y$ deux applications continues entre des espaces topologiques X, Y. On dit que f et g sont *homotopes* s'il existe une application continue $F : X \times I \to Y$ telle que $F(x, 0) = f(x)$ et $F(x, 1) = g(x)$, et on écrit alors $f \sim g$. Cette relation est une relation d'équivalence.

Le cas particulier des applications $f : S^n \to M$ correspond au n-boucles dans M, et les classes d'équivalence sont alors classifiées par le groupe $\Pi_n(M)$. Si M lui même est S^n, c'est-à-dire pour des applications $f : S^n \to S^n$, les classe d'homotopies sont caractérisées par un nombre entier $n \in \mathbb{Z}$, vu que $\Pi_n(S^n) = \mathbb{Z}$. Ce nombre correspond au nombre de fois que l'image de $f(x)$ recouvre S^n quand x est varié sur S^n, et est appelé *degré* de l'application.

4.6 Brisure de symétrie et défauts

Une des applications les plus remarquables du concept d'homotopie en physique est la classification des défauts dans les systèmes présentant une symétrie spontanément brisée.

4.6.1 Paramètres d'ordre et défauts

La matière, désordonnée à haute température, s'ordonne toujours davantage quand la température baisse. Le passage d'un ordre à l'autre se produit lors d'un changement de phase. Pour caractériser l'ordre présent dans une phase, on introduit la notion de *paramètre d'ordre* η. Le paramètre d'ordre est une grandeur qui, par définition, est nulle dans la phase désordonnée et non nulle dans la phase ordonnée. Dans une phase désordonnée, on a

une symétrie caractérisée par un groupe G. En passant dans une phase plus ordonnée, on a une symétrie moindre caractérisée par un sous-groupe H de G. On dit que la symétrie G a été brisée à H lors d'un changement de phase.

Considérons le cas de la matière ordinaire. A haute température la matière est isotrope et homogène : elle est dans la phase gazeuse ou liquide. En baissant la température, les propriétés d'isotropie et d'homogénéité disparaissent car la matière passe dans la phase solide. A haute température, G est le groupe des translations et des rotations. Notons que c'est le groupe de symétrie des interactions entre atomes qui ne dépendent que de la distance entre ceux-ci. A basse température, la matière ne possède plus que la symétrie du cristal, caractérisée par le groupe d'espace H. Le paramètre d'ordre η définit alors en quelque sorte la direction le long de laquelle G est brisé à H et sera un élément de la variété

$$M = G/H \tag{4.11}$$

A un niveau macroscopique, on peut décrire une phase ordonnée par un champs d'ordre $\eta(r)$, c'est-à-dire une applications

$$\eta : \mathbb{R}^d \to M \tag{4.12}$$

Ce champs d'ordre est une fonction douce de la position r, sauf éventuellement dans des régions où il y a des *défauts* et le paramètre d'ordre change de façon abrupte. Dans $\mathbb{R}^3$, les défauts peuvent être des points, des lignes ou des surfaces. Dans $\mathbb{R}^2$ on ne peut avoir que des points ou des lignes. Nous allons voir maintenant que ces défauts peuvent être classifiés de façon naturelle et efficace par les groupes d'homotopie de la variété $M = G/H$. Plus précisément, les défauts de dimensions d' dans $\mathbb{R}^d$ peuvent êtres encapsulés par des sphères $S^{d-d'-1}$ et sont donc classifiés par le groupe d'homotopie $\Pi_{d-d'-1}(M)$ qui caractérise les applications de $S^{d-d'-1}$ à M. Donc dans $\mathbb{R}^3$, les défauts ponctuels correspondent à $\Pi_2(M)$, les défauts de ligne à $\Pi_1(M)$ et les défauts de surface à $\Pi_0(M)$, qui est défini comme le nombre de composantes connexes de M. Dans $\mathbb{R}^2$, les défauts ponctuels correspondent à $\Pi_1(M)$ et les défauts de ligne à $\Pi_0(M)$.

Dans les cas où les groupes $\Pi_n(M)$ sont Abéliens, les isomorphismes entre les groupes $\Pi_n(M, x)$ associés à des points x différents de M ne dépendent pas des chemins reliant les points x. On peut alors faire correspondre à la loi de composition dans le groupe $\Pi_n(M)$ une loi de composition des défauts dans l'espace. Ceci correspond au fait que deux défauts associés à g_1 et g_2 dans $\Pi_n(M)$ donnent, vus de l'extérieur, un défaut correspondant à $g_1 \cdot g_2$.

4.6.2 Substances magnétiques planaires, supraconductrices et superfluides

Le cas le plus simple de brisure de symétrie est réalisé par exemple dans les substances magnétiques planaires, pouvant être décrites par un champ de vecteurs de spin confinés dans un plan. A haute température on a une phase désordonnée où l'orientation du spin en chaque point est arbitraire. On a alors $G = \mathrm{SO}(2)$ correspondant aux rotations en deux dimensions. A basses températures, en dessous d'une certaine température critique, on aura au contraire une phase ordonnée où tous les spins s'orientent le long d'une même direction et induisent une aimantation $\vec{m}$. La symétrie est alors complètement brisée, et on peut prendre $H = \mathrm{SO}(1)$ par analogie au cas non-planaire. Le paramètre d'ordre sera alors un élément de

$$M = \mathrm{SO}(2)/\mathrm{SO}(1) \simeq S^1 \tag{4.13}$$

Le paramètre d'ordre $\eta \in S^1$ décrit alors la direction de l'aimantation $\vec{m}$ dans $\mathbb{R}^2$. Il peut être représenté comme un vecteur unitaire dans $\mathbb{R}^2$ de la forme $\vec{\eta}(r) = (\cos\phi(r), \sin\phi(r))$ ou un nombre complex unitaire dans $\mathbb{C}$ de la forme $\eta = e^{i\phi(r)}$.

La même situation est réalisée dans le cas des matériaux supraconducteurs et des substances superfluides. Dans ces cas, toutefois, la transition entre une phase désordonnée et une phase ordonnée est un effet quantique. Il est dû au fait que la fonction d'onde est déterminée à une phase ϕ près, qui correspond à un élément de $\mathrm{U}(1) \simeq \mathrm{SO}(2)$. A haute température on a alors une symétrie $G = \mathrm{SO}(2)$. Mais à basse température cette symétrie peut être brisée et on peut alors dire que $H = \mathrm{SO}(1)$.

On a dans ce cas $\Pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$. Ceci correspond au fait que ces systèmes admettent des défauts ponctuels appelés *vortex*, caractérisés par un entier n. La présence d'un vortex dans une certaine configuration de champ se traduit dans l'impossibilité de rendre tous le spins parallèles par une déformation continue. Pour illustrer la situation, utilisons la paramétrisation où le paramètre d'ordre est un vecteur $\vec{\eta}(r) = (\cos\phi(r), \sin\phi(r))$. La configuration la plus simple est celle où $\phi(r) = \phi_0$. Tous les vecteurs $\vec{\eta}$ sont alors parallèles (fig. 4.2.a). Toutes les configurations obtenues par une déformation continue de cette configuration de base n'ont pas de défauts (fig. 4.2.b). Le système est pleinement ordonné. Supposons maintenant qu'il y ait une singularité en un point P du plan $\mathbb{R}^2$ (fig. 4.2.c). Il n'est alors pas possible de rendre tous les spins parallèles. Il y a donc un vortex.

La présence d'un vortex et ses caractéristiques peuvent être détectées en suivant la valeur de l'angle $\phi(r)$ le long d'une boucle fermée C autour de celui-ci. Comme $\vec{\eta}(r)$ varie continûment sur C, après un tour il aura repris

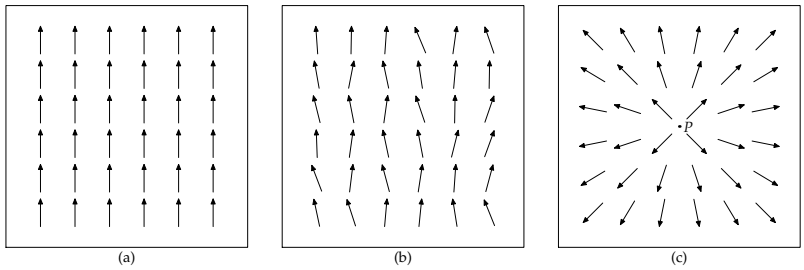

FIGURE 4.2 – (a) Région ordonnée : les spins sont parallèles. (b) Champs obtenu par une déformation continue du champ parallèle. (c) Une singularité située en P dans le plan $\mathbb{R}^2$; les spins ne peuvent plus être rendus parallèles par déformation continue.

la même valeur, mais l'angle $\phi(r)$ aura varié de $2\pi n$, avec $n \in \mathbb{Z}$. L'entier n est appelé *nombre de rotations* de η et correspond à la *charge* du vortex. C'est un invariant topologique et il correspond à un élément de $\Pi_1(S^1)$. On peut le calculer facilement de façon plus explicite en remarquant qu'il est identifié avec le degré de l'application $\eta : S^1 \to S^1$ définie par le paramètre d'ordre restreint à un cercle S^1 encapsulant le vortex, avec valeurs dans S^1. En utilisant des coordonnées polaires $r = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$ et en supposant que $P = (0,0)$, il convient de choisir comme contour d'intégration un cercle de rayon unitaire $\rho = 1$ autour de l'origine. Pour calculer la longueur de l'image, on considère l'élément de ligne donné par le vecteur $\partial\vec{\eta}/\partial\theta$, mais au lieu d'intégrer sa norme on intègre son produit vectoriel (qui produit un scalaire en deux dimensions) avec le vecteur unitaire $\vec{\eta}$, de façon à tenir compte de l'orientation. En divisant finalement par la longueur du cercle unitaire, on obtient :

$$\begin{aligned} n &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta\ \vec{\eta} \times \frac{\partial\vec{\eta}}{\partial\theta} \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta\ \frac{\partial\phi}{\partial\theta} \end{aligned} \tag{4.14}$$

Un exemple simple de vortex donnant un nombre de rotations égal à un entier arbitraire n est fourni par la configuration de champ donnée par $\vec{\eta}(\theta) = (\cos(n\theta), \sin(n\theta))$.

La structure de groupe sous-jacente aux nombre de rotations peut être comprise en considérant le cas représenté dans la figure 4.3, où il y a un vortex en P de charge n_P et un autre en Q de charge n_Q. La courbe C peut être déformée en C' sans changer le nombre de rotations n attaché à C. On voit bien que C' donne deux contributions n_P et n_Q autour de P et Q de sorte que la charge totale soit donnée par $n = n_P + n_Q$. Autrement dit, deux vortex avec nombres de rotations n_1 et n_2 peuvent être considérés de loin comme un vortex de charge $n_1 + n_2$. En particulier, ils peuvent s'annihiler si

$n = n_1 + n_2 = 0$. La loi de composition des éléments de $\Pi_1(S^1)$ est donc dans ce cas l'addition. Du point de vue physique, les vortex sont des objects qui interagissent et il faut une certaine énergie pour les créer. Ils apparaissent par paires et leur charge est conservée.

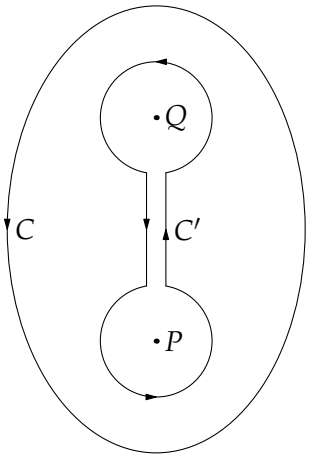

FIGURE 4.3 – Deux vortex P et Q dans le plan $\mathbb{R}^2$: les charges s'additionnent et la charge totale vaut $n = n_P + n_Q$.

4.6.3 Substances magnétiques ordinaires

Dans les substances magnétiques ordinaires, l'aimantation peut survenir dans n'importe quelle direction de l'espace. A haute température, on a alors une phase isotrope, caractérisée par $G = \mathrm{SO}(3)$. Au dessous d'une certaine température critique, il existe une direction privilégiée, déterminée par l'aimantation spontanée $\vec{m}$. La symétrie restante est alors celle des rotations autour de $\vec{m}$, et on a donc $H = \mathrm{SO}(2)$. Le paramètre d'ordre sera alors un élément de

$$M = \mathrm{SO}(3)/\mathrm{SO}(2) \simeq S^2 \tag{4.15}$$

Le paramétre d'ordre $\eta \in S^2$ décrit dans ce cas la direction de l'aimantation $\vec{m}$ dans $\mathbb{R}^3$. On peut le réprésenter par un vecteur unitaire dans $\mathbb{R}^3$, de la forme $\vec{\eta}(r) = (\sin\phi(r)\cos\xi(r), \sin\phi(r)\sin\xi(r), \cos\phi(r))$

Dans ce cas on a $\Pi_1(S^2) = \{e\}$, reflétant le fait que S^2 est simplement connexe. Ceci implique qu'il n'existe pas de défauts de ligne non-eliminable par une déformation continue.

On a toutefois $\Pi_2(S^2) = \mathbb{Z}$. Il existe donc des défauts ponctuels, appelés comme avant *vortex* et classifiés par un nombre entier n. Celui-ci est identifié avec le degré de l'application définie par le paramètre d'ordre restreint à une sphère S^2 encapsulant le vortex avec valeurs dans S^2. On peut alors donner

à nouveau une formule explicite pour le degré de $\eta : S^2 \to S^2$. Il convient d'utiliser des coordonnées polaires $r = (\rho \sin\theta \cos\varphi, \rho \sin\theta \sin\varphi, \rho \cos\theta)$ et de choisir comme contour une sphère de rayon unitaire $\rho = 1$. On considère alors l'élément de surface donné par le vecteur $\partial\vec{\eta}/\partial\theta \times \partial\vec{\eta}/\partial\varphi$, et au lieu de prendre sa norme on considère son produit scalaire avec le vecteur unitaire $\vec{\eta}$ pour tenir compte de l'orientation. En divisant finalement par la surface de la sphère unitaire, on obtient :

$$\begin{aligned} n &= \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \; \vec{\eta} \cdot \left(\frac{\partial \vec{\eta}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{\eta}}{\partial \varphi} \right) \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 d\cos\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \; \det \left(\frac{\partial(\cos\phi, \xi)}{\partial(\cos\theta, \varphi)} \right) \end{aligned} \tag{4.16}$$

Un exemple simple est représenté par la configuration de champ donnée par $\vec{\eta}(\theta, \phi) = (\sin\theta \cos(n\varphi), \sin\theta \sin(n\varphi), \cos\theta)$.

4.6.4 Cristaux liquides nématiques

Les liquides ordinaires sont homogènes et isotropes, donc invariants sous $G = \mathrm{SO}(3)$. En baissant la température, certains d'entre eux, appelés cristaux liquides nématiques (ou simplement nématiques), sont encore homogènes mais deviennent anisotropes. En fait ils sont constitués de longues molécules que l'on peut schématiser par des ellipsoïdes sans queue ni tête. Dans la phase nématique, ces molécules ont une direction préférentielle. Il ne reste alors plus que la symétrie $H = \mathrm{SO}(2) \times \mathrm{O}(1)$ (rotation autour de l'axe principal de l'ellipsoïde et changement tête-queue). On a alors

$$M = \mathrm{SO}(3)/\mathrm{SO}(2) \times \mathrm{O}(1) \simeq \mathrm{RP}^2 \tag{4.17}$$

Le paramètre d'ordre $\eta \in \mathrm{RP}^2$ décrit dans ce cas l'orientation des éllipsoïdes. On peut le représenter par une matrice 3×3 d'éléments prenant la forme $\eta_{ij} = \eta_i \eta_j$ où $\sum_{i=1}^3 \eta_i^2 = 1$, définissant le projecteur le long de la direction définie par $\pm\eta^i$ dans $\mathbb{R}^3$.

Dans ce cas on a $\Pi_1(\mathrm{RP}^2) = \mathbb{Z}_2$, où $\mathbb{Z}_2 = \{1, -1\}$ avec la multiplication. L'élément non-banal de ce groupe correspond à des cycles non-contractibles, où l'orientation change de signe aprés un tour complet. Il n'y a toutefois pas de nombre de rotations associé à ces cycles, car en multipliant deux de ces cycles on retrouve un cycle contractible. Les défauts de ligne correspondants à cette unique classe d'homotopie non-banale sont appelés *disclinaisons*. La fig. 4.4 montre de tels défauts dans un échantillon.

On a ensuite $\Pi_2(\mathrm{RP}^2) = \mathbb{Z}$. Ceci implique qu'il existe également des défauts ponctuels, qui sont classifiés par un entier n.

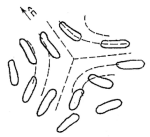

FIGURE 4.4 – Exemple de section transversale d'une disclinaison.

4.7 Dégénérescence de valeurs propres d'une matrice

Examinons pour terminer une application de ces concepts en algèbre linéaire, concernant la dégénérescence de valeurs propres. Soit $M(x)$ une matrice $n \times n$ dépendant de paramètres $x \in \mathbb{R}^k$ de manière continue. Un théorème dû à Wigner et Von-Neumann affirme que pour faire dégénérer deux valeurs propres il est nécessaire de varier deux paramètres si M est réelle et symétrique et trois paramètres si M est complexe et Hermitique. Ce résultat a des implications importantes en mécanique quantique, où il peut être appliqué à l'Hamiltonien pour étudier le comportement de ses valeurs et vecteurs propres sous changements adiabatiques des paramètres du système. En général, en variant un seul paramètre les différentes valeurs propres ne se croisent pas et tendent à se repousser. En ajustant deux ou plusieurs paramètres, il est au contraire possible que deux valeurs propres se rencontrent. Un chose plus simple à réaliser est de parcourir une boucle dans l'espace des paramètres. Il se trouve alors que si cette boucle encercle un point x_0 où il y aurait dégénérescence, les vecteur propres impliqués acquièrent une phase en parcourant la boucle, dite phase de Berry, qui peut avoir des effets observables.

Considérons d'abord le cas où $M(x)$ est une matrice réelle et symétrique dépendant de $x = (x_1, x_2)$ et telle qu'une des ses valeur propres $\lambda_{i_0}(x)$ devienne deux fois dégénérée pour $x = x_0$. On peut s'assurer de cette dégénérescence en observant le vecteur propre correspondant $v_{i_0}(x)$ pour $x \neq x_0$. Plus précisément, en parcourant une boucle englobant x_0, le vecteur $v_{i_0}(x)$ subit un changement de signe. En effet, vu que sa normalisation et son signe n'importent pas, le vecteur propre $v_{i_0}(x)$ définit un projecteur $P_{i_0}(x)$ correspondant à un élement de RP^{n-1}. Or $\Pi_1(\mathrm{RP}^{n-1}) = \mathbb{Z}_2$ et x_0 est un défaut ponctuel pour ce champ de projecteurs. Ceci implique qu'en faisant une boucle fermée autour de x_0 on doit obtenir la classe d'homotopie non-banale, correspondant à un changement de signe de v_{i_0} après un tour complet.

Dans le cas où $M(x)$ est une matrice complexe et Hermitique dépendant de $x = (x_1, x_2, x_3)$ et telle qu'une des ses valeur propres $\lambda_{i_0}(x)$ devienne deux fois dégénérée pour $x = x_0$, le vecteur propre $v_{i_0}(x)$ acquière plus généralement une phase lorsqu'on parcoure une boucle autour de x_0.

Chapitre 5

Groupes de Lie

Les groupes de Lie sont des groupes dont les éléments dépendent de paramètres continus. Il forment des variétés et ont une grande importance en physique pour décrire les symétries continues.

5.1 Définition

Un *groupe de Lie* est un groupe qui est muni d'une structure de variété différentiable et tel que les applications correspondant aux opérations de produit et d'inverse soient différentiables :

- Produit : $G \times G \to G\,,\ (g_1, g_2) \to g_1 g_2$
- Inverse : $G \to G\,,\ g \to g^{-1}$

Ceci signifie que $g \in G$ dépend continûment de n coordonnées locales notées $(u^1, \cdots, u^n)$, n définissant la dimension de G. Ainsi $g = g(u)$, de sorte que

1. $g(u)g(v) = g(w(u,v))$
2. $g^{-1}(u) = g(\phi(u))$
3. $g(0) = e$

Les fonctions w et ϕ sont alors différentiables et satisfont les propriétés $w^i(u,0) = u^i$, $w^i(0,v) = v^i$ et $\phi^i(0) = 0$.

On dit que le groupe de Lie G est *compact* ou *connexe*, si G vu comme variété différentiable est compact ou connexe.

5.2 Difféomorphismes

Un des exemples les plus importants de groupe de Lie peut être construit à partir de familles à n paramètres de fonctions différentiables. En effet, soit

U un ouvert de $\mathbb{R}^m$. Les difféomorphismes de U, c'est-à-dire les applications $f : U \to U$ différentiables et inversibles, agissant comme $x \to f(x)$, forment un groupe. La loi de composition des éléments de ce groupe est identifiée à la loi de composition des applications, l'élément neutre est l'application identité et l'élément inverse est obtenu par l'inverse de la fonction. Supposont maintenant que ces difféomorphismes dépendent de n paramètres $u = (u^1, \cdots, u^n)$, et agissent comme $x \to f(u, x) \equiv f_u(x)$. Ces applications forment un groupe de Lie s'il existe des fonctions ω et ϕ différentiables telles que

$$\begin{aligned} f_u \cdot f_v &= f_{\omega(u,v)} \\ f_u^{-1} &= f_{\phi(u)} \\ f_0 &= e \end{aligned} \tag{5.1}$$

Cette construction constitue la généralisation à n paramétres du résultat bien connu suivant pour 1 paramètre. Soit $x_t \in \mathbb{R}^m$ la solution définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ de l'équation différentielle ordinaire

$$\dot{x}(t) = Y(x(t)), \quad x(0) = x_0 \tag{5.2}$$

Cette solution est la courbe intégrale définie par le champ vectoriel $Y(x)$ et le point x_0, et peut être écrite sous la forme $x_t = f_t(x_0)$. Il suit du théorème d'unicité de la solution des équations différentielles ordinaires que $f_t(x_0)$ satisfait les propriétés suivantes (les membres de gauche et de droite satisfont la même équation différentielle et la même condition initiale) :

$$\begin{aligned} f_t \cdot f_s &= f_{t+s} \\ f_t^{-1} &= f_{-t} \\ f_0 &= e \end{aligned} \tag{5.3}$$

Dans ce cas, la famille à un paramètre d'applications définie par f_t représente le groupe $\mathbb{R}$ muni de l'addition. C'est une généralisation de l'exponentielle, qui correspond au cas particulier $m = 1$, $Y(x) = ax$, avec $f_t(x) = e^{at}x$

Un cas particulier intéressant des difféomorphismes est celui défini par $f_u(x) = g(u)x$, soit celui où l'application est représentée par une matrice $m \times m$, $g(u)$. Dans ce cas on obtient un groupe de Lie matriciel.

On obtient une situation parfaitement semblable pour les difféomorphismes définis non pas sur un ouvert U de $\mathbb{R}^m$ mais sur une variété différentiable quelconque M, c'est-à-dire les applications $f : M \to M$ inversibles et différentiables, dans le sens que leur représentations $\tilde{f}$ en coordonnées locales le sont.

