

MECANIQUE QUANTIQUE AVANCEE

4. Espace-temps et groupes de symétries (33p.)

- 1.1 Généralités
- 1.2 Groupe des rotations
- 1.3 Invariants sous rotations
- 1.4 Représentations de l'algèbre des rotations
- 1.5 Groupe de Lorentz
- 1.6 Invariants de Lorentz
- 1.7 Représentations de l'algèbre de Lorentz

2. Mécanique quantique relativiste (85p.)

- 2.1 Généralités
- 2.2 Equation de Klein-Gordon pour scalaires
- 2.3 Solutions de l'équation de Klein-Gordon libre
- 2.4 Limite non-relativiste de l'équation de Klein-Gordon
- 2.5 Equation de Dirac pour spinéurs
- 2.6 Solutions de l'équation de Dirac libre
- 2.7 Limite non-relativiste de l'équation de Dirac

3. Particules et antiparticules (34p.)

- 3.1 Généralités
- 3.2 Particules / antiparticules de Klein-Gordon
- 3.3 Conjugaison de charge dans la théorie de Klein-Gordon
- 3.4 Particules / antiparticules de Dirac
- 3.5 Conjugaison de charge dans la théorie de Dirac

1 ESPACE TEMPS ET GROUPES DE SYMETRIE

1.1 Généralités

Les transformations correspondantes à des changements de référentiel inertiel permis par la relativité doivent représenter une symétrie de toute théorie physique. Pour cette raison, il est important de formaliser convenablement ce qu'elles représentent et impliquent.

- Plus précisément, ces transformations forment un groupe. Les vecteurs de position ou les champs utilisés pour décrire une théorie physique doivent alors pouvoir s'organiser en représentations de ce groupe, c'est-à-dire en vecteurs dont les composantes se mélangent entre elles sous une transformation. Les quantités physiques qui spécifient la théorie doivent au contraire être des invariants.
- Rappelons donc les définitions précises de groupe et de représentation.

Un groupe G est un ensemble $\{g\}$ muni d'une loi de composition satisfaisant les propriétés suivantes.

$$1) \quad g_1 \circ g_2 \in G \quad \forall g_1, g_2 \in G \quad [\text{loi de composition}] \quad (1.1)$$

$$2) \quad (g_1 \circ g_2) \circ g_3 = g_1 \circ (g_2 \circ g_3) \quad [\text{associativité}] \quad (1.2)$$

3) Il existe $e \in G$ tel que $e \circ g = g \circ e = g \quad \forall g \in G$ (1.3)

[élément neutre]

4) $\forall g \in G$ il existe $g^{-1} \in G$ tel que $g \circ g^{-1} = g^{-1} \circ g = e$ (1.4)

[élément inverse]

Un groupe est dit Abélien si tous éléments commutent. Dans le cas général contraire, il est dit non-Abélien.

Une représentation R_V du groupe G dans un espace vectoriel V est un homomorphisme

$$R_V : G \rightarrow V$$

qui fait correspondre à chaque $g \in G$ un opérateur linéaire $T(g)$ dans V , c'est-à-dire une application linéaire $T : V \rightarrow V$, avec les propriétés suivantes.

1) $T(e) = \mathbb{1}$

[élément neutre de $G \Leftrightarrow$ identité de V] (1.5)

2) $T(g_1 \circ g_2) = T(g_1) T(g_2)$ [composition de $G \Leftrightarrow$ produit de V] (1.6)

Il suit également que :

$$T(g) T(g^{-1}) = T(g \circ g^{-1}) = T(e) = \mathbb{1}$$

$$\Rightarrow T(g^{-1}) = T(g)^{-1} \quad [\text{inverse de } G \Leftrightarrow \text{inverse de } V] \quad (1.7)$$

Une représentation associe donc de façon unique une matrice dans un espace vectoriel à chaque élément d'un groupe.

Un groupe donné peut avoir de nombreuses représentations différentes R_V correspondantes à des espaces vectoriels V différents. Une représentation R_V est dite irréductible si elle ne peut pas être décomposée en deux représentations R_{V_1} et R_{V_2} qui agissent séparément sur deux sous-espaces V_1 et V_2 de V , et qu'il est donc impossible de choisir une base où toutes les matrices de R_V ont une forme diagonale en blocs.

Un groupe de Lie est un groupe G avec un nombre infini d'éléments $g(\alpha^i)$ donnés par une fonction continue d'un ensemble de paramètres $\alpha^i \in \mathbb{R}$. Un tel groupe possède une algèbre de Lie qui décrit les transformations infinitésimales, et par itération la partie connexe à l'identité. Plus précisément, les éléments u connexes à l'identité peuvent s'écrire comme :

$$u(\alpha^i) = e^{i \sum_{i=1}^n \alpha^i T_i} \tag{1.8}$$

dans le sens que pour toute représentation R_V on a :

$$T_V(u(\alpha^i)) = e^{i \sum_{i=1}^n \alpha^i T(T_i)} \tag{1.9}$$

On note que dans ce sous-groupe :

$$e = u(0) ; \quad u(\alpha^i)^{-1} = u(-\alpha^i) \tag{1.10}$$

Les éléments T_i sont appelés générateurs et peuvent être définis comme :

$$T_i = -i \frac{d u(\alpha^i)}{d \alpha^i} \Big|_{\alpha^j = 0} \tag{1.11}$$

L'algèbre est définie par les règles de commutation des générateurs T_i , qui sont univoquement fixées par la loi de composition du groupe :

$$u(\alpha^i) u(\beta^j) = u(\gamma^k), \text{ avec } \gamma^k = f^k(\alpha^i, \beta^j) \tag{1.12}$$

La forme de ces règles de commutation peut être définie en appliquant la formule de Campbell-Hausdorff :

$$e^A e^B = e^{A+B + \frac{1}{2}[A,B] + \dots} \tag{1.13}$$

Le membre de gauche de l'équation (1.12) peut être calculé en posant $A = i \sum_i \alpha^i T_i$, $B = i \sum_j \beta^j T_j$. On trouve :

$$u(\alpha^i) u(\beta^j) = e^{i \sum_k (\alpha^k + \beta^k) T_k + \frac{i^2}{2} \sum_k \sum_l \alpha^k \beta^l [T_k, T_l] + \dots} \tag{1.14}$$

Ceci est de la forme

$$u(\gamma^k) = e^{i \sum_k \gamma^k T_k} \tag{1.15}$$

à condition que :

$$[T_k, T_l] = i \sum_m f_{kl}^m T_m \tag{1.16}$$

avec

$$f_{kl}^m = -f_{lk}^m = \text{constantes de structure} \tag{1.17}$$

En comparant les equations (1.14) et (1.15) on deduit alors que la loi de composition (1.12) est effectivement realisee, avec :

$$\gamma^k = \alpha^k + \beta^k - \sum_{m,n} f_{mn}^k \alpha^m \beta^n + \dots \tag{1.18}$$

L'algebre de Lie est donc entièrement specifiée par les constantes de structure f_{ij}^k , qui tout comme la loi de composition du groupe associé sont indépendantes de la représentation.

On remarque qu'une succession infinie de transformations infinitesimales genere bien une transformation finie. En effet, en partant de A fini et en considerant $\frac{A}{N}$ infinitesimal pour $N \rightarrow \infty$, on trouve bien :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{A}{N}\right)^N = e^A \tag{1.18'}$$

Les representations du sous-groupe connexe à l'identité d'un groupe de Lie sont en correspondance avec des representations de l'algebre de Lie, dans le sens où les generateurs des transformations infinitesimales ont une certaine forme matricielle dans un espace vectoriel. Les propriétés définissant les éléments du groupe se traduisent en des propriétés des éléments de l'algebre.

Un concept très important est celui d'opérateur invariant sous une algèbre de Lie, c'est-à-dire un opérateur qui commute avec tous les générateurs de l'algèbre. Leur importance vient du Lemme de Schur : un opérateur qui commute avec tous les générateurs pour une représentation irréductible d'un groupe peut se diagonaliser avec une valeur propre unique. Un opérateur de ce type se réduit donc à l'identité pour un nombre, qui caractérise la représentation irréductible considérée.

1.2. Groupe des rotations

Considérons d'abord le groupe de transformations linéaires de coordonnées spatiales x^i laissant invariante la distance dans l'espace Euclidien en utilisant la convention que des indices identiques sont automatiquement sommés, la mesure de distance est :

$$\|X\|^2 = x^i \delta_{ij} x^j, \text{ avec } \delta_{ij} = \text{diag}(1, 1, 1) \quad (1.19)$$

Les transformations s'écrivent

$$x'^i = R^i_j x^j \quad (1.20)$$

et doivent préserver la distance (1.19) :

$$x'^i \delta_{ij} x'^j = x^i \delta_{ij} x^j \quad (1.21)$$

Ceci impose une contrainte sur R :

$$(R^i_m x^m) \delta_{ij} (R^j_n x^n) = x^i \delta_{ij} x^j$$

$$x^m (R^T_m{}^i \delta_{ij} R^j_n) x^n = x^m \delta_{mn} x^n$$

$$R^T_m{}^i \delta_{ij} R^j_n = \delta_{mn} \quad (1.22)$$

(c'est-à-dire :

$$R^T R = \mathbb{1} \Leftrightarrow R^{-1} = R^T \Leftrightarrow R R^T = \mathbb{1} \quad (1.23)$$

Il suit que :

$$(\det R)^2 = \mathbb{1} \rightarrow \det R = \pm 1 \quad (1.24)$$

Le groupe est appelé $O(3)$ et il a deux composants :

1) G_+ : rotations propres

$$\det R = +1$$

2) G_- : rotations impropres

$$\det R = -1$$

Des propriétés du déterminant il suit immédiatement que pour la composition de deux transformations

$$\det(R_1 R_2) = \det R_1 \det R_2 \quad (1.25)$$

Ceci implique que :

$$\text{si } \det(R_1) = +1 \text{ et } \det(R_2) = +1 \Rightarrow \det(R_1 R_2) = +1$$

$\Rightarrow G_+$ est un sous-groupe (propres)

Le sous-groupe des transformations propres avec $\det R = +1$ est connexe à l'identité. Il contient les rotations propres et se dénote par $SO(3)$. Ces transformations peuvent s'écrire :

$$R(\alpha_i) = e^{i\alpha_i J_i} = 1 + i\alpha_i J_i + \dots \quad (1.26)$$

Où α_i réel.

$$1) \det R = +1 \Rightarrow e^{i\alpha_i \text{tr} J_i} = +1 \Rightarrow \text{tr} J_i = 0$$

$$2) R^{-1} = R^T \Rightarrow e^{-i\alpha_i J_i} = e^{i\alpha_i J_i^T} \Rightarrow J_i^T = -J_i \quad (1.27)$$

$$3) R^* = R \Rightarrow e^{-i\alpha_i J_i^*} = e^{i\alpha_i J_i} \Rightarrow J_i^* = -J_i$$

Les conclusions sont facilement vérifiées pour α infinitésimal, mais restent vraies même pour α fini.

On peut donc choisir comme base pour les J_i :

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.28)$$

c'est-à-dire (a : ligne, b : colonne):

$$(J_i)^a b = -i \epsilon_{i a b} \quad (1.29)$$

L'algèbre de $SO(3)$ est déterminée en calculant les règles de commutation de ces générateurs. On trouve:

$$[J_1, J_2] = i J_3, \quad [J_1, J_3] = -i J_2, \quad [J_2, J_3] = i J_1 \quad (1.30)$$

c'est-à-dire:

$$[J_i, J_j] = i \epsilon_{ij k} J_k \quad (1.31)$$

Les éléments J_i génèrent des rotations autour de chaque axe. Plus précisément, une rotation d'angle α autour de l'axe x^i s'écrit comme:

$$R(\alpha^i) = e^{i \alpha^i J_i} \quad (\text{indices non-sommés}) \quad (1.32)$$

En effet, pour le bloc 2×2 non banal du traceur:

$$\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}^{2k} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}^{2k+1} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

Donc :

$$\exp \left\{ i\alpha \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \right\} = \cos\alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + i \sin\alpha \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Le sous-ensemble de transformations propres avec $\det R = -1$ contient des réflexions. En particulier, il contient l'opération de parité :

$$R_p = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{1.33}$$

La transformation R_p ne peut pas être obtenue à partir de transformations infinitésimales : c'est une transformation discrète. Elle génère un sous-groupe discret :

$$\mathbb{Z}_2^P = \{ \mathbb{1}, R_p \} \tag{1.34}$$

avec

	$\mathbb{1}$	R_p
$\mathbb{1}$	$\mathbb{1}$	R_p
R_p	R_p	$\mathbb{1}$

Le sous-groupe est le centre, c'est-à-dire le sous-groupe des éléments qui commutent avec tous les autres, de $O(3)$.

