PHYSIQUE MODERNE

4. Equations de Maxwell et Einstein

4.1 Caractérisation du champ électromagnétique

4.2 Caractérisation des sources électromagnétiques

4.3 Equations de Maxwell

4.4 Caractérisation du champ gravitationnel

4.5 Caractérisation des sources gravitationnelles

4.6 Equations de Einstein

1 RELATIVITE ET SYMETRIES

1.1 Généralités:

Les transformations correspondantes à des changements de référentiel inertiel permis par la relativité doivent représenter une symétrie de toute théorie physique. Pour cette raison, il est important de formaliser ce qu'elles représentent et impliquent.

Plus précisément ces transformations forment un groupe. Les vecteurs de position ou les champs utilisés pour décrire une théorie physique doivent alors pouvoir s'organiser en représentations de ce groupe, c'est-à-dire en vecteurs dont les composantes se mélangent entre elles sous une transformation. Les quantités physiques qui spécifient la théorie doivent au contraire être des invariants. Rappelons donc les définitions précises de groupe et de représentation.

Un groupe G est un ensemble $\{g\}$ muni d'une loi de composition satisfaisant les propriétés suivantes:

$$
\begin{aligned}
&1)\ g_1 \circ g_2 \in G \quad \forall g_1, g_2 \in G \quad [\text{composition}]\\
&2)\ (g_1 \circ g_2) \circ g_3 = g_1 \circ (g_2 \circ g_3) \quad \forall g_1, g_2, g_3 \in G \quad [\text{associativité}]\\
&3)\ \exists e \in G : e \circ g = g \circ e = g \quad \forall g \in G \quad [\text{élément neutre}]\\
&4)\ \exists g^{-1} \in G : g \circ g^{-1} = g^{-1} \circ g = e \quad \forall g \in G \quad [\text{élément inverse}]
\end{aligned}
\qquad (1.1)
$$

Une <u>représentation</u> R_V du groupe G dans un espace vectoriel V est un homomorphisme

$$R_V : G \to V$$

qui fait correspondre à chaque $g \in G$ un opérateur linéaire $T(g)$ dans V, c'est-à-dire une application linéaire $T : V \to V$, avec les propriétés suivantes :

1) $T(e) = \mathbb{1}$ [élément neutre $\Rightarrow$ identité]
2) $T(g_1 \circ g_2) = T(g_1)\,T(g_2)$ [composition $\Rightarrow$ produit] (1.2)
3) $T(g^{-1}) = T(g)^{-1}$ [inverse $\Rightarrow$ inverse]

La propriété 3) suit en réalité de 1) et 2) :

$$T(g)\,T(g^{-1}) = T(g \circ g^{-1}) = T(e) = \mathbb{1}$$

Une représentation associe donc de façon unique une matrice dans un espace vectoriel à chaque élément.

Un groupe donné peut avoir de nombreuses représentations différentes R_{V_i} dans des espaces vectoriels V_i différents. Une représentation R_V est dite <u>irréductible</u> si elle ne peut pas être décomposée en deux représentations R_{V_1} et R_{V_2} agissant séparément sur deux sous-espaces V_1 et V_2 de V, et qu'il n'est donc pas possible de choisir une base où toutes les matrices de R_V ont une forme diagonale en blocs.

1.2 Groupe des rotations

Considérons d'abord le groupe des transformations linéaires de coordonnées spatiales x^i laissant invariante la distance dans l'espace Euclidien.
En utilisant la convention que les indices identiques sont sommés, la mesure de distance est :

$$\|x\|^2 = x^i \delta_{ij} x^j \quad , \text{ avec } \quad \delta_{ij} = \mathrm{diag}(1,1,1) \qquad (1.3)$$

Les transformations s'écrivent :

$$x'^i = R^i{}_j x^j \qquad (1.4)$$

et doivent préserver la distance (2.3) :

$$x'^i \delta_{ij} x'^j = x^i \delta_{ij} x^j$$

Ceci impose une contrainte sur R :

$$(R^i{}_m x^m)\, \delta_{ij}\, (R^j{}_n x^n) = x^i \delta_{ij} x^j$$

$$x^m (R^T{}_m{}^i \delta_{ij} R^j{}_n) x^n = x^m \delta_{mn} x^n$$

$$\Rightarrow R^T{}_m{}^i \delta_{ij} R^j{}_n = \delta_{mn} \qquad (1.5)$$

C'est-à-dire :

$$R^T R = \mathbb{1} \Leftrightarrow R^{-1} = R^T \Leftrightarrow R R^T = \mathbb{1} \qquad (1.6)$$

Il suit que :

$$(\det R)^2 = \mathbb{1} \Rightarrow \det R = \pm 1 \qquad (1.7)$$

Le groupe est appelé $O(3)$ et il a deux composantes:

1) $\mathcal{G}_+$: rotations <u>propres</u>

$\det R = +1$

2) $\mathcal{G}_-$: rotations <u>impropres</u> (1.8)

$\det R = -1$

Des propriétés du déterminant il suit immédiatement que pour la composition de deux transformations:

$$\det(R_1 R_2) = \det R_1 \det R_2 \tag{1.9}$$

Ceci implique que:

- si $\det R_1 = +1$ et $\det R_2 = +1 \Rightarrow \det(R_1 R_2) = +1$

$\Rightarrow \mathcal{G}_+$ est un sousgroupe de $\mathcal{G}$ (<u>propres</u>) (1.10)

Le sous groupe des transformations propres avec $\det R = +1$ est connexe à l'identité. Il contient les rotations propres et se dénote par $SO(3)$. Ces transformations sont paramétrisées par trois paramètres continus : les angles des trois rotations indépendantes autour des trois axes orthogonaux. Les transformations correspondent à des matrices R de la forme suivante :

$$R(\alpha_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \\ 0 & \cos\alpha_1 & \sin\alpha_1 \\ 0 & -\sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 \end{pmatrix} ; \quad R(\alpha_2) = \begin{pmatrix} \cos\alpha_2 & 0 & \sin\alpha_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha_2 & 0 & \cos\alpha_2 \end{pmatrix} ; \quad R(\alpha_3) = \begin{pmatrix} \cos\alpha_3 & \sin\alpha_3 & 0 \\ -\sin\alpha_3 & \cos\alpha_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.11}$$

Le sous ensemble des transformations impropres avec $\det R = -1$ contient des transformations discrètes qui ne sont pas connexes à l'identité. En particulier, il contient l'opération de parité, qui est une réflexion des trois coordonnées simultanément.

$$R_P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{1.12}$$

La transformation R_P génère un sous-groupe discret formé de deux éléments :

$$\mathbb{Z}_2^P = \{\mathbb{1}, R_P\} \tag{1.13}$$

avec table de multiplication

	$\mathbb{1}$	R_P
$\mathbb{1}$	$\mathbb{1}$	R_P
R_P	R_P	$\mathbb{1}$

(1.14)

Ce sous-groupe est le centre de $O(3)$, c'est-à-dire le sous-groupe des éléments qui commutent avec tous les autres.

Tout élément de $O(3)$ peut être décomposé de façon unique en un élément de $SO(3)$ combiné avec une transformation discrète de $\mathbb{Z}_2^P$. Cette affirmation est symbolisée par la formule :

$$O(3) / SO(3) = \mathbb{Z}_2^P \tag{1.15}$$

1.3 Tenseurs et invariants sous rotations

Considérons une transformation linéaire spatiale :

$$x'^i = R^i{}_j x^j \Leftrightarrow x^i = (R^{-1})^i{}_j x'^j \tag{1.16}$$

Un ensemble V^i est un <u>vecteur contravariant</u> si

$$V'^i = R^i{}_j V^j \tag{1.17}$$

Par exemple, la position x^i est un vecteur contravariant :

$$x'^i = R^i{}_j x^j \tag{1.18}$$

Un ensemble V_i est un <u>vecteur covariant</u> si

$$V'_i = (R^{-1})^T{}_i{}^j V_j \tag{1.19}$$

Par exemple, la divergence $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$ est un vecteur covariant :

$$\partial'_i = \frac{\partial}{\partial x'^i} = \frac{\partial x^j}{\partial x'^i}\frac{\partial}{\partial x^j} = (R^{-1})^j{}_i \partial_j$$
$$= (R^{-1})^T{}_i{}^j \partial_j \tag{1.20}$$

Finalement, un ensemble $T^{i_1 \cdots i_p}_{j_1 \cdots j_q}$ est un <u>tenseur p-fois contravariant et q-fois covariant</u> si :

$$T'^{i_1 \cdots i_p}_{j_1 \cdots j_q} = R^{i_1}{}_{k_1} \cdots R^{i_p}{}_{k_p} (R^{-1})^T{}_{j_1}{}^{l_1} \cdots (R^{-1})^T{}_{j_q}{}^{l_q} T^{k_1 \cdots k_p}_{l_1 \cdots l_q} \tag{1.21}$$

Ces définitions sont valables pour des transformations de coordonnées arbitraires, et pas seulement pour les rotations, qui sont un cas particulier.

Dans le cas des rotations, on a :

$$(R^{-1})^T{}_i{}^j = \delta_{ik} R^k{}_l \delta^{lj} \qquad (1.22)$$

Il n'y a alors pas de différence entre les vecteurs contravariants et covariants dans ce cas, vu que la métrique δ_{ij} et son inverse δ^{ij} sont toutes les deux égales à l'identité. Nous allons toutefois continuer à faire cette distinction, en vue de l'analogie avec les transformations de Lorentz.

En fait, chaque vecteur a une version contravariante et une version covariante reliées par la métrique :

$$V_i = \delta_{ij} V^j \quad ; \quad V^i = \delta^{ij} V_j \qquad (1.23)$$

En effet, on vérifie facilement que ceci produit des vecteurs covariants à partir de vecteurs contravariants et viceversa :

- $V_i' = \delta_{ij} V'^j = \delta_{ij} R^j{}_k V^k = \delta_{ij} R^j{}_k \delta^{kl} V_l$
$= (R^{-1})^T{}_i{}^l V_l$

- $V'^i = \delta^{ij} V_j' = \delta^{ij} (R^{-1})^T{}_j{}^k V_k = \delta^{ij} (R^{-1})^T{}_j{}^k \delta_{kl} V^l$
$= R^i{}_l V^l$

On peut donc lever et baisser les indices librement à l'aide de la métrique et de son inverse.

Un premier type d'invariant est le produit scalaire, qui est défini à partir de :

$$\begin{cases} \delta_{ij} : \text{métrique} \\ \delta^{ij} : \text{métrique inverse} \end{cases} \qquad (1.24)$$

Par construction, les rotations préservent la métrique et son inverse, dans le sens que :

$$\cdot\ \delta_{ij} R^i{}_p R^j{}_q = R^T{}_p{}^i \delta_{ij} R^j{}_q = \delta_{pq}$$

$$\cdot\ \delta^{ij} (R^{-1})^T{}_i{}^p (R^{-1})^T{}_j{}^q = (R^{-1})^p{}_i \delta^{ij} (R^{-1})^T{}_j{}^q = \delta^{pq} \qquad (1.25)$$

On a alors :

$$A \cdot B = \delta_{ij} A^i B^j = \delta^{ij} A_i B_j = A^i B_i = A_i B^i \quad : \text{invariant} \qquad (1.26)$$

En effet :

$$(\delta_{ij} A^i B^j)' = \delta_{ij} A'^i B'^j = \delta_{ij} R^i{}_p R^j{}_q A^p B^q$$
$$= \delta_{pq} A^p A^q$$

$$(\delta^{ij} A_i A_j)' = \delta^{ij} A_i' B_j' = \delta^{ij} (R^{-1})^T{}_i{}^p (R^{-1})^T{}_j{}^q A_p B_q$$
$$= \delta^{pq} A_p B_q$$

Un deuxième type d'invariants peut être construit à partir du tenseur complètement antisymétrique :

$$\begin{cases} \epsilon_{ijk} : \text{tenseur de Levi-Civita} \\ \epsilon^i{}_{jk} = \delta^{ih} \epsilon_{hjk} \\ \epsilon^{ij}{}_k = \delta^{ih} \delta^{jl} \epsilon_{hlk} \qquad (\epsilon_{123} = +1) \\ \ldots \end{cases} \qquad (1.27)$$

Ce tenseur satisfait la propriété :

$$\epsilon_{ijk} R^i{}_p R^j{}_q R^k{}_r = \det R \, \epsilon_{pqr} \qquad (1.28)$$

Ceci permet de construire des invariants sous rotations propres avec $\det R = +1$, comme :

$$ABC = \epsilon_{ijk} A^i B^j C^k = \ldots \quad : \text{pseudo invariant} \qquad (1.29)$$

En effet, on a :

$$(\epsilon_{ijk} A^i B^j C^k)' = \epsilon_{ijk} A'^i B'^j C'^k = \epsilon_{ijk} R^i{}_p R^j{}_q R^k{}_r A^p B^q C^r$$
$$= \det R \; \epsilon_{pqr} A^p B^q C^r$$

Il permet également de former un nouveau pseudo-vecteur à partir de deux vecteurs, par produit vectoriel :

$$(A \times B)_i = \epsilon_{ijk} A^j B^k \qquad (1.30)$$

En effet, on a :

$$(A \times B)'_i = \epsilon_{ijk} A'^j B'^k = \epsilon_{ijk} R^j{}_p A^p R^k{}_q B^q$$
$$= \epsilon_{hjk} R^j{}_p R^k{}_q R^h{}_r (R^{-1})^r{}_i A^p B^q$$
$$= \det R \; \epsilon_{rpq} (R^{-1})^T{}_i{}^r A^p B^q$$
$$= \det R \, (R^{-1})^T{}_i{}^r (A \times B)_r$$

Dans un language plus commun, les deux types d'invariants sont :

$$\begin{cases} \delta_{ij} A^i B^j = \vec{A} \cdot \vec{B} & : \text{invariant de } O(3) \\ \epsilon_{ijk} A^i B^j C^k = \vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) & : \text{invariant de } SO(3) \end{cases} \qquad (1.31)$$

On a les propriétés suivantes

1) $\delta_{ij}\,\delta_{pq} = \delta_{ij}\,\delta_{pq}$

2) $\delta_{ij}\,\delta^{j}{}_{q} = \delta_{iq}$

3) $\delta_{ij}\,\delta^{ij} = 3$

ainsi que :

1) $\epsilon_{ijk}\,\epsilon_{pqr} = \begin{vmatrix} \delta_{ip} & \delta_{iq} & \delta_{ir} \\ \delta_{jp} & \delta_{jq} & \delta_{jr} \\ \delta_{kp} & \delta_{kq} & \delta_{kr} \end{vmatrix}$

2) $\epsilon_{ijk}\,\epsilon^{k}{}_{qr} = \begin{vmatrix} \delta_{ip} & \delta_{iq} \\ \delta_{jp} & \delta_{jq} \end{vmatrix}$

3) $\epsilon_{ijk}\,\epsilon^{jk}{}_{q} = 2\,\delta_{iq}$

4) $\epsilon_{ijk}\,\epsilon^{ijk} = 6$

1.4 Groupe de Lorentz

Le groupe de Lorentz est le groupe des transformations linéaires des coordonnées $x^\mu = (x^0, x^i)$ de l'espace-temps laissant invariant l'intervalle dans l'espace de Minkowski. En utilisant à nouveau la convention des indices identiques sommés, la mesure de l'intervalle est :

$$\|x\|^2 = x^\mu \eta_{\mu\nu} x^\nu \quad , \quad \text{avec} \quad \eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1,-1,-1,-1) \qquad (1.32)$$

Les transformations s'écrivent :