5.3 Groupes de Lie matriciels

La classe la plus importante de groupes Lie est constituée des groupes de Lie pour lesquels les éléments du groupe sont des opérateurs linéaires agissant sur un espace vectoriel. Nous allons nous concentrer sur les groupes de Lie matriciels, pour lesquels cet espace vectoriel a dimension finie n et les éléments du groupe sont donc des matrices $n \times n$, mais il est possible de généraliser cette situation au cas où l'espace vectoriel est un espace de Hilbert de dimension infinie, comme celui émergeant en mécanique quantique, et les éléments du groupe sont des opérateurs différentiels.

Malgré les apparences, la restriction à des groupes de Lie de ce type n'est pas une forte restriction. En fait, un théorème dû à Ado assure que tout groupe de Lie est localement isomorphe à un groupe de Lie matriciel.

Nous allons maintenant présenter les groupes de Lie classiques, qui sont des groupes obtenus à partir de l'ensemble des matrices $n \times n$, dont les éléments g_{ij} appartiennent à un corps $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Cet ensemble est noté $M(n, \mathbb{K})$.

5.3.1 Le groupe $\mathbf{GL}(n, \mathbb{K})$

Le groupe $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ est le groupe des *transformations linéaires générales dans* $\mathbb{K}^n$. Il est défini par

$$\mathrm{GL}(n, \mathbb{K}) = \{g \in M(n, \mathbb{K}) \mid \det g \neq 0\} \tag{5.4}$$

C'est une variété différentiable, car c'est un ouvert de $\mathbb{K}^{n^2}$, et pour la décrire il suffit d'une seule carte, avec des coordonnées données par les éléments de matrice g_{ij}. Elle a dimension n^2 si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $2n^2$ si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Les opérations de composition et d'inverse sont données par la multiplication ligne par colonne et l'inversion matricielle, c'est-à-dire, en indiquant par $\det g[ij]$ le cofacteur ij de g :

$$(g_1 g_2)_{ij} = (g_1)_{ik}(g_2)_{kj} \tag{5.5}$$

$$(g^{-1})_{ij} = \frac{\det g[ij]}{\det g} \tag{5.6}$$

Ces deux applications sont différentiables, car $\det g \neq 0$, et $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ est donc un groupe de Lie.

Le groupe $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ est non-compact, car les éléments g_{ij} peuvent prendre des valeurs arbitrairement grandes. Il est non-connexe si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et connexe si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, car la contrainte sur le déterminant restreint sa valeur respectivement à l'espace non-connexe $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ et à l'espace connexe $\mathbb{C}\backslash\{0\}$. Par

exemple, les éléments de type parité P qui réfléchissent une direction et l'identité $\mathbb{1}$ ont respectivement determinants -1 et 1, et peuvent être reliés continûment si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ mais pas si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

5.3.2 Le groupe $\mathbf{SL}(n, \mathbb{K})$

Le groupe $\mathrm{SL}(n, \mathbb{K})$ est le groupe des *transformations linéaires spéciales dans* $\mathbb{K}^n$. Il est défini par

$$\mathrm{SL}(n, \mathbb{K}) = \left\{ g \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K}) \mid \det g = 1 \right\} \tag{5.7}$$

La contrainte $F = \det g - 1 = 0$ définit une hypersurface dans $\mathbb{K}^{n^2}$, de dimension $n^2 - 1$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $2n^2 - 2$ si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. De plus, cette hypersurface est régulière. En effet :

$$\frac{\partial}{\partial g_{ij}}(\det g - 1) = \det g[ij] = (g^{-1})_{ij} \det g \neq 0 \tag{5.8}$$

Le groupe $\mathrm{SL}(n, \mathbb{K})$ est par conséquent une variété et donc un groupe de Lie. Il est non-compact mais connexe, et a dimension $n^2 - 1$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $2n^2 - 2$ si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

5.3.3 Les groupes $\mathbf{O}(n)$ et $\mathbf{SO}(n)$

Le groupe $\mathrm{O}(n)$ est le groupe des *transformations orthogonales dans* $\mathbb{R}^n$. Il est défini par

$$\mathrm{O}(n) = \left\{ g \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \mid g^T g = \mathbb{1} \right\} \tag{5.9}$$

C'est le groupe des matrices $n \times n$ réelles qui laissent invariant le produit scalaire ordinaire dans $\mathbb{R}^n$: $(x, y) = x^i y^i$. En effet :

$$(gx, gy) = (x, y)\,,\ \forall (x, y) \ \Leftrightarrow\ g^T g = \mathbb{1} \tag{5.10}$$

On vérifie facilement que c'est bien un groupe : $(g^{-1})^T g^{-1} = g g^T = \mathbb{1}$ et $(g_1 g_2)^T (g_1 g_2) = g_2^T (g_1^T g_1) g_2 = \mathbb{1}$ si $g, g_1, g_2 \in O(n)$.

Dans l'espace $\mathbb{R}^{n^2}$, le groupe orthogonal est une hypersurface définie par les $n(n+1)/2$ contraintes indépendantes

$$F_{ij} \equiv g_{ik}\, g_{jk} - \delta_{ij} = 0 \tag{5.11}$$

C'est donc une hypersurface de dimension $n(n-1)/2$. Pour voir qu'elle est régulière, notons que

$$A_{ijlm} \equiv \frac{\partial F_{ij}}{\partial g_{lm}} = \delta_{il} g_{jm} + \delta_{jl} g_{im} \tag{5.12}$$

En traitant les paires d'indices ij et lm chacune comme un seul indices avec n^2 valeurs, A_{ijlm} est une matrice $n^2 \times n^2$. Pour déterminer son rang, essayons de résoudre l'équation

$$Ar = h \quad \Leftrightarrow \quad rg^T + gr^T = h \tag{5.13}$$

Le rang est le nombre d'éléments h indépendants pour lesquels il y a une solution. On a clairement $h^T = h$ et le rang est donc $n(n+1)/2$. L'hypersurface est donc régulière.

Dans une carte, on peut prendre comme coordonnées un certain nombre de $g_{ij} = u^\alpha$ avec $\alpha = 1, \cdots, n(n-1)/2$. Par le théorème des fonctions implicites, les autres g_{lm} seront des fonctions différentiables de ces u^α. Comme $g^{-1} = g^T$, g^{-1} est une fonction différentiable des u. De même, le produit $(g_1 g_2)_{ij} = (g_1)_{ik}(g_2)_{kj}$ est une fonction différentiable des u. Donc $\mathrm{O}(n)$ est un groupe de Lie, de dimension $n(n-1)/2$. Il est compact car $|g_{ij}| \leq 1$, vu que $\sum_j g_{ij}^2 = 1$. Mais il n'est pas connexe, car il contient des éléments de type parité P.

Le groupe $\mathrm{SO}(n)$ est le groupe des *transformations orthogonales spéciales dans* $\mathbb{R}^n$. Il est défini comme le sous groupe de $O(n)$ correspondant aux transformations propres

$$\mathrm{SO}(n) = \left\{ g \in \mathrm{O}(n) \mid \det g = 1 \right\} \tag{5.14}$$

C'est un groupe compact et connexe. Il a la même dimension $n(n-1)/2$ que $O(n)$, car il sélectionne parmi les éléments de $O(n)$, qui ont $\det g = \pm 1$, ceux avec $\det g = 1$.

Exemple. Un exemple important est le groupe des rotations $O(3)$, et sa version propre $SO(3)$, définis dans l'espace $\mathbb{R}^3$ avec la métrique Euclidienne δ_{ij}. C'est le groupe de symétrie d'espace de toute théorie relativiste dans le sens de Galilée. Nous allons étudier ce groupe en détail plus loin.

5.3.4 Les groupes $\mathbf{U}(n)$ et $\mathbf{SU}(n)$

Le groupe $U(n)$ est le groupe des *transformations unitaires dans* $\mathbb{C}^n$. Il est défini par

$$\mathrm{U}(n) = \left\{ g \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) \mid g^\dagger g = \mathbb{1} \right\} \tag{5.15}$$

C'est le groupe des matrices $n \times n$ complexes qui laissent invariant le produit scalaire ordinaire dans $\mathbb{C}^n$: $(x, y) = \bar{x}^i y^i$. En effet :

$$(gx, gy) = (x, y)\,, \ \forall x, y \in \mathbb{C}^n \ \Leftrightarrow \ g^\dagger g = \mathbb{1} \tag{5.16}$$

C'est une surface régulière de dimension n^2 dans $\mathbb{C}^{n^2}$, et donc un groupe de Lie. Il est compact et connexe, et a dimension n^2.

Le groupe $\mathrm{SU}(n)$ est le groupe des *transformations unitaires spéciales dans* $\mathbb{C}^n$. Il est défini par

$$\mathrm{SU}(n) = \left\{ g \in \mathrm{U}(n) \mid \det g = 1 \right\} \tag{5.17}$$

Il est lui aussi compact et connexe. Il a dimension $n^2 - 1$, inférieure d'une unité par rapport à $U(n)$, car il sélectionne parmi les éléments de $U(n)$, qui ont $\det g = e^{i\phi}$, ceux avec $\det g = 1$.

On remarque finalement que tout élément $g \in \mathrm{U}(n)$ peut être décomposé comme $g = e^{i\phi} g'$ avec $g' \in \mathrm{SU}(n)$. En prenant garde à ne pas inclure deux fois les éléments de $\mathbb{Z}_n = \{e^{i2\pi k/n}\mathbb{1} | k = 0, 1, \cdots, n-1\}$, le centre de $\mathrm{SU}(n)$, on voit que

$$\mathrm{U}(n) = \mathrm{U}(1) \times \mathrm{SU}(n)/\mathbb{Z}_n \tag{5.18}$$

Exemple. Différents groupes de ce type jouent un rôle fondamental en physique des particules élémentaires. On a d'abord les symétries locales de jauge, qui sont exactes et généralisent l'invariance de jauge de l'éléctrodynamique. Le modèle standard des interactions fondamentales repose en effet sur la symétrie locale $U(1) \times SU(2) \times SU(3)$. Il existe ensuite des symétries globales de type $\mathrm{SU}(n_\mathrm{f})$, qui émergent à différents degrés d'approximation et mélangent différents types de particules de matière entre elles.

5.3.5 Les groupes $\mathbf{O}(p, n-p)$ et $\mathbf{SO}(p, n-p)$

Le groupe $\mathrm{O}(p, n-p)$ est le groupe des *transformations hyperboliques dans* $\mathbb{R}^n$. Il est défini par

$$\mathrm{O}(p, n-p) = \left\{ g \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \mid g^T \eta g = \eta \right\} \tag{5.19}$$

où η est la matrice diagonale d'éléments

$$\eta = \mathrm{diag}(\underbrace{1, \cdots, 1}_{p \text{ fois}}, \underbrace{-1, \cdots, -1}_{n-p \text{ fois}}) \tag{5.20}$$

C'est le groupe des matrices $n \times n$ réelles qui laissent invariante la forme quadratique $(x, y) = x^i \eta_{ij} y^j$. En effet :

$$(gx, gy) = (x, y)\,, \ \forall x, y \in \mathbb{R}^n \ \Leftrightarrow \ g^T \eta g = \eta \tag{5.21}$$

C'est un groupe de Lie non-compact et non-connexe, de dimension égale à $n(n-1)/2$.

Le groupe $\mathrm{SO}(p, n-p)$ est le groupe des *transformations hyperboliques spéciales dans* $\mathbb{R}^n$. Il est défini par

$$\mathrm{SO}(p, n-p) = \left\{ g \in \mathrm{O}(p, n-p) \mid \det g = 1 \right\} \tag{5.22}$$

Il est lui aussi non-compact et non-connexe, et a la même dimension, donnée par $n(n-1)/2$.

Exemple. Un exemple particulièrement important est le groupe de Lorentz $\mathrm{O}(1,3)$, avec sa version propre $\mathrm{SO}(1,3)$, définis dans l'espace-temps $\mathbb{R}^4$ avec la métrique de Minkowski $\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$. C'est le groupe de symétrie d'espace-temps de toute théorie relativiste dans le sens de Einstein. Nous allons analyser ce groupe en détail plus loin.

5.3.6 Le groupe $\mathbf{SP}(2n,\mathbb{R})$

Le groupe $\mathrm{SP}(2n,\mathbb{R})$ est le groupe des *transformations symplectiques dans* $\mathbb{R}^{2n}$. Il est défini par

$$\mathrm{SP}(2n,\mathbb{R}) = \left\{ g \in \mathrm{GL}(2n,\mathbb{R}) \mid g^T J g = J \right\} \tag{5.23}$$

où

$$J = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_n \\ -\mathbb{1}_n & 0 \end{pmatrix}, \qquad J^2 = -\mathbb{1}_{2n} \tag{5.24}$$

C'est le groupe des transformations qui laissent invariante la forme quadratique antisymétrique $(x,y) = x^i J_{ij} y^j$. En effet :

$$(gx,gy) = (x,y)\,,\ \forall x,y \in \mathbb{R}^{2n} \ \Leftrightarrow\ g^T J g = J \tag{5.25}$$

On vérifie facilement que la contrainte est préservée par les opérations de groupe. La contrainte définit également une hypersurface régulière dans $\mathbb{R}^{4n^2}$, et $\mathrm{SP}(2n,R)$ est donc un groupe de Lie. Il a dimension $2n(2n+1)/2$ et il est non-compact et connexe, $\det g$ étant en fait toujours égal à 1.

Exemple. Le groupe $\mathrm{SP}(2n,\mathbb{R})$ joue un rôle essentiel en mécanique classique avec n degrés de liberté. En effet, en posant $x^a = q^a$ et $x^{a+n} = p^a$ pour $a = 1,\cdots,n$, les deux équations d'Hamilton données par $\dot{q}^a = \partial H(p,q)/\partial p^a$ et $\dot{p}^a = -\partial H(p,q)/\partial q^a$, où H est l'Hamiltonien, peuvent se récrire sous la forme

$$\dot{x} = J \nabla H(x) \tag{5.26}$$

Le crochet de Poisson $\{f,g\}$ de 2 fonctions $f(x)$ et $g(x)$ de $\mathbb{R}^{2n}$ peut en outre se récrire comme

$$\{f,g\} = (\nabla f, \nabla g) = J^{ij} \partial_i f \partial_j g \tag{5.27}$$

Pour le crochet de Poisson des variables canoniques, on obtient en particulier la matrice simplectique :

$$\{x^i, x^j\} = J^{ij} \tag{5.28}$$

On remarque finalement que sous un changement de variables $x \to \hat{x}(x)$ on a $\hat{\nabla}\hat{f} = g \nabla f$ avec $\hat{f}(x) = f(x(\hat{x}))$ et $g_{ij} = \partial x^i / \partial \hat{x}^j$. Il suit alors que

$\{\hat{f},\hat{h}\} = \{f,h\}$ si et seulement si $g^T J g = J$, c'est-à-dire si $g \in \mathrm{SP}(2n,R)$. Ceci signifie que les transformations canoniques sont les transformations telles que la matrice d'éléments $\partial x^i/\partial \hat{x}^j$ appartient au groupe symplectique $\mathrm{SP}(2n,\mathbb{R})$. En particulier, la solution $x_t = x_t(x_0)$ des équations de Hamilton est une transformation canonique.

5.4 Sous-groupes de Lie

On dispose du critère simple suivant pour déterminer si un sous-groupe d'un groupe de Lie est lui-même un groupe de Lie.

Théorème. Soit G un groupe de Lie et $H \subset G$ un sous groupe de G. Si H est fermé, c'est-à-dire si $\forall\{h_n\} \in H$ on a $\lim_{n\to\infty} h_n \in H$, alors H est lui aussi un groupe de Lie.

Ce critère permet de vérifier immédiatement que tous les groupes classiques de matrices que nous avons examiné sont des groupes de Lie, car ils sont des sous-groupes fermés de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$.

5.5 Groupes de Lie à un paramètre

Pour finir, mentionnons l'important exemple du groupe de Lie à 1 paramètre induit par un matrice $X \in M(n,\mathbb{K})$. Pour le construire, définissons d'abord la norme d'une telle matrice comme

$$\|X\| = \sqrt{X_{ij}\bar{X}_{ij}} \tag{5.29}$$

Celle-ci jouit de la propriété $\|XY\| \leq \|X\|\,\|Y\|$, et définit donc une distance. On peut alors définir des fonctions de la matrice X par leur développements en série, avec un rayon de convergence défini en terme de la norme introduite. On a alors en particulier :

$$e^{tX} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} X^n\,, \quad \forall X \tag{5.30}$$

$$\ln X = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(1-X)^n\,, \quad \forall X : \|X - \mathbb{1}\| < 1 \tag{5.31}$$

De cette manière on obtient clairement la propriété usuelle reliant exponentielle et logarithme, $e^{\ln X} = X$, si $\|X - \mathbb{1}\| < 1$. En outre, on a la propriété

$$\det e^{tX} = e^{t\,\mathrm{tr}\,X} \tag{5.32}$$

En effet, en définissant $a(t) = \det e^{tX}$ on a $a(0) = 1$ et $a(t+s) = a(t)a(s)$. Donc $\dot{a}(t) = \dot{a}(0)a(t)$. Mais $a(t) = \det\left[1 + tX + \mathcal{O}(t^2)\right] = 1 + t\,\mathrm{tr}\,X + \mathcal{O}(t^2)$,

et $\dot{a}(0) = \operatorname{tr} X$. Il suit que $a(t)$ satisfait l'équation différentielle $\dot{a}(t) = \operatorname{tr} X\, a(t)$ avec la condition initiale $a(0) = 1$, dont la solution est $a(t) = \exp(t \operatorname{tr} X)$.

En utilisant ces définitions, on peut maintenant construire le groupe de Lie à 1 paramètre généré par la matrice X comme :

$$G = \left\{ g(t) = e^{tX} \mid t \in \mathbb{R} \right\} \tag{5.33}$$

Celui-ci jouit automatiquement des propriétés suivantes :

1. $g(t)g(s) = g(s)g(t) = g(t+s)$
2. $g^{-1}(t) = g(-t)$
3. $\mathbb{1} = g(0)$

Chapitre 6

Algèbres de groupes de Lie

Le fait qu'un groupe de Lie est aussi une variété permet de construire un espace vectoriel tangent en tout élément, et en particulier en l'élément unité. Il émerge alors naturellement une structure d'algèbre de Lie sur cet espace tangent. Celle-ci permet de décrire tous les éléments du groupe dans le voisinage de l'élément neutre en termes d'un nombre fini de générateurs, et la loi de composition de tous ces éléments est codifiée dans certaines constantes de structure caractérisant l'action de ces générateurs. Cette paramétrisation permet également de cataloguer plus efficacement les représentations possibles d'un groupe de Lie.

6.1 Espaces tangents de groupes de Lie matriciels

Soit G un groupe de Lie matriciel, c'est-à-dire un sous-groupe du groupe des transformations linéaires générales dans $\mathbb{R}^n$:

$$G \subset \mathrm{GL}(n, \mathbb{K}) = \left\{ g \in M(n, \mathbb{K}) \mid \det g \neq 0 \right\} \tag{6.1}$$

L'espace vectoriel tangent à G en l'unité $e = \mathbb{1}$ est alors défini à partir de courbes $g(t) \in G$ telle que $g(0) = \mathbb{1}$ et consiste des matrices pouvant être représentées comme la dérivée d'une courbe de ce type en $t = 0$:

$$T_e(G) = \left\{ X \in M(n, \mathbb{K}) \mid \exists g(t) \in G : X = \dot{g}(0) \right\} \tag{6.2}$$

L'opération d'addition dans cet espace vectoriel descend directement de la loi de composition de G. En effet, $\forall X, Y \in \mathfrak{g}$ on a :

- Si $X = \dot{g}(0)$ et $Y = \dot{h}(0)$ alors $X + Y = (\dot{gh})(0)$
- Si $X = \dot{g}(0)$ alors $-X = (\dot{g^{-1}})(0)$

Pour construire l'espace tangent en un point g_0 quelconque, $T_{g_0}(G)$, on prends de la même manière une courbe $g(t) \in G$ telle que $g(0) = g_0$. Mais

on peut alors récrire la courbe comme $g(t) = g_0 h(t)$ ou $g(t) = \tilde{h}(t) g_0$ avec $h(0) = \mathbb{1}$ et $\tilde{h}(0) = \mathbb{1}$. On a alors $\dot{g}(0) = g_0 \dot{h}(0)$ ou $\dot{g}(0) = \dot{\tilde{h}}(0) g_0$, ce qui montre que $T_{g_0}(G) = g_0 T_e(G) = T_e(G) g_0$. On peut donc se restreindre à étudier les propriétés de $T_e(G)$.

6.2 Algèbre d'un groupe de Lie matriciel

On définit l'*algèbre* $\mathfrak{g}$ *associée au groupe de Lie matriciel* G comme l'espace vectoriel $T_e(G)$ avec pour crochet le commutateur matriciel ordinaire donné par $[X, Y] = XY - YX$.

Théorème. L'algèbre $\mathfrak{g}$ d'un groupe de Lie matriciel G est une algèbre de Lie, en fait une sous-algèbre de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$, et on a les propriétés suivantes :

1. Si $X \in \mathfrak{g}$, alors $hXh^{-1} \in \mathfrak{g}$, $\forall h \in G$
2. Si $X, Y \in \mathfrak{g}$, alors $[X, Y] \in \mathfrak{g}$
3. Si $X \in \mathfrak{g}$, alors $e^{tX} \in G$, $\forall t \in \mathbb{R}$
4. Il existe un voisinage de $\mathbb{1}$ dans G tel que si $g \in G$ est dans ce voisinage, alors il existe un seul $X \in \mathfrak{g}$ dans un voisinage de 0 tel que $g = e^X$

Preuve (1). Si $X \in T_e(G)$, il existe une courbe $g(t) \in G$ avec $g(0) = \mathbb{1}$ telle que $\dot{g}(0) = X$. Pour tout $h \in G$ on peut alors construire la nouvelle courbe $g_h(t) = hg(t)h^{-1}$, qui satisfait $g_h(0) = \mathbb{1}$ et donne $\dot{g}_h(0) = hXh^{-1}$. Il suit que $hXh^{-1} \in T_e(G)$.

Preuve (2). En applicant la propriété précédente pour h donné par une nouvelle courbe $h(t) \in G$ telle que $h(0) = \mathbb{1}$ et $\dot{h}(0) = Y$, on déduit que $h(t)Xh^{-1}(t) - X \in T_e(G)$. En développant alors autour de $t = 0$ on peut prendre $h(t) = \mathbb{1} + Yt + \mathcal{O}(t^2)$ et $h^{-1}(t) = \mathbb{1} - Yt + \mathcal{O}(t^2)$, et il suit finalement que $[X, Y] \in T_e(G)$. Ceci montre que l'espace vectoriel $T_e(M)$ muni du commutateur comme crochet est bien une algèbre de Lie.