Tout élément de $O(3)$ peut être décomposé en un élément de $SO(3)$ et une transformation discrète de Z_2^P . Donc :

$$O(3)/SO(3) = Z_2^P \quad (1.35)$$

1.3 Invariants sous rotations

Il y a deux tenseurs invariants ou pseudo-invariants sous rotations :

- δ_{ij} = métrique $(\delta_{11} = \delta_{22} = \delta_{33} = +1)$
 - ϵ_{ijk} = tenseur de Levi-Civita $(\epsilon_{123} = +1)$
- (1.36)

Ils satisfont les propriétés suivantes :

- $\delta_{ij} R^i_m R^j_n = \delta_{mn} \Rightarrow \delta$ invariant sous $O(3)$
 - $\epsilon_{ijk} R^i_m R^j_n R^k_q = \det R \epsilon_{mnp} \Rightarrow \epsilon$ invariant sous $SO(3)$
- (1.37)

Ceci permet de construire deux types d'invariants ou pseudo-invariants :

- Produits scalaires avec $\delta \Rightarrow$ invariants sous $O(3)$
- Produits vectoriels avec $\epsilon \Rightarrow$ invariants sous $SO(3)$

On a les propriétés suivantes

- 1) $\delta_{ij} \delta_{pq} = \delta_{ij} \delta_{pq}$
 - 2) $\delta_{ij} \delta^i_q = \delta_{iq}$
 - 3) $\delta_{ij} \delta^{ij} = 3$
- (1.38)

ainsi que

$$1) \epsilon_{ijk} \epsilon_{pqr} = \begin{vmatrix} \delta_{ip} & \delta_{iq} & \delta_{ir} \\ \delta_{jp} & \delta_{jq} & \delta_{jr} \\ \delta_{kp} & \delta_{kq} & \delta_{kr} \end{vmatrix}$$

$$2) \epsilon_{ijk} \epsilon^k_{pq} = \begin{vmatrix} \delta_{ip} & \delta_{iq} \\ \delta_{jp} & \delta_{jq} \end{vmatrix}$$

(1.38')

$$3) \epsilon_{ijk} \epsilon^{jk}_q = 2 \delta_{iq}$$

$$4) \epsilon_{ijk} \epsilon^{ijk} = 6$$

1.4 Représentations de l'algèbre des rotations

L'algèbre des rotations $SO(3)$ est :

$$[J_i, J_j] = i \epsilon_{ijk} J_k \quad (1.39)$$

C'est la même algèbre que celle de $SU(2)$, qui est importante en mécanique quantique pour le moment angulaire. Il existe un seul opérateur invariant, ou Casimir, qui est donné par :

$$J^2 = \delta_{ij} J_i J_j \quad \text{Casimir} \quad (1.40)$$

En effet, on vérifie que :

$$\begin{aligned} [J_i, J^2] &= [J_i, J_j J_j] = [J_i, J_j] J_j + J_j [J_i, J_j] \\ &= i \epsilon_{ijk} J_k J_j + J_j i \epsilon_{ikj} J_k \\ &= i \epsilon_{ijk} J_k J_j + i \epsilon_{ijk} J_j J_k \\ &= i \epsilon_{ikj} J_j J_k + i \epsilon_{ijh} J_j J_h \\ &= -i \epsilon_{ijk} J_j J_k + i \epsilon_{ijh} J_j J_h \\ &= 0 \end{aligned}$$

Les représentations irréductibles sont classifiées par la valeur propre de cet opérateur, qui est quantifiée en terme d'un nombre semi-entier j , le spin :

$$J^2 = j(j+1) \mathbb{1} \quad (1.41)$$

En outre, on peut toujours diagonaliser un des générateurs, disons T_3 , avec valeurs propres allant de $-j$ à $+j$ par sauts entiers. La représentation de $\mathfrak{su}(n)$ a donc dimension $2j+1$. Les premières sont :

$$j=0: \text{ dim } 1 \quad \Sigma_1 = 0, \Sigma_2 = 0, \Sigma_3 = 0$$

$$j=\frac{1}{2}: \text{ dim } 2 \quad \Sigma_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \Sigma_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \Sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$j=1: \text{ dim } 3 \quad \Sigma_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \Sigma_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \Sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Il existe également une représentation de dimension infinie sur un espace fonctionnel. En effet, pour $R_j^i = S_j^i + r_j^i$:

$$\begin{aligned} f(x^i) &= f(x^i + (rx)^i) = \mathbb{1} + (rx)^a J_a f(x^i) + \frac{1}{2!} (rx)^a (rx)^b J_a J_b f(x^i) \\ &= e^{(rx)^a J_a} f(x^i) = e^{-\frac{1}{2} rab (X^a J^b - X^b J^a)} f(x^i) \\ &= e^{-\frac{1}{2} rab (S_p^a S_q^b - S_q^a S_p^b)} X^p J^q f(x^i) = e^{-\frac{1}{2} rab \epsilon^{ab i} \epsilon_{ipq} X^p J^q} f(x^i) \\ &= e^{-i \left(\frac{1}{2} \epsilon^{iab} rab \right) (-i \epsilon_{ipq} X^p J^q)} f(x^i) \end{aligned}$$

Il suit que les générateurs sont représentés par :

$$L_i = -i \epsilon_{ijk} X_j J_k \quad (1.42)$$

On vérifie facilement que l'algèbre est effectivement réifiée :

$$\begin{aligned} [L_i, L_j] &= -\epsilon_{imn} X^m J^n \epsilon_{jpp} X^p J^q + \epsilon_{jmn} X^m J^n \epsilon_{ipp} X^p J^q \\ &= -\epsilon_{imn} \epsilon_{jpp} X^m J^n X^p J^q + \epsilon_{jmn} \epsilon_{ipp} X^m J^n X^p J^q \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \epsilon_{imn} \epsilon_{jq}^n X^m \rangle q - \epsilon_{jmn} \epsilon_{iq}^n X^m \rangle q \\
&= (\cancel{\delta_{ij} \delta_{mq}} - \delta_{iq} \delta_{mj}) X^m \rangle q - (\cancel{\delta_{ji} \delta_{mq}} - \delta_{jq} \delta_{im}) X^m \rangle q \\
&= -(\delta_{iq} \delta_{mj} - \delta_{jq} \delta_{im}) X^m \rangle q = \epsilon_{ijp} \epsilon_{pmq} X^m \rangle q \\
&= i \epsilon_{ijp} L_p
\end{aligned}$$

La représentation la plus générale est obtenue en ajoutant la représentation fonctionnelle de dimension finie et une des représentations de dimension finie :

$$J_i = L_i + \Sigma_i \quad (1.42')$$

1.5 Groupe de Lorentz

Le groupe de Lorentz est le groupe de transformations linéaires de coordonnées $X^\mu = (X^0, X^i)$ de l'espace-temps laissant invariant l'intervalle dans l'espace de Minkowski. En utilisant à nouveau la convention des indices identiques automatiquement soulevés, la mesure d'intervalle est

$$\|X\|^2 = X^\mu \eta_{\mu\nu} X^\nu, \text{ avec } \eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1) \quad (1.43)$$

Les transformations s'écrivent

$$X'^\mu = \Lambda^\mu_\nu X^\nu \quad (1.44)$$

et doivent préserver l'intervalle (1.34) :

$$X'^\mu \eta_{\mu\nu} X'^\nu = X^\mu \eta_{\mu\nu} X^\nu \quad (1.45)$$

Ceci impose une contrainte sur Λ :

$$(\Lambda^\mu_\alpha X^\alpha) \eta_{\mu\nu} (\Lambda^\nu_\beta X^\beta) = X^\mu \eta_{\mu\nu} X^\nu$$

$$X^\alpha (\Lambda^T_{\alpha\mu} \eta_{\mu\nu} \Lambda^\nu_\beta) X^\beta = X^\alpha \eta_{\alpha\beta} X^\beta$$

$$\Lambda^T_{\alpha\mu} \eta_{\mu\nu} \Lambda^\nu_\beta = \eta_{\alpha\beta} \quad (1.46)$$

c'est-à-dire :

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta \Leftrightarrow \Lambda^{-1} = \eta \Lambda^T \eta \Leftrightarrow \Lambda \eta \Lambda^T = \eta \quad (1.47)$$

Les contraintes (1.47) impliquent :

$$a) \det \Lambda^2 = 1 \Rightarrow \det \Lambda = \pm 1 \quad (1.48)$$

$$b) (\Lambda^T \eta \Lambda)^0_0 = 1 \Rightarrow (\Lambda^0_0)^2 - \sum_{k=1}^3 (\Lambda^k_0)^2 = 1$$

$$(\Lambda \eta \Lambda^T)^0_0 = 1 \Rightarrow (\Lambda^0_0)^2 - \sum_{k=1}^3 (\Lambda^0_k)^2 = 1$$

$$\Rightarrow (\Lambda^0_0)^2 = 1 + \sum_{k=1}^3 (\Lambda^k_0)^2 = 1 + \sum_{k=1}^3 (\Lambda^0_k)^2 \geq 1$$

$$\Rightarrow \Lambda^0_0 \geq +1 \text{ ou } \Lambda^0_0 \leq -1$$

Pour la quantité $\epsilon(\Lambda) = \frac{\Lambda^0_0}{|\Lambda^0_0|}$ on a donc :

$$\epsilon(\Lambda) = \pm 1 \quad (1.49)$$

Le groupe est appelé $O(1,3)$, parce qu'il préserve une distance définie avec une métrique contenant 1 signe + et 3 signes -. Il a 4 composantes :

1) L_+^\uparrow : transformations de Lorentz propres orthochrones

$$\det \Lambda = +1, \quad \epsilon(\Lambda) = +1$$

2) L_+^\downarrow : transformations de Lorentz propres non-orthochrones

$$\det \Lambda = +1, \quad \epsilon(\Lambda) = -1$$

3) L_-^\uparrow : transformations de Lorentz impropres orthochrones

$$\det \Lambda = -1, \quad \epsilon(\Lambda) = +1$$

4) L_-^\downarrow : transformations de Lorentz impropres non-orthochrones

$$\det \Lambda = -1, \quad \epsilon(\Lambda) = -1$$

Des propriétés du déterminant il suit immédiatement que pour la composition de deux transformations :

$$\det(A_1 A_2) = \det A_1 \det A_2 \quad (1.50)$$

De même, le signe de la composante 1^o satisfait la propriété :

$$\epsilon(A_1 A_2) = \epsilon(A_1) \epsilon(A_2) \quad (1.51)$$

En effet :

$$\begin{aligned} (A_1 A_2)^0 &= A_1^0 A_2^0 + \sum_{k=1}^3 A_1^0 k A_2^k \\ &= \epsilon(A_1) \epsilon(A_2) \sqrt{1 + \sum_{k=1}^3 (A_1^0 k)^2} \sqrt{1 + \sum_{k=1}^3 (A_2^k o)^2} \\ &\quad + \sum_{k=1}^3 A_1^0 k A_2^k o \end{aligned}$$

Il y a deux cas à vérifier :

a) Si $\epsilon(A_1) \epsilon(A_2) = +1$, alors :

$$\begin{aligned} (A_1 A_2)^0 &\stackrel{[\vec{x} \cdot \vec{y} \geq -|\vec{x}||\vec{y}|]}{\geq} \sqrt{1 + \sum_{k=1}^3 (A_1^0 k)^2} \sqrt{1 + \sum_{k=1}^3 (A_2^k o)^2} - \sum_{k=1}^3 |A_1^0 k A_2^k o| \\ &\stackrel{[|\vec{x} \cdot \vec{y}| \leq |\vec{x}||\vec{y}|]}{\geq} \sqrt{1 + \sum_{k=1}^3 (A_1^0 k)^2} \sqrt{1 + \sum_{k=1}^3 (A_2^k o)^2} - \sqrt{\sum_{k=1}^3 (A_1^0 k)^2} \sqrt{\sum_{k=1}^3 (A_2^k o)^2} \\ &\stackrel{[1+|x|^2 \sqrt{1+|y|^2} \geq |x||y|]}{\geq} 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \epsilon(A_1 A_2) = +1$$

b) Si $E(\Lambda_1) E(\Lambda_2) = -1$, alors :

$$\begin{aligned}
 (\Lambda_1 \Lambda_2)_0^0 & \stackrel{[\vec{x} \cdot \vec{y} \leq |\vec{x}| |\vec{y}|]}{\leq} - \sqrt{1 + \sum_{k=1}^3 (\Lambda_{1,0}^k)^2} \sqrt{1 + \sum_{k=1}^3 (\Lambda_{2,0}^k)^2} + \sum_{k=1}^3 |\Lambda_{1,0}^k \Lambda_{2,0}^k| \\
 & \stackrel{[|\vec{x}| |\vec{y}| \leq |\vec{x}| |\vec{y}|]}{\leq} - \sqrt{1 + \sum_{k=1}^3 (\Lambda_{1,0}^k)^2} \sqrt{1 + \sum_{k=1}^3 (\Lambda_{2,0}^k)^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^3 (\Lambda_{1,0}^k)^2} \sqrt{\sum_{k=1}^3 (\Lambda_{2,0}^k)^2} \\
 & \stackrel{[|\vec{x}| |\vec{y}| \leq \sqrt{1+|\vec{x}|^2} \sqrt{1+|\vec{y}|^2}]}{\leq} 0
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow E(\Lambda_1 \Lambda_2) = -1$$

Les propriétés (1.50) et (1.51) nous disent que :

1) Si $\det(\Lambda_1) = +1$ et $\det(\Lambda_2) = +1 \Rightarrow \det(\Lambda_1 \Lambda_2) = +1$

$\Rightarrow \mathcal{L}_+ = \mathcal{L}_+^{\uparrow} \cup \mathcal{L}_+^{\downarrow}$ est un sous-groupe (propres)

2) Si $E(\Lambda_1) = +1$ et $E(\Lambda_2) = +1 \Rightarrow E(\Lambda_1 \Lambda_2) = +1$

$\Rightarrow \mathcal{L}^{\uparrow} = \mathcal{L}_+^{\uparrow} \cup \mathcal{L}_-^{\uparrow}$ est un sous-groupe (orthogonaux)

3) On peut combiner ces deux propriétés :

$\Rightarrow \mathcal{L}_+^{\uparrow} = \mathcal{L}_+ \cap \mathcal{L}^{\uparrow}$ est un sous-groupe (propres orthogonaux)

Le sous-groupe des transformations propres orthocrones, avec $\det \Lambda = +1$ et $\epsilon(\Lambda) = +1$ est connexe à l'identité. Il contient les rotations et les glissements propres, et se désigne par $SO_0(1,3)$. Les transformations peuvent s'écrire comme :

$$\Lambda(\alpha^{\mu\nu}) = e^{i\alpha^{\mu\nu} M_{\mu\nu}} = \mathbb{1} + i\alpha^{\mu\nu} M_{\mu\nu} + \dots \quad (1.52)$$