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \qquad (1.33)$$

et doivent préserver l'intervalle (1.32) :

$$x'^\mu \eta_{\mu\nu} x'^\nu = x^\mu \eta_{\mu\nu} x^\nu \qquad (1.34)$$

Ceci impose une contrainte sur Λ :

$$(\Lambda^\mu{}_\alpha x^\alpha)\, \eta_{\mu\nu}\, (\Lambda^\nu{}_\beta x^\beta) = x^\mu \eta_{\mu\nu} x^\nu$$

$$x^\alpha (\Lambda^T{}_\alpha{}^\mu \eta_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\beta) x^\beta = x^\alpha \eta_{\alpha\beta} x^\beta$$

$$\Rightarrow \Lambda^T{}_\alpha{}^\mu \eta_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\beta = \eta_{\alpha\beta} \qquad (1.35)$$

C'est-à-dire :

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta \Leftrightarrow \Lambda^{-1} = \eta \Lambda^T \eta \Leftrightarrow \Lambda \eta \Lambda^T = \eta \qquad (1.36)$$

Les contraintes (1,36) impliquent :

a) $\det \Lambda^2 = 1 \Rightarrow \det \Lambda = \pm 1$ (1,37)

b) $(\Lambda^T \eta \Lambda)^0{}_0 = 1 \Rightarrow (\Lambda^0{}_0)^2 - \sum_{k=1}^{3} (\Lambda^k{}_0)^2 = 1$

$$\Rightarrow (\Lambda^0{}_0)^2 \geq 1$$

$$\Rightarrow \Lambda^0{}_0 \geq 1 \text{ ou } \Lambda^0{}_0 \leq -1$$

Pour la quantité $\epsilon(\Lambda) = \frac{\Lambda^0{}_0}{|\Lambda^0{}_0|}$ on a donc :

$$\epsilon(\Lambda) = \pm 1 \qquad (1.38)$$

Le groupe est appelé $O(1,3)$ et il a quatre composantes :

1) $\mathcal{L}_+^\uparrow$: transformations de Lorentz <u>propres orthochrones</u>

$\det \Lambda = +1 \,, \quad \epsilon(\Lambda) = +1$

2) $\mathcal{L}_+^\downarrow$: transformations de Lorentz <u>propres non-orthochrones</u>

$\det \Lambda = +1 \,, \quad \epsilon(\Lambda) = -1$

3) $\mathcal{L}_-^\uparrow$: transformations de Lorentz <u>impropres orthochrones</u>

$\det \Lambda = -1 \,, \quad \epsilon(\Lambda) = +1$

4) $\mathcal{L}_-^\downarrow$: transformations de Lorentz <u>impropres non-orthochrones</u> :

$\det \Lambda = -1 \,, \quad \epsilon(\Lambda) = -1$

Des propriétés du déterminant et de la quantité ϵ définie ci-dessus, il suit que pour la composition de deux transformations :

$$\begin{cases} \det(\Lambda_1\Lambda_2) = \det\Lambda_1 \det\Lambda_2 \\ \epsilon(\Lambda_1\Lambda_2) = \epsilon(\Lambda_1)\,\epsilon(\Lambda_2) \end{cases} \qquad (1.39)$$

Les propriétés impliquent que :

- Si $\det\Lambda_1 = +1$ et $\det\Lambda_2 = +1 \Rightarrow \det(\Lambda_1\Lambda_2) = +1$

$$\Rightarrow \mathcal{L}_+ = \mathcal{L}_+^\uparrow \cup \mathcal{L}_+^\downarrow \text{ est un sous-groupe } (\underline{\text{propres}}) \qquad (1.40)$$

- Si $\epsilon(\Lambda_1) = +1$ et $\epsilon(\Lambda_2) = +1 \Rightarrow \epsilon(\Lambda_1\Lambda_2) = +1$

$$\Rightarrow \mathcal{L}^\uparrow = \mathcal{L}_+^\uparrow \cup \mathcal{L}_-^\uparrow \text{ est un sous groupe } (\underline{\text{orthochrones}}) \qquad (1.41)$$

- On peut combiner ces deux propriétés :

$$\Rightarrow \mathcal{L}_+^\uparrow = \mathcal{L}_+ \cap \mathcal{L}^\uparrow \text{ est un sous groupe (propres orthochrones)} \qquad (1.42)$$

Le sous-groupe des transformations propres-orthochrones avec $\det\Lambda = +1$ et $\epsilon(\Lambda) = +1$ est connexe à l'identité. Il contient les rotations propres et les glissements, et se dénote par $SO_0(1,3)$. Ces transformations sont paramétrisées par six paramètres continus : trois angles associés aux rotations et trois rapidités associées aux glissements, autour et le long des axes.

Les rotations correspondent à des matrices du type :

$$\Lambda(\alpha_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\alpha_1 & \sin\alpha_1 \\ 0 & 0 & -\sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 \end{pmatrix} ; \Lambda(\alpha_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha_2 & 0 & \sin\alpha_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\sin\alpha_2 & 0 & \cos\alpha_2 \end{pmatrix} ; \Lambda(\alpha_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha_3 & \sin\alpha_3 & 0 \\ 0 & -\sin\alpha_3 & \cos\alpha_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.43)$$

Les glissements correspondent à des matrices du type :

$$\Lambda(\delta_1) = \begin{pmatrix} \cosh\delta_1 & \sinh\delta_1 & 0 & 0 \\ \sinh\delta_1 & \cosh\delta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; \Lambda(\delta_2) = \begin{pmatrix} \cosh\delta_2 & 0 & \sinh\delta_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sinh\delta_2 & 0 & \cosh\delta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; \Lambda(\delta_3) = \begin{pmatrix} \cosh\delta_3 & 0 & 0 & \sinh\delta_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sinh\delta_3 & 0 & 0 & \cosh\delta_3 \end{pmatrix} \quad (1.44)$$

Les rapidités sont reliées aux vitesse relatives de deux référentiels par la relation $\tanh\delta_i = v/c$.

Le sous-ensemble des transformations impropres orthochrones avec $\det\Lambda = -1$ et $\varepsilon(\Lambda) = +1$ contient des transformations discrète. En particulier, elle contient la parité :

$$\Lambda_P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.45)$$

Le sous-ensemble des transformations impropres non-orthochrones, avec $\det\Lambda = -1$ et $\varepsilon(\Lambda) = -1$, contient elle aussi des transformations discrète. En particulier, elle contient l'inversion temporelle :

$$\Lambda_T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.46)$$

Le sous-ensemble des transformations propres non-orthochrones, finalement, avec $\det \Lambda = +1$ et $E(\Lambda) = -1$, contient lui aussi des transformations discrète. En particulier, il contient l'inversion d'espace-temps :

$$\Lambda_{PT} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{1.47}$$

Les transformations Λ_P et Λ_T génèrent deux sous-groupes formés chacun de deux éléments:

$$Z_2^P = \{\mathbb{1}, \Lambda_P\} \quad ; \quad Z_2^T = \{\mathbb{1}, \Lambda_T\} \tag{1.48}$$

avec tables de multiplications:

	$\mathbb{1}$	Λ_P
$\mathbb{1}$	$\mathbb{1}$	Λ_P
Λ_P	Λ_P	$\mathbb{1}$

;

	$\mathbb{1}$	Λ_T
$\mathbb{1}$	$\mathbb{1}$	Λ_T
Λ	Λ_T	$\mathbb{1}$

(1.49)

L'union de ces deux sous groupe génère le sous-groupe à quatre éléments caractérisant les transformations discrète:

$$Z_2^P \times Z_2^T = \{\mathbb{1}, \Lambda_P, \Lambda_T, \Lambda_{PT}\} \tag{1.50}$$

Sa table de multiplication est :

	$\mathbb{1}$	Λ_P	Λ_T	Λ_{PT}
$\mathbb{1}$	$\mathbb{1}$	Λ_P	Λ_T	Λ_{PT}
Λ_P	Λ_P	$\mathbb{1}$	Λ_{PT}	Λ_T
Λ_T	Λ_T	Λ_{PT}	$\mathbb{1}$	Λ_P
Λ_{PT}	Λ_{PT}	Λ_T	Λ_P	$\mathbb{1}$

(1.51)

Le sous groupe généré par l'élément Λ_{PT} est le centre du groupe :

$$Z_2^{PT} = \{\mathbb{1}, \Lambda_{PT}\} \tag{1.52}$$

et sa table de multiplication est :

	$\mathbb{1}$	Λ_{PT}
$\mathbb{1}$	$\mathbb{1}$	Λ_{PT}
Λ_{PT}	Λ_{PT}	$\mathbb{1}$

(1.53)

Tout élément du groupe $O(1,3)$ peut être décomposé de façon unique en une transformation de $SO_0(3)$ et des éléments de Z_2^P et Z_2^T. On écrit alors :

$$\begin{cases} \mathcal{L}/\mathcal{L}_+ = Z_2^P \quad ; \quad \mathcal{L}/\mathcal{L}^\uparrow = Z_2^T \\ \mathcal{L}/\mathcal{L}_+^\uparrow = Z_2^P \times Z_2^T \end{cases} \tag{1.54}$$

1.5 Tenseurs et invariants de Lorentz

Considérons une transformation linéaire de coordonnées spatiotemporelles :

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} \Leftrightarrow x^{\mu} = (\Lambda^{-1})^{\mu}{}_{\nu} x'^{\nu} \qquad (1.55)$$

Les tenseurs sous cette transformation peuvent être définis comme pour les transformations spatiales. Un ensemble V^{μ} est un <u>vecteur contravariant</u> si

$$V'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} V^{\nu} \qquad (1.56)$$

Un exemple est x^{μ}, vu que :

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} \qquad (1.57)$$

Un ensemble V_{μ} est un <u>vecteur covariant</u> si

$$V'_{\mu} = (\Lambda^{-1})^{T}{}_{\mu}{}^{\nu} V_{\nu} \qquad (1.58)$$

Un exemple est ∂_{μ}, vu que :

$$\partial'_{\mu} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} \partial_{\nu} = (\Lambda^{-1})^{\nu}{}_{\mu} \partial_{\nu}$$

$$= (\Lambda^{-1})^{T}{}_{\mu}{}^{\nu} \partial_{\nu} \qquad (1.59)$$

Un ensemble $T^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q}$ est un <u>tenseur p-fois contravariant et q-fois covariant</u> si :

$$T'^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q} = \Lambda^{\mu_1}{}_{\rho_1} \dots \Lambda^{\mu_p}{}_{\rho_p} (\Lambda^{-1})^{T}{}_{\nu_1}{}^{\sigma_1} \dots (\Lambda^{-1})^{T}{}_{\nu_q}{}^{\sigma_q} T^{\rho_1 \dots \rho_p}_{\sigma_1 \dots \sigma_q} \qquad (1.60)$$

Dans le cas particulier des transformations de Lorentz, on a :

$$(\Lambda^{-1})^T{}_\mu{}^\nu = \eta_{\mu\rho} \Lambda^\rho{}_\sigma \eta^{\sigma\nu} \qquad (1.61)$$

Dans ce cas il y a donc une différence entre les vecteurs contravariants et covariants, vu que la métrique $\eta_{\mu\nu}$ et son inverse $\eta^{\mu\nu}$ diffèrent de l'identité par des signes.

Comme avant, chaque vecteur a en fait une version contravariante et une version covariante reliées par la métrique et son inverse :

$$V_\mu = \eta_{\mu\nu} V^\nu \quad ; \quad V^\mu = \eta^{\mu\nu} V_\nu \qquad (1.62)$$

En effet, on vérifie facilement que ceci produit effectivement les bonnes transformations :

$$V'_\mu = \eta_{\mu\nu} V'^\nu = \eta_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\rho V^\rho = \eta_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\rho \eta^{\rho\sigma} V_\sigma$$
$$= (\Lambda^{-1})^T{}_\mu{}^\sigma V_\sigma$$

$$V'^\mu = \eta^{\mu\nu} V'_\nu = \eta^{\mu\nu} (\Lambda^{-1})^T{}_\nu{}^\rho V_\rho = \eta^{\mu\nu} (\Lambda^{-1})^T{}_\nu{}^\rho \eta_{\rho\sigma} V^\sigma$$
$$= \Lambda^\mu{}_\sigma V^\sigma$$

Les composantes spatiales de V^μ et V_μ ont le même signe alors que celles spatiales ont des signes opposés.

Un premier type d'invariant est comme avant le produit scalaire, construit à partir de :

$$\begin{cases} \eta_{\mu\nu} : \text{métrique} \\ \eta^{\mu\nu} : \text{métrique inverse} \end{cases} \quad (1.63)$$

Par construction, les transformations de Lorentz préservent la métrique et son inverse, dans le sens que :

$$\cdot\ \eta_{\mu\nu} \Lambda^{\mu}{}_{\rho} \Lambda^{\nu}{}_{\sigma} = \eta_{\rho\sigma}$$

$$\cdot\ \eta^{\mu\nu} (\Lambda^{-1})^{T}{}_{\mu}{}^{\rho} (\Lambda^{-1})^{T}{}_{\nu}{}^{\sigma} = \eta^{\rho\sigma} \quad (1.64)$$

On a alors :

$$A \cdot B = \eta_{\mu\nu} A^{\mu} B^{\nu} = \eta^{\mu\nu} A_{\mu} B_{\nu} = A^{\mu} B_{\mu} = A_{\mu} B^{\mu} : \text{invariant} \quad (1.65)$$

En effet, on vérifie facilement que :

$$\cdot\ (\eta_{\mu\nu} A^{\mu} B^{\nu})' = \eta_{\mu\nu} \Lambda^{\mu}{}_{\rho} \Lambda^{\nu}{}_{\sigma} A^{\rho} B^{\sigma}$$
$$= \eta_{\rho\sigma} A^{\rho} B^{\sigma}$$

$$\cdot\ (\eta^{\mu\nu} A_{\mu} B_{\nu})' = \eta^{\mu\nu} (\Lambda^{-1})^{T}{}_{\mu}{}^{\rho} (\Lambda^{-1})^{T}{}_{\nu}{}^{\sigma} A_{\rho} B_{\sigma}$$
$$= \eta^{\rho\sigma} A_{\rho} B_{\sigma}$$

Comme avant, on peut donc librement contracter les indices avec la métrique.