Preuve (3). Si $X \in T_e(G)$, il existe une courbe $g(s) \in G$ avec $g(0) = \mathbb{1}$ telle que $X = \dot{g}(0)$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}_+$ on peut alors considérer l'élément $g(\frac{t}{n}) \in G$, ainsi que le produit de n de ce type d'éléments, $g^n(\frac{t}{n}) \in G$. Pour n grand et t fixé, on a $g(\frac{t}{n}) = \mathbb{1} + \frac{t}{n}X + \mathcal{O}((\frac{t}{n})^2)$, et on a donc $\lim_{n\to+\infty} g^n(\frac{t}{n}) = \lim_{n\to+\infty}(\mathbb{1} + \frac{t}{n}X)^n = e^{tX}$. Ceci montre que $e^{tX} \in G$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Preuve (4). G est une variété et les éléments $g \in G$ voisins de $\mathbb{1}$ peuvent être paramétrisés par n coordonnées réelles x^i. D'autre part, $\mathfrak{g}$ est un espace vectoriel et les éléments $X \in \mathfrak{g}$ peuvent être paramétrisé par n composantes réelles u^i. En considérant alors X dans $\mathfrak{g}$, on peut construire e^X, qui par la propriété 3 appartient à G et dépend des n paramètres u^i. Ceci représente

un nouveau choix de coordonnées locales, et la fonction de transition entre les x^i et les u^i doit être bicontinue et différentiable. Il suit qu'il existe une correspondence univoque entre les éléments $g \in G$ dans le voisinage de $\mathbb{1}$ et les éléments $X \in \mathfrak{g}$ dans le voisinage de 0.

6.2.1 Application exponentielle

Les éléments g du groupe voisins de l'unité $\mathbb{1}$ peuvent être exprimés comme exponentielles d'éléments X de l'algèbre, en vertu du théorème précédent, c'est-à-dire $g = e^X$. Ces éléments forment un sous-groupe. En effet, le produit de deux éléments de ce type dans G produit encore un élément de ce type dans G, grâce à la *formule de Backer–Campbell–Haussdorf* donnant le résultat du produit des exponentielles de deux matrices X et Y arbitraires :

$$e^X e^Y = e^Z \tag{6.3}$$

où

$$Z = X + Y + \frac{1}{2}[X,Y] + \frac{1}{12}[X,[X,Y]] - \frac{1}{12}[Y,[X,Y]] + \cdots \tag{6.4}$$

Tous les termes du dévelopement ont la forme de commutateurs multiples. Étant donné que $X, Y \in \mathfrak{g}$, tous ces termes produisent des éléments de l'algèbre et on a donc $Z \in \mathfrak{g}$. D'autre part, l'associativité du produit de trois élements de ce type dans G descend automatiquement de l'identité de jacobi pour les exposants.

En utilisant une base $\{X_i\}$ de $\mathfrak{g}$, dans laquelle $[X_i, X_j] = c_{ij}^k X_k$, tout g voisin de $\mathbb{1}$ dans G peut être écrit comme

$$g(u^i) = e^{u^i X_i} \tag{6.5}$$

Les paramètres $\{u^i\}$ correspondent à un choix particulier de coordonnées locales au voisinage de l'unité, et sont appelées *coordonnées canoniques*. Elle fournissent une paramétrisation extrêmement avantageuse du voisinage de l'identité dans le groupe, qui permet de codifier la table de multiplication d'un nombre infini d'éléments dépendant de paramètres continus par les constantes de structure de l'algèbre. En effet, dans cette paramétrisation, le produit de deux éléments $g(u^i)$ et $g(v^i)$ produit un nouvel élément $g(w^i)$, qui peut être calculé en utilisant la formule de Backer–Campbell–Haussdorf :

$$\begin{aligned} g(u^i)g(v^i) &= e^{u^i X_i} e^{v^i X_i} \\ &= \exp\left((u^i + v^i)X_i + \frac{1}{2}u^i v^j [X_i, X_j] + \cdots\right) \\ &= \exp\left((u^i + v^i)X_i + \frac{1}{2}u^i v^j c_{ij}^k X_k + \cdots\right) \\ &= g(w^i) \end{aligned} \tag{6.6}$$

avec :

$$w^i(u^m, v^n) = u^i + v^i + \frac{1}{2} c^i_{mn} u^m v^n + \cdots \tag{6.7}$$

On voit que cette fonction $w : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est complètement spécifiée par les constantes de structure c^k_{ij} de l'algèbre et contient toute l'information de la table de multiplication dans la partie du groupe pouvant être décrite de cette façon.

Remarque. Dans les applications à la physique, il est courant d'utiliser comme éléments de l'algèbre $J = -iX$, avec la base $J_i = -iX_i$. On a alors $[J_i, J_j] = i f^k_{ij} J_k$, avec $f^k_{ij} = -c^k_{ij}$, et l'application exponentielle s'écrit $g = e^{iJ}$.

Dans de nombreux cas, la majeur partie du groupe G peut être décrite par son algèbre $\mathfrak{g}$. Par exemple, si G est compact et connexe, alors $\forall g \in G$, $\exists X \in \mathfrak{g}$ (mais en géneral pas unique) tel que $g = e^X$. Ce résultat est encore vrai pour une classe plus générale de groupes.

On a également le résultat général suivant. Il existe un unique groupe de Lie (à un isomorphisme près) connexe et simplement connexe $\hat{G}$ qui a la même algèbre de Lie que le groupe de Lie G. Ce groupe est appelé le *recouvrement universel* de G.

Exemples.

1. $\widehat{\mathrm{SO}(3)} = \mathrm{SU}(2)$
2. $\widehat{\mathrm{O}(1,3)} = \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$

6.3 Algèbres des principaux groupes de Lie matriciels

La structure des algèbres $\mathfrak{g}$ associées aux principaux groupes matriciels G peut être déduite en traduisant la condition sur les éléments de G le définissant comme sous-groupe de $GL(n, \mathbb{K})$ en une condition sur les éléments de $\mathfrak{g}$, qui la définit comme sous-algèbre de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$.

Soit $g \in GL(n, \mathbb{K})$ et $X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ tels que $g = e^X$. Considérons également une autre matrice $\eta \in GL(n, \mathbb{K})$ arbitraire et indépendente. On a alors les résultats suivants :

1. $\det g = \exp \operatorname{tr} X$
2. $g^T = \exp X^T$
3. $g^\dagger = \exp X^\dagger$
4. $g^{-1} = \exp(-X)$
5. $\eta g \eta^{-1} = \exp(\eta X \eta^{-1})$

Il suit alors que :

1. $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{K}) = M(n,\mathbb{K})$
2. $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{K}) = \{X \in M(n,\mathbb{K}) \mid \operatorname{tr} X = 0\}$
3. $\mathfrak{o}(n) = \mathfrak{so}(n) = \{X \in M(n,\mathbb{R}) \mid X + X^T = 0\}$
4. $\mathfrak{u}(n) = \{X \in M(n,\mathbb{C}) \mid X + X^\dagger = 0\}$
5. $\mathfrak{su}(n) = \{X \in M(n,\mathbb{C}) \mid X + X^\dagger = 0\,,\ \operatorname{tr} X = 0\}$
6. $\mathfrak{o}(p,n-p) = \mathfrak{so}(p,n-p) = \{X \in M(n,\mathbb{R}) \mid X^T\eta + \eta X = 0\}$
7. $\mathfrak{sp}(2n,\mathbb{R}) = \{X \in M(2n,\mathbb{R}) \mid X^T J + JX = 0\}$

Il est important de souligner qu'une algèbre de Lie est specifiée non-seulement par ses constantes de structures c_{ij}^k, mais également par le corps $\mathbb{K}$ sur lequel elle est définie. En particulier, il faut prendre garde à la distinction entre algèbres de Lie réelles, définies sur $\mathbb{R}$, et algèbres de Lie complexes, définies sur $\mathbb{C}$.

Exemple. L'algèbre $\mathfrak{su}(2)$ est une algèbre réelle de dimension 3. En effet, les éléments $X \in \mathfrak{su}(2)$ satisfonts $X = -X^\dagger$ et $\operatorname{tr} X = 0$, et peuvent donc êtres paramétrisés en terme de trois nombres réels $u^i \in \mathbb{R}$, correspondant aux composantes dans la base définie par les trois matrices $X_i = -\frac{i}{2}\sigma_i$, où σ_i sont les matrices de Pauli. On a alors $X = u^i X_i$, ou

$$X = -\frac{i}{2}\begin{pmatrix} u^3 & u^1 - iu^2 \\ u^1 + iu^2 & -u^3 \end{pmatrix} \tag{6.8}$$

L'algèbre $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ est au contraire une algèbre de Lie complexe de dimension 3. En effet, les éléments $X \in \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ satisfont $\operatorname{tr} X = 0$, et peuvent être paramétrisés à l'aide de trois nombres complexes $u^i \in \mathbb{C}$, correspondant aux componsantes dans la base donnée par les trois matrices $X_i = -\frac{i}{2}\sigma_i$: $X = u^i X_i$. On voit donc que $\mathfrak{su}(2)$ et $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ ont les mêmes constantes de structure, données par $c_{ij}^k = \epsilon_{ijk}$, mais ne sont pas isomorphes, car l'une est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et l'autre sur $\mathbb{C}$. On dit que $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ est la *complexifiée* de $\mathfrak{su}(2)$.

Finalement, il est également important de garder à l'esprit qu'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ ne correspond pas à un unique groupe de Lie G, car plusieurs groupes de Lie globalement différents peuvent avoir la même structure dans le voisinage de l'unité et donc la même algèbre de Lie.

Exemple. Le groupe matriciel $SO(2)$ et le groupe additif réel T ont la même algèbre de Lie, mais il diffèrent globalement. En fait, on peut interpréter $SO(2)$ et T comme les groupes des translations sur le cercle S^1 et sur la

droite $\mathbb{R}$ respectivement, reflètant le fait que $SO(2)$ est compact alors que T ne l'est pas. En effet, un élément $g \in SO(2)$ peut être paramétrisé par un angle réel $\theta \in [0, 2\pi[$ et représenté comme :

$$g(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \exp\left\{\theta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right\} \tag{6.9}$$

Un élément $g \in T$ peut être paramétrisé par un paramètre réel $a \in \mathbb{R}$ et représenté de façon semblable par la matrice

$$g(a) = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \exp\left\{a \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\} \tag{6.10}$$

Ces deux groupes sont clairement identiques localement, avec la même algèbre de Lie et dans les deux cas $g(\alpha_1)g(\alpha_2) = g(\alpha_1 + \alpha_2)$ et $g^{-1}(\alpha) = g(-\alpha)$. Toutefois, ils sont globalement différents. En fait T est le recouvrement universel de $SO(2)$.

6.4 Groupes et algèbres de Lie plus généraux

Pour un groupe de Lie plus géneral G qui n'est pas matriciel, on peut définir l'algébre de Lie associée comme l'espace tangent en l'unité $T_e(G)$ muni d'un *crochet de Lie* définissant de façon intrinsèque la dérivée d'un vecteur le long d'un autre vecteur. Ce crochet de Lie généralise la notion de commutateur de deux transformations linéaires vue dans le cas de groupes matriciels, et permet d'étendre tous les concepts vus pour les groupes de Lie matriciels à des groupes de Lie non matriciels. Toutefois, on a l'important résultat suivant, dû à Ado :

Théorème. Toute algèbre de Lie est isomorphe à une algèbre de Lie matricielle. Il en suit que tout groupe de Lie est localement isomorphe à un groupe de Lie matriciel. En général cela n'est pas valable globalement.

6.5 Représentations

Il existe une relation intéressante entre les représentations admises par un groupe de Lie G et les représentations admises pas son algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Rappelons qu'une representation d'un groupe consiste en sa réalisation comme ensemble d'opérateurs linéaires sur un espace vectoriel V de dimension m arbitraire où chaque élément $g \in G$ est associé à une matrice $\phi(g) \in GL(m, \mathbb{R})$, et la loi de composition du groupe devient la multiplication matricielle. La représentation d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est définie de

façon semblable comme sa réalisation sur un autre espace vectoriel V de dimension m arbitraire où chaque élément $X \in \mathfrak{g}$ est associé à une matrice $\psi(X) \in \mathfrak{gl}(m, \mathbb{R})$, et le crochet de l'algèbre devient le commutateur matriciel.

Plus précisément, toute représentation ϕ de G définit une représentation ψ de $\mathfrak{g}$. En effet, $\forall X \in \mathfrak{g}$ on peut considérer une courbe $g(t) \in G$ telle que $g(0) = \mathbb{1}$ et $\dot{g}(0) = X$ et définir ψ à partir de ϕ par la relation suivante, qui garantit que ψ est une représentation de $\mathfrak{g}$ si ϕ est une représentation de G :

$$\psi(X) = \frac{d}{dt}\phi(g(t))\big|_{t=0} \tag{6.11}$$

Au contraire, une représentation ψ de $\mathfrak{g}$ ne définit pas toujours une représentation de G. En effet, même si G est connexe et tel que tout élément $g \in G$ peut être écrit comme $g = e^X$ avec $X \in \mathfrak{g}$, les matrice définies par $e^{\psi(X)}$ ne constituent pas automatiquement une représentation de G. Toutefois, on montre que si G est non seulement connexe et mais également simplement connexe, c'est-à-dire s'il coincide avec son recouvrement universel $\hat{G}$, alors on obtient de cette manière une bonne représentation ϕ de G, définie par

$$\phi(g) = e^{\psi(X)} \tag{6.12}$$

En résumé, il existe une correspondence directe entre les représentations ϕ de $\hat{G}$ et les représentations ψ de $\mathfrak{g}$.

Remarque. Si G n'est pas simplement connexe, il admet des boucles non-contractibles. En géneral, on trouve alors qu'en parcourant une telle boucle la matrice $e^{\psi(X)}$ est multipliée par une phase. On n'obtient alors pas une vraie représentation, mais une *représentation projective*, qui réalise la loi de composition du groupe seulement modulo une phase : $\phi(g_1 g_2) = e^{i\alpha_{12}}\phi(g_1)\phi(g_2)$.

6.5.1 Représentation fondamentale

Dans le cas particulier des groupes de Lie matriciels et leurs algèbres, la définition des éléments à représenter utilise déjà un espace vectoriel, et constitue donc en elle-même un cas particulier de représentation du groupe ou de l'algèbre vus comme collections d'éléments plus abstraits. Ce type de représentation de définition est appelé *représentation fondamentale*. Ensuite, il existe en général beaucoup d'autres représentations, de dimensions différentes.

6.5.2 Representation adjointe

Un groupe de Lie G de dimension n peut toujours être représenté sur son algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. En effet, celle-ci constitue un espace vectoriel V de

dimension n égale à celle de G, et les éléments $g \in G$ ont une action linéaire naturelle sur les élements $X \in \mathfrak{g}$, découlant du fait que $gXg^{-1} \in \mathfrak{g}$. On appelle cette représentation de dimension n la *représentation adjointe*, et on note dans ce cas $\phi(g) = \mathrm{Ad}_g$, défini comme

$$\mathrm{Ad}_g X = gXg^{-1}, \quad \forall X \in \mathfrak{g} \tag{6.13}$$

Dans une base $\{X_i\}$ de $\mathfrak{g}$, cette expression peut s'écrire en terme d'une matrice ${\phi_i}^j(g)$ comme

$$\mathrm{Ad}_g X_i = {\phi_i}^j(g) X_j \tag{6.14}$$

On voit que $\phi : g \to \mathrm{Ad}_g$ est bien une représentation du groupe G. En effet, on a

1. $\mathrm{Ad}_{g_1}\mathrm{Ad}_{g_2} = \mathrm{Ad}_{g_1 g_2} \quad \Rightarrow \quad \phi(g_1 g_2) = \phi(g_1)\phi(g_2)$

L'espace Ad_G constitué de tous les éléments Ad_g est lui aussi un groupe de Lie matriciel, et G est homomorphe à Ad_G, l'homorphisme étant la représentation adjointe ϕ.

L'algèbre $\mathfrak{g}$ associée à G hérite elle aussi de cette représentation adjointe. En effet, son crochet $[\cdot, \cdot]$ définit une action linéaire naturelle de ses élements sur eux-même, correspondant au fait que si $X, Y \in \mathfrak{g}$ alors $[X, Y] \in \mathfrak{g}$. On note dans ce cas $\psi(X) = \mathrm{ad}_X$, avec :

$$\mathrm{ad}_X Y = [X, Y], \quad \forall Y \in \mathfrak{g} \tag{6.15}$$

Dans un base $\{X_i\}$ de $\mathfrak{g}$, cette action devient

$$\mathrm{ad}_X X_i = {\psi_i}^j(X) X_j \tag{6.16}$$

On montre facilement que $\psi : X \to \mathrm{ad}_X$ est effectivement une représentation de l'algèbre $\mathfrak{g}$. En effet, on a :

1. $\mathrm{ad}_{\alpha X + \beta Y} = \alpha\, \mathrm{ad}_X + \beta\, \mathrm{ad}_Y \quad \Rightarrow \quad \psi(\alpha X + \beta Y) = \alpha\psi(X) + \beta\psi(Y)$
2. $[\mathrm{ad}_X, \mathrm{ad}_Y] = \mathrm{ad}_{[X,Y]} \quad \Rightarrow \quad \psi([X, Y]) = [\psi(X), \psi(Y)]$

La première propriété suit directement de la linéarité du commutateur matriciel, alors que la deuxième découle de l'identité de Jacobi que celui-ci satisfait. En effet, $\forall X_1, X_2, Y \in \mathfrak{g}$ on trouve

$$\begin{aligned} [\mathrm{ad}_{X_1}, \mathrm{ad}_{X_2}]Y &= \mathrm{ad}_{X_1}\mathrm{ad}_{X_2} Y - \mathrm{ad}_{X_2}\mathrm{ad}_{X_1} Y \\ &= \big[X_1, [X_2, Y]\big] - [X_2, [X_1, Y]] \\ &= \big[[X_1, X_2], Y\big] \\ &= \mathrm{ad}_{[X_1, X_2]} Y \end{aligned} \tag{6.17}$$

L'espace $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}$ constitué de tous les éléments ad_X est lui aussi une algèbre de Lie matricielle, et $\mathfrak{g}$ est homomorphe à $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}$, l'homorphisme étant la représentation adjointe ψ. Il suit également que si $\{X_i\}$ est une base de $\mathfrak{g}$ alors $\{\mathrm{ad}_{X_i}\}$ est une base de $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}$. Les éléments de matrice des ad_{X_k} dans la base des X_i sont déterminés par le fait que

$$\mathrm{ad}_{X_k} X_i = [X_k, X_i] = c_{ki}^j X_j \tag{6.18}$$

et sont donnés par

$$(\mathrm{ad}_{X_k})_i{}^j = c_{ki}^j \tag{6.19}$$

On vérifie facilement que cette forme explicite pour la representation des générateurs X_k satisfait l'algèbre de Lie comme conséquence de l'identité de Jacobi.

On vérifie facilement, en prenant une courbe $g(t) \in G$ avec $g(0) = \mathbb{1}$ et $\dot{g}(0) = X$, que la forme de la représentation adjointe du groupe G détermine la forme de la représentation adjointe de l'algèbre $\mathfrak{g}$:

$$\mathrm{ad}_X Y = \frac{d}{dt} \mathrm{Ad}_{g(t)} Y \Big|_{t=0} \tag{6.20}$$

Dans ce cas la propriété inverse est également partiellement vraie, dans le sens que la représentation adjointe de $\mathfrak{g}$ définit la représentation adjointe de la partie de G dont les éléments peuvent s'écrire dans la forme $g = e^X$ avec $X \in \mathfrak{g}$. Pour le voir, on considère $X, Y \in \mathfrak{g}$ et on construit la famille d'éléments $Y(t) = e^{tX} Y e^{-tX} \in \mathfrak{g}$. On a alors :

$$Y(t) = \mathrm{Ad}_{e^{tX}}(Y) \tag{6.21}$$

Il suit que $\dot{Y}(t) = [X, Y(t)]$ et en outre $Y(0) = Y$. $Y(t)$ satisfait donc

$$\dot{Y}(t) = \mathrm{ad}_X Y(t)\,, \quad Y(0) = Y \tag{6.22}$$

Mais cette équation différentielle ordinaire admet l'unique solution

$$Y(t) = e^{t\,\mathrm{ad}_X} Y = Y + t[X, Y] + \frac{t^2}{2}\big[X, [X, Y]\big] + \cdots \tag{6.23}$$

Autrement dit, on a

$$\mathrm{Ad}_{e^{tX}}(Y) = e^{t\,\mathrm{ad}_X}(Y) \tag{6.24}$$

Remarque. La propriété $\mathrm{Ad}_{e^{tX}} = e^{t\,\mathrm{ad}_X}$ de la représentation adjointe peut être utilisée pour caractériser la solution de différentes équations importantes en physique. En particulier :

1. Equation de Liouville $\dot{F} = \{H, F\}$. Sa solution s'écrit $F_t = e^{it\mathcal{L}} F_0$ où $\mathcal{L} = \mathcal{L}^\dagger$ est appelé *Liouvillien*.
2. Equation de Von-Neuman $\dot{\rho} = [H, \rho]$. Sa solution sécrit $\rho_t = e^{itL} \rho_0$ où $L = L^\dagger$ est appelé *Liouvillien quantique*.

6.5.3 Opérateurs de Casimir

Les différentes représentations irréductibles de la composante voisine à l'identité d'un groupe G, et donc de son algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, peuvent être cataloguées par les opérateurs C_i qui commutent avec tous les éléments $X \in \mathfrak{g}$, appelés opérateurs de Casimir. Par le lemme de Schur, ces opérateurs de Casimir sont proportionnels à l'identité dans la représentation en question, $C_i = \lambda_i \mathbb{1}$, et les valeurs des constantes λ_i permettent de cataloguer les différentes représentations irréductibles possibles.

Chapitre 7

Symétries d'espace-temps

Une des applications les plus importantes de la théorie des groupes et algèbres de Lie est celle de la formalisation des symétries d'espace-temps des théories physiques. Plus précisément, les symétries minimales que toute théorie physique doit posséder pour satisfaire le principe de relativité dans le sens de Galilée ou Einstein sont caractérisées par le groupe des rotations et le groupe de Lorentz. Nous allons donc étudier en détail ces deux groupes et les algèbres associées, ainsi que leurs représentations.

7.1 Le groupe des rotations

Dans une théorie relativiste dans le sens de Galilée, un événement est décrit par une point dans l'espace $\vec{x} = (x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3$ à un certain temps $t \in \mathbb{R}$. L'espace $\mathbb{R}^3$ est muni du produit scalaire usuel, défini par la métrique banale, $\delta_{ij} = \text{diag}(1,1,1)$, et définit ainsi l'espace Euclidien :

$$(x, y) = \langle x, y \rangle = \delta_{ij} x^i x^j \tag{7.1}$$

Les transformations de référentiel $R : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ qui doivent laisser invariantes les lois physiques dans une telle théorie sont celles qui préservent le produit scalaire de cet espace Euclidien :

$$(Rx, Ry) = (x, y) \tag{7.2}$$

Ceci implique que la matrice 3×3 R doit satisfaire la propriété

$$R^T R = \mathbb{1} \tag{7.3}$$

On a donc $R \in O(3)$, et le groupe $O(3)$ est appelé groupe des rotations.

7.1.1 Structure du groupe

Le groupe des rotations a deux composantes. Celles-ci peuvent être distinguées par la valeur du déterminant de la matrice R, $\det R$. La relation (7.3) définissant les éléments R implique en effet que :

$$\det(R^T R) = 1 \;\Rightarrow\; (\det R)^2 = 1 \;\Rightarrow\; \det R = \pm 1 \tag{7.4}$$

On dit qu'une rotation R est *propre* si $\det R = 1$ et *impropre* si $\det R = -1$, et on définit

- $O_+(3) = \{R \in O(3) \mid \det R = 1\}$
- $O_-(3) = \{R \in O(3) \mid \det R = -1\}$

On remarque que $\det R$ satisfait la propriété

$$\det(R_1 R_2) = \det R_1 \det R_2 \tag{7.5}$$

Il suit que $O_+(3)$ est un sous-groupe (aussi noté $SO(3)$), alors que $O_-(3)$ n'est pas un sous-groupe.