On suppose ($\alpha^{\mu\nu}$ réel)

$$1) \quad \det \Lambda = +1 \Rightarrow e^{i\alpha^{\mu\nu} \text{tr} M_{\mu\nu}} = +1 \Rightarrow \text{tr} M_{\mu\nu} = 0$$

$$2) \quad \Lambda^{-1} = \eta \Lambda^T \eta \Rightarrow e^{-i\alpha^{\mu\nu} M_{\mu\nu}} = e^{i\alpha^{\mu\nu} \eta M_{\mu\nu}^T \eta} \Rightarrow M_{\mu\nu}^T = -\eta M_{\mu\nu} \eta \quad (1.53)$$

$$3) \quad \Lambda^* = \Lambda \Rightarrow e^{-i\alpha^{\mu\nu} M_{\mu\nu}^*} = e^{i\alpha^{\mu\nu} M_{\mu\nu}} \Rightarrow M_{\mu\nu}^* = -M_{\mu\nu}$$

On peut donc prendre la base suivante pour les $T_{\mu\nu}$:

$$M_{01} = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_{02} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_{03} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad (1.54)$$

c'est-à-dire (α : ligne, β : colonne) :

$$(M_{\mu\nu})^\alpha_\beta = -i (\eta_{\mu\beta} \delta^\alpha_\nu - \eta_{\nu\beta} \delta^\alpha_\mu) \quad (1.55)$$

L'algèbre de $SO_0(1,3)$ est déterminée en calculant toutes les règles de commutations entre ces générateurs. Il est possible de le faire directement à partir de la forme génératrice (1.55). On trouve :

$$\begin{aligned}
 [M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}]^{\alpha\beta} &= (M_{\mu\nu})^{\alpha\gamma} (M_{\rho\sigma})^{\gamma\beta} - (M_{\rho\sigma})^{\alpha\gamma} (M_{\mu\nu})^{\gamma\beta} \\
 &= -(\eta_{\mu\gamma} \delta_\nu^\alpha - \eta_{\nu\gamma} \delta_\mu^\alpha) (\eta_{\rho\beta} \delta_\sigma^\gamma - \eta_{\sigma\beta} \delta_\rho^\gamma) \\
 &\quad + (\eta_{\rho\gamma} \delta_\sigma^\alpha - \eta_{\sigma\gamma} \delta_\rho^\alpha) (\eta_{\mu\beta} \delta_\nu^\gamma - \eta_{\nu\beta} \delta_\mu^\gamma) \\
 &= -\eta_{\mu\sigma} \eta_{\rho\beta} \delta_\nu^\alpha + \eta_{\nu\sigma} \eta_{\rho\beta} \delta_\mu^\alpha \\
 &\quad + \eta_{\mu\beta} \eta_{\sigma\rho} \delta_\nu^\alpha - \eta_{\nu\beta} \eta_{\sigma\rho} \delta_\mu^\alpha \\
 &\quad + \eta_{\rho\nu} \eta_{\mu\beta} \delta_\sigma^\alpha - \eta_{\sigma\nu} \eta_{\mu\beta} \delta_\rho^\alpha \\
 &\quad - \eta_{\rho\mu} \eta_{\nu\beta} \delta_\sigma^\alpha + \eta_{\sigma\mu} \eta_{\nu\beta} \delta_\rho^\alpha \\
 &= -\eta_{\mu\sigma} (\eta_{\rho\beta} \delta_\nu^\alpha - \eta_{\nu\beta} \delta_\rho^\alpha) + \eta_{\nu\sigma} (\eta_{\rho\beta} \delta_\mu^\alpha - \eta_{\mu\beta} \delta_\rho^\alpha) \\
 &\quad + \eta_{\mu\beta} (\eta_{\sigma\rho} \delta_\nu^\alpha - \eta_{\nu\beta} \delta_\sigma^\alpha) - \eta_{\nu\beta} (\eta_{\sigma\rho} \delta_\mu^\alpha - \eta_{\mu\beta} \delta_\sigma^\alpha) \\
 &= -\eta_{\mu\sigma} i(M_{\rho\nu})^{\alpha\beta} + \eta_{\nu\sigma} i(M_{\rho\mu})^{\alpha\beta} + \eta_{\mu\beta} i(M_{\sigma\rho})^{\alpha\beta} - \eta_{\nu\beta} i(M_{\sigma\mu})^{\alpha\beta}
 \end{aligned}$$

Donc :

$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = -i (\eta_{\mu\beta} M_{\rho\nu} - \eta_{\nu\beta} M_{\rho\mu} - \eta_{\mu\sigma} M_{\rho\beta} + \eta_{\nu\sigma} M_{\rho\beta}) \quad (1.56)$$

Les éléments M_{ij} génèrent des rotations autour des axes, tandis que les éléments T_{0i} génèrent des glissements. On peut définir :

$$\begin{aligned} J_i &= \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} M_{jk} && (\text{rotations}) \\ K_i &= M_{0i} && (\text{glissement}) \end{aligned} \quad (1.57)$$

De cette façon l'algèbre (1.56) se réécrit comme :

$$\begin{aligned} [J_i, J_j] &= i \epsilon_{ijk} J_k \\ [K_i, K_j] &= -i \epsilon_{ijk} J_k \\ [J_i, K_j] &= i \epsilon_{ijk} K_k \end{aligned} \quad (1.58)$$

Une rotation d'angle α^i autour de l'axe x^i s'écrit :

$$R(\alpha^i) = e^{i \alpha^i J_i} \quad (\text{indices non sommés}) \quad (1.59)$$

En effet, on a comme avant

$$\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}^{2k} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}^{2k+1} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

et donc :

$$\begin{aligned} \exp \left\{ i \alpha \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \right\} &= \cos \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + i \sin \alpha \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Un glissement de rapidité δ_i le long de l'axe x_i s'écrit:

$$G(\delta_i) = e^{-i\delta_i K_i} \quad (\text{indices non-sommés}) \quad (1.60)$$

En effet, pour le bloc 2×2 non banal on a

$$\begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}^{2k} = (-1)^k \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}^{2k+1} = (-1)^k \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$

et donc

$$\begin{aligned} \exp \left\{ -i\delta_i \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \right\} &= \cosh \delta_i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - i \sinh \delta_i \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cosh \delta_i & -\sinh \delta_i \\ -\sinh \delta_i & \cosh \delta_i \end{pmatrix} \end{aligned}$$

En se rappelant que la rapidité δ_i est reliée à la vitesse v_i par la relation

$$\delta_i = \operatorname{arctanh} \frac{v_i}{c}$$

et que

$$\cosh \delta_i = \frac{1}{\sqrt{1 - \tanh^2 \delta_i}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_i^2}{c^2}}} = \gamma$$

$$\sinh \delta_i = \frac{\tanh \delta_i}{\sqrt{1 - \tanh^2 \delta_i}} = \frac{v_i/c}{\sqrt{1 - \frac{v_i^2}{c^2}}} = \frac{v_i}{c} \gamma$$

on retrouve la forme usuelle des transformations de glissement :

$$\exp\left\{-i \delta i \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}\right\} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & -v/c \\ -v/c & 1 \end{pmatrix}$$

Le sous-ensemble des transformations propres orthochrones avec $\det \Lambda = -1$ et $\epsilon(\Lambda) = +1$ contient des réflexions spatiales. En particulier, il contient la parité

$$\Lambda_P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.61)$$

Le sous ensemble des transformations propres non orthochrones avec $\det \Lambda = -1$ et $\epsilon(\Lambda) = -1$ contient des inversions du temps. En particulier :

$$\Lambda_T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.62)$$

Le sous-ensemble des transformations propres non orthogonales, avec $\det A = +1$ et $\epsilon(A) = -1$, finalement, comprennent des renversements d'espace-temps. Par exemple:

$$\Lambda_{PT} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.63)$$

Les transformations Λ_P , Λ_T et Λ_{PT} ne peuvent pas être obtenues à partir de transformations infinitésimales: ce sont des transformations discrètes. Elles génèrent des sous-groupes discrets de $O(1,3)$:

$$\mathbb{Z}_2^P = \{ \mathbb{1}, \Lambda_P \}$$

$$\mathbb{Z}_2^T = \{ \mathbb{1}, \Lambda_T \}$$

(1.64)

avec:

	$\mathbb{1}$	Λ_P
$\mathbb{1}$	$\mathbb{1}$	Λ_P
Λ_P	Λ_P	$\mathbb{1}$

	$\mathbb{1}$	Λ_T
$\mathbb{1}$	$\mathbb{1}$	Λ_T
Λ_T	Λ_T	$\mathbb{1}$

L'union de ces deux groupes donne le sous-groupe de toutes les transformations discrètes

$$\mathbb{Z}_2^P \times \mathbb{Z}_2^T = \{ \mathbb{1}, \Lambda_P, \Lambda_T, \Lambda_{PT} \}$$

(1.65)

avec :

	$\mathbb{1}$	Λ_P	Λ_T	Λ_{PT}
$\mathbb{1}$	$\mathbb{1}$	Λ_P	Λ_T	Λ_{PT}
Λ_P	Λ_P	$\mathbb{1}$	Λ_{PT}	Λ_T
Λ_T	Λ_T	Λ_{PT}	$\mathbb{1}$	Λ_P
Λ_{PT}	Λ_{PT}	Λ_T	Λ_P	$\mathbb{1}$

Le centre de $O(1,3)$ est lui

$$Z_2^{PT} = \{ \mathbb{1}, \Lambda_{PT} \} \quad (1.66)$$

avec

	$\mathbb{1}$	Λ_{PT}
$\mathbb{1}$	$\mathbb{1}$	Λ_{PT}
Λ_{PT}	Λ_{PT}	$\mathbb{1}$

Tout élément de $O(1,3)$ peut être décomposé en un élément de $SO_0(1,3)$ et des éléments de Z_2^P et Z_2^T . On a clairement :

$$L / L_+ = Z_2^P$$

$$L / L^\uparrow = Z_2^T$$

$$L / L_+^\uparrow = Z_2^P \times Z_2^T \quad (1.67)$$

1.6 Invariants de Lorentz

Il y a deux tenseurs invariants ou pseudo-invariants sous transformations de Lorentz :

- $\eta_{\mu\nu}$ = métrique $(\eta_{00} = +1, \eta_{11} = \eta_{22} = \eta_{33} = -1)$
- $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ = tenseur de Levi-Civita gén. $(\epsilon_{0123} = +1)$ (1.68)

Ils satisfont les propriétés suivantes :

- $\eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta = \eta_{\alpha\beta} \Rightarrow \eta$ invariant sous $O(1,3)$
- $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta \Lambda^\rho_\gamma \Lambda^\sigma_\delta = \det \Lambda \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \Rightarrow \epsilon$ invariant sous $SO(1,3)$ (1.69)

Ceci permet de construire deux types d'invariants ou pseudo invariants :

- Produits scalaires avec $\eta \Rightarrow$ invariants sous $O(1,3)$
- Produits vectoriels avec $\epsilon \Rightarrow$ invariants sous $SO(1,3)$

On a les propriétés suivantes :

- 1) $\eta_{\mu\nu} \eta^{\rho\sigma} = \eta_{\mu\nu} \eta_{\sigma\rho}$
- 2) $\eta_{\mu\nu} \eta^{\nu\rho} = \eta_{\mu\rho}$ (1.70)
- 3) $\eta_{\mu\nu} \eta^{\mu\nu} = 4$

entusi que :

$$1) \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = - \begin{vmatrix} \eta_{\mu\alpha} & \eta_{\mu\beta} & \eta_{\mu\gamma} & \eta_{\mu\delta} \\ \eta_{\nu\alpha} & \eta_{\nu\beta} & \eta_{\nu\gamma} & \eta_{\nu\delta} \\ \eta_{\rho\alpha} & \eta_{\rho\beta} & \eta_{\rho\gamma} & \eta_{\rho\delta} \\ \eta_{\sigma\alpha} & \eta_{\sigma\beta} & \eta_{\sigma\gamma} & \eta_{\sigma\delta} \end{vmatrix}$$

$$2) \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon^{\sigma\alpha\beta\gamma} = \begin{vmatrix} \eta_{\mu\alpha} & \eta_{\mu\beta} & \eta_{\mu\gamma} \\ \eta_{\nu\alpha} & \eta_{\nu\beta} & \eta_{\nu\gamma} \\ \eta_{\rho\alpha} & \eta_{\rho\beta} & \eta_{\rho\gamma} \end{vmatrix}$$

$$3) \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon^{\rho\sigma\alpha\beta} = -2 \begin{vmatrix} \eta_{\mu\alpha} & \eta_{\mu\beta} \\ \eta_{\nu\alpha} & \eta_{\nu\beta} \end{vmatrix}$$

(1.71)

$$4) \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon^{\rho\sigma\alpha} = 6 \eta_{\mu\alpha}$$

$$5) \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = -24$$

1.7 Représentations de l'algèbre de Lorentz

l'algèbre des transformations de Lorentz $SU(1,3)$ est

$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = -i (\eta_{\mu\rho} M_{\nu\sigma} - \eta_{\nu\rho} M_{\mu\sigma} - \eta_{\mu\sigma} M_{\nu\rho} + \eta_{\nu\sigma} M_{\mu\rho}) \quad (1.72)$$

Il y a deux opérateurs invariants:

$$M^2 = \eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} M_{\mu\nu} M_{\alpha\beta}$$

$$MM^{\tilde{}} = \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} M_{\mu\nu} M_{\alpha\beta}$$

: Casimirs

(1.73)

Nous avons vu que l'algèbre peut être décomposée en distinguant temps et espace et définissant:

$$J_i = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} M_{jk}$$

$$K_i = M_{0i}$$

(1.74)

De cette façon, on obtient:

$$[J_i, J_j] = i \epsilon_{ij}{}^k J_k$$

$$[K_i, K_j] = -i \epsilon_{ij}{}^k J_k$$

$$[J_i, K_j] = [K_i, J_j] = i \epsilon_{ij}{}^k K_k$$

(1.75)

Les Casimirs sont alors donnés par $M^2 = 2(J^2 - K^2)$ et

$$MM^{\tilde{}} = 4(J \cdot K + K \cdot J), \text{ ou}$$

$$J^2 - K^2 = \delta_{ij} (J^i J^j - K^i K^j)$$

$$J \cdot K + K \cdot J = \delta_{ij} (J^i K^j + K^i J^j)$$

: Casimirs

(1.76)

Une forme plus utile de cette algèbre est obtenue en définissant les combinaisons complexes de générateurs,

$$N_i^+ = \frac{1}{2} (J_i + i K_i)$$

$$N_i^- = \frac{1}{2} (J_i - i K_i)$$

(1.77)

On vérifie facilement que l'algèbre se réécrit alors comme :

$$[N_i^+, N_j^+] = i \epsilon_{ij}^k N_k^+$$

$$[N_i^-, N_j^-] = i \epsilon_{ij}^k N_k^-$$

(1.78)

$$[N_i^+, N_j^-] = 0$$

On trouve donc deux algèbres de $SU(2)$ indépendantes.