Un deuxième type d'invariant peut être construit à l'aide du tenseur complètement antisymétrique:

$$\begin{cases} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} : \text{tenseur de Levi-Civita généralisé} \\ \epsilon^{\mu}{}_{\nu\rho\sigma} = \eta^{\mu\beta}\epsilon_{\beta\nu\rho\sigma} \qquad\qquad (\epsilon_{0123} = +1) \\ \ldots \end{cases} \tag{1.66}$$

Le tenseur satisfait la propriété:

$$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\Lambda^{\mu}{}_{\alpha}\Lambda^{\nu}{}_{\beta}\Lambda^{\rho}{}_{\gamma}\Lambda^{\sigma}{}_{\delta} = \det\Lambda\ \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \tag{1.67}$$

Ceci permet de construire des invariants sous transformations propres avec $\det\Lambda = +1$, comme:

$$ABCD = \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}A^{\mu}B^{\nu}C^{\rho}D^{\sigma} = \ldots \quad : \text{pseudoinvariant} \tag{1.68}$$

En effet, on a:

$$\begin{aligned}(\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}A^{\mu}B^{\nu}C^{\rho}D^{\sigma})' &= \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\Lambda^{\mu}{}_{\alpha}\Lambda^{\nu}{}_{\beta}\Lambda^{\rho}{}_{\gamma}\Lambda^{\sigma}{}_{\delta}A^{\alpha}B^{\beta}C^{\gamma}D^{\delta} \\ &= \det\Lambda\ \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}A^{\alpha}B^{\beta}C^{\gamma}D^{\delta}\end{aligned} \tag{1.69}$$

Il permet aussi de former de nouveaux pseudotenseurs à partir de deux tenseurs, par produit vectoriel. Ex:

$$(A\times B)_{\mu\nu} = \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}A^{\rho}B^{\sigma} \tag{1.70}$$

On vérifie facilement que

$$(A\times B)'_{\mu\nu} = \det\Lambda\,(\Lambda^{-1})^{T}{}_{\mu}{}^{\rho}(\Lambda^{-1})^{T}{}_{\nu}{}^{\sigma}(A\times B)_{\rho\sigma}$$

Le deux types d'invariants sont donc:

$$\begin{cases} \eta_{\mu\nu}A^{\mu}B^{\nu} : \quad \text{invariant de } O(1,3) \\ \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}A^{\mu}B^{\nu}C^{\rho}D^{\sigma}, \quad \text{invariant de } SO(1,3) \end{cases} \tag{1.71}$$

On a les propriétés suivantes :

1) $\eta_{\mu\nu}\eta_{\rho\sigma} = \eta_{\mu\nu}\eta_{\rho\sigma}$

2) $\eta_{\mu\nu}\eta^{\nu}{}_{\rho} = \eta_{\mu\rho}$

3) $\eta_{\mu\nu}\eta^{\mu\nu} = 4$

ainsi que :

1) $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = - \begin{vmatrix} \eta_{\mu\alpha} & \eta_{\mu\beta} & \eta_{\mu\gamma} & \eta_{\mu\delta} \\ \eta_{\nu\alpha} & \eta_{\nu\beta} & \eta_{\nu\gamma} & \eta_{\nu\delta} \\ \eta_{\rho\alpha} & \eta_{\rho\beta} & \eta_{\rho\gamma} & \eta_{\rho\delta} \\ \eta_{\sigma\alpha} & \eta_{\sigma\beta} & \eta_{\sigma\gamma} & \eta_{\sigma\delta} \end{vmatrix}$

2) $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon^{\sigma}{}_{\alpha\beta\gamma} = \begin{vmatrix} \eta_{\mu\alpha} & \eta_{\mu\beta} & \eta_{\mu\gamma} \\ \eta_{\nu\alpha} & \eta_{\nu\beta} & \eta_{\nu\gamma} \\ \eta_{\rho\alpha} & \eta_{\rho\beta} & \eta_{\rho\gamma} \end{vmatrix}$

3) $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon^{\rho\sigma}{}_{\alpha\beta} = -2 \begin{vmatrix} \eta_{\mu\alpha} & \eta_{\mu\beta} \\ \eta_{\nu\alpha} & \eta_{\nu\beta} \end{vmatrix}$

4) $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon^{\nu\rho\sigma}{}_{\alpha} = 6\,\eta_{\mu\alpha}$

5) $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = -24$

2. DYNAMIQUE DE PARTICULES RELATIVISTES

2.1 Définitions :

La trajectoire d'une particule ponctuelle est décrite en choisissant un référentiel inertiel et en donnant à chaque temp t sa position $\vec{x}$.

Pour décrire la dynamique de façon Lorentz invariante, on associe à chaque point de la trajectoire un 4-vecteur X^μ dans l'espace de Minkowski. La trajectoire est alors une courbe dans cet espace, qui peut être paramétrisée en utilisant le temps propre τ. Celui-ci est un invariant de Lorentz, et est défini comme le temp mesuré par le référentiel où la particule est momentanément au repos, en chaque point X^μ de la trajectoire. Son différentiel est lié à l'intervalle relativiste

$$d\tau = \frac{1}{c}\sqrt{dX^\mu dX_\mu} = \text{temps propre}$$
$$= \frac{1}{\gamma}\, dt \qquad (2.1)$$

On définit alors :

- $X^\mu(\tau) = \text{4-position}$
  $$= (ct, \vec{x}) \qquad (2.2)$$
- $\mathring{X}^\mu(\tau) = \text{4-vitesse}$
  $$= (\gamma c, \gamma \vec{v}) \qquad (2.3)$$
- $\mathring{\mathring{X}}^\mu(\tau) = \text{4-accélération}$
  $$= \left(\gamma^4 \frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{c}, \gamma^2 \vec{a} + \gamma^4 \frac{(\vec{v}\cdot\vec{a})\vec{v}}{c^2}\right) \qquad (2.4)$$

Par la définition du temps propre (2.1) on trouve propriétés suivantes :

- $\overset{\circ}{x}^{\mu}\overset{\circ}{x}_{\mu} = c^2 \qquad (2.5)$
- $\overset{\circ\circ}{x}^{\mu}\overset{\circ}{x}_{\mu} = 0 \qquad (2.6)$

Finalement, on définit le 4-vecteur énergie-impulsion comme :

$$\begin{aligned} p^{\mu} &= mc\overset{\circ}{x}^{\mu} = \text{4-vecteur énergie-impulsion} \\ &= (m\gamma c^2, m\gamma \vec{v}) \\ &= (E, \vec{p}c) \end{aligned} \qquad (2.7)$$

ainsi que le 4-vecteur de force généralisée, comme :

$$\begin{aligned} f^{\mu} &= \text{4-vecteur force} \\ &= (\gamma \vec{F}\cdot\vec{v}, \gamma \vec{F}c) \\ &= (\gamma W, \gamma \vec{F}c) \end{aligned} \qquad (2.8)$$

La généralisation relativiste et manifestement covariante de la loi de Newton est alors :

$$\overset{\circ}{p}^{\mu} = f^{\mu} \qquad (2.9)$$

Les composantes temporelles et spatiales de cette équation donnent :

$$\left\{ \begin{aligned} \gamma \frac{dp^0}{dt} &= f^0 \Rightarrow \frac{dE}{dt} = W \quad [\text{Loi énergie}] \\ \gamma \frac{d\vec{p}}{dt} &= \vec{f} \Rightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \quad [\text{Loi impulsion}] \end{aligned} \right. \qquad (2.10)$$

2.2 Principe de moindre action

Les équations du mouvement d'une particule peuvent être déduites à partir d'un principe de moindre action. On considère pour cela un fonctionnel de X^μ et $\mathring{X}^\mu$ de la forme :

$$S = \int d\tau \, L\left[X^\mu(\tau), \mathring{X}^\mu(\tau)\right] \qquad (2.11)$$

On demande ensuite que cette action soit minimale. Les équations qui découlent de la stationnarité de S sous variations arbitraire de la trajectoire $X^\mu(\tau)$ sont les équations d'Euler-Lagrange :

$$\frac{\partial L}{\partial X^\mu(\tau)} - \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial L}{\partial \mathring{X}^\mu(\tau)}\right) = 0 \qquad (2.12)$$

On observe que cette équation est une équation de type tensoriel, et donc manifestement covariante sous transformations de Lorentz, à condition que le Lagrangien L soit un invariant :

$$L = \text{Lagrangien invariant} \qquad (2.13)$$

La forme de L dépend du type de force à laquelle la particule est assujettie, et a en général la forme :

$$L = \text{Energie cinétique} - \text{Energie potentielle} \qquad (2.14)$$

2.3 Particule libre :

Pour une particule libre, on a :

$$f^\mu = 0 \tag{2.15}$$

L'équation du mouvement est alors simplement :

$$\overset{\circ\circ}{x}{}^\mu = 0 \tag{2.16}$$

Ceci correspond à des trajectoires rectilignes dans l'espace de Minkowski.

Le Lagrangien qui permet de reproduire les équations du mouvement (2.16) à partir du principe de moindre action est donné par :

$$L = -mc\sqrt{\overset{\circ}{x}{}^\rho \overset{\circ}{x}_\rho} \tag{2.17}$$

En effet, on calcule facilement :

- $\dfrac{\partial L}{\partial x^\mu} = 0$
- $\dfrac{\partial L}{\partial \overset{\circ}{x}{}^\mu} = -mc\,\frac{1}{2}(\overset{\circ}{x}{}^\rho \overset{\circ}{x}_\rho)^{-\frac{1}{2}}\,2\overset{\circ}{x}_\mu$

$$= -m\overset{\circ}{x}_\mu$$

$$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial x^\mu} - \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial L}{\partial \overset{\circ}{x}{}^\mu}\right) = m\overset{\circ\circ}{x}_\mu$$

Les équations d'Euler Lagrange reproduisent donc bien la (2.16) :

$$\overset{\circ\circ}{x}{}^\mu = 0 \tag{2.18}$$

2.4 Particule dans un champ électromagnétique

La présence d'un champ électromagnétique est décrite par un potentiel :

$$A_\mu(x) = \text{4-potentiel}$$
$$= \left(\frac{1}{c}\varphi(x), \vec{A}(x)\right) \qquad (2.19)$$

Un potentiel non-nul n'implique toutefois pas un effet physique, car il y a une invariance de jauge qui représente une ambiguité dans la définition du 4-potentiel :

$$A_\mu(x) \to A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu \lambda(x) \qquad (2.20)$$

Seuls les champs électriques et magnétiques sont physiquement relevant. Ceux-ci sont organisés dans un tenseur de champs donné par :

$$F_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x) = \text{6-tenseur de champs}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{c}E^1 & \frac{1}{c}E^2 & \frac{1}{c}E^3 \\ -\frac{1}{c}E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ -\frac{1}{c}E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ -\frac{1}{c}E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (2.21)$$

Le tenseur est manifestement invariant sous transformations de jauge :

$$F_{\mu\nu}(x) \to F'_{\mu\nu}(x) = F_{\mu\nu}(x) \qquad (2.22)$$

La 4-force exercée par les champs électromagnétiques sur une particule de charge q est donné par la combinaison des forces de Coulomb et de Lorentz :

$$f^\mu = qc F^{\mu\nu}(x) \dot{x}_\nu = \text{4-force électromagnétique}$$

$$= \left(q\gamma \vec{v}\cdot\vec{E},\ q\gamma c (\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}) \right) \qquad (2.23)$$

L'équation du mouvement est alors :

$$\ddot{x}^\mu = \frac{q}{m} F^{\mu\nu}(x) \dot{x}_\nu \qquad (2.24)$$

Le Lagrangien qui permet de reproduire cette équation est facilement deviné. En effet, l'action correspondante doit être invariante de Lorentz, invariante de jauge, et linéaire dans les champs. Le choix le plus simple est alors :

$$L = -mc\sqrt{\dot{x}^\rho \dot{x}_\rho} - q A_\rho(x) \dot{x}^\rho \qquad (2.25)$$

On remarque que L est invariant sous transformations de Lorentz, mais sous transformation de jauge on a :

$$L \to L' = L - q\,\partial_\mu \lambda(x)\, \dot{x}^\rho = L - q\,\dot{\lambda}(x) \qquad (2.26)$$

Le terme de transformation est donc une dérivée totale qui tombe de l'action et des équations du mouvement.

On calcule facilement :

$$\cdot\ \frac{\partial L}{\partial x^\mu} = -q\, \partial_\mu A_\rho(x)\, \mathring{x}^\rho$$

$$\cdot\ \frac{\partial L}{\partial \mathring{x}^\mu} = -mc\, \frac{1}{2} (\mathring{x}^\rho \mathring{x}_\rho)^{-\frac{1}{2}}\, 2\mathring{x}_\mu - q A_\mu(x)$$

$$= -m\, \mathring{x}_\mu - q A_\mu(x)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial x^\mu} - \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial L}{\partial \mathring{x}^\mu}\right) = -q\, \partial_\mu A_\rho(x)\, \mathring{x}^\rho + \frac{d}{d\tau}\left(m\mathring{x}_\mu + q A_\mu(x)\right)$$

$$= -q\, \partial_\mu A_\rho(x)\, \mathring{x}^\rho + m\, \mathring{\mathring{x}}_\mu + q\, \partial_\rho A_\mu(x)\, \mathring{x}^\rho$$

$$= m\, \mathring{\mathring{x}}_\mu - q\left(\partial_\mu A_\rho(x) - \partial_\rho A_\mu(x)\right)\mathring{x}^\rho$$

$$= m\, \mathring{\mathring{x}}_\mu - q\, F_{\mu\rho}(x)\, \mathring{x}^\rho$$

Les équations d'Euler Lagrange donnent donc bien la bonne équation (2.24) :

$$\mathring{\mathring{x}}^\mu = \frac{q}{m} F^{\mu\nu} \mathring{x}_\nu \qquad (2.27)$$

Cette dérivation montre clairement que la 4-force électromagnétique est pratiquement entièrement fixée par l'invariance de jauge de l'action, qui implique dans ce cas l'invariance de jauge de l'équation du mouvement, vu que x^μ est lui invariant :

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu \qquad (2.28)$$

2.5 Particule dans un champs gravitationnel

Selon le principe d'équivalence d'Einstein, un champs gravitationnel est localement équivalent à l'utilisation d'un référentiel non-inertiel. L'accélération de ce référentiel par rapport aux référentiels inertiels est alors responsable de la force gravitationnelle subie par la particule. Pour avoir une idée de la forme de la 4-force gravitationnelle, on peut alors partir d'une particule libre et considérer sa trajectoire dans un référentiel non-inertiel. La trajectoire ne sera alors plus rectiligne mais courbe, donnant l'illusion d'une force.

Le point de départ est l'équation du mouvement pour une particule libre dans un référentiel inertiel:

$$\ddot{x}^\mu = 0 \tag{2.29}$$

On applique ensuite un changement de référentiel générique de la forme:

$$x^\mu \to \xi^\mu(x) \tag{2.30}$$

et on détermine la nouvelle forme de (2.29).