La composante $O_+(3)$ contient l'identité, ainsi que tous les éléments du groupe qui peuvent être ramenés continûment à celle-ci. En fait, tout élément $R \in O_+(3)$ correspond à une rotation usuelle, qui peut être décomposée comme combinaison de trois rotations autour des trois axes des coordonnées. Ces rotations de base sont paramétrisées par trois angles $\alpha^i \in [0, 2\pi[$ et sont réalisées par les éléments suivants :

$$\begin{aligned}
R_1(\alpha^1) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha^1 & \sin\alpha^1 \\ 0 & -\sin\alpha^1 & \cos\alpha^1 \end{pmatrix} \\
R_2(\alpha^2) &= \begin{pmatrix} \cos\alpha^2 & 0 & -\sin\alpha^2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\alpha^2 & 0 & \cos\alpha^2 \end{pmatrix} \\
R_3(\alpha^3) &= \begin{pmatrix} \cos\alpha^3 & \sin\alpha^3 & 0 \\ -\sin\alpha^3 & \cos\alpha^3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{7.6}$$

La composante $O_-(3)$ contient des éléments qui ne peuvent pas être ramenés continûment à l'identité. En fait, tout élément $R \in O_-(3)$ contient une réflection des coordonnées, et peut être décomposé de façon unique comme produit d'une rotation propre et de l'inversion simple de toutes les coordonnées. Cette réflection de base correspond à la transformation discrète

suivante :

$$R_P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{7.7}$$

L'élément discret R_P forme, avec l'unité, un sous-groupe à deux seuls éléments donné par

$$\mathbb{Z}_2^P = \{\mathbb{1}, R_P\} \tag{7.8}$$

On peut alors décomposer de façon unique tout élément de $O(3)$ en un élément de $O_+(3)$ et un élément de $\mathbb{Z}_2^P$. On écrit :

$$O(3)/O_+(3) = \mathbb{Z}_2^P \tag{7.9}$$

7.1.2 Algèbre

L'algèbre $\mathfrak{o}(3)$ associée au groupe des rotations $O(3)$ permet de décrire tous les éléments de sa partie voisine à l'identié, et en fait de tout le sous-groupe propre $O_+(3)$. Les trois générateurs J_i sont associés à la version infinitésimale des trois rotations de base R_i. Plus precisément, chaque famille d'éléments $R_i(\alpha^i)$ représente une courbe dans le groupe, telle que $R_i(0) = \mathbb{1}$, et on peut calculer les générateurs comme $J_i = -iR_i'(0)$. On obtient :

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{7.10}$$

Les éléments de ces matrices peuvent être résumés comme $(J_i)^m_n = -i\epsilon_{imn}$. On vérifie facilement que ces générateurs satisfont une algèbre de la même forme que $\mathfrak{su}(2)$:

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk}J_k \tag{7.11}$$

On vérifie aussi facilement que les rotations de base $R_i(\alpha^i)$ sont effectivement obtenues par exponentiation de ces générateurs :

$$R_i(\alpha^i) = e^{i\alpha^i J_i} \quad \text{(pas de somme sur } i\text{)} \tag{7.12}$$

Ceci suit directement de l'identité matricielle suivante, que l'on peut vérifier par dévelopement en série :

$$\exp\left\{i\alpha \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\right\} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \tag{7.13}$$

Finalement, tout élément $R \in O_+(3)$ peut être écrit en termes de trois angles α^i dans la forme canonique de première espèce

$$R = e^{i\alpha^i J_i} \tag{7.14}$$

Il peut également être écrit de façon unique en termes d'autres angles dans la forme canonique de deuxième espèce, qui correspond à une décomposition semblable à celle d'Euler :

$$R = e^{i\beta^1 J_1} e^{i\beta^2 J_2} e^{i\beta^3 J_3} \tag{7.15}$$

7.1.3 Représentations

L'algèbre des rotations $\mathfrak{o}(3)$ a un seul Casimir, donné par

$$C = \delta^{ij} J_i J_j \tag{7.16}$$

De plus, comme dans le contexte des moments cinétiques en mécanique quantique, l'algèbre des J_i implique que les valeurs possibles pour ce Casimir sont quantifiées en terme d'un nombre entier ou semi-entier s et prennent la forme :

$$C = s(s+1)\mathbb{1} \tag{7.17}$$

Chaque $s = 0, \frac{1}{2}, 1, \cdots$ correspond à une représentation irréductible de dimension $d = 2s + 1$, dans laquelle les générateurs J_i sont représentés par des matrices S_i. Les premières représentations sont les suivantes :

- $s = 0$ (*scalaire*, $d = 1$) : $S_i = 0$
- $s = \frac{1}{2}$ (*spinorielle*, $d = 2$) : $S_i = \frac{1}{2}\sigma_i$ où

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \ \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- $s = 1$ (*vectorielle*, $d = 3$) : $S_i = \Sigma_i$ où

$$\Sigma_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \Sigma_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \ \Sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\cdots$$

Il existe également une représentation de dimension infinie sur l'espace de Hilbert des fonctions $L^2(\mathbb{R}^3)$, où les générateurs J_i son représentés en termes d'opérateurs différentiels L_i :

$$L_i = -i\epsilon_{ijk} x^j \partial_k \tag{7.18}$$

On peut finalement combiner ces deux types de représentations, en considérant le produit tensoriel de $2j + 1$ copies de l'espace vectoriel des fonctions

$L^2(\mathbb{R}^3)$, où les générateurs sont représentés par des matrices contenant des opérateurs différentiels :

$$M_i = L_i \mathbb{1} + S_i \tag{7.19}$$

En mécanique quantique non-relativiste, ces dernières représentations permettent de décrire une particule de spin s à l'aide d'une fonction d'onde à $2s+1$ composantes.

On remarque finalement que pour promouvoir ces représentations de l'algèbre $\mathfrak{o}(3)$ à des représentations du groupe $O(3)$, il est nécessaire (mais pas suffisant) de spécifier la représentation de l'élément discret R_P, qui est le seul élément à ajouter aux générateurs de l'algèbre $\mathfrak{o}(3)$ pour reconstruire tout le group $O(3)$. On voit que $R_P R_i(\alpha^i) R_P = R_i(\alpha^i)$, ce qui implique que l'opérateur P représentant R_P et les opérateurs M_i représentant les générateurs J_i doivent satisfaire $PM_iP = M_i$.

7.1.4 Relation avec $SU(2)$

Il existe une relation directe entre le groupe des rotations $O(3)$ et le groupe $SU(2)$. En effet, en utilisant la convention où les constantes de structure portent un i, l'algèbre de $SU(2)$ est constituée des matrices complexes 2×2 à trace nulle et Hermitiques. On peut alors prendre comme base les trois matrices

$$\hat{J}_i = \frac{1}{2}\sigma_i \tag{7.20}$$

On obtient de cette façon la même algèbre que pour $O(3)$. On a donc l'isomorphisme d'algèbres

$$\mathfrak{o}(3) \simeq \mathfrak{su}(2) \tag{7.21}$$

Au niveau des groupes, la relation peut être construite à l'aide des matrices de Pauli σ_i. A un trivecteur x on peut associer une matrice Hermitique à trace nulle X donnée par :

$$X(x) = x^i \sigma_i = \begin{pmatrix} x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & -x^3 \end{pmatrix} \tag{7.22}$$

Cette relation peut être inversée, car les σ_i forment une base des matrices X Hermitiques à trace nulle, et en utilisant $\mathrm{tr}(\sigma_i \sigma_j) = 2\delta_{ij}$ on voit que

$$x^i(X) = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(X\sigma_i) \tag{7.23}$$

Les deux objets x et X décrivent de façons différentes le même espace vectoriel de dimension 3. De plus, on a

$$\det X = -\delta_{ij} x^i x^j = -(x, x) \tag{7.24}$$

L'action d'une matrice $R \in O(3)$ sur x est définie comme :

$$R : x \to x_R = Rx \tag{7.25}$$

Elle préserve la norme de x :

$$(x_R, x_R) = (x, x) \tag{7.26}$$

L'action d'une matrice $U \in SU(2)$ peut alors être définie sur le X correspondant comme

$$U : X \to X_U = UXU^\dagger \tag{7.27}$$

Elle préserve le déterminant de X, vu que $\det U = 1$:

$$\det X_U = \det X \tag{7.28}$$

En partant de ces relations, on peut maintenant montrer qu'il existe un homomorphisme ϕ de $SU(2)$ dans $O(3)$. Pour le construire, considérons une matrice $U \in SU(2)$. Etant donné que X_U est Hermitique et a trace nulle, comme X, il doit exister un trivecteur x_u tel que $X(x_u) = X_U$. Comme X_U dépend linéairement de X, cet élément x_u doit pouvoir s'obtenir par une transformation linéaire à partire de x, et on aura $x_u = \phi(U)x$ avec $\phi(U) \in GL(3, \mathbb{R})$. De plus, $\det(X_U) = \det(X)$ et donc $(x_u, x_u) = (x, x)$, et $\phi(U)$ reliant x à x_u doit donc être une rotation : $\phi(U) \in O(3)$. On a donc :

$$UX(x)U^\dagger = X(\phi(U)x) \tag{7.29}$$

Finalement, on voit que l'application ϕ préserve la structure de groupe. En effet, pour $U_1, U_2 \in SU(2)$ on a $X_{U_1U_2} = X(\phi(U_1U_2)x)$, mais également $X_{U_1U_2} = U_1U_2XU_2^\dagger U_1^\dagger = U_1X(\phi(U_2)x)U_1^\dagger = X(\phi(U_1)\phi(U_2)x)$. Il suit que $\phi(U_1U_2) = \phi(U_1)\phi(U_2)$.

L'homomorphisme ϕ n'est pas injectif. En effet, il est clair que $\phi(-U) = \phi(U)$. En particulier, $\phi(-\mathbb{1}) = \phi(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$, et on montre facilement que le noyau de ϕ, défini comme $\ker\phi = \{U \in SU(2) \mid \phi(U) = \mathbb{1}\}$ est le centre de $SU(2)$, c'est-à-dire $\ker\phi = \mathbb{Z}_2$ avec

$$\mathbb{Z}_2 = \{\mathbb{1}, -\mathbb{1}\} \tag{7.30}$$

L'homomorphisme ϕ n'est pas surjectif non-plus. En effet, il n'existe aucun élément $U \in SU(2)$ tel que $\phi(U) = R_P$. On montre toutefois que $\forall R \in O_+(3)$ il existe toujours deux éléments $\pm U \in SU(2)$ tel que $\phi(\pm U) = R$. Finalement, on a donc :

$$O_+(3) \simeq SU(2)/\mathbb{Z}_2 \tag{7.31}$$

On montre que $SU(2)$ est connexe et simplement connexe, et représente le recouverment universel de $O_+(3)$. En fait, en tant que variétés topologiques $SU(2) \simeq S^3$ et $O_+(3) \simeq \mathrm{RP}^3$.

Cette relation entre $O_+(3)$ et $SU(2)$ permet de mieux comprendre comment les représentations de $\mathfrak{o}(3) \simeq \mathfrak{su}(2)$ se transportent du niveau d'algèbre au niveau de groupe. Étant donné que $SU(2)$ est connexe et simplement connexe, toute représentation de spin s de $\mathfrak{su}(2)$ correspond à une vraie représentation de $SU(2)$. Au contraire, à cause du fait que $\pi_1(O_+(3)) = \mathbb{Z}_2$, une représentation de spin s de $\mathfrak{o}(3)$ donne une représentations de $O_+(3)$ qui est une vraie représentation si s est entier, mais seulement une représentation projective si s est semi-entier.

On vérifie facilement que les rotations de base $R_i(\alpha^i)$ de $O_+(3)$ ont la forme suivante dans $SU(2)$:

$$U_1(\alpha^1) = \begin{pmatrix} \cos\alpha^1/2 & i\sin\alpha^1/2 \\ i\sin\alpha^1/2 & \cos\alpha^1/2 \end{pmatrix} \tag{7.32}$$

$$U_2(\alpha^2) = \begin{pmatrix} \cos\alpha^2/2 & \sin\alpha^2/2 \\ -\sin\alpha^2/2 & \cos\alpha^2/2 \end{pmatrix} \tag{7.33}$$

$$U_3(\alpha^3) = \begin{pmatrix} e^{i\alpha^3/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha^3/2} \end{pmatrix} \tag{7.34}$$

Ces matrices peuvent être écrites en forme exponentielle comme :

$$U_i(\alpha^i) = e^{i\alpha^i \hat{J}_i} \quad \text{(pas de somme sur } i\text{)} \tag{7.35}$$

Elle correspondent donc à la représentation spinorielle des trois rotations de base de $O_+(3)$, vu que $\hat{J}_i = \frac{1}{2}\sigma_i$. On voit que cette représentation est effectivement seulement projective pour $O_+(3)$, car $U_i(2\pi) = -U_i(0)$ alors que $R_i(2\pi) = R_i(0)$.

7.2 Le groupe de Lorentz

Dans une théorie relativiste dans le sens de Einstein, un événement est représenté par un point de l'espace-temps $x = (x^0, x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^4$, avec $x^0 = ct$ décrivant le temps et les x^i les coordonnées spatiales. L'espace-temps $\mathbb{R}^4$ est muni du produit scalaire défini par la *métrique de Minkowski*, $\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$, et définit ainsi l'espace de Minkowski :

$$(x, y) = \langle x, \eta y \rangle = \eta_{\mu\nu} x^\mu y^\nu \tag{7.36}$$

Il y a trois types de vecteurs dans cet espace, distingués par le signe de leur norme et correspondant à l'intérieur, le bord et l'extérieur du cône de lumière construit à partir de l'origine :

- Les vecteurs de genre *temps* tels que $(x, x) > 0$
- Les vecteurs de genre *lumière* tels que $(x, x) = 0$
- Les vecteurs de genre *espace* tels que $(x, x) < 0$

Les transformations de référentiel $\Lambda : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ qui doivent laisser invariantes les lois physiques dans une telle théorie sont celles qui préservent le produit scalaire de cet espace de Minkowski :

$$(\Lambda x, \Lambda y) = (x, y) \ , \ \ \forall x, y \tag{7.37}$$

Pour que ce soit le cas, la matrice 4×4 Λ doit alors vérifier la condition

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta \tag{7.38}$$

Ceci montre que $\Lambda \in \mathrm{O}(1,3)$, et $\mathrm{O}(1,3)$ est appelé groupe de Lorentz.

7.2.1 Structure du groupe

Le groupe des transformations de Lorentz a quatre composantes. Celles-ci peuvent être distinguées par la valeur du déterminant de la matrice Λ, $\det \Lambda$, et par le signe de sa composante temps-temps, noté $\epsilon(\Lambda) = \mathrm{sign}(\Lambda^0{}_0)$. En effet, la relation (7.38) définissant les éléments Λ implique que :

$$\det(\Lambda^T \eta \Lambda) = -1 \ \Rightarrow \ (\det \Lambda)^2 = 1 \ \Rightarrow \ \det \Lambda = \pm 1 \tag{7.39}$$

$$(\Lambda^T \eta \Lambda)_{00} = 1 \ \Rightarrow \ (\Lambda^0{}_0)^2 \geq 1 \ \Rightarrow \ \epsilon(\Lambda) = \pm 1 \tag{7.40}$$

On dit qu'une transformation de Lorentz Λ est *propre* si $\det \Lambda = 1$ et *impropre* si $\det \Lambda = -1$, qu'elle est *orthocrone* si $\epsilon(\Lambda) = 1$ et *nonorthocrone* si $\epsilon(\Lambda) = -1$, et on définit :

- $O_+^\uparrow(1,3) = \{\Lambda \in O(1,3) \mid \det \Lambda = 1, \epsilon(\Lambda) = 1\}$
- $O_-^\uparrow(1,3) = \{\Lambda \in O(1,3) \mid \det \Lambda = -1, \epsilon(\Lambda) = 1\}$
- $O_+^\downarrow(1,3) = \{\Lambda \in O(1,3) \mid \det \Lambda = 1, \epsilon(\Lambda) = -1\}$
- $O_-^\downarrow(1,3) = \{\Lambda \in O(1,3) \mid \det \Lambda = -1, \epsilon(\Lambda) = -1\}$

On remarque que les deux quantités $\det \Lambda$ et $\epsilon(\Lambda)$ satisfont les propriétés suivantes (la deuxième peut être prouvée en montrant que si $\epsilon(\Lambda_1)\epsilon(\Lambda_2) = 1$ alors $(\Lambda_1\Lambda_2)^0{}_0 \geq 1$ et donc $\epsilon(\Lambda_1\Lambda_2) = 1$, alors que si $\epsilon(\Lambda_1)\epsilon(\Lambda_2) = -1$ alors $(\Lambda_1\Lambda_2)^0{}_0 \leq -1$ et donc $\epsilon(\Lambda_1\Lambda_2) = -1$) :

$$\det(\Lambda_1\Lambda_2) = \det \Lambda_1 \det \Lambda_2 \tag{7.41}$$

$$\epsilon(\Lambda_1\Lambda_2) = \epsilon(\Lambda_1)\epsilon(\Lambda_2) \tag{7.42}$$

Il suit que que $O_+^\uparrow(1,3)$ est un sous-groupe (également noté $SO^\uparrow(1,3)$), appelé *propre orthocrone*, alors que $O_-^\uparrow(1,3)$, $O_+^\downarrow(1,3)$ et $O_-^\downarrow(1,3)$ ne sont pas

des sous-groupes. Les deux sous-ensembles $O_+(1,3) = O_+^{\uparrow}(1,3) \cup O_+^{\downarrow}(1,3)$ (également noté $SO(1,3)$) et $O^{\uparrow}(1,3) = O_+^{\uparrow}(1,3) \cup O_-^{\uparrow}(1,3)$ sont eux aussi des sous-groupes, appelés respectivement *propre* et *orthocrone*.

La composante $O_+^{\uparrow}(1,3)$ contient l'identité, ainsi que tous les éléments du groupe qui peuvent être ramenés continûment à celle-ci. En fait, tout élément $\Lambda \in O_+^{\uparrow}(1,3)$ correspond soit à une rotation usuelle, soit un glissement, soit une combinaison des deux. On peut alors le décomposer de façon unique en termes de trois rotations autour des différents axes et trois glissements le long de ces axes. Ces transformations de base sont paramétrisées par trois angles $\alpha^i \in [0, 2\pi[$ et trois rapidités $\delta^i \in \mathbb{R}$, reliées aux vitesses par la relation $\delta^i = \operatorname{arcth}(v^i/c)$, de sorte que $\operatorname{ch}\delta^i = 1/\sqrt{1-(v^i/c)^2}$ et $\operatorname{sh}\delta^i = (v^i/c)/\sqrt{1-(v^i/c)^2}$. Elles sont réalisées par les éléments suivants :

$$\begin{aligned}
\Lambda_1(\alpha^1) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\alpha^1 & \sin\alpha^1 \\ 0 & 0 & -\sin\alpha^1 & \cos\alpha^1 \end{pmatrix}, \quad \Lambda_{1'}(\delta^1) = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\delta^1 & \operatorname{sh}\delta^1 & 0 & 0 \\ \operatorname{sh}\delta^1 & \operatorname{ch}\delta^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\Lambda_2(\alpha^2) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha^2 & 0 & -\sin\alpha^2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \sin\alpha^2 & 0 & \cos\alpha^2 \end{pmatrix}, \quad \Lambda_{2'}(\delta^2) = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\delta^2 & 0 & \operatorname{sh}\delta^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \operatorname{sh}\delta^2 & 0 & \operatorname{ch}\delta^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\Lambda_3(\alpha^3) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha^3 & \sin\alpha^3 & 0 \\ 0 & -\sin\alpha^3 & \cos\alpha^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Lambda_{3'}(\delta^3) = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\delta^3 & 0 & 0 & \operatorname{sh}\delta^3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{sh}\delta^3 & 0 & 0 & \operatorname{ch}\delta^3 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{7.43}$$

Les composantes $O_-^{\uparrow}(1,3)$, $O_-^{\downarrow}(1,3)$ et $O_+^{\downarrow}(1,3)$ sont formées d'éléments qui ne peuvent pas être ramenés continûment à l'identité et contiennent respectivement une réflection des coordonnées spatiales, une réflection du temps et une réflection simultanée des coordonnées spatiales et du temps. Ces trois transformations discrètes sont décrites par

$$\Lambda_P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \Lambda_T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Lambda_{PT} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{7.44}$$

Chacun des éléments discrets Λ_P, Λ_T et Λ_{PT} forme, avec l'unité, un sous-groupe discret à deux éléments :

$$\mathbb{Z}_2^P = \{\mathbb{1}, \Lambda_P\}, \quad \mathbb{Z}_2^T = \{\mathbb{1}, \Lambda_T\}, \quad \mathbb{Z}_2^{PT} = \{\mathbb{1}, \Lambda_{PT}\} \tag{7.45}$$

En prenant les trois éléments discrets Λ_P, Λ_T , Λ_{PT} et l'unité, on obtient également un sous-groupe fini à quatre éléments :

$$\mathbb{Z}_2^P \times \mathbb{Z}_2^T = \left\{\mathbb{1}, \Lambda_P, \Lambda_T, \Lambda_{PT}\right\} \tag{7.46}$$

On peut alors décomposer de façon unique tout élément de $O(1,3)$ en un élément de $O_+^\uparrow(1,3)$ et un élément de $\mathbb{Z}_2^P \times Z_2^T$. On écrit :

$$O(1,3)/O_+^\uparrow(1,3) = \mathbb{Z}_2^P \times \mathbb{Z}_2^T \tag{7.47}$$

On peut également décomposer de façon unique tout élément de $O(1,3)$ en un élément de $O_+(1,3)$ et un élément de $\mathbb{Z}_2^P$, ou un élément de $O^\uparrow(1,3)$ et un élément de $\mathbb{Z}_2^T$, et on a donc :

$$O(1,3)/O_+(1,3) = \mathbb{Z}_2^P\,, \;\; O(1,3)/O^\uparrow(1,3) = \mathbb{Z}_2^T \tag{7.48}$$

7.2.2 Algèbre

L'algèbre $\mathfrak{o}(1,3)$ associée au groupe de Lorentz $O(1,3)$ permet de décrire tous les éléments de sa partie voisine de l'identié, c'est-à-dire du sous-groupe propre orthocrone $O_+^\uparrow(1,3)$. Les six générateurs J_i et K_i sont associés aux versions infinitésimales des trois rotations et des trois glissements de base Λ_i et $\Lambda_{i'}$. Plus precisément, chaque $\Lambda_i(\alpha^i)$ et $\Lambda_{i'}(\delta^i)$ représente une courbe dans le groupe, telle que $\Lambda_i(0) = \mathbb{1}$ et $\Lambda_{i'}(0) = \mathbb{1}$, et on peut calculer les générateurs comme $J_i = -i\Lambda_i'(0)$ et $K_i = -i\Lambda_{i'}'(0)$. On obtient :