On dit que $SO(1,3)$ et $SU(2) \times SU(2)$ sont deux formes complexes d'une même algèbre : les deux $SU(2)$ sont reliés par la parité P qui agit comme $J \leftrightarrow J$ et $K \leftrightarrow -K$, et donc :

$$P: N^+ \leftrightarrow N^-$$

(1.79)

Par suite, les J_i et K_i étaient bien liés par rapport au produit scalaire dans l'espace de Minkowski, les N^+ et N^- ne sont donc pas des générateurs indépendants :

$$\text{conjugaison hermitique : } N^+ \leftrightarrow N^-$$

(1.80)

Les deux Casimirs demeurent simplement $J^2 - K^2 = 2(N^{\dagger 2} + N^{-2})$ et $\{K+K\} = -2i(N^{\dagger 2} - N^{-2})$. On peut donc utiliser les deux Casimirs des deux facteurs $SU(2)$:

$$N^{\dagger 2} = S_{ij} N^{\dagger i} N^{\dagger j}$$

$$N^{-2} = S_{ij} N^{-i} N^{-j}$$

(Casimirs) (1.81)

Les représentations de l'algèbre de Lorentz peuvent être déduites de celles de la forme complexe $SU(2) \times SU(2)$.

Elles sont indexées par les deux "spin" semi-entiers j^+ et j^- sous ces deux facteurs $SU(2)$. La représentation (j^+, j^-) a dimension $(2j^+ + 1)(2j^- + 1)$. Son spin

j par rapport au sous-groupe $SU(2)$ diagonal associé aux rotations $SO(3)$ est donné par $j = j^+ + j^-$.

En effet, $J_3 = N_3^{\dagger} + N_3^{-}$ et donc $J_3 = N_3^{\dagger} + N_3^{-}$. Étant donné que N_3^{\dagger} va de $-j^+$ à j^+ et N_3^{-} de $-j^-$ à j^- , J_3 va de $-(j^+ + j^-)$ à $(j^+ + j^-)$ et donc $j = j^+ + j^-$. Toutefois,

le spin est un Casimir du sous-groupe des rotations seulement. Il existe en fait une définition plus précise du spin dans le contexte du groupe de Poincaré. Les premières représentations sont :

$$(j^+, j^-) = (0, 0) : \text{dim } 1, \text{ spin } 0 \Rightarrow \text{scalaire}$$

$$(j^+, j^-) = (1/2, 0) : \text{dim } 2, \text{ spin } 1/2 \Rightarrow \text{spinor d'axe}$$

$$(j^+, j^-) = (0, 1/2) : \text{dim } 2, \text{ spin } 1/2 \Rightarrow \text{spinor anti-axe}$$

$$(j^+, j^-) = (1/2, 1/2) : \text{dim } 4, \text{ spin } 1 \Rightarrow \text{vecteur}$$

Il existe également une représentation de dimension infinie sur un espace fonctionnel. En effet, pour $A^{\mu}_r = \delta^{\mu}_r + \omega^{\mu}_r$:

$$\begin{aligned} f(X'^{\mu}) &= f(X^{\mu} + (\omega X)^{\mu}) = 1 + (\omega X)^{\alpha} \partial_{\alpha} f(X^{\mu}) + \frac{1}{2!} (\omega X)^{\alpha} (\omega X)^{\beta} \partial_{\alpha} \partial_{\beta} f(X^{\mu}) \\ &= e^{(\omega X)^{\alpha} \partial_{\alpha}} f(X^{\mu}) = e^{-\omega^{\alpha\beta} X_{\alpha} \partial_{\beta}} \\ &= e^{\frac{i}{2} \omega^{\alpha\beta} i (X_{\alpha} \partial_{\beta} - X_{\beta} \partial_{\alpha})} f(X^{\mu}) \end{aligned}$$

Ponc, on a :

$$L_{\mu\nu} = i(X_{\mu} \partial_{\nu} - X_{\nu} \partial_{\mu})$$

(1.82)

On vérifie que l'algèbre est satisfaite :

$$\begin{aligned} [L_{\mu\nu}, L_{\rho\sigma}] &= - (X_{\mu} \partial_{\nu} - X_{\nu} \partial_{\mu}) (X_{\rho} \partial_{\sigma} - X_{\sigma} \partial_{\rho}) \\ &\quad + (X_{\rho} \partial_{\sigma} - X_{\sigma} \partial_{\rho}) (X_{\mu} \partial_{\nu} - X_{\nu} \partial_{\mu}) \\ &= -X_{\mu} \eta_{\nu\rho} \partial_{\sigma} + X_{\nu} \eta_{\mu\rho} \partial_{\sigma} + X_{\mu} \eta_{\nu\sigma} \partial_{\rho} - X_{\nu} \eta_{\mu\sigma} \partial_{\rho} \\ &\quad + X_{\rho} \eta_{\sigma\mu} \partial_{\nu} - X_{\sigma} \eta_{\rho\mu} \partial_{\nu} - X_{\rho} \eta_{\sigma\nu} \partial_{\mu} + X_{\sigma} \eta_{\rho\nu} \partial_{\mu} \\ &= -\eta_{\nu\rho} (X_{\mu} \partial_{\sigma} - X_{\sigma} \partial_{\mu}) + \eta_{\mu\rho} (X_{\nu} \partial_{\sigma} - X_{\sigma} \partial_{\nu}) \\ &\quad + \eta_{\nu\sigma} (X_{\mu} \partial_{\rho} - X_{\rho} \partial_{\mu}) - \eta_{\mu\sigma} (X_{\nu} \partial_{\rho} - X_{\rho} \partial_{\nu}) \\ &= -i(\eta_{\mu\rho} L_{\nu\sigma} - \eta_{\nu\rho} L_{\mu\sigma} - \eta_{\mu\sigma} L_{\nu\rho} + \eta_{\nu\sigma} L_{\mu\rho}) \end{aligned}$$

La représentation la plus générale s'obtient en additionnant la représentation de dimension infinie $L_{\mu\nu}$ et une représentation finie $\Sigma_{\mu\nu}$:

$$M_{\mu\nu} = L_{\mu\nu} + \Sigma_{\mu\nu}$$

(1.82')

2. MECANIQUE QUANTIQUE RELATIVISTE

2.1 Généralités

Pour définir une version relativiste de la mécanique quantique, il faut combiner le principe de relativité avec les postulats de la mécanique quantique. Nous allons nous concentrer sur la description d'une seule et unique particule ponctuelle dans la représentation des coordonnées. Les postulats de la mécanique quantique peuvent alors se résumer de la façon suivante :

- 1) La particule est décrite par une fonction d'onde complexe $\psi(\vec{x}, t)$ qui est normalisée de façon à ce que $|\psi(\vec{x}, t)|^2$ représente une distribution de probabilité normalisée à un total de 1.
- 2) Les observables physiques sont représentées par des opérateurs linéaires, comme fonctions de la position et du moment après la substitution :

$$\left\{ \begin{array}{l} q^i \rightarrow x^i \\ p_i \rightarrow -i\hbar \partial_i \end{array} \right. \quad (2.1)$$

La valeur moyenne pour une observable $\mathcal{O}(q^i, p_i)$ est

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \int d^3x \psi^*(\vec{x}, t) \mathcal{O}(x^i, -i\hbar \partial_i) \psi(\vec{x}, t) \quad (2.2)$$

3) La fonction d'onde peut être décomposée sur l'ensemble complet des fonctions propres d'un ensemble complet d'opérateurs commutants Hermitiens O_i . On a donc

$$\psi(\vec{x}, t) = \sum_n a_n \psi_n(\vec{x}, t) \quad (2.3)$$

avec

$$O_i \psi_n(\vec{x}, t) = \lambda_{ni} \psi_n(\vec{x}, t) \quad (2.4)$$

La valeur moyenne des observables O_i est alors :

$$\langle O_i \rangle = \sum_n |a_n|^2 \lambda_{ni} \quad (2.5)$$

4) L'évolution temporelle de la fonction d'onde est déterminée par l'Hamiltonien H , vu comme opérateur après la substitution (2.1) dans l'expression classique. Elle consiste en l'équation aux valeurs propres $H\psi = E\psi$ avec la substitution :

$$E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \quad (2.6)$$

Le résultat est l'équation de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{x}, t) = H \psi(\vec{x}, t) \quad (2.7)$$

Cette équation détermine l'évolution temporelle des états quantiques.

5) La probabilité totale associée à la fonction d'onde, qui est normalisée à 1, est une constante dans le temps. En d'autres termes, elle est conservée. En effet :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left\{ \int d^3\vec{x} |\psi(\vec{x}, t)|^2 \right\} &= \int d^3\vec{x} \left[\frac{\partial}{\partial t} \psi^*(\vec{x}, t) \psi(\vec{x}, t) - \psi^*(\vec{x}, t) \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{x}, t) \right] \\ &= \frac{i}{\hbar} \int d^3\vec{x} (H^+ \psi^*(\vec{x}, t) \psi(\vec{x}, t) - \psi^*(\vec{x}, t) H \psi(\vec{x}, t)) \\ [H^+ &= H] \\ &= 0 \end{aligned} \tag{2.8}$$

Dans le cas Galiléen usuel, on demande que la théorie soit invariante sous les transformations de Galilée, et en particulier les rotations spatiales. Etant donné que l'Hamiltonien est invariant sous rotations, l'équation de Schrödinger est manifestement covariante, à condition que la fonction d'onde réalise une représentation bien définie du groupe des rotations. Pour une particule libre, par exemple, on a $\pi_i = p_i$ et :

$$H = \frac{p^2}{2m} \rightarrow H = \frac{-\hbar^2 \nabla^2}{2m} \tag{2.9}$$

Les différentes possibilités pour les représentations portées par la fonction d'onde sont indexées par le spin s de la particule. Dans le cas $s=0$, la fonction d'onde est un

scalaire sous rotations et ne porte pas d'indice. Dans le cas $s = 1/2$ c'est un spinneur et elle porte un indice spinoriel à deux valeurs. Dans le cas $s = 1$, c'est un vecteur et elle porte un indice vectoriel à trois valeurs. Et ainsi de suite pour les spins s croissants.

Dans le cas Einsteinien, on demande que la théorie soit covariante sous transformations de Lorentz, et en particulier sous glissements. Etant donné que H ne dépend que des données spatiales, une équation de Schrödinger du type (2.7) n'est pas automatiquement covariante sous glissements; une forme particulière de H en fonction de \vec{p} est nécessaire à cet effet. Pour une particule libre, on a $\pi_i = p_i$ et nous avons vu que l'Hamiltonien est donné par:

$$H = \sqrt{m^2 c^4 + \vec{p}^2 c^2} \rightarrow H = \sqrt{m^2 c^4 - \frac{\hbar^2 c^2}{\hbar^2} \vec{\nabla}^2} \quad (2.10)$$

Le fait que l'équation (2.7) est covariante n'est toutefois pas manifestement évident. Il tient au fait que les correspondances (2.1) et (2.6) peuvent être reformulées sur le 4-vecteur $p^\mu = (\frac{H}{c}, p^i)$ comme la règle manifestement covariante

$$p^\mu \rightarrow i \hbar \partial^\mu \quad (2.11)$$

Il suit que $i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$ et H se transforment les deux comme la composante temporelle d'un 4-vecteur, et l'équation (2.7) est donc covariante, à condition que la fonction d'onde réalise une représentation bien définie du groupe de Lorentz. Comme avant, dans le cas $s=0$ la fonction d'onde est un scalaire sans indices de Lorentz, dans le cas $s=1/2$ c'est un spineur avec un indice spinoriel à deux ou quatre valeurs, dans le cas $s=1$ c'est un vecteur avec un index à quatre valeurs, et ainsi de suite pour spin s croissants.

L'approche présentée ci-dessus semble représenter une généralisation relativiste raisonnable de la mécanique quantique, basée sur les mêmes postulats et construite de façon à donner automatiquement la bonne limite non-relativiste. Elle souffre toutefois d'un problème majeur : le fait que l'hamiltonien relativiste est un opérateur non-local, c'est-à-dire contenant un nombre infini de termes avec des dérivées d'ordre arbitrairement élevé dans son développement en série. Ceci empêche toute analyse exacte des conséquences de la théorie dans le régime relativiste, où tous les termes du développement deviendraient également importants. Ceci a motivé la recherche d'autres équations d'onde alternatives qui soient locales, tout en restant compatibles avec le principe de relativité et les postulats quantiques.