On trouve que la 4-vitesse se transforme comme un 4-vecteur :

$$\overset{\circ}{x}^{\mu} \to \overset{\circ}{\xi}^{\mu}(x) = \frac{\partial \xi^{\mu}}{\partial x^{\rho}}(x)\, \overset{\circ}{x}^{\rho} \qquad (2.31)$$

Au contraire, la 4-accélération ne se transforme pas comme un 4-vecteur, à cause du fait que la matrice $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}(x) = \frac{\partial \xi^{\mu}}{\partial x^{\nu}}(x)$ dépend de x dans ce cas. On trouve :

$$\overset{\circ\circ}{x}^{\mu} \to \overset{\circ\circ}{\xi}^{\mu}(x) = \frac{\partial \xi^{\mu}}{\partial x^{\rho}}(x)\, \overset{\circ\circ}{x}^{\rho} + \frac{\partial^2 \xi^{\mu}}{\partial x^{\rho} \partial x^{\sigma}}(x)\, \overset{\circ}{x}^{\rho} \overset{\circ}{x}^{\sigma} \qquad (2.32)$$

Dans le nouveau référentiel inertiel, l'équation du mouvement prend donc la forme :

$$\frac{\partial \xi^{\mu}}{\partial x^{\rho}}(x)\, \overset{\circ\circ}{x}^{\rho} + \frac{\partial^2 \xi^{\mu}}{\partial x^{\rho} \partial x^{\sigma}}(x)\, \overset{\circ}{x}^{\rho} \overset{\circ}{x}^{\sigma} = 0 \qquad (2.33)$$

En multipliant cette équation par la matrice inverse de transformation, $\Lambda^{\nu}{}_{\mu}(x) = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial \xi^{\mu}}(x)$, et en changeant de nom aux indices, on obtient finalement :

$$\overset{\circ\circ}{x}^{\mu} + \frac{\partial x^{\mu}}{\partial \xi^{\nu}} \frac{\partial^2 \xi^{\nu}}{\partial x^{\rho} \partial x^{\sigma}}(x)\, \overset{\circ}{x}^{\rho} \overset{\circ}{x}^{\sigma} = 0 \qquad (2.34)$$

La force apparente est donc donnée par :

$$\begin{aligned} f^{\mu} &= \text{4-force apparente due au référentiel} \\ &= -mc \frac{\partial x^{\mu}}{\partial \xi^{\nu}} \frac{\partial^2 \xi^{\nu}}{\partial x^{\rho} \partial x^{\sigma}}(x)\, \overset{\circ}{x}^{\rho} \overset{\circ}{x}^{\rho} \end{aligned} \qquad (2.35)$$

Pour interpréter ce résultat, voyons comment la géométrie de l'espace est modifiée par le changement de coordonnées considéré. Dans le référentiel inertiel, avec coordonnées ξ^μ, la métrique est constante :

$$g_{\xi\,\mu\nu} = g_\xi^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad (2.36)$$

La connection de Christoffel est alors évidemment nulle :

$$\Gamma_\xi{}^\mu{}_{\rho\sigma} = \frac{1}{2} g_\xi^{\mu\nu} \left(\partial_\rho g_{\xi\,\nu\sigma} + \partial_\sigma g_{\xi\,\nu\rho} - \partial_\nu g_{\xi\,\rho\sigma} \right)$$
$$= 0 \qquad (2.37)$$

Il suit que le tenseur de Riemann est banalement nul lui aussi :

$$R_\xi{}^\mu{}_{\nu\rho\sigma} = \partial_\rho \Gamma_\xi{}^\mu{}_{\nu\sigma} - \partial_\sigma \Gamma_\xi{}^\mu{}_{\nu\rho} + \Gamma_\xi{}^\tau{}_{\nu\rho} \Gamma_\xi{}^\mu{}_{\sigma\tau} - \Gamma_\xi{}^\tau{}_{\nu\sigma} \Gamma_\xi{}^\mu{}_{\rho\tau}$$
$$= 0 \qquad (2.38)$$

Dans le nouveau référentiel défini par le changement de coordonnées (2.30), la forme de ces quantités est déterminée par leurs propriétés de transformation. sous transformations générales de coordonnées, et une dépendance des coordonnées est induite.

la métrique est un tenseur deux fois covariant, et son inverse un tenseur deux fois contravariant. On obtient donc, en coordonnées x^μ:

$$\cdot\ g_{x\,\mu\nu}(x) = \frac{\partial \xi^\rho}{\partial x^\mu}\frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^\nu}(x)\, g_{\xi\,\rho\sigma} = \frac{\partial \xi^\rho}{\partial x^\mu}\frac{\partial \xi_\rho}{\partial x^\nu}(x)$$

$$\cdot\ g_x^{\ \mu\nu}(x) = \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^\rho}\frac{\partial x^\nu}{\partial \xi^\sigma}(x)\, g_\xi^{\ \rho\sigma} = \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^\rho}\frac{\partial x^\nu}{\partial \xi_\rho}(x) \tag{2.39}$$

La connection de Christoffel se transforme comme une connection. Etant donné qu'elle était nulle dans le référentiel inertiel, seul le terme inhomogène de sa loi de transformation contribue et on trouve :

$$\cdot\ \Gamma_x{}^\mu{}_{\rho\sigma}(x) = \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^p}\frac{\partial \xi^r}{\partial x^\rho}\frac{\partial \xi^s}{\partial x^\sigma}(x)\, \cancelto{0}{\Gamma_\xi{}^p{}_{rs}} + \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^\nu}\frac{\partial^2 \xi^\nu}{\partial x^\rho \partial x^\sigma}(x)$$

$$= \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^\nu}\frac{\partial^2 \xi^\nu}{\partial x^\rho \partial x^\sigma}(x) \tag{2.40}$$

Finalement, le tenseur de Riemann est un tenseur une fois contravariant et trois fois covariant, et vu qu'il était nul dans le référentiel inertiel il reste nul :

$$R_x{}^\mu{}_{\nu\rho\sigma}(x) = \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^p}\frac{\partial \xi^q}{\partial x^\nu}\frac{\partial \xi^r}{\partial x^\rho}\frac{\partial \xi^s}{\partial x^\sigma}(x)\; R_\xi{}^p{}_{qrs}$$

$$= 0 \tag{2.41}$$

On conclut que dans le nouveau référentiel, l'équation du mouvement peut être écrite dans la forme :

$$\overset{\circ\circ}{x}{}^{\mu} + \Gamma^{\mu}_{\ \rho\sigma}(x)\,\overset{\circ}{x}{}^{\rho}\,\overset{\circ}{x}{}^{\sigma} = 0 \qquad (2.42)$$

et que la force apparente est donnée par :

$$f^{\mu} = \text{4-force apparente due au référentiel}$$
$$= -mc\,\Gamma^{\mu}_{\ \rho\sigma}(x)\,\overset{\circ}{x}{}^{\rho}\,\overset{\circ}{x}{}^{\sigma} \qquad (2.43)$$

Le fait que ces expressions sont écrites en termes de quantités géométriques suggère qu'elle restent vraies même dans un espace vraiment courbe, où la métrique et la connection de Christoffel peuvent être rendues respectivement constante et nul par un choix approprié de coordonnée, mais pas en tout les points à la fois, tandis que le tenseur de Rieman est toujours non-nul. C'est cette situation plus générale qui correspond à la présence d'un véritable champ gravitationnel qui courbe l'espace et ne peut pas être banalement réabsorbé en tout point par un choix non inertiel de référentiel.

Dans cette situation plus générale, le problème doit être formulé de façon plus abstraite. La géométrie de l'espace-temps est spécifiée dans un certain choix de coordonnées, ou de référentiel, par la métrique :

- $g_{\mu\nu}(x)$ = métrique
  = tenseur de type (0,2) (2.44)
- $g^{\mu\nu}(x)$ = métrique inverse
  = tenseur de type (2,0) (2.45)

Les dérivées usuelles sont remplacées par des dérivées covariantes au comportement tensoriel bien défini à l'aide de la connection affine :

$$\Gamma^{\mu}{}_{\rho\sigma}(x) = \frac{1}{2} g^{\mu\nu}\left(\partial_\rho g_{\nu\sigma} + \partial_\sigma g_{\nu\rho} - \partial_\nu g_{\rho\sigma}\right)(x)$$

= connection de Christoffel

≠ tenseur (2.46)

Finalement, la courbure de l'espace-temps, qui mesure la présence réelle d'un champ gravitationnel, est décrite par le tenseur de Riemann :

$$R^{\mu}{}_{\nu\rho\sigma}(x) = \left(\partial_\rho \Gamma^{\mu}{}_{\nu\sigma} - \partial_\sigma \Gamma^{\mu}{}_{\nu\rho} + \Gamma^{\tau}{}_{\nu\rho}\Gamma^{\mu}{}_{\sigma\tau} - \Gamma^{\tau}{}_{\nu\sigma}\Gamma^{\mu}{}_{\rho\tau}\right)(x)$$

= tenseur de Riemann

= tenseur de type (1,3) (2.47)

Pour démontrer que l'équation (2.42) est bien le résultat général pour un espace courbe arbitraire, il suffit de vérifier qu'elle est bien covariante sous transformations de coordonnées arbitraires. Ceci, ajouté au fait qu'elle se réduit correctement à la juste équation libre dans un espace plat, implique qu'elle représente le résultat correct en général.

Le point crucial est que la 4-vitesse est un vecteur, mais pas la 4-accélération, et le terme de connection dans l'équation (2.42) sert précisément à transformer la 4-accélération en un vecteur.

Pour expliquer ce point, considérons une transformation de coordonnées générale du type $x^\mu \to x'^\mu$. La 4-impulsion $p^\mu(\tau) = mc\,\dot{x}^\mu(\tau)$ se transforme alors comme un vecteur:

$$\begin{aligned} p^{\mu'} &= mc\frac{d}{d\tau}x'^\mu = mc\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho}\dot{x}^\rho \\ &= \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho}p^\rho \end{aligned} \qquad (2.48)$$

Toutefois, sa dérivée par rapport au paramètre τ n'est pas un vecteur, mais se transforme comme:

$$\begin{aligned} \dot{p}^{\mu'} &= \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho}p^\rho\right) \\ &= \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho}\dot{p}^\rho + \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\rho \partial x^\sigma}\dot{x}^\rho p^\sigma \end{aligned} \qquad (2.49)$$

la connection de Christoffel sur la ligne d'univers, elle, se transforme comme dicté par sa définition de connection, c'est-à-dire :

$$\Gamma'^{\mu}{}_{\rho\sigma} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x^{r}}{\partial x'^{\rho}} \frac{\partial x^{s}}{\partial x'^{\sigma}} \Gamma^{\nu}{}_{rs} + \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial^2 x^{\nu}}{\partial x'^{\rho} \partial x'^{\sigma}} \qquad (2.50)$$

On peut alors définir une dérivée covariante par rapport au temps propre le long de la ligne d'univers, qui produit un nouveau vecteur comme résultat.

$$D_\tau p^{\mu} = \mathring{p}^{\mu} + \Gamma^{\mu}{}_{\rho\sigma} \mathring{x}^{\rho} p^{\sigma} \qquad (2.51)$$

Pour vérifier que cette quantité se transforme bien comme un vecteur, on utilise la relation :

$$\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\rho}} = \delta^{\mu}_{\rho} \quad ; \quad \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\nu}} = \delta^{\mu}_{\rho} \qquad (2.52)$$

En prenant la dérivée par rapport à x'^{σ} de la première relation on trouve également que :

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial x'^{\sigma}} \left(\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\rho}} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x'^{\sigma}} \left(\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \right) \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\rho}} + \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial^2 x^{\nu}}{\partial x'^{\rho} \partial x'^{\sigma}} \\ &= \frac{\partial x^{q}}{\partial x'^{\sigma}} \frac{\partial^2 x'^{\mu}}{\partial x^{\nu} \partial x^{q}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\rho}} + \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial^2 x^{\nu}}{\partial x'^{\rho} \partial x'^{\sigma}} \end{aligned}$$

qui implique que le terme inhomogène dans la (2.46) peut être réécrit comme :

$$\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial^2 x^{\nu}}{\partial x'^{\rho} \partial x'^{\sigma}} = - \frac{\partial x^{p}}{\partial x'^{\rho}} \frac{\partial x^{q}}{\partial x'^{\sigma}} \frac{\partial^2 x'^{\mu}}{\partial x^{p} \partial x^{q}} \qquad (2.53)$$

En utilisant (2.52) et (2.53), on trouve facilement :

$$
\begin{aligned}
D_\tau p^{\mu'} &= \mathring{p}^{\mu'} + \Gamma'^{\mu}{}_{\rho\sigma}\, \mathring{x}^{\rho'} p^{\sigma'} \\
&= \left[\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \mathring{p}^{\nu} + \frac{\partial^2 x'^{\mu}}{\partial x^{\eta} \partial x^{\delta}} \mathring{x}^{\eta} p^{\delta} \right. \\
&\quad + \left[\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x^{r}}{\partial x'^{\rho}} \frac{\partial x^{s}}{\partial x'^{\sigma}} \Gamma^{\nu}{}_{rs} - \frac{\partial x^{p}}{\partial x'^{\rho}} \frac{\partial x^{q}}{\partial x'^{\sigma}} \frac{\partial^2 x'^{\mu}}{\partial x^{p} \partial x^{q}} \right] \\
&\quad \left[\frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\eta}} \mathring{x}^{\eta} \right] \left[\frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\delta}} p^{\delta} \right] \\
&= \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \mathring{p}^{\nu} + \cancel{\frac{\partial^2 x'^{\mu}}{\partial x^{\eta} \partial x^{\delta}} \mathring{x}^{\eta} p^{\delta}} \\
&\quad + \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \Gamma^{\nu}{}_{\eta\delta}\, \mathring{x}^{\eta} p^{\delta} - \cancel{\frac{\partial^2 x'^{\mu}}{\partial x^{\eta} \partial x^{\delta}} \mathring{x}^{\eta} p^{\delta}} \\
&= \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} D_\tau p^{\nu}
\end{aligned}
\tag{2.54}
$$

A l'aide de ces résultats, il est maintenant très simple de démontrer que l'équation (2.42) est bien covariante. En effet, la (2.42) est simplement :

$$D_\tau p^{\mu} = 0 \tag{2.55}$$

Cette équation est une équation tensorielle bien définie, vu que $D_\tau p^{\mu}$ se transforme comme un vecteur, de façon homogène, et elle est valable dans n'importe quel référentiel. Elle implique que la trajectoire de la particule correspond à une ligne avec un vecteur tangeant qui est covariantement constant dans la géométrie.

Les trajectoires de type (2.42) sont ce qui s'appelle des géodesiques de la géométrie, et représentent la généralisation des lignes droites dans la géométrie Euclidienne dans le sens que la distance entre deux points mesurée par la métrique est minimale. Ceci est facilement vérifié en construisant une action qui reproduit l'équation (2.42) comme équation d'Euler-Lagrange suivant d'un principe de moindre action. Le Lagrangien doit être invariant sous transformations générales de coordonnées. Etant donné que $\overset{\circ}{x}^\mu$ se transforme comme un vecteur, il est suffisant de changer $\eta_{\mu\nu}$ en $g_{\mu\nu}(x)$ dans l'action de la particule libre pour trouver le bon résultat :

$$L = -mc\sqrt{g_{\rho\sigma}(x)\,\overset{\circ}{x}^\rho \overset{\circ}{x}^\sigma} \tag{2.56}$$

Le temps propre est maintenant défini par la généralisation de la (2.1) :

$$d\tau = \frac{1}{c}\sqrt{g_{\mu\nu}(x)\,dx^\mu dx^\nu} \tag{2.57}$$

Il suit que la généralisation des (2.5) et (2.6) est

- $$g_{\mu\nu}(x)\,\overset{\circ}{x}^\mu \overset{\circ}{x}^\nu = c^2 \tag{2.58}$$
- $$g_{\mu\nu}(x)\,\overset{\circ}{x}^\mu D_\tau \overset{\circ}{x}^\nu = 0 \tag{2.59}$$

On calcule alors facilement :

- $$\frac{\partial L}{\partial x^\mu} = -mc\,\frac{1}{2}\left(g_{\rho\sigma}(x)\,\mathring{x}^\rho \mathring{x}^\sigma\right)^{-\frac{1}{2}} \partial_\mu g_{pq}(x)\,\mathring{x}^p \mathring{x}^q$$
$$= -\frac{1}{2} m\, \partial_\mu g_{pq}(x)\,\mathring{x}^p \mathring{x}^q$$

- $$\frac{\partial L}{\partial \mathring{x}^\mu} = -mc\,\frac{1}{2}\left(g_{\rho\sigma}(x)\,\mathring{x}^\rho \mathring{x}^\sigma\right)^{-\frac{1}{2}} 2\, g_{\mu p}(x)\,\mathring{x}^p$$
$$= -m\, g_{\mu p}(x)\,\mathring{x}^p$$

$$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial x^\mu} - \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial L}{\partial \mathring{x}^\mu}\right) = -\frac{1}{2} m\, \partial_\mu g_{pq}(x)\,\mathring{x}^p \mathring{x}^q$$
$$+ m \frac{d}{d\tau}\left(g_{\mu p}(x)\,\mathring{x}^p\right)$$
$$= -\frac{1}{2} m\, \partial_\mu g_{pq}(x)\,\mathring{x}^p \mathring{x}^q + m\, g_{\mu p}(x)\,\mathring{\mathring{x}}^p$$
$$+ m\, \partial_q g_{\mu p}(x)\,\mathring{x}^p \mathring{x}^q$$
$$= \frac{1}{2} m \left(\partial_p g_{\mu q} + \partial_q g_{\mu p} - \partial_\mu g_{pq}\right)(x)\,\mathring{x}^p \mathring{x}^q$$
$$+ m\, g_{\mu\nu}(x)\,\mathring{\mathring{x}}^\nu$$
$$= m\, g_{\mu\nu}(x)\left(\mathring{\mathring{x}}^\nu + \Gamma^\nu{}_{pq}(x)\,\mathring{x}^p \mathring{x}^q\right)$$

Les équations d'Euler-Lagrange donnent donc bien l'équation (2.42), après avoir multiplié par la métrique inverse et renommé les indices :

$$\mathring{\mathring{x}}^\mu + \Gamma^\mu{}_{\rho\sigma}(x)\,\mathring{x}^\rho \mathring{x}^\sigma = 0 \qquad (2.60)$$

On remarque finalement que la forme de la force gravitationnelle est essentiellement fixée par l'invariance sous transformations de coordonnées.