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{7.49}$$

$$K_1 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{7.50}$$

On vérifie alors facilement que ces générateurs satisfont l'algèbre suivante

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk}J_k \tag{7.51}$$

$$[K_i, K_j] = -i\epsilon_{ijk}J_k \tag{7.52}$$

$$[J_i, K_j] = i\epsilon_{ijk}K_k \tag{7.53}$$

On vérifie aussi facilement que les rotations et glissements de base $\Lambda_i(\alpha^i)$ et $\Lambda_{i'}(\delta^i)$ sont effectivement obtenus par exponentiation de ces générateurs :

$$\Lambda_i(\alpha^i) = e^{i\alpha^i J_i}\,, \;\; \Lambda_{i'}(\delta^i) = e^{i\delta^i K_i} \quad \text{(pas de somme sur } i\text{)} \tag{7.54}$$

Ceci suit directement des identités matricielles suivantes, que l'on peut vérifier par dévelopement en série :

$$\exp\left\{i\alpha\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}\right\} = \begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix} \tag{7.55}$$

$$\exp\left\{i\delta\begin{pmatrix}0 & -i\\ -i & 0\end{pmatrix}\right\} = \begin{pmatrix}\mathrm{ch}\,\delta & \mathrm{sh}\,\delta\\ \mathrm{sh}\,\delta & \mathrm{ch}\,\delta\end{pmatrix} \tag{7.56}$$

Les six générateurs du groupe de Lorentz peuvent être organisés de façon plus démocratique dans un object à deux indices antisymétriques $M_{\mu\nu} = -M_{\nu\mu}$, où

$$M_{ij} = \epsilon_{ijk}J_k\,, \quad M_{0i} = K_i \tag{7.57}$$

Les angles α^i et les rapidités δ^i sont alors aussi rassemblés dans un objet à deux indices antisymétriques $\alpha^{\mu\nu} = -\alpha^{\nu\mu}$, où

$$\alpha^{ij} = \epsilon_{ijk}\alpha^k\,, \quad \alpha^{0i} = \delta^i \tag{7.58}$$

Dans cette nouvelle notation, les éléments des matrices $M_{\mu\nu}$ sont donnés par $(M_{\mu\nu})^\alpha{}_\beta = -i(\eta_{\mu\beta}\delta^\alpha_\nu - \eta_{\nu\beta}\delta^\alpha_\mu)$, et l'algèbre prend la forme suivante

$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = -i\big(\eta_{\mu\rho}M_{\nu\sigma} - \eta_{\nu\rho}M_{\mu\sigma} - \eta_{\mu\sigma}M_{\nu\rho} + \eta_{\nu\sigma}M_{\mu\rho}\big) \tag{7.59}$$

Finalement, tout élément $\Lambda \in O^\uparrow_+(1,3)$ peut être écrit en termes de trois angles α^i et trois rapidités δ^i, résumés dans les six componsantes indépendentes de $\alpha^{\mu\nu}$, dans la forme canonique de première espèce

$$\Lambda = e^{i\alpha^i J_i + i\delta^i K_i} = e^{i/2\,\alpha^{\mu\nu}M_{\mu\nu}} \tag{7.60}$$

Il peut également être écrit de façon unique, en termes d'autres angles et rapidités, dans la forme canonique de deuxième espèce, qui correspond à une décomposition semblable à celle d'Euler pour les rotations :

$$\Lambda = e^{i\beta^1 J_1}e^{i\beta^2 J_2}e^{i\beta^3 J_3}e^{i\gamma^1 K_1}e^{i\gamma^2 K_2}e^{i\gamma^3 K_3} \tag{7.61}$$

7.2.3 Représentations

L'algèbre de Lorentz $\mathfrak{o}(1,3)$ possède deux Casimirs, qui sont donnés par les expressions suivantes :

$$C_1 = \frac{1}{8}\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}M_{\mu\nu}M_{\alpha\beta} = \frac{1}{4}\delta^{ij}\big(J_iJ_j - K_iK_j\big) \tag{7.62}$$

$$C_2 = \frac{i}{16}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}M_{\mu\nu}M_{\alpha\beta} = \frac{i}{4}\delta^{ij}\big(J_iK_j + K_iJ_j\big) \tag{7.63}$$

Comme dans le cas des rotations, l'algèbre des $M_{\mu\nu}$ implique que les valeurs possibles de ces deux Casimir sont quantifiées en termes de deux nombres

entiers ou semi-entiers s_+ et s_-, qui cataloguent les représentations irréductibles possibles.

Pour déterminer les détails de ce catalogue, on peut utiliser une astuce qui consiste à former des combinaisons linéaires complexes des générateurs. On considère en particulier :

$$N_i^{\pm} = \frac{1}{2}(J_i \pm iK_i) \tag{7.64}$$

De cette manière les N_i^+ et N_i^- commutent et l'algèbre se réduit à deux copies de l'algèbre $\mathfrak{su}(2)$:

$$[N_i^+, N_j^+] = i\epsilon_{ijk}N_k^+ \tag{7.65}$$

$$[N_i^-, N_j^-] = i\epsilon_{ijk}N_k^- \tag{7.66}$$

$$[N_i^+, N_j^-] = 0 \tag{7.67}$$

De plus, les deux Casimirs C_1 et C_2 deviennent des combinaisons linéaires des deux Casimirs $C_\pm = \delta^{ij}N_i^\pm N_j^\pm$:

$$C_1 = \frac{1}{2}(C_+ + C_-) \tag{7.68}$$

$$C_2 = \frac{1}{2}(C_+ - C_-) \tag{7.69}$$

Il est important de souligner qu'avec cette manipulation algébrique on a en réalité complexifié l'algèbre, qui était réelle au départ. Donc, en tant qu'algèbre réelle $\mathfrak{o}(1,3)$ n'est pas isomorphe à $\mathfrak{su}(2) \otimes \mathfrak{su}(2)$. Néanmoins, il existe une relation directe entre ces deux algèbres, et donc leurs représentations. En particulier, les $C_\pm$ sont quantifiés en termes de deux entiers ou semi-entiers $s_\pm$, avec

$$C_\pm = s_\pm(s_\pm + 1)\mathbb{1} \tag{7.70}$$

Il suit alors que C_1 et C_2 doivent eux-aussi être quantifiés en termes de ces nombres. Chaque possibilité $(s_+, s_-) = (0,0), (0,\frac{1}{2}), (\frac{1}{2},0), \cdots$ correspond à une représentation irréductible de dimension $d = (2s_+ + 1)(2s_- + 1)$, dans laquelle les générateurs $M_{\mu\nu}$ sont représentés par des matrices $S_{\mu\nu}$. Les premières représentations sont les suivantes, avec J_i et K_i représentés par les matrices S_i et B_i :

- $(s_+, s_-) = (0,0)$ (*scalaire*, $d = 1$) : $N_i^+ = 0$, $N_i^- = 0$, donc

$$S_i = 0\,, \quad B_i = 0$$

- $(s_+, s_-) = (\frac{1}{2},0)$ (*spinorielle chirale*, $d = 2$) : $N_i^+ = \frac{1}{2}\sigma_i$, $N_i^- = 0$, donc

$$S_i = \frac{1}{2}\sigma_i\,, \quad B_i = -\frac{i}{2}\sigma_i$$

- $(s_+, s_-) = (0, \frac{1}{2})$ (*spinorielle antichirale*, $d = 2$) : $N_i^+ = 0$, $N_i^- = \frac{1}{2}\sigma_i$, donc

$$S_i = \frac{1}{2}\sigma_i\,, \quad B_i = \frac{i}{2}\sigma_i$$

- $(s_+, s_-) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ (*vectorielle*, $d = 4$), $N_i^+ = \frac{1}{2}\sigma_i \otimes \mathbb{1}$, $N_i^- = \mathbb{1} \otimes \frac{1}{2}\sigma_i$, donc

$$S_i = \frac{1}{2}\big(\sigma_i \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes \sigma_i\big)\,, \quad B_i = -\frac{i}{2}\big(\sigma_i \otimes \mathbb{1} - \mathbb{1} \otimes \sigma_i\big)$$

$$\dots$$

Il existe également une représentation de dimension infinie sur l'espace de Hilbert des fonction intégrables $L^2(\mathbb{R}^3)$, où les générateurs $M_{\mu\nu}$ sont représentés en termes d'opérateurs différentiels $L_{\mu\nu}$:

$$L_{\mu\nu} = i\big(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu\big) \tag{7.71}$$

On peut finalement combiner ces deux types de représentations, en considérant le produit tensoriel de $(2s_+ + 1)(2s_- + 1)$ copies de l'espace vectoriel des fonctions $L^2(\mathbb{R}^3)$, où les générateurs sont représentés par des matrices contenant des opérateurs différentiels :

$$M_{\mu\nu} = L_{\mu\nu}\mathbb{1} + S_{\mu\nu} \tag{7.72}$$

En mécanique quantique relativiste, ces dernières représentations permettent de décrire une particule dans la représentation (s_+, s_-) à l'aide d'une fonction d'onde à $(2s_+ + 1)(2s_- + 1)$ composantes.

On remarque finalement que pour promouvoir ces représentations de l'algèbre $\mathfrak{o}(1,3)$ à des représentations du groupe $O(1,3)$, il est nécessaire (mais pas suffisant) de spécifier la représentation des éléments discrets Λ_P et Λ_T. On voit que $\Lambda_{P,T}\Lambda_i(\alpha^i)\Lambda_{P,T} = \Lambda_i(\alpha^i)$, mais $\Lambda_{P,T}\Lambda_{i'}(\delta^i)\Lambda_{P,T} = \Lambda_{i'}(-\delta^i)$. Il suit que $\Lambda_{P,T} i J_i \Lambda_{P,T} = iJ_i$, alors que $\Lambda_{P,T} i K_i \Lambda_{P,T} = -iK_i$. On a donc $\Lambda_{P,T} i N_i^\pm \Lambda_{P,T} = iN_i^\mp$. Considérons d'abord Λ_P et supposons qu'il soit réalisé par une matrice P. On a alors $PN_i^\pm P = N_i^\mp$, et l'opération de parité échange donc N_i^+ et N_i^-. Dans une représentation irréductible (s_+, s_-), on peut alors représenter cette action seulement si $s_+ = s_-$, alors que si $s_+ \neq s_-$ il est nécessaire de combiner les deux représentations irréductibles (s_+, s_-) et (s_-, s_+), et donc de partir de la représentation réductible $(s_+, s_-) \oplus (s_-, s_+)$. Ceci s'applique par exemple au cas des représentations spinorielles chirales et antichirales de dimensions 2, qui doivent être combinées en une représentation spinorielle non-chirale de dimension 4. Pour Λ_T, on a une situation semblable, mais on suppose en général qu'il soit realisé par une matrice T combinée avec l'opération de conjugaison complexe. Ceci est motivé en mécanique quantique par le fait qu'une inversion temporelle doit changer le

signe de la phase de la fonction d'onde. On a alors $TN_i^{\pm}T = -N_i^{\mp}$, et l'opération de renversement du temps peut en général être réalisée par un choix judicieux de la matrice T.

7.2.4 Relation avec $SL(2,\mathbb{C})$

Il existe une relation directe entre le groupe de Lorentz $O(1,3)$ et le groupe $SL(2,\mathbb{C})$. En effet, dans la convention où les constantes de structure portent un i, l'algèbre de $SL(2,\mathbb{C})$ est constituée des matrices complexes 2×2 à trace nulle, sans propriété particulière sous conjugaison Hermitique. On peut alors prendre comme base les trois matrices Hermitiques $\hat{J}_i$ et les trois matrices anti-Hermitiques $\hat{K}_i$ suivantes :

$$\hat{J}_i = \frac{1}{2}\sigma_i\,,\quad \hat{K}_i = -\frac{i}{2}\sigma_i \tag{7.73}$$

On obtient de cette façon la même algèbre que pour $O(1,3)$. On à donc l'isomorphisme d'algèbres

$$\mathfrak{o}(1,3) \simeq \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \tag{7.74}$$

Au niveau des groupes, la relation peut être construite en procédant de façon semblable au cas des rotations, en utilisant les matrices σ_μ où $\sigma_0 \equiv \mathbb{1}$ et σ_i sont les matrices de Pauli. A un quadrivecteur x on peut associer une matrice Hermitique à trace arbitraire X donnée par :

$$X(x) = x^\mu\sigma_\mu = \begin{pmatrix} x^0+x^3 & x^1-ix^2 \\ x^1+ix^2 & x^0-x^3 \end{pmatrix} \tag{7.75}$$

Cette relation peut être inversée, car les σ_μ forment une base des matrices X Hermitiques à trace arbitraire, et en utilisant $\mathrm{tr}(\sigma_\mu\sigma_\nu) = 2\,\delta_{\mu\nu}$ on voit que

$$x^\mu(X) = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(X\sigma_\mu) \tag{7.76}$$

Les deux objets x et X décrivent de façons différentes le même espace vectoriel de dimension 4. De plus, on a

$$\det X = \eta_{\mu\nu}x^\mu x^\nu = (x,x) \tag{7.77}$$

L'action d'une matrice $\Lambda \in O(1,3)$ sur x est définie comme :

$$\Lambda : x \to x_\Lambda = \Lambda x \tag{7.78}$$

Elle préserve la norme de x :

$$(x_\Lambda, x_\Lambda) = (x,x) \tag{7.79}$$

L'action d'une matrice $U \in SL(2,\mathbb{C})$ peut alors être définie sur le X correspondant comme

$$U : X \to X_U = UXU^\dagger \tag{7.80}$$

Elle préserve le déterminant de X, vu que $\det U = 1$:

$$\det X_U = \det X \tag{7.81}$$

En partant de ces relations, et en procédant comme dans le cas des rotations, on peut construire un homomorphisme ϕ de $SL(2,\mathbb{C})$ dans $O(1,3)$, associant à toute matrice $U \in SL(2,\mathbb{C})$ une matrice $\phi(U) \in O(1,3)$. On a alors :

$$UX(x)U^\dagger = X(\phi(U)x) \tag{7.82}$$

Comme avant, l'homomorphisme ϕ n'est pas injectif et on a $\phi(-U) = \phi(U)$. En particulier, $\phi(-\mathbb{1}) = \phi(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$, et le noyau de ϕ est le centre de $SL(2,\mathbb{C})$, c'est-à-dire $\ker\phi = \mathbb{Z}_2$ avec

$$\mathbb{Z}_2 = \{\mathbb{1}, -\mathbb{1}\} \tag{7.83}$$

L'homomorphisme ϕ n'est pas surjectif non-plus. En effet, il n'existe aucun élément $U \in SL(2,\mathbb{C})$ tel que $\phi(U) = \Lambda_P$, $\phi(U) = \Lambda_T$ ou $\phi(U) = \Lambda_{PT}$. On montre toutefois que $\forall\Lambda \in O^\uparrow_+(3)$ il existe toujours deux éléments $\pm U \in SL(2,C)$ tels que $\phi(\pm U) = \Lambda$. Finalement, on a donc :

$$O^\uparrow_+(1,3) \simeq SL(2,\mathbb{C})/\mathbb{Z}_2 \tag{7.84}$$

On montre que $SL(2,\mathbb{C})$ est connexe et simplement connexe, et représente le recouvrement universel de $O^\uparrow_+(1,3)$. En fait, en tant que variétés topologiques $SL(2,\mathbb{C}) \simeq S^3 \times \mathbb{R}^3$ et $O^\uparrow_+(1,3) \simeq \mathrm{RP}^3 \times \mathbb{R}^3$.

Cette relation entre $O^\uparrow_+(1,3)$ et $SL(2,\mathbb{C})$ permet de mieux comprendre comment les représentations de $\mathfrak{o}(1,3) \simeq \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ se transportent du niveau d'algèbre au niveau de groupe. Étant donné que $SL(2,\mathbb{C})$ est connexe et simplement connexe, toute représentation (s_+, s_-) de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ correspond à une vraie représentation de $SL(2,\mathbb{C})$. Au contraire, à cause du fait que $\pi_1(O^\uparrow_+(1,3)) = \mathbb{Z}_2$, une représentation (s_+, s_-) de $\mathfrak{o}(1,3)$ donne une représentation de $O^\uparrow_+(1,3)$ qui est une vraie représentation si $s_+ + s_-$ est entier, mais seulement une représentation projective si $s_+ + s_-$ est semi-entier.

On vérifie facilement que les rotations et glissements de base $\Lambda_i(\alpha^i)$ et

$\Lambda_{i'}(\delta^i)$ de $O^{\uparrow}_{+}(1,3)$ ont la forme suivante dans $SL(2,\mathbb{C})$:

$$U_1(\alpha^1) = \begin{pmatrix} \cos\alpha^1/2 & i\sin\alpha^1/2 \\ i\sin\alpha^1/2 & \cos\alpha^1/2 \end{pmatrix} \tag{7.85}$$

$$U_2(\alpha^2) = \begin{pmatrix} \cos\alpha^2/2 & \sin\alpha^2/2 \\ -\sin\alpha^2/2 & \cos\alpha^2/2 \end{pmatrix} \tag{7.86}$$

$$U_3(\alpha^3) = \begin{pmatrix} e^{i\alpha^3/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha^3/2} \end{pmatrix} \tag{7.87}$$

$$U_{1'}(\delta^1) = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\,\delta^1/2 & \mathrm{sh}\,\delta^1/2 \\ \mathrm{sh}\,\delta^1/2 & \mathrm{ch}\,\delta^1/2 \end{pmatrix} \tag{7.88}$$

$$U_{2'}(\delta^2) = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\,\delta^2/2 & -i\,\mathrm{sh}\,\delta^2/2 \\ i\,\mathrm{sh}\,\delta^2/2 & \mathrm{ch}\,\delta^2/2 \end{pmatrix} \tag{7.89}$$

$$U_{3'}(\delta^3) = \begin{pmatrix} e^{\delta^3/2} & 0 \\ 0 & e^{-\delta^3/2} \end{pmatrix} \tag{7.90}$$

Ces matrices peuvent être écrites en forme exponentielle comme :

$$U_i(\alpha^i) = e^{i\alpha^i \hat{J}_i}\,, \quad U_{i'}(\delta^i) = e^{i\delta^i \hat{K}_i} \quad (\text{pas de somme sur } i) \tag{7.91}$$

Elle correspondent donc à la représentation spinorielle des trois rotations et des trois glissement de base de $O^{\uparrow}_{+}(1,3)$, vu que $\hat{J}_i = \frac{1}{2}\sigma_i$ et $\hat{K}_i = -\frac{i}{2}\sigma_i$. On voit que cette représentation est effectivement seulement projective pour $O^{\uparrow}_{+}(1,3)$, car $U_i(2\pi) = -U_i(0)$ alors que $\Lambda_i(2\pi) = \Lambda_i(0)$.

Chapitre 8

Formes différentielles et applications

Les formes différentielles sont des tenseurs covariants complètement antisymétriques. Leurs propriétés très particulières permettent entre autre de définir une généralisation très utile du calcul vectoriel habituel sur l'espace tridimensionnel Euclidien $\mathbb{R}^3$ au cas d'une variété arbitraire à n dimensions.

8.1 Formes différentielles

Une *p-forme* ω sur une variété M est un champ tensoriel covariant de type $(0, p)$ complètement antisymétrique sur M. Dans une base notée $\{dx^i\}$ pour l'espace cotangent on a donc

$$\omega = \omega_{i_1 \cdots i_p}\, dx^{i_1} \otimes \cdots \otimes dx^{i_p} \tag{8.1}$$

avec des composantes $\omega_{i_1 \cdots i_p}$ complètement antisymétriques en chaque point, c'est-à-dire satisfaisant pour toute permutations π des différentes valeurs prises par les p indices la relation

$$\omega_{\pi(i_1)\cdots\pi(i_p)} = (-1)^{\pi} \omega_{i_1 \cdots i_p} \tag{8.2}$$

Le tenseur (8.1) peut être récrit également dans la forme

$$\omega = \frac{1}{p!} \sum_{\pi} \omega_{\pi(i_1)\cdots\pi(i_p)}\, dx^{\pi(i_1)} \otimes \cdots \otimes dx^{\pi(i_p)} \tag{8.3}$$

En utilisant la propriété (8.2) on voit que l'on peut alors écrire un tel tenseur sous la forme canonique

$$\omega = \frac{1}{p!}\, \omega_{i_1 \cdots i_p}\, dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p} \tag{8.4}$$

où le produit extérieur $\wedge$ entre les 1-formes dx^{i_k} est définit comme la somme complètement antisymétrique de leurs produits tensoriels :

$$dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p} = \sum_\pi (-1)^\pi dx^{\pi(i_1)} \otimes \cdots \otimes dx^{\pi(i_p)} \tag{8.5}$$

Remarquons que $dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}$ est nul si deux indices coïncident, et change de signe si deux indices sont permutés. On a par exemple

$$dx^1 \wedge dx^1 = 0, \qquad dx^1 \wedge dx^2 = -dx^2 \wedge dx^1 \tag{8.6}$$

Autrement dit, les dx^i anticommutent par rapport au produit extérieur, et forment ce qui s'appelle une algèbre de Grassmann.

Les p-formes en un point $q \in M$ appartiennent à un espace vectoriel, noté $\Omega^p_q(M)$, de dimension $\binom{n}{p}$ si $\dim M = n$. On voit que $\Omega^p_q(M)$ et $\Omega^{n-p}_q(M)$ ont la même dimension, et sont par conséquent isomorphes. L'ensemble des p-formes sur M est ensuite noté $\Omega^p(M)$. Les 0-formes sont des scalaires, définis par une seule fonction ω. Les n-formes ont toutes leurs composantes reliées entre elles et sont elles aussi définies en termes d'une seule fonction. En terme de $\epsilon_{i_1\cdots i_n}$, dont les composantes non-nulles sont données par $\epsilon_{\pi(1)\cdots\pi(n)} = (-1)^\pi$, on a $\omega_{i_1\cdots i_n} = \epsilon_{i_1\cdots i_n}\,\omega_{1\cdots n}$.