L'observation cruciale à ce propos est que la 4-impulsion relativiste peut satisfaire une condition de couche de masse du type $p^\mu p_\mu = m^2 c^2$, et que c'est cette condition qui détermine l'Hamiltonienne en fonction du moment. La version (2.11) du principe de correspondance implique alors une équation locale du deuxième degré :

$$(p^\mu p_\mu - m^2 c^2) \psi(\vec{x}, t) = 0 \quad (2.12)$$

L'équation de Schrödinger usuelle (2.6) est la "racine carrée" de cette équation. En effet, la (2.12) peut se récrire alternativement comme

$$\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \right)^2 \psi(\vec{x}, t) = H^2 \psi(\vec{x}, t) \quad (2.13)$$

où H est maintenant vu comme la solution de la condition de couche de masse en fonction de $\vec{p} \rightarrow -i\hbar \vec{\nabla}$. On observe que toutes les solutions de l'équation (2.7) sont également solutions de l'équation (2.13), mais pas vice-versa. En effet, il est évident que l'équation (2.13) admet également comme solutions les solutions de l'équation obtenue en substituant $H \rightarrow -H$ dans (2.7). En d'autres termes, la nouvelle équation est locale,

mais elle attribue implicitement une signification physique égale aux deux signes possibles de la solution de l'équation de couche de masse pour l'énergie en fonction du moment :

$$H = \pm \sqrt{m^2 c^4 + \vec{p}^2 c^2} \quad (2.14)$$

L'équation (2.13) prédit donc des solutions à énergie tant bien positive que négative. Cette prédiction, qui a profondément troublé les physiciens lors de son apparition, s'avère en réalité être non seulement vraie, mais être une propriété fondamentale de toute théorie quantique relativiste. Tout comme l'énergie au repos des particules massives, elle tient à l'interprétation stricte de la condition de couche de masse comme relation de dispersion de toute particule relativiste.

L'interprétation physique du fait qu'il existe des solutions à énergie négative en correspondance de celles à énergie positive est que à toute particule il correspond une antiparticule, et la présence d'une antiparticule équivaut à l'absence d'une particule, dans un sens qui est mieux clarifié plus loin et dans le contexte de la théorie quantique des champs.

La présence simultanée de particules et antiparticules pose en effet une limitation intrinsèque à la possibilité de décrire une théorie à une seule et unique particule. La raison est due au fait qu'il n'existe aucune obstruction cinématique à produire une paire particule-antiparticule à partir du vide en investissant dans le processus une énergie minimale égale à $2mc^2$, c'est-à-dire la somme des énergies au repos de la particule et de l'antiparticule. Cette observation est étroitement liée au fait que l'équation (2.12), étant du deuxième degré dans le temps, ne garantit plus que l'interprétation de probabilité de la fonction d'onde soit compatible avec la dynamique, comme dans le point 5), et simultanément avec une conception à une seule particule de la théorie. Plus précisément, il est possible de comprendre dans le contexte de la théorie quantique des champs qu'un champ dont la dynamique est gouvernée par une équation du type (2.12) a bien une interprétation de distribution de probabilité, mais dans une conception tenant compte de la possibilité de création de paires particules-antiparticules.

Il est évident que l'équation (2.12) doit être vérifiée pour toute théorie quantique relativiste, vu qu'elle correspond à la condition fondamentale de conservation de masse, qui est elle-même liée à la masse en tant que opérateur de Casimir de l'algèbre de Poincaré. Il est néanmoins plausible que l'équation d'onde qui gouverne effectivement l'évolution du système soit, elle, une autre équation plus restrictive et du premier degré dans le temps, correspondant à une "racine carrée" de type matriciel de l'équation (2.12) qui soit locale. Ceci est effectivement possible, et la forme de l'équation qu'il est possible d'écrire dépend de la représentation du groupe de Lorentz portée par le champ, qui est liée au spin, ou plus précisément au deuxième Casimir du groupe de Poincaré. En définitive, l'équation d'onde à utiliser est fixée de façon pratiquement unique par les deux Casimirs du groupe de Poincaré qui spécifient la particule, c'est-à-dire sa masse et son spin.

2.2 Equation de Klein-Gordon pour Scalars

Pour un champ scalaire à une composante, la seule équation d'onde locale possible est l'équation (2.12), qui porte le nom d'équation de Klein-Gordon. En absence de potentiel externe, le moment canonique est $\pi_\mu = p_\mu$ et la (2.11) implique

$$\left(\square + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right) \phi(x) = 0 \quad (2.15)$$

Avec :

$$\square = \partial^\mu \partial_\mu \quad (2.16)$$

Comme déjà expliqué en général, le fait que cette équation est du deuxième degré dans la dérivée temporelle pose à des difficultés concernant la définition d'une distribution de probabilité qui soit à la fois positive et conservée par la dynamique. En assumant que la fonction d'onde est complexe, il est toutefois facile de vérifier qu'il existe un courant conservé, donné par

$$J^\mu = i\hbar (\phi^* \partial^\mu \phi - \phi \partial^\mu \phi^*) \quad (2.17)$$

En effet :

$$\begin{aligned} \partial_\mu J^\mu &= i\hbar [\partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi + \phi^* \square \phi - \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi^* - \phi \square \phi^*] = -i \frac{m^2 c^2}{\hbar} [\phi^* \phi - \phi \phi^*] \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc :

$$\partial_{\mu} j^{\mu} = 0 \quad (2.18)$$

c'est-à-dire

$$\frac{d\rho}{dt} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 \quad (2.19)$$

avec :

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{1}{c} j^0 \\ &= \frac{i\hbar}{c^2} (\phi^* \frac{\partial}{\partial t} \phi - \phi \frac{\partial}{\partial t} \phi^*) \neq 0 \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned} \vec{j} &= \vec{j} \\ &= i\hbar (\phi^* \vec{\nabla} \phi - \phi \vec{\nabla} \phi^*) \end{aligned} \quad (2.21)$$

Le problème avec ces quantités est que ρ n'est pas nécessairement positive, et ne peut donc pas être utilisée comme densité de probabilité à une particule. On remarque toutefois que la densité (2.20) a signe \pm si les fonctions d'ondes sont restreintes aux solutions des équations de type $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \phi = \pm \hbar \phi$, et change de signe seulement s'il se produit une transition dans le temps entre ces deux types de solutions. Ceci peut arriver seulement sous l'influence d'un potentiel externe, toutefois.

En présence d'un potentiel électromagnétique externe de la forme $A^{\mu} = (\Phi, \vec{A})$, le moment canonique est affecté et passe de p_{μ}

$i\pi_\mu = p_\mu + \frac{q}{c} A_\mu$. La prescription de quantification donne alors $\pi_\mu \rightarrow i\hbar \partial_\mu$, c'est-à-dire $p_\mu \rightarrow i\hbar \partial_\mu - \frac{q}{c} A_\mu$. On trouve alors que la nouvelle équation peut s'écrire comme :

$$\left(D_\mu D^\mu + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right) \phi(x) = 0 \quad (2.22)$$

avec la dérivée covariante

$$D_\mu = \partial_\mu + i \frac{q}{\hbar c} A_\mu \quad (2.23)$$

Dans cette nouvelle situation, le courant conservé change lui aussi et dépend du champ externe :

$$J^\mu = i\hbar \left[\phi^* D^\mu \phi - \phi D^{\mu*} \phi^* \right] \quad (2.24)$$

On peut démontrer comme avant qu'il est conservé

$$\partial_\mu J^\mu = 0 \quad (2.25)$$

On a alors :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0 \quad (2.26)$$

avec :

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{1}{c} J^0 \\ &= \frac{i\hbar}{c^2} \left[\phi \left(\frac{\partial}{\partial t} + i \frac{q}{\hbar} \Phi \right) \phi - \phi \left(\frac{\partial}{\partial t} - i \frac{q}{\hbar} \Phi \right) \phi^* \right] \end{aligned} \quad (2.27)$$

$$\begin{aligned} \vec{J} &= \vec{J} \\ &= i\hbar \left[\phi^* \left(\vec{\nabla} + i \frac{q}{\hbar c} \vec{A} \right) \phi - \phi \left(\vec{\nabla} - i \frac{q}{\hbar c} \vec{A} \right) \phi^* \right] \end{aligned} \quad (2.28)$$

Pour démontrer la covariance relativiste de l'équation de Klein-Gordon, on commence par analyser les propriétés de transformation de la dérivée D_μ définie par la (2.23).

Sous transformation de Lorentz propres, on a $\partial_\mu \rightarrow \partial'_\mu = \Lambda_\mu^\nu \partial_\nu$ et $A_\mu \rightarrow A'_\mu = \Lambda_\mu^\nu A_\nu$. Donc :

$$D_\mu \rightarrow D'_\mu = \Lambda_\mu^\nu \partial_\nu \quad [\text{Lorentz propre}] \quad (2.29)$$

Sous parité, on a $\partial_\mu \rightarrow \partial'_\mu = \eta_{\mu\mu} \partial_\mu$ et $A_\mu \rightarrow A'_\mu = \eta_{\mu\mu} A_\mu$, et donc :

$$D_\mu \rightarrow D'_\mu = \eta_{\mu\mu} D_\mu \quad [\text{parité}] \quad (2.30)$$

Finalement, sous renversement du temps on a $\partial_\mu \rightarrow \partial'_\mu = -\eta_{\mu\mu} \partial_\mu$ et $A_\mu \rightarrow A'_\mu = \eta_{\mu\mu} A_\mu$, et donc :

$$D_\mu \rightarrow D'_\mu = -\eta_{\mu\mu} D_\mu^* \quad [\text{renversement temporel}] \quad (2.31)$$

Pour démontrer que la théorie est covariante sous ces transformations, on doit montrer qu'il existe une transformation de la fonction d'onde telle que la nouvelle équation dans le nouveau référentiel est équivalente à la précédente.

Une première possibilité est que la fonction d'onde ne soit pas changée et que l'équation reste identique. De cette façon, on réalise trivialement les transformations de Lorentz propres.

En effet, en prenant

$$\left. \begin{array}{l} x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu \\ \phi(x) \rightarrow \phi'(x') = \phi(x) \end{array} \right\} \text{ [Lorentz propres]} \quad (2.32)$$

on trouve, en utilisant la (2.29) et la propriété $\Lambda^\mu_\alpha \Lambda_\mu^\nu = \delta_\alpha^\nu$, que l'équation (2.27) est effectivement invariante de forme

$$\left[\left(D_\mu D^\mu + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right) \phi(x) = 0 \right] \rightarrow \left[\left(D'_\mu D'^\mu + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right) \phi'(x') = 0 \right] = \left[\left(D_\mu D^\mu + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right) \phi(x) = 0 \right]$$

La même stratégie permet de réaliser l'opération de parité. En effet, en prenant :

$$\left. \begin{array}{l} x^\mu \rightarrow x'^\mu = \eta^{\mu\nu} x_\nu \\ \phi(x) \rightarrow \phi'(x) = \phi(x) \end{array} \right\} \text{ [parité]} \quad (2.33)$$

on trouve, en utilisant la (2.30), que l'équation (2.22) est à nouveau invariante de forme :

$$\left[\left(D_\mu D^\mu + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right) \phi(x) = 0 \right] \rightarrow \left[\left(D'_\mu D'^\mu + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right) \phi'(x) = 0 \right] = \left[\left(D_\mu D^\mu + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right) \phi(x) = 0 \right]$$

Une deuxième possibilité de réaliser une symétrie est que la fonction d'onde soit changée dans sa complexe conjuguée, et que l'équation soit elle aussi changée dans sa complexe conjuguée, qui est évidemment équivalente. De cette façon, il est possible de réaliser également les renversements de temps.

En effet, on prend :

$$\left. \begin{array}{l} x^\mu \rightarrow x'^\mu = -\eta^{\mu\nu} x^\nu \\ \phi(x) \rightarrow \phi'(x') = \phi^*(x) \end{array} \right\} \quad (2.34)$$

en outre, en utilisant la (2.31), que l'équation (2.22) se transforme effectivement dans sa conjuguée :

$$\left[(D_\mu D^\mu + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2}) \phi(x) = 0 \right] \rightarrow \left[(D'_\mu D'^\mu + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2}) \phi'(x') = 0 \right] = \left[(D_\mu D^\mu + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2}) \phi(x) = 0 \right]^*$$

En résumé, tout le groupe de Lorentz, c'est-à-dire aussi bien les transformations de Lorentz propres connexes à l'identité que les transformations discrètes telles que la réflexion ou le renversement du temps, est réalisé dans la théorie de Klein-Gordon. Le champ scalaire n'ayant qu'une composante, il correspond à la représentation banale de spin 0 du groupe de Lorentz.