Il est illuminant d'étudier la limite de champ gravitationnel faible et de comparer les effets d'un tel champ à ceux du champ électromagnétique. Pour cela, on commence par décomposer la métrique en une constante égale à la métrique de Minkowski, plus un potentiel gravitationnel $h_{\mu\nu}(x)$:

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}(x) &= \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x) \\ &= \eta_{\mu\nu} + \text{potentiel gravitationnel} \end{aligned} \qquad (2.61)$$

Dans la limite où $h_{\mu\nu}(x)$ peut être considéré comme petit, on trouve :

$$g^{\mu\nu}(x) \simeq \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}(x) \qquad (2.62)$$

La connection de Christoffel est alors donnée par l'expression suivante :

$$\begin{aligned} \Gamma^{\mu}{}_{\rho\sigma}(x) &= \frac{1}{2} g^{\mu\nu}(x) \left[\partial_\rho g_{\nu\sigma}(x) + \partial_\sigma g_{\nu\rho}(x) - \partial_\nu g_{\rho\sigma}(x) \right] \\ &\simeq \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \left[\partial_\rho h_{\nu\sigma}(x) + \partial_\sigma h_{\nu\rho}(x) - \partial_\nu h_{\rho\sigma}(x) \right] \\ &\simeq \frac{1}{2} \left[\partial_\rho h^{\mu}{}_{\sigma}(x) + \partial_\sigma h^{\mu}{}_{\rho}(x) - \partial^{\mu} h_{\rho\sigma}(x) \right] \end{aligned} \qquad (2.63)$$

Le tenseur de Riemann peut être calculé de la même façon, en partant de (2.63) pour la connection.

On obtient :

$$R^\mu{}_{\nu\rho\sigma}(x) = \partial_\rho \Gamma^\mu{}_{\nu\sigma}(x) + \Gamma^\tau{}_{\nu\rho}(x)\, \Gamma^\mu{}_{\sigma\tau}(x) - (\rho \leftrightarrow \sigma)$$

$$\simeq \frac{1}{2}\partial_\rho\left(\partial_\nu h^\mu{}_\sigma(x) + \partial_\sigma h^\mu{}_\rho(x) - \partial^\mu h_{\nu\sigma}(x)\right) - (\rho\leftrightarrow\sigma)$$

$$\simeq \frac{1}{2}\Big[-\partial^\mu\partial_\rho h_{\nu\sigma}(x) + \partial^\mu\partial_\sigma h_{\nu\rho}(x) + \partial_\nu\partial_\rho h^\mu{}_\sigma(x) - \partial_\nu\partial_\sigma h^\mu{}_\rho(x)\Big] \qquad (2.64)$$

Considérons maintenant une transformation de coordonnées générale, mais infinitésimale :

$$x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu(x) \qquad (2.65)$$

Pour cette translation infinitésimale locale, la matrice de transformation tensorielle et son inverse sont :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} = \delta^\mu_\alpha + \partial_\alpha \xi^\mu(x) \\[2ex] \dfrac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} = \delta^\alpha_\mu - \partial_\mu \xi^\alpha(x) \end{cases} \qquad (2.66)$$

La loi de transformation de la métrique implique alors une loi de transformation inhomogène du potentiel :

$$g'_{\mu\nu}(x) = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu}\, g_{\alpha\beta}(x)$$

$$\eta_{\mu\nu} + h'_{\mu\nu}(x) = \left(\delta^\alpha_\mu - \partial_\mu \xi^\alpha(x)\right)\left(\delta^\beta_\nu - \partial_\nu \xi^\beta(x)\right)\left(\eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}(x)\right)$$

$$\eta_{\mu\nu} + h'_{\mu\nu}(x) \simeq \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x) - \partial_\mu \xi_\nu(x) - \partial_\nu \xi_\mu(x)$$

On trouve donc la loi de transformation :

$$h'_{\mu\nu}(x) = h_{\mu\nu}(x) - \partial_\mu \xi_\nu(x) - \partial_\nu \xi_\mu(x) \qquad (2.67)$$

La connection de Christoffel se transforme elle aussi de façon inhomogène, comme en réalité requit par sa loi de transformation de connection. On a :

$$\Gamma'^{\mu}{}_{\rho\sigma}(x) = \Gamma^{\mu}{}_{\rho\sigma}(x) - \frac{1}{2}\Big(\cancel{\partial_\rho \partial^\mu \xi_\sigma(x)} + \partial_\rho \partial_\sigma \xi^\mu(x)$$
$$+ \cancel{\partial_\sigma \partial^\mu \xi_\rho(x)} + \partial_\sigma \partial_\rho \xi^\mu(x)$$
$$- \cancel{\partial^\mu \partial_\rho \xi_\sigma(x)} - \cancel{\partial^\mu \partial_\sigma \xi_\rho(x)}\Big)$$

$$= \Gamma^{\mu}{}_{\rho\sigma}(x) - \partial_\rho \partial_\sigma \xi^\mu(x) \qquad (2.68)$$

Finalement, le tenseur de Riemann est au contraire invariant, reflétant le fait que sa loi de transformation est homogène :

$$R'^{\mu}{}_{\nu\rho\sigma}(x) = R^{\mu}{}_{\nu\rho\sigma}(x) \qquad (2.69)$$

Les résultats ci-dessus montrent clairement que $h_{\mu\nu}(x)$ est l'analogue de $A_\mu(x)$, et que la théorie possède une invariance sous translations locales de paramètres $\xi^\mu(x)$ semblable à l'invariance sous transformations de jauge de paramètre $\lambda(x)$. L'objet $R^\mu{}_{\nu\rho\sigma}(x)$ est lui semblable à $F_{\mu\nu}(x)$, et est invariant.

Dans l'approximation de champ faible, le Lagrangien (2.56) peut être développé en série de puissances de $h_{\mu\nu}(x)$. Le résultat peut ensuite être simplifié en utilisant la relation (2.58) approximée :

$$\eta_{\mu\nu}\mathring{x}^\mu\mathring{x}^\nu = c^2 - h_{\mu\nu}(x)\,\mathring{x}^\mu\mathring{x}^\nu \simeq c^2 \qquad (2.70)$$

On trouve alors :

$$\begin{aligned} L &= -mc\sqrt{(\eta_{\mu\nu}+h_{\mu\nu}(x))\,\mathring{x}^\mu\mathring{x}^\nu} \\ &\simeq -mc\sqrt{\eta_{\mu\nu}\mathring{x}^\mu\mathring{x}^\nu} - \frac{1}{2}mc\,\frac{h_{\mu\nu}(x)\,\mathring{x}^\mu\mathring{x}^\nu}{\sqrt{\eta_{\rho\sigma}\mathring{x}^\rho\mathring{x}^\sigma}} \\ &\simeq -mc\sqrt{\eta_{\mu\nu}\mathring{x}^\mu\mathring{x}^\nu} - \frac{1}{2}m\,h_{\mu\nu}(x)\,\mathring{x}^\mu\mathring{x}^\nu \end{aligned} \qquad (2.71)$$

Le premier terme est le Lagrangien d'une particule libre. Le deuxième terme représente l'interaction gravitationnelle dominante. Il est clair que ce Lagrangien reproduit par construction l'équation du mouvement linéarisée :

$$\mathring{\mathring{x}}^\mu + \frac{1}{2}\left(\partial_\rho h^\mu{}_\sigma(x) + \partial_\sigma h^\mu{}_\rho(x) - \partial^\mu h_{\rho\sigma}(x)\right)\mathring{x}^\rho\mathring{x}^\sigma = 0 \qquad (2.72)$$

Cette équation est covariante sous la transformation locale (2.67), en considérant que :

$$\left\{\begin{aligned} \mathring{x}^\mu &\to \mathring{x}^\mu + \partial^\mu\xi_\rho\,\mathring{x}^\rho \\ \mathring{\mathring{x}}^\mu &\to \mathring{\mathring{x}}^\mu + \partial^\mu\xi_\rho\,\mathring{\mathring{x}}^\rho + \partial^\mu\partial_\rho\xi_\sigma(x)\,\mathring{x}^\rho\mathring{x}^\sigma \end{aligned}\right. \qquad (2.73)$$

3. TENSEURS CONSERVES ET SOURCES

3.1 Particules relativistes

Rappelons que la dynamique d'une particule ponctuelle relativiste est décrite par l'équation :

$$m\ddot{x}^{\mu} = \frac{1}{c} f^{\mu} \tag{3.1}$$

Où :

$$\begin{cases} x^{\mu}(\tau) = \text{4-position} \\ \dot{x}^{\mu}(\tau) = \text{4-vitesse} \\ \ddot{x}^{\mu}(\tau) = \text{4-accélération} \\ f^{\mu} = \text{4-force} \end{cases} \tag{3.2}$$

Les interactions électromagnétiques impliquent une 4-force de Lorentz donnée par

$$f^{\mu} = q c F^{\mu}{}_{\rho}(x)\, \dot{x}^{\rho} \tag{3.3}$$

Mais la particule influence à son tour les champs électromagnétique et agit comme une source de courant.

Les interactions gravitationnelles impliquent une 4-force de Newton donnée par :

$$f^{\mu} = -mc\, \Gamma^{\mu}{}_{\rho\sigma}(x)\, \dot{x}^{\rho} \dot{x}^{\sigma} \tag{3.4}$$

Mais ici aussi, la particule influence à son tour le champ gravitationnel et agit comme une source d'énergie et d'impulsion.

3.2 Distribution de Dirac

Il est clair que la source représentée par une particule ponctuelle doit être localisée sur sa trajectoire. Autrement dit, la source doit être une fonction des coordonnées de l'espace-temps x^μ qui est concentrée seulement sur la trajectoire $x^\mu(\tau)$ de la particule. Pour décrire cette situation du point de vue mathématique, nous avons besoin de définir une distribution qui soit infiniment concentrée sur un point mais normalisée de telle façon que son intégrale soit l'unité. Cette distribution s'appelle la fonction δ de Dirac.

La fonction $\delta(x-x_0)$ de Dirac peut être construite comme limite singulière de fonctions continues très concentrées autour d'un point x_0 et dont l'intégrale est normalisée à 1. Plus précisément, on définit :

$$\delta(x-x_0) = \begin{cases} +\infty , & x = x_0 \\ 0 , & x \neq x_0 \end{cases} \tag{3.5}$$

avec la condition que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \delta(x-x_0)\, f(x) = f(x_0) \tag{3.6}$$

On remarque que :

$$\delta[\lambda(x-x_0)] = \begin{cases} +\infty \ , & x = x_0 \\ 0 \ , & x \neq x_0 \end{cases} \qquad (3.7)$$

Cette fonction doit donc être proportionnelle à la fonction originale (3.5). La constante de proportionnalité est fixée en calculant :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \delta[\lambda(x-x_0)]\, f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d(\lambda x)}{\lambda}\, \delta(\lambda x - \lambda x_0)\, f\left(\frac{\lambda x}{\lambda}\right)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{|\lambda|}\, \delta(y - \lambda x_0)\, f\left(\frac{y}{\lambda}\right)$$

$$= \frac{1}{|\lambda|} f(x_0) \qquad (3.8)$$

En comparant avec (3.6) il suit alors que :

$$\delta[\lambda(x-x_0)] = \frac{1}{|\lambda|}\, \delta(x-x_0) \qquad (3.9)$$

On peut généraliser la fonction $\delta(x-x_0)$ unidimensionnelle à une fonction $\delta^3(\vec{x}-\vec{x_0})$ tridimensionnelle en multipliant trois $\delta(x^i-x_0^i)$ pour chaque composante. On a alors :

$$\delta^3(\vec{x}-\vec{x_0}) = \begin{cases} +\infty \ , & \vec{x} = \vec{x_0} \\ 0 \ , & \vec{x} \neq \vec{x_0} \end{cases} \qquad (3.10)$$

avec la condition que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d^3\vec{x}\, \delta^3(\vec{x}-\vec{x_0})\, f(\vec{x}) = f(\vec{x_0}) \qquad (3.11)$$

Sous une transformation linéaire représentée par une matrice tridimensionnelle R, on a :

$$\delta^3[R(\vec{x}-\vec{x}_0)] = \frac{1}{|\det R|}\,\delta^3(\vec{x}-\vec{x}_0) \qquad (3.12)$$

Il suit que la fonction δ^3 est invariante sous rotations, pour lesquelles on a $\det R = 1$:

$$\delta^3(\vec{x}-\vec{x}_0) \quad \text{invariante sous rotations} \qquad (3.13)$$

Finalement, on peut également généraliser la fonction $\delta(x-x_0)$ unidimensionnelle à une fonction $\delta^4(x-x_0)$ quadridimensionnelle en multipliant quatre $\delta(x^\mu - x_0^\mu)$ pour chaque composante. On a alors :

$$\delta^4(x-x_0) = \begin{cases} +\infty \ , & x^\mu = x_0^\mu \\ 0 \ , & x^\mu \neq x_0^\mu \end{cases} \qquad (3.14)$$

avec la condition que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d^4x\, \delta^4(x-x_0)\, f(x) = f(x_0) \qquad (3.15)$$

Sous une transformation linéaire représentée par une matrice quadridimensionnelle Λ, on a :

$$\delta^4[\Lambda(x-x_0)] = \frac{1}{|\det \Lambda|}\,\delta^4(x-x_0) \qquad (3.16)$$

Il suit que la fonction δ^4 est invariante sous transformations de Lorentz, pour lesquelles $\det \Lambda = 1$:

$$\delta^4(x-x_0) \quad \text{invariante sous Lorentz} \qquad (3.17)$$

3.3 Vecteur densité de courant

Considérons une particule relativiste de charge q en mouvement et essayons de déterminer la densité de courant que cela implique.