8.2 Produit extérieur

On définit le *produit extérieur* entre une p-forme a et une q-forme b comme la $(p+q)$-forme $a \wedge b$ donnée par

$$a \wedge b = \frac{1}{p!q!}\, a_{i_1\cdots i_p} b_{i_{p+1}\cdots i_{p+q}}\, dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_{p+q}} \tag{8.7}$$

Ceci définit une application bilinéaire $\wedge : \Omega^p(M) \times \Omega^q(M) \to \Omega^{p+q}(M)$. En effet, on voit que $a \wedge b$ est un tenseur de type $(0, p+q)$ complètement antisymétrique :

$$\begin{aligned} a \wedge b &= \frac{1}{p!q!} \sum_\pi (-1)^\pi a_{i_1\cdots i_p} b_{i_{p+1}\cdots i_{p+q}}\, dx^{\pi(i_1)} \otimes \cdots \otimes dx^{\pi(i_{p+q})} \\ &= \frac{1}{p!q!} \sum_\pi (-1)^\pi a_{\pi(i_1)\cdots\pi(i_p)} b_{\pi(i_{p+1})\cdots\pi(i_{p+q})} dx^{i_1} \otimes \cdots \otimes dx^{i_{p+q}} \end{aligned} \tag{8.8}$$

On a donc bien que $a \wedge b \in \Omega^{p+q}(M)$, et on peut récrire :

$$\begin{aligned} a \wedge b &= (a \wedge b)_{i_1\cdots i_{p+q}}\, dx^{i_1} \otimes \cdots \otimes dx^{i_{p+q}} \\ &= \frac{1}{(p+q)!}\, (a \wedge b)_{i_1\cdots i_{p+q}}\, dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_{p+q}} \end{aligned} \tag{8.9}$$

avec

$$(a \wedge b)_{i_1\cdots i_{p+q}} = \frac{1}{p!q!} \sum_\pi (-1)^\pi a_{\pi(i_1)\cdots\pi(i_p)} b_{\pi(i_{p+1})\cdots\pi(i_{p+q})} \tag{8.10}$$

Propriétés. Le produit extérieur entre des formes $a \in \Omega^p(M)$, $b \in \Omega^q(M)$ et $c \in \Omega^r(M)$ satisfait les propriétés suivantes :

1. $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$
2. $(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2) \wedge b = \alpha_1 a_1 \wedge b + \alpha_2 a_2 \wedge b$, $\forall \alpha_i \in \mathbb{R}$
3. $a \wedge b = (-1)^{pq} b \wedge a$

Un cas important de produit externe est le produit de n 1-formes a^i, $i = 1, \cdots, n$, de composantes $a^i{}_j$, $j = 1, \cdots, n$. En effet, celui-ci donne une n-forme dont la composante est le determinant de la matrices $n \times n$ formée par toutes les composantes $a^i{}_j$:

$$\begin{aligned} a^1 \wedge \cdots \wedge a^n &= a^1{}_{j_1} \cdots a^n{}_{j_n}\, dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_n} \\ &= \sum_\pi (-1)^\pi a^1{}_{\pi(1)} \cdots a^n{}_{\pi(n)}\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n \\ &= \det a^i{}_j\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n \end{aligned} \tag{8.11}$$

En composantes, ceci correspond à la relation suivante, qui se démontre de façon semblable :

$$\epsilon_{i_1 \cdots i_n} a^{i_1}_{j_1} \cdots a^{i_n}_{j_n} = \det a^i{}_j\, \epsilon_{j_1 \cdots j_n} \tag{8.12}$$

Toutes les propriétés du déterminant peuvent se déduire des propriétés du produit extérieur. Par exemple, le déterminant ne varie pas si l'on ajoute à une colonne une combinaison linéaire des autres colonnes.

8.3 Dérivée extérieure

La *dérivée extérieure* est une application linéaire $d : \Omega^p(M) \to \Omega^{p+1}(M)$ qui appliquée à une p-forme ω produit la $(p+1)$-forme $d\omega$ donnée par

$$d\omega = \frac{1}{p!} \frac{\partial \omega_{i_1 \cdots i_p}}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p} \tag{8.13}$$

On a donc :

$$(d\omega)_{i_1 \cdots i_{p+1}} = \frac{1}{p!} \sum_\pi (-1)^\pi \frac{\partial \omega_{\pi(i_2) \cdots \pi(i_{p+1})}}{\partial x^{\pi(i_1)}} \tag{8.14}$$

On verifie que $d\omega$ est un bien un tenseur de type $(0, p+1)$. En effet, sous un changement de coordonnées $x^i \to \hat{x}^i$, sous lequel

$$d\hat{x}^i = \frac{\partial \hat{x}^i}{\partial x^j} dx^j\,, \quad \frac{\partial}{\partial \hat{x}^i} = \frac{\partial x^j}{\partial \hat{x}^i} \frac{\partial}{\partial x^j} \tag{8.15}$$

on a

$$\hat{\omega}_{i_1 \cdots i_p} = \frac{\partial x^{j_1}}{\partial \hat{x}^{i_1}} \cdots \frac{\partial x^{j_p}}{\partial \hat{x}^{i_p}} \omega_{j_1 \cdots j_p} \tag{8.16}$$

Il suit que

$$
\begin{aligned}
(\hat{d\omega})_{i_1\cdots i_{p+1}} &= \frac{1}{p!}\sum_{\pi}(-1)^{\pi}\frac{\partial\hat{\omega}_{\pi(i_2)\cdots\pi(i_{p+1})}}{\partial\hat{x}^{\pi(i_1)}} \\
&= \frac{1}{p!}\sum_{\pi}(-1)^{\pi}\frac{\partial x^{j_1}}{\partial\hat{x}^{\pi(i_1)}}\cdots\frac{\partial x^{j_{p+1}}}{\partial\hat{x}^{\pi(i_{p+1})}}\frac{\partial\omega_{j_2\cdots j_{p+1}}}{\partial x^{j_1}} \\
&\quad+\frac{1}{p!}\sum_{k=2}^{p+1}\sum_{\pi}(-1)^{\pi}\frac{\partial x^{j_2}}{\partial\hat{x}^{\pi(i_2)}}\cdots\frac{\partial^2 x^{j_k}}{\partial\hat{x}^{\pi(i_1)}\partial\hat{x}^{\pi(i_k)}}\cdots\frac{\partial x^{j_{p+1}}}{\partial\hat{x}^{\pi(i_{p+1})}}\omega_{j_2\cdots j_{p+1}} \\
&= \frac{\partial x^{j_1}}{\partial\hat{x}^{i_1}}\cdots\frac{\partial x^{j_{p+1}}}{\partial\hat{x}^{i_{p+1}}}(d\omega)_{j_1\cdots j_{p+1}} \qquad (8.17)
\end{aligned}
$$

Sur une 0-forme ω, ayant pour composante une fonction ω, la dérivée extérieure produit une 1-forme dont les composantes forment un vecteur égal au gradient de la fonction ω :

$$d\omega = \frac{\partial\omega}{\partial x^i}dx^i \qquad (8.18)$$

Sur une 1-forme, ayant pour composantes les composantes d'un champ de covecteurs ω_i, la dérivée externe produit une 2-forme dont les composantes correspondent à des dérivées antisymétrisées de ce vecteur :

$$d\omega = \frac{\partial\omega_i}{\partial x^j}dx^j\wedge dx^i = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\omega_i}{\partial x^j}-\frac{\partial\omega_j}{\partial x^i}\right)dx^j\wedge dx^i \qquad (8.19)$$

Sur une p-forme avec $p = 2,\cdots,n-1$, on obtient des résultats semblables.

Propriétés. La dérivée externe jouit des propriétés suivantes sur des formes $a\in\Omega^p(M)$ et $b\in\Omega^q(M)$.

1. $d^2 = 0$ (suit du fait que les dérivées ordinaires commutent)
2. $d(a\wedge b) = da\wedge b + (-1)^p a\wedge db$ (suit de la règle de Leibnitz)

8.4 Formes fermées et exactes

Une p-forme ω est dite *fermée* si $d\omega = 0$. Une p-forme ω est dite *exacte* si il existe une $(p-1)$-forme a telle que $\omega = da$. On voit qu'une forme exacte est toujours fermée, comme conséquence de la propriété $d^2 = 0$. Mais une forme fermée n'est pas forcément exacte. Localement cela est toujours vrai mais globalement cela dépend de la topologie de la variété M. A ce sujet, on a les résultats suivants, dus à Poincaré :

Théorème. Dans un domaine étoilé de $\mathbb{R}^n$, toute forme fermée est exacte. Rappelons qu'un domaine D est dit *étoilé* par rapport à l'un de ses points x si tous les segments partant de x et terminant dans D sont contenus dans D. Un domaine est dit étoilé s'il est étoilé par rapport à tous ses points.

Théorème. Dans un voisinage U d'un point p sur une variété M, toute forme fermée sur U est exacte si U est contractible.

On remarque que le symbol ∂ indiquant la restriction au bord d'une variété possède des propriétés très semblables à la dérivée extérieure d. En effet, le bord d'une variété n'a lui-même pas de bord, par construction, et donc $\partial^2 = \emptyset$. Une variété sans bord satisfait $\partial M = \emptyset$, et est donc l'analogue d'une forme fermée. Une variété qui est le bord d'une autre variété, $M = \partial N$, est au contraire l'analogue d'une forme exacte. On a alors que toute variété qui est un bord est sans bord. Mais il n'est pas vrai que toute variété qui est sans bord est un bord.

Il existe deux théories semblables pour caractériser les classes d'équivalences des formes qui sont fermées mais pas exactes, sur une variété, et des variétés qui sont sans bord mais pas des bords, dans l'ensemble des variétés. Il s'agit de la co-homologie des variétés, où la dérivée extérieure joue le rôle fondamental, et l'homologie des variétés, où la notion de bord joue le rôle fondamental.

8.5 Dual de Hodge

Soit M une variété orientable de dimension n munie d'une métrique g. On définit alors l'opération de *dual de Hodge* $* : \Omega^p(M) \to \Omega^{n-p}(M)$ comme l'application produisant à partire d'une p-forme ω une $(n-p)$-forme $*\omega$ donnée par

$$*\omega = \frac{\sqrt{|g|}}{p!(n-p)!}\omega^{i_1\cdots i_p}\epsilon_{i_1\cdots i_p i_{p+1}\cdots i_n}\, dx^{i_{p+1}} \wedge \cdots \wedge dx^{i_n} \tag{8.20}$$

Dans ces expressions, les $\omega^{i_1\cdots i_p}$ dénotent les composantes du tenseur complètement antisymétrique de type $(p,0)$ obtenu en haussant tous les indices des composantes de la p forme ω à l'aide de la métrique inverse,

$$\omega^{i_1\cdots i_p} = g^{i_1 j_1}\cdots g^{i_p j_p}\omega_{j_1\cdots j_p} \tag{8.21}$$

et g dénote le déterminant de la matrice g_{ij} des composantes de la métrique,

$$g = \det g_{ij} \tag{8.22}$$

On voit que les composantes de $*\omega$ sont données par l'expression suivante :

$$(*\omega)_{i_{p+1}\cdots i_n} = \frac{\sqrt{|g|}}{p!}\omega^{i_1\cdots i_p}\epsilon_{i_1\cdots i_p i_{p+1}\cdots i_n} \tag{8.23}$$

On vérifie facilement que si ω est une p-forme alors $*\,\omega$ est effectivement un $(n-p)$-forme. Considérons pour cela un changement de coordonnées $x^i \to \hat{x}^i$, sous lequel

$$d\hat{x}^i = \frac{\partial \hat{x}^i}{\partial x^j} dx^j \tag{8.24}$$

On a alors

$$\hat{g}_{ij} = \frac{\partial x^m}{\partial \hat{x}^i} \frac{\partial x^n}{\partial \hat{x}^j} g_{mn} \tag{8.25}$$

$$\hat{g}^{ij} = \frac{\partial \hat{x}^i}{\partial x^m} \frac{\partial \hat{x}^j}{\partial x^n} g^{mn} \tag{8.26}$$

$$\hat{\omega}_{i_1 \cdots i_p} = \frac{\partial x^{j_1}}{\partial \hat{x}^{i_1}} \cdots \frac{\partial x^{j_p}}{\partial \hat{x}^{i_p}} \omega_{j_1 \cdots j_p} \tag{8.27}$$

$$\hat{\omega}^{i_1 \cdots i_p} = \frac{\partial \hat{x}^{i_1}}{\partial x^{j_1}} \cdots \frac{\partial \hat{x}^{i_p}}{\partial x^{j_p}} \omega^{j_1 \cdots j_p} \tag{8.28}$$

On trouve également que

$$\hat{g} = \left(\det \frac{\partial x^i}{\partial \hat{x}^j} \right)^2 g \tag{8.29}$$

En utilisant ces règles de transformations, on calcule finalement :

$$\begin{aligned}
(*\,\hat{\omega})_{i_{p+1} \cdots i_n} &= \frac{\sqrt{|\hat{g}|}}{p!} \hat{\omega}^{j_1 \cdots j_p} \epsilon_{j_1 \cdots j_p i_{p+1} \cdots i_n} \\
&= \frac{\sqrt{|g|}}{p!} \omega^{k_1 \cdots k_p} \epsilon_{j_1 \cdots j_p i_{p+1} \cdots i_n} \left| \det \frac{\partial x^i}{\partial \hat{x}^j} \right| \frac{\partial \hat{x}^{j_1}}{\partial x^{k_1}} \cdots \frac{\partial \hat{x}^{j_p}}{\partial x^{k_p}} \\
&= \frac{\sqrt{|g|}}{p!} \omega^{k_1 \cdots k_p} \epsilon_{j_1 \cdots j_n} \left| \det \frac{\partial x^i}{\partial \hat{x}^j} \right| \frac{\partial \hat{x}^{j_1}}{\partial x^{k_1}} \cdots \frac{\partial \hat{x}^{j_n}}{\partial x^{k_n}} \frac{\partial x^{k_{p+1}}}{\partial \hat{x}^{i_{p+1}}} \cdots \frac{\partial x^{k_n}}{\partial \hat{x}^{i_n}}
\end{aligned} \tag{8.30}$$

Mais

$$\epsilon_{j_1 \cdots j_n} \frac{\partial \hat{x}^{j_1}}{\partial x^{k_1}} \cdots \frac{\partial \hat{x}^{j_n}}{\partial x^{k_n}} = \epsilon_{k_1 \cdots k_n} \det \frac{\partial \hat{x}^i}{\partial x^j} \tag{8.31}$$

Donc

$$\begin{aligned}
(*\,\hat{\omega})_{i_{p+1} \cdots i_n} &= \operatorname{sign} \left(\det \frac{\partial x^i}{\partial \hat{x}^j} \right) \frac{\partial x^{k_{p+1}}}{\partial \hat{x}^{i_{p+1}}} \cdots \frac{\partial x^{k_n}}{\partial \hat{x}^{i_n}} \frac{\sqrt{|g|}}{p!} \omega^{k_1 \cdots k_p} \epsilon_{k_1 \cdots k_p k_{p+1} \cdots k_n} \\
&= \operatorname{sign} \left(\det \frac{\partial x^i}{\partial \hat{x}^j} \right) \frac{\partial x^{k_{p+1}}}{\partial \hat{x}^{i_{p+1}}} \cdots \frac{\partial x^{k_n}}{\partial \hat{x}^{i_n}} (*\,\omega)_{k_{p+1} \cdots k_n}
\end{aligned} \tag{8.32}$$

On voit finalement que ceci est bien la loi de transformation d'un tenseur de type $(0, n-p)$, étant donné que si la variété M est orientable on peut se limiter à des cartes ayant toutes la même orientation, de telle façon que :

$$\operatorname{sign} \left(\det \frac{\partial x^i}{\partial \hat{x}^j} \right) = 1 \tag{8.33}$$

Remarque. L'opération de dual de Hodge représente un isomorphisme entre $\Omega_q^p(M)$ et $\Omega_q^{n-p}(M)$ en chaque point $q \in M$. La notation $*$ vient du fait qu'il permet également de relier $\omega \in \Omega^p(M)$ à la forme duale $\omega^* \in \Omega^{p*}(M)$ en chaque point $q \in M$. Plus précisément, si $\omega, \omega' \in \Omega^p(M)$, alors

$$\omega' \wedge * \omega = (\omega', \omega)\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n \tag{8.34}$$

où (ω', ω) est le produit scalaire de deux formes défini comme

$$(\omega', \omega) = \frac{\sqrt{|g|}}{p!} \omega'_{i_1 \cdots i_p} \omega^{i_1 \cdots i_p} \tag{8.35}$$

Pour autant qu'elles soient valables pour tout ω', les deux relations précédentes définissent $* \omega$.

Propriétés. L'opération de dual de Hodge satisfait les propriétés suivantes sur $\omega \in \Omega^p(M)$, s étant la signature de la métrique :

1. $*^2 = (-1)^{s+1}(-1)^{p(n-p)}$

8.6 Intégration de formes et théorème de Stokes

Soit M une variété orientable compacte de dimension n et $\omega \in \Omega^n(M)$ une n-forme. Il existe une façon naturelle de définir l'intégrale de ω sur M. En effet, dans le voisinage V d'un point $q \in M$, on peut définir cette intégrale comme l'intégrale ordinaire suivante sur les coordonnées x^i dans V :

$$\int_V \omega = \int_V \omega_{1\cdots n}(x)\, dx^1 \cdots dx^n \tag{8.36}$$

Pour définir l'intégrale sur toute la variété M, on partitionne $M = \cup_\alpha V_\alpha$ de sorte que tout $q \in M$ appartienne à un nombre fini de V_α. On montre alors qu'il est toujours possible de trouver une famille de fonctions différentiables ϵ_α sur M qui réalisent en chaque point une *partition de l'unité*, de sorte que

$$\begin{cases} \epsilon_\alpha(q) \in [0,1] \text{ si } q \in V_\alpha \\ \epsilon_\alpha(q) = 0 \text{ si } q \notin V_\alpha \end{cases} \quad , \quad \sum_\alpha \epsilon_\alpha(q) = 1 \ \forall q \in M \tag{8.37}$$

On peut alors récrire ω sur M comme

$$\omega(q) = \sum_\alpha \epsilon_\alpha(q) \omega(q) \tag{8.38}$$

et définir son intégrale comme

$$\begin{aligned} \int_M \omega &= \sum_\alpha \int_{V_\alpha} \epsilon_\alpha \omega \\ &= \sum_\alpha \int_{V_\alpha} \epsilon_\alpha(x_\alpha)\, \omega_{1\cdots n}(x_\alpha)\, dx^1_\alpha \cdots dx^n_\alpha \end{aligned} \tag{8.39}$$

On montre que le résultat ne dépend pas du choix de la partition utilisée.

On peut définir de façon semblable l'intégrale d'une p-forme ω sur une sous-variété $M' \subseteq M$ telle que $\dim M' = p \leq n$. Localement, c'est-à-dire dans un ouvert V', la sous-variété M' peut être représentée par des coordonnées $u = (u^1, \cdots, u^p)$. En d'autres termes, pour la restriction de M à M' on a $x^i = x^i(u^a)$, avec $i = 1, \cdots, n$ et $a = 1, \cdots, p$. L'intégrale de ω sur V' est alors définie comme

$$\int_{V'} \omega = \int_{V'} \omega_{i_1 \cdots i_p}(u) \, \frac{\partial x^{i_1}}{\partial u^1} \cdots \frac{\partial x^{i_p}}{\partial u^p} \, du^1 \cdots du^p \tag{8.40}$$

Globalement, l'intégrale sur tout M' peut être définie comme avant en considérant une partition de l'unité sur M'.

Un résultat important concernant les intégrales de formes est le théorème de Stokes généralisé, qui représente une autre relation fondamentale entre l'opération de dérivée extérieure d et la notion de bord ∂, et affirme que si une forme est exacte son intégrale est localisée sur le bord de la variété :

Théorème. Soit M une variété orientable compacte de dimension $(p+1)$ et ω une p-forme sur M. On a alors :

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega \tag{8.41}$$

Pour l'évaluation de cette équation, le bord ∂M doit être orienté de manière compatible avec M. Ceci veut dire qu'il faut choisir des coordonnées sur ∂M qui ont la même orientation que celles de M restreintes à ∂M.

8.7 Forme de volume et intégration de fonctions

Soit M une variété compacte orientable de dimension n munie d'une métrique g. On appelle *forme volume* ou *élément de volume* de M la n-forme définie par le dual de Hodge de la 0-forme unité :

$$\Omega = *1 \tag{8.42}$$

Dans une carte avec coordonnées x^i, on a alors

$$\begin{aligned} \Omega &= \frac{1}{n!} \sqrt{|g|} \, \epsilon_{i_1 \cdots i_n} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_n} \\ &= \sqrt{|g|} \, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n \end{aligned} \tag{8.43}$$

La forme de volume est invariante sous changement de coordonnées préservant l'orientation de la variété M. En effet, en changeant $x^i \to \hat{x}^i$, avec $\det(\partial \hat{x}^i / \partial x^j) > 0$, on a $d\hat{x}^1 \wedge \cdots \wedge d\hat{x}^n = \det(\partial \hat{x}^i / \partial x^j) \, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$ et $\sqrt{|\hat{g}|} = \det(\partial x^i / \partial \hat{x}^j) \sqrt{|g|}$, et Ω reste donc inchangée.

La forme volume définit une mesure d'intégration universelle sur la varété M, induite par la métrique. Elle permet de définir le volume de M comme l'intégrale de Ω :

$$\mathrm{Vol}(M) = \int_M \Omega \tag{8.44}$$

Plus en général, elle permet de définir l'intégrale d'une fonction f sur la variété M comme l'intégrale de la n-forme $\omega = f\Omega$ sur M.

Remarque. Quand M est un domaine de $\mathbb{R}^n$ avec la métrique Euclidienne, cette définition se réduit correctement à l'intégrale n-dimensionnelle usuelle. En effet, en coordonnées catésiennes x^i la métrique est $g_{ij} = \delta_{ij}$ et on a $\Omega = dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$, alors que dans toutes autres coordonnées $\hat{x}^i$ la métrique devient $g_{ij} = (J^T J)_{ij}(\hat{x})$ et on trouve $\Omega = |\det J^i{}_j(\hat{x})|\, d\hat{x}^1 \wedge \cdots \wedge d\hat{x}^n$, en terme de la matrice Jacobienne $J^i{}_j = \partial x^i / \partial \hat{x}^j$.

8.8 Calcul vectoriel dans $\mathbb{R}^n$

Une application immédiate des formes différentielles est le calcul vectoriel usuel dans l'espace $\mathbb{R}^n$ avec une métrique constante. Pour l'espace Euclidien $\mathbb{R}^3$ avec $g_{ij} = \delta_{ij}$, on retrouve de façon remarquablement simple tous les résultats standards. Pour l'espace de Minkowski $\mathbb{R}^4$ avec $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$, on trouve des résultats semblables utiles en relativité.

8.8.1 Espace Euclidien

Dans le cas de l'espace Euclidien $\mathbb{R}^3$ avec la métrique banale $g_{ij} = \delta_{ij}$, on a des vecteurs covariants comme par exemple $\partial_i = (\partial_1, \partial_2, \partial_3)$ et des vecteurs contravariants comme par exemple $x^i = (x^1, x^2, x^3)$. Mais étant donné que la métrique est banale, la position des indices n'a pas d'importance. On peut construire des 0-formes décrivant une fonction scalaire, des 1-formes décrivant les 3 composantes indépendantes d'un vecteur, des 2-formes décrivant les 3 composantes indépendantes d'un tenseur antisymétrique de rang 2, et des 3-formes décrivant l'unique composante indépendante d'un tenseur antisymétrique de rang 3 :

$$\omega_0 = f \tag{8.45}$$

$$\omega_1 = v_i\, dx^i \tag{8.46}$$

$$\omega_2 = \frac{1}{2} t_{ij}\, dx^i \wedge dx^j \tag{8.47}$$

$$\omega_3 = \frac{1}{3!} s_{ijk}\, dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k \tag{8.48}$$

En prenant le dual de Hodge de ces objets, on obtient :

$$*\,w_0 = \frac{1}{3!} f \epsilon_{ijk}\, dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k \tag{8.49}$$

$$*\,w_1 = \frac{1}{2} v^i \epsilon_{ijk}\, dx^j \wedge dx^k \tag{8.50}$$

$$*\,w_2 = \frac{1}{2} t^{ij} \epsilon_{ijk}\, dx^k \tag{8.51}$$

$$*\,w_3 = \frac{1}{3!} s^{ijk} \epsilon_{ijk} \tag{8.52}$$

On voit qu'il y a une correspondance entre 0-formes et 3-formes, et entre 1-formes et 2-formes :

$$f \Leftrightarrow \frac{1}{3!} \epsilon_{ijk} s^{ijk}\,, \quad s_{ijk} \Leftrightarrow \epsilon_{ijk} f \tag{8.53}$$

$$v_i \Leftrightarrow \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} t^{jk}\,, \quad t_{ij} \Leftrightarrow \epsilon_{ijk} v^k \tag{8.54}$$

On peut alors se limiter à considérer des 0-formes décrivant des scalaires f et des 1-formes décrivant des vecteurs $\vec{v}$.