On note finalement que l'équation de Klein-Gordon est covariante sous transformation de jauge. Sous cette transformation, $\partial_\mu \rightarrow \partial'_\mu = \partial_\mu$ et $A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \lambda$. Donc on trouve :

$$D_\mu \rightarrow D'_\mu = D_\mu - e^{i \frac{q}{\hbar c} \lambda} \partial_\mu e^{-i \frac{q}{\hbar c} \lambda} \quad [\text{jauge}] \quad (2.35)$$

On postule alors la transformation suivante pour la fonction d'onde :

$$\left. \begin{array}{l} A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu \lambda(x) \\ \phi(x) \rightarrow \phi'(x) = e^{-i \frac{q}{\hbar c} \lambda} \phi(x) \end{array} \right\} \quad (2.36)$$

De cette façon, $D_\mu \phi$ se transforme comme ϕ :

$$\begin{aligned}
 D_\mu \phi(x) &\rightarrow D'_\mu \phi'(x) = \left[D_\mu - e^{i\frac{q}{\hbar c} \lambda} \partial_\mu e^{-i\frac{q}{\hbar c} \lambda} \right] e^{-i\frac{q}{\hbar c} \lambda} \phi(x) \\
 &= D_\mu \left(e^{-i\frac{q}{\hbar c} \lambda} \phi(x) \right) - \partial_\mu e^{-i\frac{q}{\hbar c} \lambda} \phi(x) \\
 &= e^{-i\frac{q}{\hbar c} \lambda} D_\mu \phi(x)
 \end{aligned}$$

Il suit que $D^\mu D_\mu \phi$ se transforme lui aussi comme ϕ :

$$\begin{aligned}
 D^\mu D_\mu \phi &\rightarrow D'^\mu D'_\mu \phi'(x) = \left(D^\mu - e^{i\frac{q}{\hbar c} \lambda} \partial_\mu e^{-i\frac{q}{\hbar c} \lambda} \right) \left(e^{-i\frac{q}{\hbar c} \lambda} D_\mu \phi(x) \right) \\
 &= D^\mu \left(e^{-i\frac{q}{\hbar c} \lambda} D_\mu \phi(x) \right) - \partial_\mu e^{-i\frac{q}{\hbar c} \lambda} D_\mu \phi(x) \\
 &= e^{-i\frac{q}{\hbar c} \lambda} D^\mu D_\mu \phi(x)
 \end{aligned}$$

De cette façon, l'équation de Klein-Gordon se transforme simplement en elle-même fois une phase :

$$\left[\left(D^\mu D_\mu + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right) \phi(x) = 0 \right] \rightarrow \left[\left(D'^\mu D'_\mu + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right) \phi'(x) = 0 \right] = e^{-i\frac{q}{\hbar c} \lambda} \left[\left(D^\mu D_\mu + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right) \phi(x) = 0 \right]$$

Il est clair que l'équation transformée est complètement équivalente à celle de départ, et la théorie est donc invariante sous transformations de jauge des potentiels, comme il se doit.

2.3 Solutions de l'équation de Klein-Gordon libre

Pour déterminer la solution générale de l'équation d'onde (2.15) il convient de paramétriser le champ $\phi(x)$ comme une superposition d'ondes planes du type $e^{-ik_\mu x^\mu}$, avec $k^\mu = (\frac{\omega}{c}, \vec{k})$ où ω est la fréquence angulaire et \vec{k} le vecteur d'onde : $e^{-ik_\mu x^\mu} = e^{i(\vec{k}\vec{x} - \omega t)}$. Les ondes planes forment en effet un ensemble complet de fonctions, dans le sens que :

$$\begin{aligned} \int d^4x e^{ik_\mu x^\mu} e^{-ik'_\mu x^\mu} &= \int d^4x e^{i(k_\mu - k'_\mu)x^\mu} \\ &= (2\pi)^4 \delta^4(k - k') \end{aligned} \quad (2.37)$$

Pour résoudre une équation d'onde linéaire, il convient alors de paramétriser le champ comme transformée de Fourier :

$$\phi(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \tilde{\phi}(k) e^{-ik_\mu x^\mu} \quad (2.38)$$

La relation inverse est obtenue en utilisant la (2.37).

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}(k) &= \int \frac{d^4k'}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta^4(k - k') \tilde{\phi}(k') = \int \frac{d^4k'}{(2\pi)^4} \int d^4x e^{-i(k - k')_\mu x^\mu} \tilde{\phi}(k') \\ &= \int d^4x \left\{ \int \frac{d^4k'}{(2\pi)^4} \tilde{\phi}(k') e^{-ik'_\mu x^\mu} \right\} e^{ik_\mu x^\mu} \\ &= \int d^4x \phi(x) e^{ik_\mu x^\mu} \end{aligned} \quad (2.39)$$

Les ondes planes $e^{-ik_\mu x^\mu}$ satisfaisant l'équation (2.15) à condition que le vecteur k_μ satisfasse la condition:

$$k^2 = \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \quad (2.40)$$

Cette équation détermine la fréquence angulaire que l'onde doit avoir en fonction de son vecteur d'onde \vec{k} , c'est-à-dire la relation de dispersion. On obtient:

$$\omega = \pm \sqrt{\frac{m^2 c^4}{\hbar^2} + \vec{k}^2 c^2} = \pm \omega_k \quad (2.41)$$

En multipliant \hbar le 4-vecteur k^μ on obtient le 4-vecteur d'impulsion quantique: $\hbar k^\mu = (\frac{\hbar \omega}{c}, \hbar \vec{k}) = (\frac{E}{c}, \vec{p}) = p^\mu$, et la relation de dispersion (2.40) se traduit dans la condition de couche de masse $p^2 = m^2 c^2$.

La solution générale de l'équation (2.15) peut être obtenue en superposant des ondes satisfaisant la condition (2.41). On peut écrire une telle superposition de manière Lorentz-invariante en restreignant l'expression (2.38) par l'introduction d'un facteur $(2\pi) \delta(k^2 - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2})$ dans l'intégrale:

$$\phi(x) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \tilde{\phi}(k) e^{-ik_\mu x^\mu} (2\pi) \delta(k^2 - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2}) \quad (2.42)$$

Cette procedure capture correctement la totalité des ondes possibles, c'est-à-dire si bien celles progressives avec $u \rightarrow +$ dans la (2.41) que celles régressives avec $u \rightarrow -$ dans la (2.41) : En effet :

$$\begin{aligned} \delta(k^2 - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2}) &= \delta\left(\frac{\omega^2}{c^2} - \vec{k}^2 - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2}\right) \\ &= c^2 \delta\left(\omega^2 - \vec{k}^2 c^2 - \frac{m^2 c^4}{\hbar^2}\right) = c^2 \delta(\omega^2 - \omega_k^2) \\ &= \frac{c^2}{2\omega_k} \left[\delta(\omega - \omega_k) + \delta(\omega + \omega_k) \right] \end{aligned} \quad (2.43)$$

La solution (2.42) peut donc se récrire comme :

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \int \frac{d\omega}{c} \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3} \check{\phi}(\omega, \vec{k}) e^{i(\vec{k}\vec{x} - \omega t)} \frac{c^2}{2\omega_k} \left[\delta(\omega - \omega_k) + \delta(\omega + \omega_k) \right] \\ &= \int \frac{d^3 \vec{k} c}{(2\pi)^3 2\omega_k} \left[\check{\phi}(\omega_k, \vec{k}) e^{i(\vec{k}\vec{x} - \omega_k t)} + \check{\phi}(-\omega_k, \vec{k}) e^{i(\vec{k}\vec{x} + \omega_k t)} \right] \\ &= \int \frac{d^3 \vec{k} c}{(2\pi)^3 2\omega_k} \left[\check{\phi}(\omega_k, \vec{k}) e^{i(\vec{k}\vec{x} - \omega_k t)} + \check{\phi}(-\omega_k, -\vec{k}) e^{-i(\vec{k}\vec{x} - \omega_k t)} \right] \end{aligned} \quad (2.44)$$

En définissant

$$\begin{cases} \check{\phi}(\omega_k, \vec{k}) = a(\vec{k}) \\ \check{\phi}(-\omega_k, -\vec{k}) = b^*(\vec{k}) \end{cases} \quad (2.45)$$

et en désignant maintenant par k^μ le 4-vecteur d'onde sur l'axe, c'est-à-dire

$$k^\mu = \left(\frac{\omega_k}{c}, \vec{k} \right) \quad (2.46)$$

on peut finalement écrire :

$$\phi(x) = \int \frac{d^3k c}{(2\pi)^3 2\omega_k} \left[a(\vec{k}) e^{-ik_\mu x^\mu} + b^*(\vec{k}) e^{ik_\mu x^\mu} \right] \quad (2.47)$$

Le complexe conjugué est donné par :

$$\phi^*(x) = \int \frac{d^3k c}{(2\pi)^3 2\omega_k} \left[b(\vec{k}) e^{-ik_\mu x^\mu} + a^*(\vec{k}) e^{ik_\mu x^\mu} \right] \quad (2.48)$$

Le fait que le champ n'est pas réel se traduit donc dans le fait que $a(\vec{k})$ et $b(\vec{k})$ sont indépendants. Pour un champ réel ils seraient au contraire identifiés.

2.4 Limite non relativiste de l'équation de Klein - Gordon

Il est possible de définir une limite non-relativiste de l'équation de Klein Gordon qui peut être ramenée à une équation de type Schrödinger, avec une fonction d'onde à deux composantes, décrivant respectivement les solutions à énergie positive et négative, c'est-à-dire particules et antiparticules.

Le point de départ consiste à écrire l'équation d'onde de Klein-Gordon dans la forme :

$$\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\right)^2 \phi(x) = [m^2 c^4 + \vec{p}^2 c^2] \phi(x) \quad (2.49)$$

avec $\vec{p} = -i\hbar \vec{\nabla}$. Cette équation est du deuxième degré dans la dérivée temporelle. Elle peut toutefois être décomposée dans un système de deux équations couplées du premier degré dans la dérivée temporelle. On introduit pour cela :

$$\begin{cases} \psi = \phi \\ \xi = \frac{i\hbar}{mc^2} \frac{\partial}{\partial t} \phi \end{cases} \quad (2.50)$$

Avec ces nouvelles variables, la (2.49) peut être écrite comme le système :

$$\begin{cases} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = mc^2 \xi \\ i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \xi = \left(mc^2 + \frac{\vec{p}^2}{m}\right) \psi \end{cases} \quad (2.51)$$

on peut alors former les combinaisons orthogonales

$$\begin{cases} \theta = \frac{1}{2}(\varphi + \xi) \\ \chi = \frac{1}{2}(\varphi - \xi) \end{cases} \quad (2.52)$$

et récrire la (2.51) comme

$$\begin{cases} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \theta = mc^2 \theta + \frac{\vec{p}^2}{2m} (\theta + \chi) \\ i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \chi = -mc^2 \chi - \frac{\vec{p}^2}{2m} (\theta + \chi) \end{cases} \quad (2.53)$$

En définissant finalement

$$\Psi_a(x) = \sqrt{2m} \begin{pmatrix} \theta(x) \\ \chi(x) \end{pmatrix} \quad (2.54)$$

on peut récrire le système d'équations (2.53) en forme matricielle comme :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi_a(x) = H_{ab} \Psi_b(x) \quad (2.55)$$

avec :

$$\begin{aligned} H_{ab} &= \begin{pmatrix} mc^2 + \frac{p^2}{2m} & \frac{p^2}{2m} \\ -\frac{p^2}{2m} & -(mc^2 + \frac{p^2}{2m}) \end{pmatrix} \\ &= (mc^2 + \frac{p^2}{2m}) \eta_{ab} + (\frac{p^2}{2m}) \rho_{ab} \end{aligned} \quad (2.56)$$

où :

$$\eta_{ab} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \rho_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.57)$$

Dans cette nouvelle notation, l'équation prend donc la forme d'une équation de type *Schrodinger*. Par ce qui concerne la densité de probabilité, en utilisant les définitions (2.50) et (2.52) dans la (2.70) on trouve :

$$\begin{aligned} \rho &= m (\phi^* \xi + \phi \xi^*) \\ &= 2m (\theta^* \theta - \chi^* \chi) \end{aligned} \quad (2.58)$$

En utilisant la notation matricielle (2.54), ceci se réécrit comme :

$$\rho = \psi^\dagger \eta \psi \quad (2.59)$$

On remarque que cette densité de probabilité n'est pas définie à partir du produit scalaire banal dans l'espace bidimensionnel des fonctions d'ondes, mais contient une matrice η . En correspondance de ce fait, on note que l'Hamiltonien (2.56) n'est pas Hermitien dans le sens usuel. En effet, $\eta^\dagger = \eta$ mais $\rho^\dagger = -\rho$. On peut toutefois vérifier que :

$$H^\dagger = \eta H \eta \quad (2.60)$$

Il est alors naturel de définir un nouveau conjugué comme :

$$\bar{\psi}(x) = \psi^\dagger(x) \eta = \sqrt{2m} \begin{pmatrix} \theta(x) \\ -\chi(x) \end{pmatrix} \quad (2.61)$$

De cette façon, la densité (2.59) correspond à un simple produit scalaire usuel entre $\bar{\psi}$ et ψ :

$$\rho \equiv \bar{\psi} \psi \quad (2.62)$$

et l'Hamiltonien est Hermitien par rapport à ce nouveau produit scalaire, vu que :

$$\begin{aligned} (\overline{H\psi}) &= (H\psi)^+ \eta = \psi^+ H^+ \eta = \psi^+ \eta H \eta \eta \\ &= \bar{\psi} H \end{aligned} \quad (2.63)$$

Pour concrétiser la définition d'une lente non-relativiste avec une interprétation à une particule de la densité de probabilité, il convient de chercher à diagonaliser l'Hamiltonien (2.56) en effectuant une transformation dans l'espace de Hilbert qui préserve le produit scalaire définissant la densité de probabilité. Plus précisément, cette transformation devra être réalisée par une matrice satisfaisant

$$U^+ = \eta U^{-1} \eta \quad (2.64)$$

De cette façon, on peut considérer la transformation

$$\begin{cases} \psi \rightarrow U\psi \\ \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi} U^{-1} \\ H \rightarrow U H U^{-1} \end{cases} \quad (2.65)$$

qui laisse invariants $\bar{\psi}\psi$ et $\bar{\psi} H \psi$.