On peut définir la densité de charge $\rho(t,\vec{x})$ et la densité de courant électromagnétique $j^i(t,\vec{x})$ de la particule, dans un certain référentiel inertiel, par les expressions :

$$\begin{cases} \rho(t,\vec{x}) = q\, \delta^3(\vec{x}-\vec{x}(t)) \\ j^i(t,\vec{x}) = q\, v^i(t)\, \delta^3(\vec{x}-\vec{x}(t)) \end{cases} \qquad (3.9)$$

On peut réunir ces deux quantités dans un 4-vecteur densité de courant $J^\mu(x)$ défini comme :

$$\begin{aligned} J^\mu(x) &= (c\rho(x), j^i(x)) = \text{4-vecteur courant} \\ &= q\, \frac{dx^\mu(t)}{dt}\, \delta^3(\vec{x}-\vec{x}(t)) \end{aligned} \qquad (3.10)$$

Cette expression peut être écrite de façon plus appropriée comme intégrale sur le temps propre τ paramétrisant la trajectoire de la particule :

$$\begin{aligned} J^\mu(x) &= q\int d\tau\, \frac{dx^\mu(\tau)}{dt}\, \delta^3(\vec{x}-\vec{x}(\tau))\, \delta\!\left(\tau - \frac{1}{\gamma(t)}t\right) \\ &= q\int d\tau\, \frac{dx^\mu(\tau)}{dt}\, \delta^3(\vec{x}-\vec{x}(\tau))\, \gamma(\tau)\, \delta(t-\gamma(\tau)\tau) \\ &= qc\int d\tau\, \gamma(t)\, \frac{dx^\mu(\tau)}{dt}\, \delta^3(\vec{x}-\vec{x}(\tau))\, \delta(x^0-x^0(\tau)) \\ &= qc\int d\tau\, \frac{dx^\mu(\tau)}{d\tau}\, \delta^4(x-x(\tau)) \end{aligned}$$

On a donc :

$$J^\mu(x) = qc\int d\tau\, \overset{\circ}{X}{}^\mu(\tau)\, \delta^4(x - X(\tau)) \qquad (3.11)$$

Cette expression est manifestement covariante. En effet, $d\tau$ et $\delta^4(x-X(\tau))$ sont des invariants, et $\overset{\circ}{X}{}^\mu(\tau)$ est un 4-vecteur, et $J^\mu(x)$ est donc un 4-vecteur.

Le vecteur courant (3.11) est toujours conservé par construction, indépendamment de la force subie par la particule. En effet, on vérifie que :

$$\begin{aligned} \partial_\mu J^\mu(x) &= qc\int d\tau\, \overset{\circ}{X}{}^\mu(\tau)\, \partial_\mu\, \delta^4(x-X(\tau)) \\ &= -qc\int d\tau\, \frac{dX^\mu(\tau)}{d\tau}\frac{\partial}{\partial X^\mu(\tau)}\, \delta^4(x-X(\tau)) \\ &= -qc\int d\tau\, \frac{d}{d\tau}\, \delta^4(x-X(\tau)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

On trouve donc l'équation de continuité :

$$\partial_\mu J^\mu(x) = 0 \qquad (3.12)$$

La charge totale intégrée sur tout l'espace est :

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{c}\int_{-\infty}^{+\infty} d^3\vec{x}\, J^0(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} d^3\vec{x}\, \rho(x) \\ &= q \end{aligned} \qquad (3.13)$$

Elle est conservée, par l'intégrale de (3.12) :

$$\frac{d}{dt} Q = 0 \qquad (3.14)$$

3.4 Tenseur énergie - impulsion

Considérons maintenant une particule relativiste de masse m en mouvement et essayons de déterminer la densité d'énergie et d'impulsion que cela implique. Comme dans le cas du courant, où une densité de charge implique une densité de courant par covariance de Lorentz, dans ce cas une densité de masse implique une densité de flux de masse, par covariance de Lorentz. Il sera donc nécessaire de considérer également la densité de flux d'énergie et la densité de flux de quantité de mouvement :

On peut définir la densité d'énergie $u(t,\vec{x})$ la densité de quantité de mouvement et la densité de flux d'énergie $s^i(t,\vec{x})$, et la densité de flux de quantité de mouvement $t^{ij}(t,\vec{x})$ comme :

$$\begin{cases} U(t,\vec{x}) = m\gamma(t)\, c^2\, \delta^3(\vec{x}-\vec{x}(t)) \\ s^i(t,\vec{x}) = m\gamma(t)\, v^i(t)\, \delta^3(\vec{x}-\vec{x}(t)) \\ t^{ij}(t,\vec{x}) = m\gamma(t)\, v^i(t)\, v^j(t)\, \delta^3(\vec{x}-\vec{x}(t)) \end{cases} \tag{3.15}$$

Il y a donc plus de composantes à considérer que dans le cas précédent du courant.

En fait, les quantités (3.15) peuvent être organisées dans un tenseur symétrique à deux indices, un 10-tenseur, comme :

$$T^{\mu\nu}(x) = \begin{pmatrix} \eta(x) & cS^i(x) \\ cS^j(x) & t^{ij}(x) \end{pmatrix} = \text{10-tenseur énergie-impulsion}$$

$$= m\gamma(t)\frac{dx^\mu(t)}{dt}\frac{dx^\nu(t)}{dt}\,\delta^3(\vec{x}-\vec{x}(t)) \qquad (3.16)$$

Cette expression peut être récrite de façon plus utile comme intégrale sur le temps propre τ paramétrisant la trajectoire de la particule :

$$T^{\mu\nu}(x) = m\int d\tau\,\gamma(\tau)\frac{dx^\mu(\tau)}{dt}\frac{dx^\nu(\tau)}{dt}\,\delta^3(\vec{x}-\vec{x}(\tau))\,\delta\!\left(\tau-\frac{t}{\gamma(t)}\right)$$

$$= m\int d\tau\,\gamma(\tau)\frac{dx^\mu(\tau)}{dt}\frac{dx^\nu(\tau)}{dt}\,\delta^3(\vec{x}-\vec{x}(\tau))\,\gamma(\tau)\,\delta(t-\tau\gamma(\tau))$$

$$= mc\int d\tau\,\gamma(\tau)\frac{dx^\mu(\tau)}{dt}\,\gamma(\tau)\frac{dx^\nu(\tau)}{dt}\,\delta^3(\vec{x}-\vec{x}(\tau))\,\delta(x^0-x^0(\tau))$$

$$= mc\int d\tau\,\frac{dx^\mu(\tau)}{d\tau}\frac{dx^\nu(\tau)}{d\tau}\,\delta^4(x-x(\tau))$$

On obtient donc finalement le résultat :

$$T^{\mu\nu}(x) = mc\int d\tau\,\mathring{x}^\mu(\tau)\,\mathring{x}^\nu(\tau)\,\delta^4(x-x(\tau)) \qquad (3.17)$$

Cette expression est manifestement covariante. En effet, $d\tau$ et $\delta^4(x-x(\tau))$ sont des invariants, et $\mathring{x}^\mu(\tau)$ $\mathring{x}^\nu(\tau)$ des 4-vecteurs, et $T^{\mu\nu}(x)$ est donc effectivement un 10-tenseur symétrique à deux indices.

Le tenseur énergie-impulsion (3.17) n'est pas automatiquement conservé. Ceci est dû au fait qu'en présence d'une force agissant sur la particule, il peut y avoir des échanges d'énergie et d'impulsion entre la particule et le champ qui est responsable de la force.

Il est alors utile d'introduire des densités de puissance et de force comme :

$$\begin{cases} w(t,\vec{x}) = \vec{F}(X(t))\,\vec{v}(t)\,\delta^3(\vec{x}-\vec{x}(t)) \\ f^i(t,\vec{x}) = F^i(X(t))\,\delta^3(\vec{x}-\vec{x}(t)) \end{cases} \tag{3.18}$$

Ces quantités peuvent être organisées comme :

$$g^\mu(x) = (w(x),\, f^i(x)c) = \text{4-vecteur champ de force}$$
$$= \gamma^{-1}(t)\, f^\mu(X(t))\,\delta^3(\vec{x}-\vec{x}(t)) \tag{3.19}$$

En procédant comme pour le 4-vecteur courant et le 10-tenseur énergie-impulsion, on peut réécrire cette expression comme :

$$g^\mu(x) = c\int d\tau\, f^\mu(X^\mu(\tau))\,\delta^4(X - X(\tau)) \tag{3.20}$$

Cette expression est manifestement covariante, et montre que le champ de force est lui aussi un 4-vecteur.

La 4-divergence du tenseur énergie-impulsion est facilement calculée et, en utilisant les équations du mouvement (3.1) on trouve :

$$\partial_\mu T^{\mu\nu}(x) = mc\int d\tau\, \mathring{x}^\mu(\tau)\,\mathring{x}^\nu(\tau)\,\partial_\mu\,\delta^4(x-x(\tau))$$

$$= -mc\int d\tau\, \mathring{x}^\nu(\tau)\,\frac{dx^\mu(\tau)}{d\tau}\frac{\partial}{\partial x^\mu(\tau)}\,\delta^4(x-x(\tau))$$

$$= -mc\int d\tau\, \mathring{x}^\nu(\tau)\,\frac{d}{d\tau}\,\delta^4(x-x(\tau))$$

$$= mc\int d\tau\, \mathring{\mathring{x}}^\nu(\tau)\,\delta^4(x-x(\tau))$$

$$= \int d\tau\, f^\nu(x(\tau))\,\delta^4(x-x(\tau))$$

$$= \frac{1}{c}\,g^\nu(x)$$

On a donc finalement la loi de conservation locale

$$\partial_\mu T^{\mu\nu}(x) = \frac{1}{c}\,g^\nu(x) \qquad (3.21)$$

Le 4-vecteur énergie-impulsion total, obtenu en intégrant sur tout l'espace est :

$$p^\nu(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d^3\vec{x}\; T^{0\nu}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} d^3\vec{x}\;(U(x), c\vec{S}(x))$$

$$= (E(t), \vec{p}(t)c) \qquad (3.22)$$

La 4-force totale est, elle, donnée par :

$$f^\nu(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d^3\vec{x}\; g^\nu(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} d^3\vec{x}\;(w(x), c\vec{f}(x))$$

$$= (W(t), F(t)\cdot c) \qquad (3.23)$$

En intégrant (3.21) sur tout l'espace on retrouve alors la loi de conservation de la 4-impulsion :

$$\frac{d}{dt} P^\nu(t) = F^\nu(t) \tag{3.24}$$

soit, en composantes :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} E(t) = W(t) \\ \frac{d}{dt} \vec{p}(t) = \vec{F}(t) \end{cases} \tag{3.25}$$

3.5 Interactions électromagnétiques

La source du potentiel électromagnétique est représentée par le vecteur courant électromagnétique $J^\mu(x)$. Ceci est bien sûr impliqué par les équations de Maxwell, mais on peut également le déduire du Lagrangien pour une particule chargée dans un potentiel $A_\mu(x)$. En particulier, l'intéraction entre matière et potentiel électromagnétique est donnée par :

$$S_{int} = -q \int d\tau \, A_\mu(x) \, \mathring{x}^\mu \tag{3.26}$$

On remarque alors que cette interaction peut être réécrite en terme de la densité de courant $J^\mu(x)$ comme :

$$S_{int} = -\frac{1}{c} \int d^4x \, A_\mu(x) \, J^\mu(x) \tag{3.27}$$

Cette expression montre que l'énergie d'interaction est du type potentiel-courant, et donc que le courant est la source du potentiel électromagnétique. On remarque en fait que vu que $A^0(x) = \frac{1}{c}\phi_{el}(x)$ et $J^0(x) = c\rho_{el}(x)$ on a $A_0(x)J^0(x) = \rho_{el}(x)\phi_{el}(x)$.

Comme déjà vu, le courant est automatiquement conservé, indépendamment de la dynamique, avec l'équation de continuité (3.12)

$$\partial_\mu J^\mu(x) = 0 \qquad (3.28)$$

On observe maintenant que cette loi de conservation est la conséquence directe de l'invariance de l'action d'interaction (3.27) sous transformations de jauge locale du type :

$$\delta_\lambda A_\mu(x) = \partial_\mu \lambda(x) \qquad (3.29)$$

En effet, on a :

$$\begin{aligned}
\delta_\lambda S_{int} &= -\frac{1}{c}\int d^4x\ \delta_\lambda A_\mu(x)\, J^\mu(x) \\
&= -\frac{1}{c}\int d^4x\ \partial_\mu \lambda(x)\, J^\mu(x) \\
&= \frac{1}{c}\int d^4x\ \lambda(x)\, \partial_\mu J^\mu(x)
\end{aligned}$$

Cette variation est identiquement nulle pour un paramètre $\lambda(x)$ arbitraire seulement si

$$\delta_\lambda S_{int} = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial_\mu J^\mu(x) = 0 \qquad (3.30)$$

Le tenseur énergie-impulsion, lui, n'est pas conservé, mais satisfait l'équation :

$$\partial_\mu T^{\mu\nu}(x) = \frac{1}{c} g^{\nu}_{Lorentz}(x) \tag{3.31}$$

Le terme de droite peut être attribué à la divergence d'un tenseur énergie-impulsion associé au champ électromagnétique responsable de $f^{\nu}_{Lorentz}(x)$:

$$\frac{1}{c} g^{\nu}_{Lorentz}(x) = -\partial_\mu T^{\mu\nu}_{élec.}(x) \tag{3.32}$$

La loi de conservation (3.31) peut alors être récrite comme :

$$\partial_\mu \left(T^{\mu\nu}(x) + T^{\mu\nu}_{élec}(x) \right) = 0 \tag{3.33}$$

et exprime la conservation de la 4-impulsion totale du système particule-champs électromagnétiques en interaction entre eux.

On remarque finalement que le vecteur courant qui agit comme source du potentiel électromagnétique peut être déterminé par l'énergie d'interaction, et on a :

$$J^\mu(x) = -c \frac{\delta S_{int}}{\delta A_\mu(x)} \tag{3.34}$$

3.6. Interactions gravitationnelles

La source du potentiel gravitationnel est représentée par le tenseur énergie-impulsion. Ceci est impliqué par les équations d'Einstein, comme nous verrons plus loi, mais on peut le déduire sans connaître ces dernières, à partir du Lagrangien pour une particule dans un potentiel gravitationnel $h_{\mu\nu}(x)$. Dans la limite de champ faible, on a :

$$S_{int} \simeq -\frac{1}{2} m \int d\tau \, h_{\mu\nu}(x) \, \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \qquad (3.35)$$

Cette expression peut être récrite en fonction du tenseur énergie impulsion $T^{\mu\nu}(x)$ comme :

$$S_{int} \simeq -\frac{1}{2c} \int d^4x \, h_{\mu\nu}(x) \, T^{\mu\nu}(x) \qquad (3.36)$$

Cette expression montre que l'énergie d'interaction est du type potentiel-tenseur, et donc que le tenseur énergie-impulsion est la source du potentiel gravitationnel. Vu que $h^{00}(x) = \frac{2}{c^2}\phi_{gra}(x)$ et $T^{00}(x) = c^2 \rho_{gra}(x)$ on a $\frac{1}{2} h_{00}(x) T^{00}(x) = \rho_{gra}(x)\phi_{gra}(x)$.

Le tenseur énergie impulsion n'est pas conservé, mais on a la loi de conservation locale :

$$\partial_\mu T^{\mu\nu}(x) \simeq \frac{1}{c} g^\nu_{Einstein}(x)$$

$$\simeq 0 \qquad (3.37)$$

Les résultats dérivés ci-dessus dans la limite de champ faible peuvent être généralisés à des champs forts en utilisant les lois de conservation exactes dérivées en général pour une particule en présence de force.

Le tenseur énergie-impulsion satisfait la loi de conservation :

$$\partial_\mu T^{\mu\nu}(x) = \frac{1}{c} g^\nu_{\text{Einstein}}(x) \qquad (3.42)$$

Le terme de droite peut être attribué à la divergence d'un tenseur énergie-impulsion du champ gravitationnel responsable de f^ν_{Einstein} :

$$\frac{1}{c} g^\nu_{\text{Einstein}}(x) = -\partial_\mu T^{\mu\nu}_{\text{grav}}(x) \qquad (3.43)$$

La loi de conservation (3.42) peut alors être réécrite comme :

$$\partial_\mu \left(T^{\mu\nu}(x) + T^{\mu\nu}_{\text{grav}}(x) \right) = 0 \qquad (3.44)$$

et exprime dans cette forme la conservation de la 4-impulsion totale du système particule-champ gravitationnel en interaction entre eux, exactement comme avant.