On vérifie que la combinaison de deux symbols de Levi-Civita peut être décomposée de la façon suivante :

$$\epsilon_{i_1 i_2 i_3} \epsilon^{j_1 j_2 j_3} = 6\, \delta_{i_1}^{[j_1} \delta_{i_2}^{j_2} \delta_{i_3}^{j_3]} \tag{8.55}$$

$$\epsilon_{i_1 i_2 a} \epsilon^{j_1 j_2 a} = 2\, \delta_{i_1}^{[j_1} \delta_{i_2}^{j_2]} \tag{8.56}$$

$$\epsilon_{iab} \epsilon^{jab} = 2\, \delta_i^j \tag{8.57}$$

$$\epsilon_{abc} \epsilon^{abc} = 6 \tag{8.58}$$

En agissant avec la dérivée extérieure d et le dual de Hodge $*$ sur ω_0 et ω_1, on obtient facilement les résultats suivants :

- *Gradient* d'une fonction : l'opérateur d sur une 0-forme avec composante f produit une 1-forme avec pour composantes celles de $\vec{\nabla} f$:

  $$(d\omega_0)_i = (\vec{\nabla} f)_i \tag{8.59}$$

  En effet :

  $$d\omega_0 = \partial_i f\, dx^i$$

- *Rotationnel* d'un vecteur : l'opérateur $*\,d$ sur une 1-forme avec composantes $\vec{v}$ produit une 1-forme avec pour composantes celles de $\vec{\nabla} \times \vec{v}$:

  $$(*\,d\omega_1)_i = (\vec{\nabla} \times \vec{v})_i \tag{8.60}$$

  En effet :

  $$d\omega_1 = \partial_i v_j\, dx^i \wedge dx^j$$
  $$*\,d\omega_1 = \epsilon_{ijk} \partial^j v^k\, dx^i$$

- *Divergence* d'un vecteur : l'opérateur $*\,d\,*$ sur une 1-forme avec composantes $\vec{v}$ produit une 0-forme avec pour composante $\vec{\nabla}\cdot\vec{v}$:

$$(*\,d\,*\,\omega_1) = (\vec{\nabla}\cdot\vec{v}) \tag{8.61}$$

En effet :

$$\begin{aligned} *\omega_1 &= \frac{1}{2}v^i\epsilon_{ijk}\,dx^j\wedge dx^k \\ d*\omega_1 &= \frac{1}{2}\partial_m v^i\epsilon_{ijk}\,dx^m\wedge dx^j\wedge dx^k \\ *\,d*\omega_1 &= \frac{1}{2}\partial^m v_i\epsilon^{ijk}\epsilon_{mjk} = \partial_i v^i \end{aligned}$$

Pour une 1-forme exacte $\omega_1' = d\omega_0$ avec composantes $(\omega_1')_i = (\vec{\nabla}f)_i$, et une 1-forme duale à une 2-forme exacte $\omega_1'' = *\,d\omega_1$ avec composantes $(\omega_1'')_i = (\vec{\nabla}\times\vec{v})_i$, les propriétés $d^2 = 0$ et $*^2 = \pm 1$ impliquent les relations $*\,d\omega_1' = 0$ et $*\,d*\,\omega_1'' = 0$, qui se traduisent dans les identités suivantes :

- $\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}f) = 0$
- $\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{v}) = 0$

De plus, dans $\mathbb{R}^3$ toute forme fermée est exacte. On a donc que si $*\,d\omega_1 = 0$ alors $\omega_1 = d\omega_0'$, et si $*\,d*\,\omega_1 = 0$ alors $\omega_1 = *\,d\omega_1'$, et par conséquent :

- $\vec{\nabla}\times\vec{v} = 0 \;\Leftrightarrow\; \vec{v} = \vec{\nabla}f'$
- $\vec{\nabla}\cdot\vec{v} = 0 \;\Leftrightarrow\; \vec{v} = \vec{\nabla}\times\vec{v}'$

En procédant de façon similaire, on peut démontrer très facilement toutes les identités vectorielles impliquant plusieurs vecteurs, rotationnels de vecteurs, divergences de vecteurs, fonctions et gradients de fonctions.

Le théorème de la primitive, le théorèmes de Stokes habituel et le théorème de Gauss peuvent être dérivés de façon simple et directe à partir du théorème de Stokes généralisé pour l'intégration de formes sur des sous-variétés de $\mathbb{R}^3$ qui peuvent être entièrement couverte par une seule carte :

- *Théorème de la primitive* : soit L une courbe de dimension 1 dans $\mathbb{R}^3$, avec un bord $\partial L = \{P_A, P_B\}$ de dimension 0, et ω_0 une 0-forme sur $\mathbb{R}^3$ de composante $\omega_0 = f$. Alors le résultat $\int_L d\omega_0 = \int_{\partial L}\omega_0$ devient

$$\int_L (\vec{\nabla}f)\cdot d\vec{s} = f\Big|_{P_A}^{P_B} \tag{8.62}$$

- *Théorème de Stokes* : soit S une surface de dimension 2 dans $\mathbb{R}^3$, avec un bord ∂S de dimension 1, et ω_1 une 1-forme sur $\mathbb{R}^3$ de composantes $(\omega_1)_i = v_i$. Alors le résultat $\int_S d\omega_1 = \int_{\partial S}\omega_1$ devient

$$\int_S (\vec{\nabla}\times\vec{v})\cdot d^2\vec{\sigma} = \int_{\partial S}\vec{v}\cdot d\vec{s} \tag{8.63}$$

- *Théorème de Gauss* : soit V un domaine de dimension 3 dans $\mathbb{R}^3$, avec un bord ∂V de dimension 2, et ω_1 une 1-forme sur $\mathbb{R}^3$ de composantes $(\omega_1)_i = v_i$. Alors le résultat $\int_V d * \omega_1 = \int_{\partial V} * \omega_1$ devient :

$$\int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{v})\, d^3\rho = \int_{\partial V} \vec{v} \cdot d^2\vec{\sigma} \tag{8.64}$$

8.8.2 Espace de Minkowski

Dans le cas de l'espace de Minkowski $\mathbb{R}^4$ avec la métrique de minkowski $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$, on a des quadrivecteurs covariants comme par exemple $\partial_\mu = (\partial_0, \partial_1, \partial_2, \partial_3)$ et des quadrivecteurs contravariants comme par exemple $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3)$. Etant donné que la métrique a des signes non-banaux, la position des indices est importante, et on trouve par exemple $\partial^\mu = (\partial_0, -\partial_1, -\partial_2, -\partial_3)$ et $x_\mu = (x^0, -x^1, -x^2, -x^3)$. On peut construire des 0-formes décrivant une fonction scalaire, des 1-formes décrivant les 4 composantes indépendantes d'un quadri-vecteur, des 2-formes décrivant les 6 composantes indépendantes d'un tenseur antisymétrique de rang 2, des 3-formes décrivant les 4 composantes indépendantes d'un tenseur antisymétrique de rang 3, et finalement des 4-formes décrivant l'unique composante indépendante d'un tenseur antisymétrique de rang 4 :

$$\omega_0 = f \tag{8.65}$$

$$\omega_1 = v_\mu\, dx^\mu \tag{8.66}$$

$$\omega_2 = \frac{1}{2} t_{\mu\nu}\, dx^\mu \wedge dx^\nu \tag{8.67}$$

$$\omega_3 = \frac{1}{3!} s_{\mu\nu\rho}\, dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\rho \tag{8.68}$$

$$\omega_4 = \frac{1}{4!} u_{\mu\nu\rho\sigma}\, dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\rho \wedge dx^\sigma \tag{8.69}$$

En prenant le dual de Hodge de ces objets, on obtient :

$$* w_0 = \frac{1}{4!} f \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\, dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\rho \wedge dx^\sigma \tag{8.70}$$

$$* w_1 = \frac{1}{3!} v^\mu \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\, dx^\nu \wedge dx^\rho \wedge dx^\sigma \tag{8.71}$$

$$* w_2 = \frac{1}{4} t^{\mu\nu} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\, dx^\rho \wedge dx^\sigma \tag{8.72}$$

$$* w_3 = \frac{1}{3!} s^{\mu\nu\rho} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\, dx^\sigma \tag{8.73}$$

$$* w_4 = \frac{1}{4!} u^{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \tag{8.74}$$

On voit qu'il y a une correspondance entre 0-formes et 4-formes, et entre 1-formes et 3-formes, alors que les 2-formes sont particulières :

$$f \Leftrightarrow \frac{1}{4!}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}u^{\mu\nu\rho\sigma}\,, \quad u_{\mu\nu\rho\sigma} \Leftrightarrow \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}f \tag{8.75}$$

$$v_\mu \Leftrightarrow \frac{1}{3!}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}s^{\nu\rho\sigma}\,, \quad s_{\mu\nu\rho} \Leftrightarrow \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}v^\sigma \tag{8.76}$$

$$t_{\mu\nu} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}t^{\rho\sigma} \tag{8.77}$$

On peut alors se limiter à considérer des 0-formes décrivant des scalaires f, des 1-formes décrivant des vecteurs v et des 2-formes décrivant des tenseurs antisymétriques t.

On vérifie que la combinaison de deux symbols de Levi-Civita peut être décomposée de la façon suivante :

$$\epsilon_{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}\epsilon^{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4} = -24\,\delta^{[\nu_1}_{\mu_1}\delta^{\nu_2}_{\mu_2}\delta^{\nu_3}_{\mu_3}\delta^{\nu_4]}_{\mu_4} \tag{8.78}$$

$$\epsilon_{\mu_1\mu_2\mu_3\alpha}\epsilon^{\nu_1\nu_2\nu_3\alpha} = -6\,\delta^{[\nu_1}_{\mu_1}\delta^{\nu_2}_{\mu_2}\delta^{\nu_3]}_{\mu_3} \tag{8.79}$$

$$\epsilon_{\mu_1\mu_2\alpha\beta}\epsilon^{\nu_1\nu_2\alpha\beta} = -4\,\delta^{[\nu_1}_{\mu_1}\delta^{\nu_2]}_{\mu_2} \tag{8.80}$$

$$\epsilon_{\mu\alpha\beta\gamma}\epsilon^{\nu\alpha\beta\gamma} = -6\,\delta^{\nu}_{\mu} \tag{8.81}$$

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = -24 \tag{8.82}$$

Comme avant, en agissant avec d et $*$ on obtient facilement des représentations des généralisations du gradient, du rotationnel et de la divergence, et les identités et théorèmes d'intégration correspondants.

8.9 Reformulation de l'éléctromagnétisme

L'éléctromagnétisme peut être reformulé de façon extrêmement compacte et efficace à l'aide de formes différentielles. Cette réécriture met en outre en évidence une série d'aspects topologiques de cette théorie.

Rappelons tout d'abord que l'éléctromagnétisme peut être reformulé de façon manifestment covariante sous transformations de Lorentz en regroupant le champ électrique $\vec{E}$ et le champ magnétique $\vec{B}$ dans un tenseur de champs antisymétrique de composantes $F^{\mu\nu}$, le potentiel éléctrostatique ϕ et le potential vecteur $\vec{A}$ dans un quadripotentiel de composantes A^μ, et la densité de charge ρ et la densité de courant $\vec{j}$ dans un quadricourant de composantes J^μ. Plus précisément, en unités de Gauss on pose :

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix}\,, \quad A^\mu = \begin{pmatrix} \phi \\ A^1 \\ A^2 \\ A^3 \end{pmatrix}\,, \quad J^\mu = \begin{pmatrix} c\rho \\ j^1 \\ j^2 \\ j^3 \end{pmatrix} \tag{8.83}$$

En rappelant que $\partial_\mu = (c^{-1}\partial_t, \vec{\nabla})$, les deux groupes d'équations de Maxwell et l'équation de continuité peuvent se récrire de la façon suivante :

$$\begin{cases} \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla}\times\vec{E} + \dfrac{1}{c}\,\partial_t\vec{B} = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow\ \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\partial^\nu F^{\rho\sigma} = 0 \tag{8.84}$$

$$\begin{cases} \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 4\pi\,\rho \\ \vec{\nabla}\times\vec{B} - \dfrac{1}{c}\,\partial_t\vec{E} = \dfrac{4\pi}{c}\vec{j} \end{cases} \quad \Rightarrow\ \partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c}J^\nu \tag{8.85}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{j} + \partial_t\rho = 0 \qquad \Rightarrow\ \partial_\mu J^\mu = 0 \tag{8.86}$$

La décomposition en potentiels et l'invariance de jauge, représentant la solution générale des équations de Maxwell homogènes, deviennent :

$$\begin{cases} \vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \dfrac{1}{c}\,\partial_t\vec{A} \\ \vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} \end{cases} \quad \Rightarrow\ F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \tag{8.87}$$

$$\begin{cases} \delta\phi = \dfrac{1}{c}\,\partial_t\lambda \\ \delta\vec{A} = -\vec{\nabla}\lambda \end{cases} \quad \Rightarrow\ \delta A^\mu = \partial^\mu\lambda \tag{8.88}$$

Finalement, les équations inhomogènes pour les potentiels deviennent :

$$\begin{cases} \Box\phi - \dfrac{1}{c}\,\partial_t\big(\vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \dfrac{1}{c}\,\partial_t\phi\big) = 4\pi\rho \\ \Box\vec{A} + \vec{\nabla}\big(\vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \dfrac{1}{c}\,\partial_t\phi\big) = \dfrac{4\pi}{c}\vec{j} \end{cases} \quad \Rightarrow\ \Box A^\mu - \partial^\mu\partial_\nu A^\nu = \frac{4\pi}{c}J^\mu \tag{8.89}$$

Pour récrire la théorie dans le langage des formes différentielles, on introduit une 2-forme F décrivant le tenseur antisymétrique de champ, des 1-formes A et J décrivant le quadripotentiel et le quadricourant, et une 0-forme Λ décrivant la fonction de jauge λ :

$$F = \frac{1}{2}F_{\mu\nu}\,dx^\mu\wedge dx^\nu \tag{8.90}$$

$$A = A_\mu\,dx^\mu\,,\quad J = J_\mu\,dx^\mu \tag{8.91}$$

$$\Lambda = \lambda \tag{8.92}$$

Les deux groupes d'équations de Maxwell et l'équation de continuité peuvent alors se récrire simplement comme :

$$dF = 0\,,\quad d*F = -\frac{4\pi}{c}*J\,,\quad d*J = 0 \tag{8.93}$$

La décomposition des champs en potentiels et l'invariance de jauge, caractérisant la solution générale des équations de Maxwell homogènes $dF = 0$, deviennent :

$$F = dA\,,\quad \delta A = d\Lambda \tag{8.94}$$

Cette nouvelle écriture représente une formulation de la théorie indépendante du système de coordonnées, et permet de l'appliquer à des variétés plus générales que l'espace de Minkowski. On voit que les équations de Maxwell homogènes $dF = 0$ sont purement topologiques, et ne font pas intervenir la métrique de la variété. Pour une variété topologiquement non-banale, toutefois, la solution générale n'est pas simplement $F = dA$, car ceci repose sur le fait qu'une forme fermée est également exacte, ce qui est faux en général. Les équations inhomogènes $d * F = -4\pi/c * J$ dépendent au contraire de la métrique sur la variété.

Chapitre 9

Variétés avec métrique et géométrie

Sur une variété munie d'une métrique, on peut définir la généralisation de la géometrie usuelle définie sur l'espace Euclidien. En effet, la métrique permet d'introduire une notion de distance sur la variété, mais celle-ci n'est pas nécessairement définie positive.

9.1 Variétés avec métrique

Une variété M munie d'une métrique est, comme déjà vu, une variété munie d'un tenseur de type $(0,2)$, symétrique et non dégénéré. En coordonnées locales, c'est une matrice g inversible ($\det g \neq 0$), d'éléments g_{ij} tels que $g_{ij} = g_{ji}$. A l'inverse de g correspond un tenseur $(2,0)$ symétrique, d'éléments g^{ij} avec $g^{ij}g_{jk} = \delta^i_k$.

Une variété munie d'une métrique g est dite *Riemannienne* si g est définie positive, c'est-à-dire si $g_{ij}v^iv^j \geq 0$, $\forall v^i$, et *pseudo-Riemmannienne* dans le cas contraire. La distance infinitésimale ds entre deux points de coordonnées x^i et $x^i + dx^i$ sur la variété est alors définie comme :

$$ds^2 = g_{ij}(x)dx^i dx^j \tag{9.1}$$

Elle induit un produit scalaire dans l'espace tangent, définit $\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in T_q(M)$ comme :

$$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = g_{ij}u^i v^j \tag{9.2}$$

On peut alors définir la norme d'un vecteur $\boldsymbol{v} \in T_q(M)$ comme :

$$\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{g_{ij}v^i v^j} \tag{9.3}$$

Toutes ces quantités sont invariantes sous transformations de coordonnées. La norme carrée est toujours positive dans le cas Riemannien. Il est alors

possible de définir l'angle entre deux vecteurs, au travers de la formule $\cos(\angle(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})) = (\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})/(\|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\|)$. Dans le cas pseudo-Riemannien, la norme carrée peut au contraire s'annuler et changer de signe. Les choses sont alors différentes, et on ne peut pas définir de notion d'angle de façon si simple.

En général, la métrique dépend du point considéré. Un cas particulier simple est celui de *métrique constante*, où il existe un atlas tel que $g_{ij}(x) = M_{ij}$ pour tout point. L'exemple le plus simple est $\mathbb{R}^2$ avec la métrique banale, $ds^2 = dx^2 + dy^2 = 4\,dz\,d\bar{z}$. Un autre cas particulier important est celui de *métrique conforme*, où $g_{ij}(x) = M_{ij}f(x)$. Il est alors facile de voir que l'angle entre deux vecteurs, quand il peut être défini, est indépendant de f. Deux exemples sont la sphère S^2 et l'espace hyperbolique H^2, munis de la métrique conforme $ds^2 = 4(1 \pm |z|^2)^{-2} dz d\bar{z}$, avec le signe $+$ pour la sphère, et le signe $-$ pour l'espace hyperbolique.

Les hypersurfaces et les groupes de Lie matriciels sont des exemples classiques de variétés Riemanniennes ou pseudo-Riemannienne non-banales. La relativité générale conduit à l'étude des variétés pseudo-riemanniennes de dimension 4 décrivant l'espace-temps. La métrique $g_{\mu\nu}(x)$ est alors de signature $(+1,-1,-1,-1)$, comme celle de Minkowski.

9.2 Hypersurfaces et métrique induite

Une hypersurface régulière de dimension n plongée dans $\mathbb{R}^{n+m}$ hérite d'une métrique induite par la métrique Euclidienne δ_{AB} dans $\mathbb{R}^{n+m}$. En effet, si $x \in \mathbb{R}^{n+m}$ est une courbe sur l'hypersurface, son élément de longueur infinitésimal calculé avec la longueur Euclidienne dans $\mathbb{R}^{n+m}$ est donné par

$$ds^2 = \delta_{AB}\, dy^A dy^B \tag{9.4}$$

Dans les coordonnées locales x^i décrivant l'hypersurface, l'espace tangent admet une base de coordonnées $\boldsymbol{e}_i = \partial/\partial x^i$, avec $i = 1, \cdots, n$. Cet espace vectoriel de dimension n est un sous-espace de $\mathbb{R}^{n+m}$, et les vecteurs $\boldsymbol{e}_i$ peuvent donc également être vus comme un ensemble particulier de vecteurs de $\mathbb{R}^{n+m}$, avec composantes données par $e_i^A = \partial y^A/\partial x^i$, où $A = 1, \cdots, (n+m)$. On peut alors récrire :

$$ds^2 = \delta_{AB} \frac{\partial y^A}{\partial x^i} \frac{\partial y^B}{\partial x^j} dx^i dx^j \tag{9.5}$$

On voit donc que

$$ds^2 = g_{ij}(x) dx^i dx^j \tag{9.6}$$

avec

$$g_{ij} = (\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = \delta_{AB} \frac{\partial y^A}{\partial x^i} \frac{\partial y^B}{\partial x^j} \tag{9.7}$$

Cette métrique est définie positive, étant donné que la métrique Euclidienne de $\mathbb{R}^{n+m}$ l'est, et les hypersurfaces sont donc des variétés Riemanniennes.

9.3 Courbes et géodésiques

La *longueur* S d'une courbe $\gamma(t) \in M$ joignant les deux points $A = \gamma(t_A)$ et $B = \gamma(t_B)$ sur une variété M munie d'une métrique g est obtenue en intégrant l'élément de longeur infinitésimal ds :

$$S = \int_{t_A}^{t_B} \frac{ds}{dt}\, dt \tag{9.8}$$

En coordonnée locales, où la courbe est décrite par $x^i = x^i(t)$, on a alors :

$$S = \int_{t_A}^{t_B} \sqrt{g_{ij}(x)\dot{x}^i\dot{x}^j}\, dt \equiv \int_{t_A}^{t_B} L[x^i, \dot{x}^i]\, dt \tag{9.9}$$

La *distance* $d(x, y)$ entre deux points $x, y \in M$ est définie comme la longueur minimale des courbes les reliant :

$$d(x, y) = \inf_{\gamma} S_\gamma(x, y) \tag{9.10}$$

Dans le cas Riemannien, cette quantité satisfait toutes le propriété d'une distance. Dans le cas pseudo-Riemmannien, au contraire, elle ne les satisfait pas, mais on l'appelle quand-même distance par analogie.