On essaie avec une matrice du type :

$$u = e^{\delta(\vec{p}) \eta \beta} \quad (2.66)$$

Etant donné que $(\eta \beta)^2 = 1$, cette matrice se réécrit comme

$$\begin{aligned} u &= \begin{pmatrix} \cosh \delta(\vec{p}) & \sinh \delta(\vec{p}) \\ \sinh \delta(\vec{p}) & \cosh \delta(\vec{p}) \end{pmatrix} \\ &= \cosh \delta(\vec{p}) \mathbb{1} + \sinh \delta(\vec{p}) \eta \beta \end{aligned} \quad (2.67)$$

On vérifie facilement que si $\delta(\vec{p})$ est réel, la (2.66) satisfait bien

$$\begin{aligned} u^\dagger &= \cosh \delta(\vec{p}) + \sinh \delta(\vec{p}) \eta \beta \\ &= \eta [\cosh \delta(\vec{p}) - \sinh \delta(\vec{p}) \eta \beta] \eta \\ &= \eta u^{-1} \eta \end{aligned}$$

Dans la nouvelle base on a :

$$u' = 2m \begin{pmatrix} \cosh \delta(\vec{p}) \theta + \sinh \delta(\vec{p}) \chi \\ \cosh \delta(\vec{p}) \chi + \sinh \delta(\vec{p}) \theta \end{pmatrix} \quad (2.68)$$

et, vu que $\eta^2 = 1$, $\beta^2 = -1$, $\eta \beta \eta = -\beta$ et $\beta \eta \beta = \eta$:

$$\begin{aligned} H' &= [\cosh \delta(\vec{p}) + \eta \beta \sinh \delta(\vec{p})] \eta [\cosh \delta(\vec{p}) - \eta \beta \sinh \delta(\vec{p})] (m c^2 + \frac{\vec{p}'^2}{2m}) \\ &\quad + [\cosh \delta(\vec{p}) + \eta \beta \sinh \delta(\vec{p})] \beta [\cosh \delta(\vec{p}) - \eta \beta \sinh \delta(\vec{p})] \frac{\vec{p}^2}{2m} \\ &= [(\cosh^2 \delta(\vec{p}) + \sinh^2 \delta(\vec{p})) \eta - 2 \sinh \delta(\vec{p}) \cosh \delta(\vec{p}) \beta] (m c^2 + \frac{\vec{p}'^2}{2m}) \\ &\quad + [(\cosh^2 \delta(\vec{p}) + \sinh^2 \delta(\vec{p})) \beta - 2 \sinh \delta(\vec{p}) \cosh \delta(\vec{p}) \eta] \frac{\vec{p}^2}{2m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\cosh 2\delta(\vec{p}) \eta - \sinh 2\delta(\vec{p}) \rho \right] \left(mc^2 + \frac{\vec{p}^2}{2m} \right) \\
&\quad \left[\cosh 2\delta(\vec{p}) \rho - \sinh 2\delta(\vec{p}) \eta \right] \frac{\vec{p}^2}{2m} \\
&= \left[\cosh 2\delta(\vec{p}) \left(mc^2 + \frac{\vec{p}^2}{2m} \right) - \sinh 2\delta(\vec{p}) \frac{\vec{p}^2}{2m} \right] \eta \\
&\quad + \left[\cosh 2\delta(\vec{p}) \frac{\vec{p}^2}{2m} - \sinh 2\delta(\vec{p}) \left(mc^2 + \frac{\vec{p}^2}{2m} \right) \right] \rho
\end{aligned}$$

Pour que le terme non-diagonal disparaisse, on choisit :

$$\tanh 2\delta(\vec{p}) = \frac{\vec{p}^2/2m}{mc^2 + \vec{p}^2/2m}$$

et donc :

$$\delta(\vec{p}) = \frac{1}{2} \operatorname{arctanh} \frac{\vec{p}^2/2m}{mc^2 + \vec{p}^2/2m} \quad (2.69)$$

On a alors :

$$\begin{cases} \cosh 2\delta(\vec{p}) = \frac{1}{\sqrt{1 - \tanh^2 2\delta(\vec{p})}} = \frac{mc^2 + \vec{p}^2/2m}{\sqrt{m^2c^4 + \vec{p}^2c^2}} \\ \sinh 2\delta(\vec{p}) = \frac{\tanh 2\delta(\vec{p})}{\sqrt{1 - \tanh^2 2\delta(\vec{p})}} = \frac{\vec{p}^2/2m}{\sqrt{m^2c^4 + \vec{p}^2c^2}} \end{cases}$$

et donc

$$\begin{aligned}
\cosh 2\delta(\vec{p}) \left(mc^2 + \frac{\vec{p}^2}{2m} \right) - \sinh 2\delta(\vec{p}) \frac{\vec{p}^2}{2m} &= \frac{\left(mc^2 + \vec{p}^2/2m \right)^2 - \left(\vec{p}^2/2m \right)^2}{\sqrt{m^2c^4 + \vec{p}^2c^2}} \\
&= \sqrt{m^2c^4 + \vec{p}^2c^2}
\end{aligned}$$

$$\cosh 2\delta(\vec{p}) \frac{\vec{p}^2}{2m} - \sinh 2\delta(\vec{p}) \left(mc^2 + \frac{\vec{p}^2}{2m} \right) = \frac{\frac{\vec{p}^2}{2m} (mc^2 + \frac{\vec{p}^2}{2m}) - (mc^2 + \frac{\vec{p}^2}{2m}) \frac{\vec{p}^2}{2m}}{\sqrt{m^2 c^4 + \vec{p}^2 c^2}}$$

$$= 0$$

Le nouvel Hamiltonien est donc simplement

$$H'_{ab} = \begin{pmatrix} \sqrt{m^2 c^4 + \vec{p}^2 c^2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{m^2 c^4 + \vec{p}^2 c^2} \end{pmatrix}$$

$$= \sqrt{m^2 c^4 + \vec{p}^2 c^2} \eta_{ab} \quad (2.70)$$

La nouvelle fonction d'onde est donnée par (2.68) avec $\delta(\vec{p})$ donné par (2.69), mais on peut simplement la rephaser comme :

$$\psi'_a = \sqrt{2m} \begin{pmatrix} \theta' \\ \chi' \end{pmatrix} \quad (2.71)$$

Dans cette nouvelle base, on recherche donc les deux racines non-locales possibles de l'équation de Klein-Gordon, qui ont une limite non-relativiste évidente. On remarque que le nouvel Hamiltonien est Hermitien tant bien par rapport au produit scalaire usuel que celui défini avec une matrice η , vu qu'il est lui-même proportionnel à η .

En présence d'un champ électromagnétique externe, on peut procéder exactement de la même façon, mais il n'est plus possible de diagonaliser de façon exacte l'hamiltonien de la formulation à deux composantes. Il faut alors procéder perturbativement, en développant en série de puissances inverses dans la masse. Cette procédure, due à Foldy - Wouthey, fonctionne pour des champs variant lentement dans l'espace temps, et permet de diagonaliser l'équation d'onde comme dans le cas libre, mais dans la forme d'une série infinie. Le point de départ est l'équation de Klein-Gordon en présence d'un potentiel $A^\mu(\Phi, \vec{A})$, écrite comme :

$$\left[i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - q\Phi(x) \right]^2 \phi(x) = \left[m^2 c^4 + \left(\vec{p} - \frac{q}{c} \vec{A}(x) \right)^2 \right] \phi(x) \quad (2.72)$$

On définit ensuite :

$$\begin{cases} \psi = \phi \\ \xi = \frac{i\hbar}{mc^2} \left(\frac{\partial}{\partial t} + i \frac{q}{\hbar} \Phi \right) \phi \end{cases} \quad (2.73)$$

et on écrit la (2.72) comme le système d'équations

$$\begin{cases} i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial t} + i \frac{q}{\hbar} \Phi \right) \psi = mc^2 \xi \\ i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial t} + i \frac{q}{\hbar} \Phi \right) \xi = \left[mc^2 + \frac{\left(\vec{p} - \frac{q}{c} \vec{A} \right)^2}{m} \right] \psi \end{cases} \quad (2.74)$$

Ensuite, on forme des combinaisons orthogonales (2.52) et en utilisant la notation matricielle (2.54) on arrive à l'équation de Schrödinger :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi_a(r) = H_{ab} \Psi_b(r) \quad (2.75)$$

avec :

$$H_{ab} = \begin{pmatrix} \left[mc^2 + \frac{(\vec{p} - \frac{q}{c} \vec{A})^2}{2m} \right] + q\phi & \frac{(\vec{p} - \frac{q}{c} \vec{A})^2}{2m} \\ - \frac{(\vec{p} - \frac{q}{c} \vec{A})^2}{2m} & - \left[mc^2 + \frac{(\vec{p} - \frac{q}{c} \vec{A})^2}{2m} \right] + q\phi \end{pmatrix}$$

$$= \left[mc^2 + \frac{(\vec{p} - \frac{q}{c} \vec{A})^2}{2m} \right] \eta_{ab} + q\phi \delta_{ab} + \frac{(\vec{p} - \frac{q}{c} \vec{A})^2}{2m} \beta_{ab} \quad (2.76)$$

où $\delta = 1$ et η et β sont définies comme avant par les équations (2.57). Dans cette nouvelle notation, la densité de probabilité (2.77) se écrit comme :

$$\rho = \Psi^\dagger \eta \Psi \quad (2.77)$$

On a donc exactement le même type de situation que dans le cas libre. L'Hamiltonien satisfait

$$H^\dagger = \eta H \eta \quad (2.78)$$

On peut donc passer comme avant à une formulation en terme du nouveau couplet (2.61) et considérer des transformations du type (2.65) pour diagonaliser H .

Les détails de la procédure perturbative de diagonalisation nécessaire à diagonaliser cet Hamiltonien sont conceptuellement simples mais algébriquement un peu compliqués.

Il y a deux obstructions qui empêchent la généralisation directe de (2.66) obtenue en remplaçant \vec{p} avec $\vec{p} - \frac{q}{c} \vec{A}$ de l'affaire. Le premier problème est que \vec{A} dépend de t et la transformation (2.66) ne commute donc plus avec la dérivée temporelle ; ceci induit de nouveaux termes de transformation dans H . Le deuxième problème est que ϕ dépend de \vec{x} et la transformation (2.66) ne commute donc pas avec ϕ , étant donné que \vec{p} contient des dérivées spatiales. À cause de ces deux points, la transformation (2.66) doit non seulement contenir $\vec{p} - \frac{q}{c} \vec{A}$ au lieu de \vec{p} , mais être également corrigée ordre par ordre avec termes dépendant des dérivées de ϕ et \vec{A} , c'est-à-dire les champs électromagnétiques. Pour simplifier, on peut se restreindre au cas où les potentiels ne dépendent pas du temps, de façon à ce que au moins la première approximation disparaisse.

Pour diagonaliser perturbativement l'Hamiltonien (2.76), on commence par le réduire dans la forme

$$H = mc^2 \eta + \epsilon + \mathcal{O} \quad (2.79)$$

avec les parties diagonales et une diagonales subdeterminantes
defines comme:

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon = \frac{(\vec{p} - \frac{q}{c} \vec{A})^2}{2m} \eta + q \Phi \mathbb{1} \\ \mathcal{O} = \frac{(\vec{p} - \frac{q}{c} \vec{A})^2}{2m} \rho \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} [\eta \epsilon = \epsilon \eta] \\ [\eta \mathcal{O} = -\mathcal{O} \eta] \end{array} \quad (2.80)$$

Pour éliminer la partie non-diagonale, on effectue ensuite
une transformation du type

$$U = e^S = \mathbb{1} + S + \frac{1}{2!} S^2 + \frac{1}{3!} S^3 + \dots \quad (2.81)$$

avec la matrice S donnée par un développement en série
de puissances inverses de m , convergant à l'ordre $\frac{1}{m}$.

Sous une telle transformation, le nouvel Hamiltonien
est donné par:

$$\begin{aligned} H' &= U S U^{-1} \\ &= H + [S, H] + \frac{1}{2!} [S, [S, H]] + \frac{1}{3!} [S, [S, [S, H]]] + \dots \end{aligned} \quad (2.82)$$

Plutôt que de déterminer S ordre par ordre, on peut
construire U comme la succession de plusieurs transfor-
mations U_1, U_2, U_3, \dots avec S_1, S_2, S_3 déterminés à
chaque pas de façon à éliminer à l'ordre dominant
les termes non diagonaux résiduels laissés par la
transformation précédente. S_n est alors de l'ordre m^{-n} .

La première transformation S_1 est définie de telle façon à éliminer à l'ordre m^0 le terme non-diagonal \mathcal{O} . De l'analyse du cas libre il est clair qu'il faut prendre:

$$S_1 = \frac{\eta \mathcal{O}}{2mc^2} \quad (2.83)$$

On trouve alors :

$$\begin{aligned} [S_1, H] &= \frac{1}{2} [\eta \mathcal{O}, \eta] + \frac{1}{2mc^2} [\eta \mathcal{O}, \epsilon] + \frac{1}{2mc^2} [\eta \mathcal{O}, \mathcal{O}] \\ &= -\mathcal{O} + \frac{1}{2mc^2} \eta [\mathcal{O}, \epsilon] + \frac{\eta \mathcal{O}^2}{mc^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} [S_1, [S_1, H]] &= -\frac{1}{4mc^2} [\eta \mathcal{O}, \mathcal{O}] + \frac{1}{8m^2c^4} [\eta \mathcal{O}, \eta [\mathcal{O}, \epsilon]] + \frac{1}{4m^2c^4} [\eta \mathcal{O}, \eta \mathcal{O}^2] \\ &= -\frac{\eta \mathcal{O}^2}{2mc^2} - \frac{1}{8m^2c^4} [\mathcal{O}, [\mathcal{O}, \epsilon]] - \frac{\mathcal{O}^3}{2m^2c^4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{6} [S_1, [S_1, [S_1, H]]] &= -\frac{1}{12m^2c^4} [\eta \mathcal{O}, \eta \mathcal{O}^2] + \dots \\ &= \frac{\mathcal{O}^3}{6m^2c^4} + \dots \end{aligned}$$

....