On remarque que cette loi de conservation est la conséquence directe de l'invariance de l'action d'interaction (3.36) sous les transformations de translations locales du type :

$$\begin{cases} \delta_\xi X^\mu = \xi^\mu(x) \\ \delta_\xi h_{\mu\nu}(x) \hat{=} -\partial_\mu \xi_\nu(x) - \partial_\nu \xi_\mu(x) \end{cases} \tag{3.38}$$

En effet, on a :

$$\delta_\xi S_{int} \hat{=} -\frac{1}{2c}\int d^4x \left[\delta_\xi h_{\mu\nu}(x)\, T^{\mu\nu}(x) + h_{\mu\nu}(x)\, \delta_\xi T^{\mu\nu}(x)\right]$$

$$\hat{=} -\frac{1}{2c}\int d^4x \left[-2\partial_\mu \xi_\nu(x)\, T^{\mu\nu}(x)\right]$$

$$\hat{=} \frac{1}{c}\int d^4x\, \xi_\nu(x)\, \partial_\mu T^{\mu\nu}(x)$$

Cette variation est identiquement nulle pour un paramètre $\xi_\nu(x)$ arbitraire seulement si

$$\delta_\xi S_{int} = 0 \Rightarrow \partial_\mu T^{\mu\nu}(x) \hat{=} 0 \tag{3.39}$$

Le courant électromagnétique, lui, est banalement conservé et on a :

$$\partial_\mu J^\mu(x) = 0 \tag{3.40}$$

Finalement, on observe que le tenseur énergie impulsion agissant comme source du champ gravitationnel est :

$$T^{\mu\nu}(x) \hat{=} -2c \frac{\delta S_{int}}{\delta h_{\mu\nu}(x)} \tag{3.41}$$

Dans ce cas, il existe également une autre façon très intéressante de récrire la loi de conservation (3.42). Pour la déterminer, on commence par observer que par la forme explicite de $f^{\nu}_{Einstein}(x)$ et $T^{\mu\nu}(x)$ on a :

$$\frac{1}{c} g^{\nu}_{Einstein}(x) = - mc \int d\tau \, \Gamma^{\mu\nu}_{\rho\sigma}(X(\tau)) \, \dot{X}^{\rho}(\tau) \dot{X}^{\sigma}(\tau) \, \delta^4(X - X(\tau))$$

$$= - \Gamma^{\mu\nu}_{\rho\sigma}(x) \, mc \int d\tau \, \dot{X}^{\rho}(\tau) \dot{X}^{\sigma}(\tau) \, \delta^4(x - X(\tau))$$

$$= - \Gamma^{\nu}_{\rho\sigma}(x) \, T^{\rho\sigma}(x) \qquad (3.45)$$

On peut alors récrire la (3.42) comme :

$$\partial_\mu T^{\mu\nu}(x) + \Gamma^{\nu}_{\rho\sigma}(x) \, T^{\rho\sigma}(x) = 0 \qquad (3.46)$$

En utilisant l'identité

$$\Gamma^{\mu}_{\mu\rho}(x) = - \sqrt{g(x)} \, D_\rho \frac{1}{\sqrt{g(x)}} \qquad (3.47)$$

on peut finalement récrire la (3.46) comme :

$$\partial_\mu T^{\mu\nu}(x) + \Gamma^{\mu}_{\mu\rho}(x) T^{\rho\nu}(x) + \Gamma^{\nu}_{\rho\sigma}(x) T^{\rho\sigma}(x) = \Gamma^{\mu}_{\mu\rho}(x) \, T^{\rho\nu}(x)$$

$$D_\mu T^{\mu\nu}(x) = - \sqrt{g(x)} \, D_\rho \frac{1}{\sqrt{g(x)}} \, T^{\rho\nu}(x)$$

$$\frac{1}{\sqrt{g(x)}} D_\mu T^{\mu\nu}(x) = - D_\mu \frac{1}{\sqrt{g(x)}} \, T^{\mu\nu}(x)$$

$$D_\mu \left(\frac{1}{\sqrt{g(x)}} T^{\mu\nu}(x) \right) = 0$$

On trouve donc une loi de conservation de la forme :

$$D_\mu \hat{T}^{\mu\nu}(x) = 0 \qquad (3.48)$$

avec le nouveau tenseur energie impulsion:

$$\breve{T}^{\mu\nu}(x) = \frac{1}{\sqrt{g(x)}} T^{\mu\nu}(x)$$

$$= mc \int d\tau\, \dot{x}^{\mu}(\tau) \dot{x}^{\nu}(\tau) \frac{1}{\sqrt{g(x)}} \delta^4(x - x(\tau)) \qquad (3.49)$$

On remarque que le facteur $1/\sqrt{g(x)}$ qui est apparu devant le tenseur énergie impulsion est précisément le facteur nécéssaire à rendre le résultat de l'espace plat covariant sous transformations generales de coordonnées. En effet, $\dot{x}^{\mu}(\tau)$ et $\dot{x}^{\nu}(\tau)$ sont des vecteurs, et $\frac{1}{\sqrt{g(x)}} \delta^4(x - x(\tau))$ est maintenant un vrai invariant. La loi le conservation (3.48) devient alors une équation manifestement covariante sous transformations de coordonnées generales.

Pour la conservation, on peut procéder de façon semblable et réécrire la (3.40) comme:

$$\partial_\mu J^{\mu}(x) + \Gamma^{\mu}{}_{\mu\beta}(x) J^{\beta}(x) = \Gamma^{\mu}{}_{\mu\beta}(x) J^{\beta}(x)$$

$$D_\mu J^{\mu}(x) = -\sqrt{g(x)}\, D_\beta \frac{1}{\sqrt{g(x)}} J^{\beta}(x)$$

$$\frac{1}{\sqrt{g(x)}} D_\mu J^{\mu}(x) = -D_\mu \frac{1}{\sqrt{g(x)}} J^{\mu}(x)$$

$$D_\mu \left(\frac{1}{\sqrt{g(x)}} J^{\mu}(x) \right) = 0$$

On obtient donc finalement :

$$\nabla_\mu \breve{J}^\mu(x) = 0 \qquad (3.50)$$

avec le nouveau vecteur courant :

$$\breve{J}^\mu(x) = \frac{1}{\sqrt{g(x)}} J^\mu(x)$$

$$= qc\int d\tau\, \mathring{x}^\mu(\tau) \frac{1}{\sqrt{g(x)}} \delta^4(x - x(\tau)) \qquad (3.51)$$

De nouveau, le facteur $1/\sqrt{g(x)}$ qui est apparu sert à rendre le courant covariant sous transformations générales de coordonnées, et la loi de conservation (3.50) devient alors manifestement covariante sous transformations de coordonnées.

On remarque finalement que le tenseur énergie impulsion (3.49) de la théorie complète en champ fort peut être écrit comme :

$$\breve{T}^{\mu\nu}(x) = -2c\sqrt{g(x)}\, \frac{\delta S_{int}}{\delta g_{\mu\nu}(x)} \qquad (3.52)$$

4 EQUATIONS DE MAXWELL ET EINSTEIN

4.1 Caractérisation du champ électromagnétique

Un champ électromagnétique est caractérisé physiquement par le tenseur de champ électromagnétique $F_{\mu\nu}(x)$, qui est déterminé à partir du vecteur potentiel électromagnétique $A_\mu(x)$ par la relation :

$$F_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu A(x) - \partial_\nu A_\mu(x) \qquad (4.1)$$

Le tenseur a la propriété algébrique suivante :

$$F_{\mu\nu}(x) = -F_{\nu\mu}(x) \qquad (4.2)$$

Il a donc un nombre de composantes indépendantes égal à celui d'une matrice de dimension 4 qui est antisymétrique, soit $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$. Donc :

$$F_{\mu\nu}(x) : 6 \text{ composantes} \qquad (4.3)$$

Le potentiel a au contraire 4-composantes :

$$A_\mu(x) : 4\text{-composantes} \qquad (4.4)$$

Le fait que $F_{\mu\nu}(x)$ puisse être écrit en terme de $A_\mu(x)$ est lié au fait qu'il satisfait une autre identité.

Cette identité est l'identité de Bianchi :

$$\partial_\alpha F_{\beta\gamma}(x) + \partial_\beta F_{\gamma\alpha}(x) + \partial_\gamma F_{\alpha\beta}(x) = 0 \qquad (4.5)$$

Cette expression est facilement vérifiée être complètement antisymétrique dans ses trois indices libres. Elle représente donc $\frac{4\cdot3\cdot2}{3!} = 4$ équations indépendantes, qui peuvent être écrites dans la forme plus compacte :

$$\epsilon^{\mu\alpha\beta\gamma}\partial_\alpha F_{\beta\gamma}(x) = 0 \qquad [4 \text{ équations}] \qquad (4.6)$$

La décomposition (4.1) du tenseur $F_{\mu\nu}(x)$ satisfaisant la propriété algébrique (4.2) peut alors être vue comme solution générale de l'équation de Bianchi (4.5).

4.2 Caractérisation des sources électromagnétiques

La source du champ électromagnétique est le vecteur courant électromagnétique $J^\mu(x)$:

$$J^\mu(x) : \text{ vecteur courant} \qquad (4.7)$$

Ce vecteur a 4-composantes indépendantes :

$$J^\mu(x) : \ 4 \text{ composantes} \qquad (4.8)$$

En outre, il est conservé, et satisfait l'équation :

$$\partial_\mu J^\mu(x) = 0 \qquad [1 \text{ équation}] \qquad (4.9)$$

4.3 Equations de Maxwell

Nous savons que pour des problèmes statiques, l'équation décrivant le champ électromagnétique est donnée par l'équation de Laplace pour le potentiel électrostatique $\phi_{el}(x)$ ayant pour source la densité de charge $\rho_{el}(x)$:

$$\Delta \phi_{el}(x) = - \rho_{el}(x) \qquad (4.10)$$

Nous savons également que $\rho_{el}(x)$ est la première composante du vecteur courant, et que $\phi_{el}(x)$ est la première composante du vecteur potentiel, avec :

$$\begin{cases} \phi_{el}(x) = c\, A^0(x) \\ \rho_{el}(x) = \frac{1}{c} J^0(x) \end{cases} \qquad (4.11)$$

L'équation (4.10) peut donc se réécrire comme :

$$\Delta A^0 = -\frac{1}{c^2} J^0 \qquad (4.12)$$

La généralisation de l'équation (4.12) à des problèmes non-statiques est complètement fixée par l'invariance de Lorentz. Il est clair qu'elle doit avoir la forme d'une équation vectorielle du type :

$$E^\mu(x) = \frac{1}{c^2} J^\mu(x) \qquad (4.13)$$

Le vecteur E^μ doit être une combinaisons de dérivées secondes du potentiel $A_\mu(x)$, mais doit en réalité dépendre seulement du champ physique $F_{\mu\nu}(x)$. On a donc :

$$E^\mu(x) \ : \ \text{dérivées premières de } F_{\mu\nu}(x) \tag{4.14}$$

En outre, on doit imposer que l'équation (4.13) implique automatiquement la conservation du courant (4.9), pour que cette dernière n'ait pas d'influence sur la dynamique. Ceci implique que :

$$\partial_\mu E^\mu(x) = 0 \tag{4.15}$$

Il se trouve que le vecteur $E^\mu(x)$ est complètement déterminé par les propriétés (4.14) et (4.15). En effet, les seuls vecteurs que l'on puisse construire avec $F_{\mu\nu}(x)$ et une dérivée sont :

$$V^\mu(x) = \partial_\nu F^{\nu\mu}(x) \tag{4.16}$$

$$\check{V}^\mu(x) = \epsilon^{\mu\alpha\beta\gamma}\partial_\alpha F_{\beta\gamma}(x) \tag{4.17}$$

En utilisant la décomposition (4.1) on trouve :

$$V^\mu(x) = \Box A^\mu(x) - \partial^\mu(\partial_\nu A^\nu(x)) \tag{4.18}$$

$$\check{V}^\mu(x) = 0 \tag{4.19}$$

La solution générale de l'équation (4.14) est alors:

$$E^\mu(x) = a\,\partial_\nu F^{\mu\nu}(x) \tag{4.20}$$

L'équation (4.15) est automatiquement satisfaite en conséquence de la propriété (4.2):

$$\partial_\mu E^\mu(x) = 0 \tag{4.21}$$

Le paramètre a est finalement fixé en demandant que dans le cas statique la première composante de l'équation (4.13) reproduise l'équation de Laplace (4.12). Étant donné que dans cette limite:

$$E^0(x) \longrightarrow -a\Delta A^0(x) \tag{4.22}$$

On trouve:

$$a = 1 \tag{4.23}$$

L'équation (4.13) cherchée est donc:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu}(x) = \frac{1}{c^2} J^\nu(x) \qquad [4 \text{ équations}] \tag{4.24}$$

En plus, on a:

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\nu F_{\rho\sigma}(x) = 0 \qquad [4 \text{ équations}] \tag{4.25}$$

On reconnaît que (4.24) et (4.25) représentent les équations de Maxwell aux sources et aux propriétés.

Les équations (4.24) et (4.25) représentent 8 équations pour les 6 composantes du champ électromagnétique $F_{\mu\nu}(x)$. On peut toutefois résoudre les 4 équations (4.25) en introduisant le potentiel électromagnétique $A_\mu(x)$. La (4.24) représente alors 4 équations pour les 4 composantes du potentiel $A_\mu(x)$. Leur forme est :

$$\Box A^\mu(x) - \partial^\mu \partial_\nu A^\nu(x) = \frac{1}{c^2} J^\nu(x) \quad [4 \text{ équations}] \quad (4.26)$$

Les équations sont toutefois invariantes sous transformations de jauge du type :

$$\delta A^\mu(x) = \partial^\mu \lambda(x) \quad (4.27)$$

Pour résoudre les (4.26), il est alors nécessaire de fixer une jauge pour éliminer la redondance (4.27).

Une jauge particulièrement utile est la jauge de Lorentz, où $\lambda(x)$ est choisi de telle façon que :

$$\partial_\mu A^\mu(x) = 0 \quad (4.28)$$

Dans cette jauge, la (4.26) devient alors :

$$\Box A^\mu(x) = \frac{1}{c^2} J^\mu(x) \quad (4.29)$$

Ceci est la typique équation de D'alembert, qui donne comme solutions des ondes électromagnétiques.