Une *géodésique* $\gamma(x, y)$ est une courbe particulière parmis celles reliant les deux points $x, y \in M$ qui rend la longueur S, vue comme fonctionnel de la courbe γ, stationnaire. Autrement dit, il faut chercher γ telle que

$$\frac{\delta S}{\delta \gamma} = 0 \tag{9.11}$$

En coordonnées locales, cette équation devient une équation variationnelle pour S vue comme fonctionnel des coordonnées $x^i = x^i(t)$ paramétrisant la courbe, et donne lieu à des équations d'Euler-Lagrange :

$$\frac{\delta S}{\delta x^k} = \frac{\partial L}{\partial x^k} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^k}\right) = 0 \tag{9.12}$$

On doit maintenant évaluer cette expression pour $L = \sqrt{g_{mn}(x)\dot{x}^m\dot{x}^n}$. Pour faciliter cette tâche, on observe que la définition de distance S est invariante sous reparamétrisation du paramètre t utilisé pour décrire la courbe. On peut alors choisir $dt = ds = \sqrt{g_{mn}(x)dx^m dx^n}$. Dans cette paramétrisation le paramètre t correspond directement à la distance propre et toute l'information sur la distance S est dans les valeurs de t_A et t_B. On a alors $ds/dt = 1$ et

donc $g_{ij}(x)\dot{x}^i\dot{x}^j = 1$. Ceci facilite grandement le calcul. En fait, on peut dans ce cas utiliser de façon équivalente le nouveau fonctionnel $\tilde{L} = L^2$, correspondant à une action $\tilde{S}$ qui n'est plus invariante sous reparamétrisation et valable seulement pour ce choix particulier du paramètre t :

$$\tilde{S} = \int_{t_A}^{t_B} g_{ij}(x)\dot{x}^i\dot{x}^j\, dt \equiv \int_{t_A}^{t_B} \tilde{L}[x^i, \dot{x}^i]\, dt \tag{9.13}$$

En partant de cette expression, on trouve alors l'équation d'Euler-Lagrange suivante :

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^i} g_{kj}(x)\dot{x}^k\dot{x}^j - \frac{d}{dt}\Big(g_{ij}(x)\dot{x}^j\Big) = 0 \tag{9.14}$$

En dévelopant la dérivée temporelle, et en notant $\partial/\partial x^i = \partial_i$, cette équation devient :

$$g_{ij}\ddot{x}^j + \partial_k g_{ij}\dot{x}^k\dot{x}^j - \frac{1}{2}\partial_i g_{kj}\dot{x}^k\dot{x}^j = 0 \tag{9.15}$$

En agissant avec la métrique inverse, on peut finalement récrire cette équation des géodésiques dans la forme

$$\ddot{x}^i + \Gamma^i_{mn}\dot{x}^m\dot{x}^n = 0 \tag{9.16}$$

en termes du *symbole de Christoffel* Γ^i_{mn}, défini comme

$$\Gamma^i_{mn} = \frac{1}{2}g^{ij}\left[\partial_m g_{jn} + \partial_n g_{jm} - \partial_j g_{mn}\right] \tag{9.17}$$

et possédant la propriété de symétrie suivante :

$$\Gamma^i_{mn} = \Gamma^i_{nm} \tag{9.18}$$

Les géodésiques sont la généralisations des trajectoires rectilignes, et correspondent aux trajectoires extrémisant la distance parcourue pour aller d'un point à un autre.

Etant donné que la distance est définie de façon intrinsèque, l'équation des géodésiques doit elle aussi être automatiquement invariante, dans le sens que si elle est satisfaite par $x^i(t)$ dans certaines coordonnées x^i elle est automatiquement satisfaite dans toutes autres coordonnées $\hat{x}^i$. Pour le vérifier, considérons un changement de coordonnées $x^i \to \hat{x}^i$. La vitesse $v^i = \dot{x}^i$ est un vecteur de type $(1,0)$, et se transforme de façon homogène :

$$v^i = \frac{\partial \hat{x}^i}{\partial x^j} v^j \tag{9.19}$$

L'accélération $\dot{v}^i = \ddot{x}^i$, au contraire, n'est pas un vecteur. En effet, ses composantes sont définies comme des dérivées par rapport a t de celles de v^i.

Ceci correspond à prendre la différence entre les composantes du vecteur v^i en deux point voisins, correspondants à des espaces vectoriels distincts. En calculant cette dérivée, on obtient alors une loi transformations qui contient un terme homogène identique à celui qui apparaiterait pour un vecteur de type $(1,0)$, plus un terme inhomogène dépendant des dérivées de la matrice de transformation de coordonnées :

$$\dot{\hat{v}}^i = \frac{\partial \hat{x}^i}{\partial x^j}\dot{v}^j + \frac{\partial^2 \hat{x}^i}{\partial x^k \partial x^j}\dot{x}^k v^j \tag{9.20}$$

De la même manière, alors que la métrique g_{ij} est un tenseur de type $(0,2)$, se transformant de façon homogène

$$\hat{g}_{mn} = \frac{\partial x^s}{\partial \hat{x}^m}\frac{\partial x^t}{\partial \hat{x}^n} g_{st} \tag{9.21}$$

le symbole de Christoffel Γ^i_{mn}, au contraire, n'est pas un tenseur, mais a une loi de transformation contenant une partie homogène, identique à celle d'un tenseur de type $(1,2)$, plus une partie inhomogène dépendant des dérivées de la matrice de transformation de coordonnées :

$$\hat{\Gamma}^i_{mn}(\hat{x}) = \frac{\partial \hat{x}^i}{\partial x^j}\frac{\partial x^s}{\partial \hat{x}^m}\frac{\partial x^t}{\partial \hat{x}^n}\Gamma^j_{st}(x) + \frac{\partial \hat{x}^i}{\partial x^j}\frac{\partial^2 x^j}{\partial \hat{x}^m \partial \hat{x}^n} \tag{9.22}$$

En utilisant ces résultats, on vérifie facilement que l'équation des géodésiques se transforme de façon homogène et est donc invariante. Pour cela, on remarque que $(\partial \hat{x}^i/\partial x^j)(\partial x^j/\partial \hat{x}^n) = \delta^i_n$, d'où il suit, en agissant avec la dérivée $\partial/\partial \hat{x}^m = (\partial x^k/\partial \hat{x}^m)\partial/\partial x^k$, que :

$$\frac{\partial \hat{x}^i}{\partial x^j}\frac{\partial^2 x^j}{\partial \hat{x}^m \partial \hat{x}^n} = -\frac{\partial x^k}{\partial \hat{x}^m}\frac{\partial x^j}{\partial \hat{x}^n}\frac{\partial^2 \hat{x}^i}{\partial x^k \partial x^j} \tag{9.23}$$

On voit alors que les deux termes inhomogènes provenant des lois de transformations de l'accélération et du symbole de Christoffel se compensent exactement.

Plus en général, il est possibile de définir une *dérivée curviligne covariante* D_τ le long d'une courbe γ quelconque, qui appliquée à un vecteur de composantes v^i défini sur la courbe produit un nouveau vecteur de composantes $D_\tau v^i$ données par

$$D_\tau v^i = \dot{v}^i + \Gamma^i_{mn}\dot{x}^m v^n \tag{9.24}$$

En utilisant l'identité (9.23) on vérifie que sous une transformation de coordonnées $x^i \to \hat{x}^i$ les termes inhomogènes se compensent et on obtient bien

la loi de transformation d'un vecteur :

$$\begin{aligned}
\hat{D}_\tau \hat{v}^i &= \Big(\frac{\partial \hat{x}^i}{\partial x^j}\dot{v}^j + \frac{\partial^2 \hat{x}^i}{\partial x^k \partial x^j}\dot{x}^k v^j\Big) \\
&\quad + \Big(\frac{\partial \hat{x}^i}{\partial x^j}\frac{\partial x^s}{\partial \hat{x}^m}\frac{\partial x^t}{\partial \hat{x}^n}\Gamma^j_{st}(x) - \frac{\partial x^k}{\partial \hat{x}^m}\frac{\partial x^j}{\partial \hat{x}^n}\frac{\partial^2 \hat{x}^i}{\partial x^k \partial x^j}\Big)\frac{\partial \hat{x}^m}{\partial x^a}\dot{x}^a\frac{\partial \hat{x}^n}{\partial x^b}v^a \\
&= \frac{\partial \hat{x}^i}{\partial x^j}\dot{v}^j + \frac{\partial^2 \hat{x}^i}{\partial x^m \partial x^n}\dot{x}^m v^n + \frac{\partial \hat{x}^i}{\partial x^j}\Gamma^j_{st}(x)\dot{x}^s v^t - \frac{\partial^2 \hat{x}^i}{\partial x^k \partial x^j}\dot{x}^k v^j \\
&= \frac{\partial \hat{x}^i}{\partial x^j} D_\tau v^j
\end{aligned} \tag{9.25}$$

Avec cette notation, l'équation des géodésiques s'écrit simplement $D_\tau \dot{x}^i = 0$. Ceci signifie que les géodésique correspondent aux courbes le long desquelles la dérivée curviligne covariante du vecteur vitesse $\dot{x}^i$ est nulle.

9.4 Différents types de géométries

Sur une variété munie d'une métrique non-banale définissant la notion de distance, les postulats usuels de la géométrie Euclidienne ne sont en général plus valables. On dit alors que la variété est *courbe*. Pour explorer qualitativement la présence de courbure, on peut utiliser les notions de géodésiques comme généralisation des droites et explorer leurs propriétés.

Lorsqu'on peut définir la notion d'angle entre deux géodésiques en un point, ce qui est possible dans le cas Riemannien mais pas dans le cas pseudo-Riemannien, on peut définir qualitativement la notion de courbure en considérant un triangle défini par trois points et les géodésiques les reliant. La somme θ_{tot} des trois angles d'un tel triangle est alors égale à π pour un espace plat avec une métrique banale, mais peut dévier de cette valeur si la métrique est non-banale. On dit que la variété a *courbure nulle* si $\theta_{\text{tot}} = \pi$, et qu'elle a *courbure positive* ou *courbure négative* si $\theta_{\text{tot}} \geq \pi$ ou $\theta_{\text{tot}} \leq \pi$.

On peut également distinguer ces trois types de situations sans invoquer la notion d'angle, en examinant la possibilité d'avoir des géodésiques parallèles. Plus précisément, on peut considérer une certaine géodésique γ et un point x quelconque externe à γ, et se demander s'il existe des géodésiques γ' parallèles à γ passant par x. Si la courbure est nulle, il existe une seule et unique γ', alors que si la courbure est positive il n'en n'existe aucune et si elle est négative il en existe un infinité. Autrement dit, les géodésiques tendent à converger si la courbure est positive et à diverger si la courbure est négative.

Avant de donner une définition précise et quantitative de la courbure d'une variété, examinons le cas des variétés les plus simples et les plus symétriques, en deux dimensions, où la courbure est la même en tout point.

9.4.1 Plan d'Euclide $\mathbb{R}^2$

Le plan d'Euclide est la variété $\mathbb{R}^2$ munie d'une métrique banale. En coordonnées cartésiennes (x, y), on a

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 \tag{9.26}$$

En utilisant $(z, \bar{z})$ définies par $z = (x + iy)/2$ et $\bar{z} = (x - iy)/2$, on peut également récrire cette métrique comme :

$$ds^2 = 4\, dz\, d\bar{z} \tag{9.27}$$

Dans ce cas, les géodésiques sont des segments de lignes droites. Etant donnée une géodésique, il existe une seule autre géodésique passant par un point x externe à γ qui ne coupe pas γ. Ceci correspond à une courbure nulle.

9.4.2 Sphère S^2

Le sphère est la surface $S^2 = \{y \in \mathbb{R}^3 \mid \|y\| = 1\}$. Elle hérite d'une métrique induite par la métrique banale de l'espace ambiant $\mathbb{R}^3$ où elle est définie. Pour la calculer, on peut utiliser des coordonnées polaires (θ, ϕ), définies par $y = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)$. La métrique banale de l'espace ambiant $ds^2 = (dy^1)^2 + (dy^2)^2 + (dy^3)^2$ donne alors la métrique suivante pour la sphère :

$$ds^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2 \tag{9.28}$$

En coordonnées stéréographiques à partir du pôle nord (x^1, x^2), ou plutôt leur version complexe $(z, \bar{z})$ avec $z = x^1 + ix^2$ et $\bar{z} = x^1 - ix^2$, définies par $y = (2\,\mathrm{Re}z/(1 + |z|^2), 2\,\mathrm{Im}z/(1 + |z|^2), (-1 + |z|^2)/(1 + |z|^2))$, on trouve :

$$ds^2 = \frac{4}{(1 + |z|^2)^2}\, dz\, d\bar{z} \tag{9.29}$$

Dans ce cas, les géodésiques sont des arcs de cercles équatoriaux maximaux. On remarque qu'il y a un chemin court minimisant la distance, et un chemin long maximisant la distance entre deux points. De plus, étant donnée une géodésique γ, il n'existe aucune autre géodésique passant par un point x externe à γ qui ne coupe pas γ (voir fig. 9.1 et fig. 9.2). Ceci correspond à une courbure positive.

9.4.3 Espace de Poincaré H^2

L'espace de Poincaré H^2, aussi appelé espace hyperbolique, est défini comme le semiplan $\mathbb{R}^2_> = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\}$ avec une métrique non-banale donnée par

$$ds^2 = y^{-2}(dx^2 + dy^2) \tag{9.30}$$

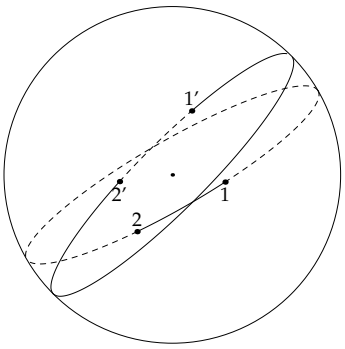

FIGURE 9.1 – Géodésiques de S^2. Celle pour les deux points 1 et 2 correspond à la distance minimale, alors que celle pour les points $1'$ et $2'$ correspond à la distance maximale.

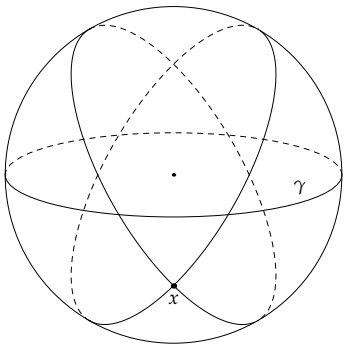

FIGURE 9.2 – Géodésiques de S^2. Toutes les géodésiques passant par un point x extérieur à une géodésique γ coupent γ.

Il est utile d'introduire des coordonnées complexes $(z, \bar{z})$, définies comme $z = (x + iy - i)/(x + iy + i)$ et $\bar{z} = (x - iy + i)/(x - iy - i)$. On vérifie facilement que ces nouvelles coordonnées sont limitées à des valeurs satisfaisant $|z| \leq 1$, et la métrique devient :

$$ds^2 = \frac{4}{(1 - |z|^2)^2}\, dz\, d\bar{z} \tag{9.31}$$

Dans ce cas, les géodésiques sont des demi-cercles dont le centre est sur l'axe définissant le bord. Etant donnée une géodésique γ, il existe alors une infinité d'autres géodésiques passant par un point x externe à γ qui ne coupent pas γ (voir fig. 9.3 et fig. 9.4). Ceci correspond à une courbure négative.

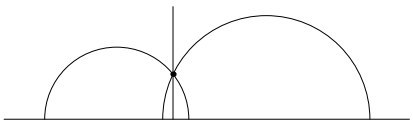

FIGURE 9.3 – Géodésiques de H^2. Les géodésiques sont soit les demi-cercles dont le centre est sur le bord.

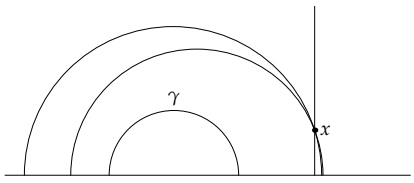

FIGURE 9.4 – Géodésiques de H^2. Par un point donné x externe à la géodésique γ passent une infinité de géodésiques qui ne coupent pas γ.

9.5 Courbure

Il est clair qu'une variété Riemannienne ou pseudo-Riemannienne est courbe si la métrique g_{ij} est non-banale. Pour qualifier de façon plus precise

dans quel sens elle doit être non-banale, et définir une notion de courbure de manière plus quantitative, on peut procéder de différentes façons. Certainement, il est nécessaire de donner une définition intrinsèque, qui ne dépende pas du système de coordonnées locales considéré.

Une première remarque à faire vient du fait que le symbole de Christoffel n'est pas un tenseur, et se transforme sous un changement de coordonnées $x^i \to \hat{x}^i$ comme

$$\hat{\Gamma}^i_{mn}(\hat{x}) = \frac{\partial \hat{x}^i}{\partial x^r}\frac{\partial x^s}{\partial \hat{x}^m}\frac{\partial \hat{x}^t}{\partial \hat{x}^n}\Gamma^r_{st}(x) + \frac{\partial \hat{x}^i}{\partial x^r}\frac{\partial^2 x^r}{\partial \hat{x}^m \partial \hat{x}^n} \tag{9.32}$$

Ceci implique que même si Γ^i_{mn} est nul dans certaines coordonnées x^i, il devient en général non-nul dans d'autres coordonnées $\hat{x}^i$. Ce n'est donc pas une bonne mesure intrinsèque de combien la métrique est non-banale. Ceci est particulièrement bien illustré par l'exemple d'un espace plat. En cordonnées cartésiennes, la métrique est constante, $g_{ij} = M_{ij}$, et par conséquent $\Gamma^i_{mn} = 0$. Les géodésiques sont alors des droites décrites par des fonction linéaires satisfaisant $\ddot{x}^i = 0$. Toutefois, en faisant une transformation de coordonnées non-linéaire, on trouve $\hat{g}_{ij} \neq M_{ij}$ et $\hat{\Gamma}^i_{mn} \neq 0$. Les géodésiques sont toujours des droites, mais dans ces nouvelles coordonnées elles sont décrites par des fonction non-linéaires satisfaisant $\ddot{\hat{x}}^i = -\hat{\Gamma}^i_{mn}\dot{\hat{x}}^m\dot{\hat{x}}^n \neq 0$.

Pour décrire de façon intrinsèque la courbure d'une variété, il est nécessaire d'introduire un objet plus élaboré que le symbole de Christoffel, qui soit non-nul dans toutes coordonnées locales si et seulement ces derniers ne peuvent pas être rendus identiquement nuls par un choix judicieux de coordonnées. Ceci revient à dire que l'on cherche à construire à partir du symbole de Christoffel Γ^i_{mn} et de ses dérivées $\partial_i\Gamma^j_{mn}$ un tenseur, qui par définition est nul dans n'importe quel système de coordonnées si il est nul dans un système de coordonnées particulier, vu qu'il se transforme de façon homogène. On arrive alors au *tenseur de courbure de Riemann*, défini comme :

$$R^i_{\ jmn} = \partial_m\Gamma^i_{jn} - \partial_n\Gamma^i_{jm} + \Gamma^k_{jm}\Gamma^i_{nk} - \Gamma^k_{jn}\Gamma^i_{mk} \tag{9.33}$$

Avec un peu de patience, on vérifie que sous un changement de coordonnées $x^i \to \hat{x}^i$ cet objet se transforme comme un tenseur de type $(1,3)$:

$$\hat{R}^i_{\ jmn} = \frac{\partial \hat{x}^i}{\partial x^r}\frac{\partial x^s}{\partial \hat{x}^j}\frac{\partial x^t}{\partial \hat{x}^m}\frac{\partial x^u}{\partial \hat{x}^n}R^r_{stu} \tag{9.34}$$

9.6 Applications à la mécanique

Le concept de variété munie d'une métrique a une série d'applications remarquables dans le contexte de la mécanique des particules ponctuelles.

Dans le cas Galiléen, il s'agit de variétés Riemanniennes décrivant l'espace, alors que dans le cas Einsteinien on a des variétés pseudo-Riemanniennes décrivant l'espace-temps.

9.6.1 Particule non-relativiste

Dans le cas non-relativiste, une particule ponctuelle de masse m libre de se mouvoir dans l'espace $\mathbb{R}^3$ a énergie cinétique $T = \frac{1}{2}m\|\dot{\vec{x}}\|^2$. Sur une variété Riemannienne M plus générale avec un métrique g de signature $(1,1,1)$, cette expression devient :

$$T = \frac{1}{2}m\Big(\frac{ds}{dt}\Big)^2 = \frac{1}{2}m\, g_{ij}(x)\dot{x}^i\dot{x}^j \tag{9.35}$$

L'action correspondante est :

$$S = \int \frac{1}{2}m\, g_{ij}(x)\dot{x}^i\dot{x}^j\, dt \tag{9.36}$$

L'équation du mouvement coincide alors avec l'équation des géodésiques :

$$\ddot{x}^i + \Gamma^i_{mn}\dot{x}^m\dot{x}^n = 0 \tag{9.37}$$

La trajectoire de la particule correspond donc à une géodésique extrémisant la distance propre.

Une situation semblable émerge pour une particule libre de masse m dans $\mathbb{R}^3$, avec énergie cinétique $T = \frac{1}{2}m\|\dot{\boldsymbol{x}}\|^2$, mais sujette à un potentiel non-banal $V = V(x)$. Le Lagrangien est donné par $L = T - V$, et l'Hamiltonien par $H = T + V$. L'énergie est conservée et le mouvement se fait sur une trajectoire d'énergie constante $H = E$. Pour une telle trajectoire on a alors $L = 2T - E$ et l'action prend la forme $S = S_M - E\Delta t$. La quantité S_M doit alors être stationnaire selon le principe de moindre action dans sa forme de Jacobi, et est donnée par

$$\begin{aligned} S_M &= 2\int T dt = m\int \|\dot{\vec{x}}\|^2\, dt = m\int \|\dot{\vec{x}}\|\,\|d\vec{x}\| \\ &= \int \sqrt{2m(E - V(x))}\,\|d\vec{x}\| \end{aligned} \tag{9.38}$$

On voit que cette expression peut être récrite dans la forme d'une longeur de trajectorie, paramétrisée par un nouveau paramètre θ qui n'est pas le temps,

$$S_M = \int \sqrt{g_{ij}(x)x'^i x'^j}\, d\theta \tag{9.39}$$

mesurée avec une métrique donnée par

$$g_{ij}(x) = 2m(E - V(x))\delta_{ij} \tag{9.40}$$

Ceci montre que la situation d'une particule sujette à une force due à un potentiel dépendant de la position est semblable à la situation d'une particule libre sur une variété avec une métrique dépendant de façon non-banale de la position. Dans le premier cas, la trajectorie de la particule est déterminée par l'action de la force, alors que dans la deuxième cas elle est déterminée par l'influence de la métrique sur la notion de distance.

9.7 Particule relativiste

Dans le cas relativiste, une particule ponctuelle de masse m libre de se mouvoir dans l'espace-temps $\mathbb{R}^4$ a un Lagrangien donné par l'expression $L = -mc\sqrt{\eta_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu}$, où le paramètre utilisé pour paramétriser la trajectoire est le temps propre τ. Sur une variété pseudo-Riemannienne M plus générale avec un métrique g de signature $(1,-1,-1,-1)$, cette expression devient :

$$L = -mc\frac{ds}{d\tau} = -mc\sqrt{g_{\mu\nu}(x)\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu} \tag{9.41}$$

L'action correspondante est :

$$S = -mc\int\sqrt{g_{\mu\nu}(x)\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu}\,d\tau \tag{9.42}$$

L'action est donc proportionnelle à la longeur de la trajectoire mesurée avec la métrique g. De plus, le temps propre étant défini comme $d\tau = ds/c$, on a $ds/d\tau = c$ dans cette paramétrisation, et donc $g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu = 1$ sur la trajectoire. On peut alors comme avant utiliser de façon équivalente le nouveau fonctionnel $\tilde{L} = L^2$, correspondant à l'action

$$\tilde{S} = -mc\int g_{\mu\nu}(x)\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu\,d\tau \equiv \int\tilde{L}[x,\dot{x}]\,d\tau \tag{9.43}$$

L'équation du mouvement coincide alors avec l'équation des géodésiques :

$$\ddot{x}^\mu + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta = 0 \tag{9.44}$$

La trajectoire de la particule correspond donc à une géodésique extrémisant la distance.

Bibliographie

[1] M. Nakahara,
Geometry, topology and physics,
Taylor & Francis Group (New York), 2003.

[2] B. Doubrovine, S. Novikov and A. Fomenko,
Géometrie contemporaine,
MIR (Moskow), 1982.

[3] H. Flanders,
Differential forms with applications to the physical sciences,
Academic Press (New York), 1963.

[4] H. Georgi,
Lie algebras in particle physics,
Westview Press (Boulder), 1999.

[5] J. F. Cornwell,
Group theory in physics,
Academic Press (London), 1984.

[6] H. Kunz,
Physique Mathématique II,
notes de cours de l'EPFL, http://itp.epfl.ch.