4.4 Caractérisation du champ gravitationnel

Un champ gravitationnel est caractérisé physiquement par le tenseur de courbure de Riemann $R_{\mu\nu\rho\sigma}(x)$, qui est déterminé à partir de la métrique représentant le potentiel gravitationnel $g_{\mu\nu}(x)$ par la relation :

$$R_{\mu\nu\rho\sigma}(x) = -\frac{1}{2}\Big(\partial_\mu\partial_\rho g_{\nu\sigma}(x) - \partial_\nu\partial_\rho g_{\mu\sigma}(x) - \partial_\mu\partial_\sigma g_{\nu\rho}(x) + \partial_\nu\partial_\sigma g_{\mu\rho}(x)\Big)$$
$$+ g^{\alpha\beta}(x)\Big(\Gamma^{\alpha}_{\mu\rho}(x)\Gamma^{\beta}_{\nu\sigma}(x) - \Gamma^{\alpha}_{\mu\sigma}(x)\Gamma^{\beta}_{\nu\rho}(x)\Big) \qquad (4.40)$$

où :

$$\Gamma^{\gamma}_{\mu\nu}(x) = \frac{1}{2}g^{\gamma\delta}(x)\Big(\partial_\mu g_{\delta\nu}(x) + \partial_\nu g_{\delta\mu}(x) - \partial_\delta g_{\mu\nu}(x)\Big) \qquad (4.41)$$

Dans la limite de champ faible, où $g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x)$ avec $h_{\mu\nu}(x)$ petit, on a simplement :

$$R_{\mu\nu\rho\sigma}(x) \simeq -\frac{1}{2}\Big(\partial_\mu\partial_\rho h_{\nu\sigma}(x) - \partial_\nu\partial_\rho h_{\mu\sigma}(x) - \partial_\mu\partial_\sigma h_{\nu\rho}(x) + \partial_\nu\partial_\sigma h_{\mu\rho}(x)\Big) \qquad (4.42)$$

Le tenseur satisfait les propriétés algébriques suivantes :

- $R_{\mu\nu\rho\sigma}(x) = R_{\rho\sigma\mu\nu}(x) \qquad (4.43)$
- $R_{\mu\nu\rho\sigma}(x) = -R_{\nu\mu\rho\sigma}(x) = -R_{\mu\nu\sigma\rho}(x) = +R_{\nu\mu\sigma\rho}(x) \qquad (4.44)$
- $R_{\mu\alpha\beta\gamma}(x) + R_{\mu\beta\gamma\alpha}(x) + R_{\mu\gamma\alpha\beta}(x) = 0 \qquad (4.45)$

La propriété (4.44) implique que chaque paire d'indices de $R_{\mu\nu\rho\sigma}(x)$ est antisymétrique, et peut donc prendre un nombre de valeurs différentes donné par $\frac{4\cdot 3}{2} = 6$.

La propriété (4.43) implique que $R_{\mu\nu\rho\sigma}(x)$ est symétrique sous l'échange des deux paires d'indices. En traitant chaque paire d'indices comme un nouvel indices, $R_{\mu\nu\rho\sigma}(x)$ a donc la forme d'une matrice de dimension 6 symétrique, et a donc $\frac{6 \cdot 7}{2} = 21$ composantes distinctes. Finalement, la propriété (4.45) représente 1 contrainte entre ces composantes, et le nombre de composantes indépendantes est donc finalement égal à 20 :

$$R_{\mu\nu\rho\sigma}(x) \ : \ 20 \text{ composantes} \tag{4.46}$$

Le potentiel gravitationnel satisfait la propriété algébrique :

$$g_{\mu\nu}(x) = g_{\nu\mu}(x) \tag{4.47}$$

Il a donc $\frac{4 \cdot 5}{2} = 10$ composantes indépendantes.

$$g_{\mu\nu}(x) \ : \ 10 \text{ composantes} \tag{4.48}$$

Le fait que $R_{\mu\nu\rho\sigma}(x)$ puisse être écrit en terme de $g_{\mu\nu}(x)$ est lié au fait qu'il satisfait une autre identité. Cette identité est l'identité de Bianchi :

$$D_\alpha R_{\mu\nu\beta\gamma}(x) + D_\beta R_{\mu\nu\gamma\alpha}(x) + D_\gamma R_{\mu\nu\alpha\beta}(x) = 0 \tag{4.49}$$

Pour des champs faible, on a simplement :

$$\partial_\alpha R_{\mu\nu\beta\gamma}(x) + \partial_\beta R_{\mu\nu\gamma\alpha}(x) + \partial_\gamma R_{\mu\nu\alpha\beta}(x) \overset{\sim}{=} 0 \tag{4.50}$$

L'expression (4.49) est complètement antisymétrique dans ses indices $\alpha\beta\gamma$ et dans ses indices $\mu\nu$. Elle représente donc $\frac{4\cdot3\cdot2}{6!}\,\frac{4\cdot3}{2} = 24$ équations indépendantes, qui peuvent être également écrits comme:

$$\epsilon^{\delta\alpha\beta\gamma} D_\alpha R_{\mu\nu\beta\gamma}(x) = 0 \quad [24 \text{ equations}] \tag{4.51}$$

ou, pour des champs faibles:

$$\epsilon^{\delta\alpha\beta\gamma} \partial_\alpha R_{\mu\nu\beta\gamma}(x) \simeq 0 \quad [24 \text{ équations}] \tag{4.52}$$

La décomposition (4.40), ou (4.47), peut être vue comme la solution générale de l'équation (4.51), ou (4.52), avec les propriétés (4.43), (4.44) et (4.45) tenus en compte.

4.5 Caractérisation des sources gravitationnelles

La source du champ gravitationnel est le tenseur énergie-impulsion $T^{\mu\nu}(x)$:

$$T^{\mu\nu}(x) : \text{tenseur énergie-impulsion} \tag{4.53}$$

Ce tenseur satisfait:

$$T^{\mu\nu}(x) = T^{\nu\mu}(x) \tag{4.54}$$

Il a donc $\frac{4\cdot5}{2} = 10$ composantes indépendantes:

$$T^{\mu\nu}(x) : 10 \text{ composantes} \tag{4.55}$$

Finalement, il est conservé:

$$D_\mu T^{\mu\nu}(x) = 0 \tag{4.56}$$

En champs faibles, on a simplement:

$$\partial_\mu T^{\mu\nu}(x) \simeq 0 \tag{4.57}$$

4.6 Equations de Einstein

Nous savons que pour des problèmes statiques et avec des champs faibles, l'équation décrivant le champ gravitationnel est donnée par l'équation de Laplace pour le potentiel gravitationnel Newtonien $\phi_{gra}(x)$ ayant pour source la densité d'energie $\rho_{gra}(x)$:

$$\Delta \phi_{gra}(x) \simeq 4\pi G \, \rho_{gra}(x) \tag{4.58}$$

Nous savons également que $\rho_{gra}(x)$ est la première composante du tenseur énergie-impulsion, et que $\phi_{gra}(x)$ est la première composante du tenseur potentiel, avec :

$$\begin{cases} \phi_{gra}(x) = \frac{c^2}{2}\left(g^{00}(x) - \eta^{00}\right) \\ \rho_{gra}(x) = \frac{1}{c^2} T^{00}(x) \end{cases} \tag{4.59}$$

L'equation (4.57) peut donc se récrire comme :

$$\Delta g^{00}(x) = \frac{8\pi G}{c^4} \cdot T^{00}(x) \tag{4.60}$$

La generalisation de l'équation (4.60) à des problèmes non-statiques est complètement fixée par l'invariance de Lorentz. En outre, la faiblesse du champ n'influence pas qualitativement l'equation.

Il est alors clair que cette équation doit avoir la forme d'une équation tensorielle du type :

$$G^{\mu\nu}(x) = \frac{8\pi G}{c^4} T^{\mu\nu}(x) \qquad (4.61)$$

Le tenseur $G^{\mu\nu}(x)$ doit être symétrique et dépendre des dérivées secondes du potentiel $g_{\mu\nu}(x)$, mais doit en réalité dépendre seulement du champ physique $R_{\mu\nu\rho\sigma}(x)$. On a donc :

$$\begin{cases} G^{\mu\nu}(x) & : \text{contraction de } R_{\mu\nu\rho\sigma}(x) \\ G^{\mu\nu}(x) = G^{\nu\mu}(x) & \end{cases} \qquad (4.62)$$

En outre, on doit demander que l'équation (4.61) implique automatiquement la conservation du tenseur énergie-impulsion, comme dicté par (4.56), pour que cette dernière n'influence pas la dynamique. Ceci implique que :

$$D_\mu G^{\mu\nu}(x) = 0 \qquad (4.63)$$

Ou, en champs faibles :

$$\partial_\mu G^{\mu\nu}(x) \simeq 0 \qquad (4.64)$$

Il se trouve que le tenseur $G^{\mu\nu}(x)$ est complètement déterminé par les propriétés (4.62) et (4.63).

En effet, les seules contractions non banales du tenseur de Rieman $R_{\mu\nu\rho\sigma}(x)$ avec des métriques sont le tenseur de Ricci $R_{\mu\nu}(x)$ et le scalaire de courbure $R(x)$, définis comme :

- $R_{\mu\nu}(x) = g^{\rho\sigma}(x)\, R_{\mu\rho\nu\sigma}(x)$ (4.65)
- $R(x) = g^{\mu\nu}(x)\, g^{\rho\sigma}(x)\, R_{\mu\rho\nu\sigma}(x)$ (4.66)

On trouve :

- $$R_{\mu\nu}(x) = -\frac{1}{2}\left(\Box g_{\mu\nu}(x) - \partial_\mu \partial^\alpha g_{\alpha\nu}(x) - \partial_\nu \partial^\alpha g_{\alpha\mu}(x) + \partial_\mu \partial_\nu g^\alpha{}_\alpha(x)\right) + g_{\alpha\beta}(x)\, g^{\gamma\delta}(x)\left(\Gamma^\alpha_{\mu\nu}(x)\,\Gamma^\beta_{\gamma\delta}(x) - \Gamma^\alpha_{\mu\gamma}(x)\,\Gamma^\beta_{\nu\delta}(x)\right) \quad (4.67)$$
- $$R(x) = -\left(g^{\mu\nu}(x)\,\Box g_{\mu\nu}(x) - \partial^\alpha \partial^\beta g_{\alpha\beta}(x)\right) + g_{\alpha\beta}(x)\, g^{\mu\nu}(x)\, g^{\gamma\delta}(x)\left(\Gamma^\alpha_{\mu\nu}(x)\,\Gamma^\beta_{\gamma\delta}(x) - \Gamma^\alpha_{\mu\gamma}(x)\,\Gamma^\beta_{\nu\delta}(x)\right) \quad (4.68)$$

En champs faibles, ces expression se simplifient ici :

- $$R_{\mu\nu}(x) \simeq -\frac{1}{2}\left(\Box h_{\mu\nu}(x) - \partial_\mu \partial^\alpha h_{\alpha\nu}(x) - \partial_\nu \partial^\alpha h_{\alpha\mu}(x) + \partial_\mu \partial_\nu h^\alpha{}_\alpha(x)\right) \quad (4.69)$$
- $$R(x) \simeq -\left(\Box h^\alpha{}_\alpha(x) - \partial^\alpha \partial^\beta h_{\alpha\beta}(x)\right) \quad (4.70)$$

La forme la plus générale du tenseur $G^{\mu\nu}(x)$ est alors donnée par :

$$G^{\mu\nu}(x) = a\, R^{\mu\nu}(x) + b\, g^{\mu\nu}(x)\, R(x) \quad (4.71)$$

Le rapport entre les deux coefficients arbitraires a et b est fixé pour l'imposition de l'équation (4.63).

En effet, en contractant l'identité de Bianchi (4.49) avec deux métriques on obtient, en utilisant le fait que $D_\alpha g^{\mu\nu}(x) = 0$, que :

$$g^{\mu\beta}(x)\, g^{\nu\gamma}(x) \left(D_\alpha R_{\mu\nu\beta\gamma}(x) + D_\beta R_{\mu\nu\gamma\alpha}(x) + D_\gamma R_{\mu\nu\alpha\beta}(x) \right) = 0$$

$$g^{\mu\beta}(x) \left(D_\alpha R_{\mu\beta}(x) - D_\beta R_{\mu\alpha}(x) + D^\nu R_{\mu\nu\alpha\beta}(x) \right) = 0$$

$$D_\alpha R(x) - 2 D^\tau R_{\tau\alpha}(x) = 0$$

On déduit que :

$$D_\mu R^{\mu\nu}(x) = \frac{1}{2} D^\nu R(x) \tag{4.72}$$

La divergence de (4.71) est alors donnée par :

$$D_\mu G^{\mu\nu}(x) = a D_\mu R^{\mu\nu}(x) + b D^\nu R(x)$$

$$= \left(\frac{a}{2} + b \right) D^\nu (x) \tag{4.73}$$

Le résultat est identiquement nul, comme requis par la (4.63), à condition que

$$b = - \frac{a}{2} \tag{4.74}$$

Le paramètre a est finalement fixé en demandant que dans le cas statique avec champs faibles la (4.61) reproduise bien la (4.60). Etant donné que dans cette limite :

$$G^{00} \to \Delta g^{00} \tag{4.75}$$

on trouve :

$$a = 1 \tag{4.76}$$

finalement, on trouve donc que l'équation (4.61) que nous cherchons est donnée par :

$$R^{\mu\nu}(x) - \frac{1}{2} g^{\mu\nu}(x)\, R(x) = \frac{8\pi G}{c^4}\, T^{\mu\nu}(x) \quad [10 \text{ équations}] \qquad (4.77)$$

En plus, on a :

$$\epsilon^{\delta\alpha\beta\gamma}\, D_\alpha R_{\mu\nu\beta\gamma}(x) = 0 \qquad [24 \text{ équations}] \qquad (4.78)$$

Les équations (4.77) et (4.78) sont les équations d'Einstein aux sources et aux propriétés, et décrivent la dynamique du champs gravitationnel.

Les équations (4.77) et (4.78) représentent en tout 34 équations pour les 20 composantes du champ gravitationnel $R_{\mu\nu\rho\sigma}(x)$. On peut toutefois résoudre les 24 équations (4.78) en introduisant le potentiel gravitationnel $g_{\mu\nu}(x)$. La (4.77) représente alors 10 équations pour les 10 composantes du potentiel $g_{\mu\nu}(x)$. Dans la limite de champs faibles, ces équations s'écrivent :

$$-\frac{1}{2}\Big[\Box h^{\mu\nu}(x) - \partial^\mu\partial_\alpha h^{\alpha\nu}(x) - \partial^\nu\partial_\alpha h^{\alpha\mu}(x) + \partial^\mu\partial^\nu h^\alpha{}_\alpha(x)$$

$$- \eta^{\mu\nu}\big(\Box h^\alpha{}_\alpha(x) - \partial_\alpha\partial_\beta h^{\alpha\beta}(x)\big)\Big] \simeq \frac{8\pi G}{c^4}\, T^{\mu\nu}(x) \qquad (4.79)$$

Les équations sont toutefois invariantes sous transformations générales de coordonnées de référentiel.

Dans la limite de champ faible, cette invariance correspondond aux transformations de jauge :

$$\delta h_{\mu\nu}(x) \hat{=} -\partial_\mu \xi_\nu(x) - \partial_\nu \xi_\mu(x) \qquad (4.80)$$

Pour résoudre l'equation, il est alors nécessaire de fixer une jauge pour éliminer la redondance (4.80).

Une jauge particulièrement utile est la jauge harmonique, où, en assumant que les champs sont faibles, $\xi_\mu(x)$ est choisi de telle façon que :

$$\partial_\mu h^{\mu\nu}(x) \hat{=} \frac{1}{2} \partial^\nu h^\alpha{}_\alpha(x) \qquad (4.81)$$

Dans cette jauge, l'equation (4.79) devient alors simplement :

$$\Box \left(h^{\mu\nu}(x) - \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} h^\alpha{}_\alpha(x) \right) \hat{=} -\frac{16\pi G}{c^4} T^{\mu\nu}(x) \qquad (4.82)$$

En prenant la trace de cette equation on déduit que $\Box h^\alpha{}_\alpha(x) = \frac{16\pi G}{c^4} T^{\mu\nu}(x)$, et ceci permet de récrire la (4.82) comme :

$$\Box h^{\mu\nu}(x) \hat{=} -\frac{16\pi G}{c^4} \left(T^{\mu\nu}(x) - \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} T^\alpha{}_\alpha(x) \right) \qquad (4.83)$$

L'equation (4.83) est la typique équation de D'alembert, qui donne comme solutions des ondes gravitationnelles.