Le nouvel Hamiltonien est donc

$$H_1' = \eta mc^2 + \epsilon_1' + \mathcal{O}_1' \quad (2.84)$$

avec :

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_1' &= \epsilon + \frac{\eta \mathcal{O}^2}{2mc^2} - \frac{1}{8m^2c^4} [\mathcal{O}, [\mathcal{O}, \epsilon]] + \dots \\ \mathcal{O}_1' &= \mathcal{O} + \frac{1}{2mc^2} \eta [\mathcal{O}, \epsilon] - \frac{\mathcal{O}^3}{3m^2c^4} + \dots \end{aligned} \right\} \begin{aligned} [\eta \epsilon_1' &= \epsilon_1' \eta] \\ [\eta \mathcal{O}_1' &= -\mathcal{O}_1' \eta] \end{aligned} \quad (2.85)$$

Dans le nouvel Hamiltonien, le terme non-diagonal \mathcal{O}_1' commence maintenant seulement à l'ordre m^{-1} . Pour éliminer le nouveau terme dominant d'ordre m^{-1} , on effectue une deuxième transformation du même type que la première, mais avec :

$$S_2 = \frac{\eta \mathcal{O}_1'}{2mc^2} \quad (2.86)$$

On trouve alors :

$$\begin{aligned} [S_2, H_1'] &= \frac{1}{2} [\eta \mathcal{O}_1', \eta] + \frac{1}{2mc^2} [\eta \mathcal{O}_1', \epsilon_1'] + \dots \\ &= -\mathcal{O}_1' + \frac{1}{2mc^2} \eta [\mathcal{O}_1', \epsilon_1'] + \dots \end{aligned}$$

...

Donc :

$$H_2' = \eta mc^2 + \epsilon_2' + \mathcal{O}_2' \quad (2.87)$$

avec :

$$\begin{cases} \epsilon_2' = \epsilon_1' + \dots = \epsilon + \frac{\eta \mathcal{O}^2}{2mc^2} - \frac{1}{8m^2c^4} [\mathcal{O}_1', [\mathcal{O}_1', \epsilon]] + \dots [\eta \epsilon_2 = \epsilon_2 \eta] \\ \mathcal{O}_2' = 0 + \frac{1}{2mc^2} \eta [\mathcal{O}_1', \epsilon_1'] + \dots = 0 + 0 + \frac{1}{4m^2c^4} [\epsilon, [\epsilon, \mathcal{O}]] + \dots [\eta \mathcal{O}_2 = -\mathcal{O}_2 \eta] \end{cases} \quad (2.88)$$

Dans le nouvel Hamiltonien, le terme non-diagonal \mathcal{O}_2 commence à l'ordre m^{-2} , et ce terme dominant peut être éliminé par une ultérieure transformation du même type

On prend :

$$S_3 = \frac{\eta \mathcal{O}_2}{2mc^2} \quad (2.89)$$

On trouve alors :

$$\begin{aligned} [S_3, H_2'] &= \frac{1}{2} [\eta \mathcal{O}_2, \eta] + \dots \\ &= -\mathcal{O}_2 + \dots \end{aligned}$$

De cette façon, on obtient :

$$H_3' = \eta mc^2 + \epsilon_3 + \mathcal{O}_3 \quad (2.90)$$

avec

$$\begin{cases} \epsilon_3 = \epsilon_2 + \dots = \epsilon + \frac{\eta \mathcal{O}^2}{2mc^2} - \frac{1}{8m^2c^4} [\mathcal{O}_1, [\mathcal{O}_1, \epsilon]] + \dots & [\eta \epsilon_3 = \epsilon_3 \eta] \\ \mathcal{O}_3 = 0 + \dots = 0 + 0 + 0 + \dots & [\eta \mathcal{O}_3 = -\mathcal{O}_3 \eta] \end{cases} \quad (2.91)$$

Dans le nouvel Hamiltonien, le terme non-diagonal est maintenant complètement éliminé jusqu'à l'ordre m^{-3} .

En procédant de cette manière, il est possible de déterminer l'Hamiltonien diagonalisé avec une précision arbitraire, et donc de déterminer les corrections relativistes jusqu'à un ordre arbitraire m^{-n} .

$$H' = mc^2 \eta + \epsilon + \frac{\eta \mathcal{O}^2}{2mc^2} - \frac{1}{8m^2c^4} [\mathcal{O}_1, [\mathcal{O}_1, \epsilon]] + \dots \quad (2.92)$$

Le résultat final est que le nouvel Hamiltonien a la forme $H' = H'_c + H'_q$, avec :

$$H'_c = \sqrt{m^2 c^4 + (\vec{p} - \frac{q}{c} \vec{A})^2 c^2} \eta + q \Phi \quad (2.33)$$

représentant l'analogie de l'Hamiltonien classique et

$$H'_q = \frac{q}{32 m^4 c^4} [(\vec{p} - \frac{q}{c} \vec{A})^2, [(\vec{p} - \frac{q}{c} \vec{A})^2, \Phi]] + \dots \quad (2.34)$$

représentant les corrections de nature purement quantique, dues au fait que le 4-courant induit par la particule est distribué autour de la trajectoire classique avec une distribution d'une largeur limitée par l'indétermination quantique. Le premier terme reporté s'appelle terme de Darwin, et est lié au fait que la position de la particule, et donc la densité de charge qu'elle représente, est déterminée seulement avec une largeur typique de l'ordre de la longueur d'onde de Compton $\lambda_c = \frac{h}{mc}$, et ceci induit des corrections dans l'énergie électrostatique associée.

Il est possible d'obtenir la limite non-relativiste brutale de l'équation de Klein-Gordon d'une façon alternative plus simple mais moins systématique, qui montre très clairement comment émerge l'équation de Schrödinger usuelle.

Le point de départ est constitué par les équations (2.75) et (2.76), définissant la formulation à deux composantes. On cherche alors des solutions à énergie positive et dominée par l'énergie au repos mc^2 , l'énergie cinétique étant beaucoup plus petite. Pour ce faire, on factorise la fonction d'onde en une phase indépendante des coordonnées spatiales et oscillant rapidement à la fréquence dictée par l'énergie au repos, et une fonction variant plus lentement dans le temps, avec une fréquence typique déterminée par l'énergie cinétique. Plus précisément, on pose :

$$\psi(x) = e^{-\frac{imc^2 t}{\hbar}} \psi_{n,r}(x) \quad (2.95)$$

avec :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_{n,r}(x) \ll mc^2 \psi_{n,r}(x)$$

L'équation (2.75) donne alors :

$$(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + mc^2) \psi_{n,r} = H_{KG} \psi_{n,r}$$

avec :

$$H_{KG} = \left[mc^2 + \frac{(\vec{p} - \frac{q}{c} \vec{A})^2}{2m} \right] \eta + q\vec{\Phi} \cdot \mathbb{1} + \frac{(\vec{p} - \frac{q}{c} \vec{A})^2}{2m} \rho$$

Pour les deux composantes $\sqrt{2m} \psi_{n,r}$ et $\sqrt{2m} \chi_{n,r}$ de $\psi_{n,r}$ on trouve alors :

$$\begin{aligned} (i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + mc^2) \psi_{n,r} &= \left[mc^2 + \frac{(\vec{p} - \frac{q}{c} \vec{A})^2}{2m} + q\Phi \right] \psi_{n,r} + \frac{(\vec{p} - \frac{q}{c} \vec{A})^2}{2m} \chi_{n,r} \\ (i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + mc^2) \chi_{n,r} &= - \left[mc^2 + \frac{(\vec{p} - \frac{q}{c} \vec{A})^2}{2m} - q\Phi \right] \chi_{n,r} - \frac{(\vec{p} - \frac{q}{c} \vec{A})^2}{2m} \psi_{n,r} \end{aligned}$$

Dans la première équation, les termes en mc^2 tombent, tandis que dans la deuxième il dominent sur les autres, et dans la limite non relativiste où $|\vec{p}| \ll mc$ et $|\Phi|, |\vec{A}| \ll mc^2$, ces deux équations donnent :

$$\begin{cases} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_{n,r} \approx \left[\frac{(\vec{p} - \frac{q}{c} \vec{A})^2}{2m} + q\Phi \right] \psi_{n,r} + \frac{(\vec{p} - \frac{q}{c} \vec{A})^2}{2m} \chi_{n,r} \\ \chi_{n,r} \approx - \frac{(\vec{p} - \frac{q}{c} \vec{A})^2}{4m^2 c^2} \psi_{n,r} \end{cases}$$

La deuxième équation implique que $\chi_{n,r}$ est négligeable par rapport à $\psi_{n,r}$, et la première représente l'équation de Schrödinger pour $\psi_{n,r}$:

$$\begin{cases} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_{n,r} \approx H_S \psi_{n,r} \\ \chi_{n,r} \approx 0 \end{cases} \quad (2.36)$$

avec :

$$H_S = \frac{(\vec{p} - \frac{q}{c} \vec{A})^2}{2m} + q\Phi \quad (2.37)$$

2.5. Equation de Dirac pour spinurs

Pour un champ spinoral à plusieurs composantes, il est possible de trouver une équation locale matricielle du premier degré dans les dérivées spatio-temporelles. Il se trouve que cette équation est complètement déterminée par les propriétés qu'elle est censée avoir, et elle peut donc être déterminée de façon systématique. On peut par cela de la forme générale suivante de l'équation dans le cas libre, dite de Dirac :

$$(i \gamma^\mu \partial_\mu - \frac{mc}{\hbar}) \psi(x) \quad (2.100)$$

La quantité γ^μ représente un 4-vecteur de matrices agissant sur la fonction d'onde comme vecteur, et reste à déterminer. Le terme constant a déjà été fixé à une certaine constante fois la matrice identité, vu qu'une matrice arbitraire pourrait être réabsorbée par une redéfinition des γ^μ . Pour déterminer plus précisément les propriétés que doivent avoir les γ^μ , on commence par supposer que la (2.100) doit impliquer l'équation de Klein-Gordon correspondant à la condition de couche de masse. A cet effet, on considère l'équation obtenue en agissant ultérieurement sur la (2.100) avec l'opérateur $(-i \gamma^\mu \partial_\mu - \frac{mc}{\hbar})$, on obtient :

$$\left(-i \gamma^\mu \partial_\mu - \frac{mc}{\hbar}\right) \left(i \gamma^\nu \partial_\nu - \frac{mc}{\hbar}\right) \psi(x) = 0$$

$$\left(\gamma^\mu \gamma^\nu \partial_\mu \partial_\nu + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2}\right) \psi(x) = 0$$

$$\left(\frac{1}{2} \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} \partial_\mu \partial_\nu + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2}\right) \psi(x) = 0 \quad (2.101)$$

En comparant cette équation avec l'équation de Klein Gordon :

$$\left(\eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2}\right) \psi(x) = 0 \quad (2.102)$$

on déduit que les matrices γ^μ doivent satisfaire l'algèbre de Clifford :

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2 \eta^{\mu\nu} \mathbb{1} \quad (2.103)$$

On observe que la (2.103) prise pour $\mu = \nu$, sans sommation, implique que :

$$(\gamma^0)^2 = 1 \quad ; \quad (\gamma^i)^2 = -1 \quad \Rightarrow \quad (\gamma^\mu)^2 = \eta^{\mu\mu} \quad (2.104)$$

Il suit que γ^0 peut être Hermitien et γ^i anti-Hermitien, et on prend donc :

$$(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0 \quad ; \quad (\gamma^i)^\dagger = -\gamma^i \quad \Rightarrow \quad \gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 \quad (2.105)$$

L'algèbre (2.103) n'a pas une solution unique, même après avoir fixé la dimensionnalité des matrices γ^μ .

Il est clair que si l'on dispose de matrices γ^μ qui satisfont la (2.103), $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}$, on peut en construire d'autres $\tilde{\gamma}^\mu$ la satisfaisant également, $\{\tilde{\gamma}^\mu, \tilde{\gamma}^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}$, en conjuguant ces γ^μ par une matrice U arbitraire:

$$\tilde{\gamma}^\mu = U \gamma^\mu U^{-1} \quad (2.106)$$

Plus précisément, le théorème d'unicité des représentations de l'algèbre de Clifford affirme que toute paire de matrices γ^μ et $\tilde{\gamma}^\mu$ qui la satisfont sont reliées par une conjugaison du type (2.106). En outre, il est facile de démontrer que la propriété (2.105) est préservée, c'est-à-dire que $\gamma^{\mu\dagger} = \gamma_0 \gamma^\mu \gamma_0$ et $\tilde{\gamma}^{\mu\dagger} = \tilde{\gamma}_0 \tilde{\gamma}^\mu \tilde{\gamma}_0$, à condition que U soit unitaire: $U^\dagger = U^{-1}$.

Avant d'étudier les représentations de l'algèbre de Clifford, il est possible de vérifier que l'équation (2.100), avec les conditions (2.103) et (2.105), représente bien une équation d'onde relativiste satisfaisante. Pour ce faire, on commence par observer que la (2.100) peut être réécrite, après l'avoir multipliée par γ_0 , comme une équation de type Schrödinger:

$$i \hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x) = H \psi(x) \quad (2.107)$$

avec une hamiltonienne donnée par

$$H = mc^2 \gamma_0 - i \hbar c \gamma_0 \gamma_i \partial_i \quad (2.108)$$

Cette hamiltonienne est Hermitique, comme conséquence du fait que $(\gamma_0)^+ = \gamma_0$ par (2.105) et que de plus $(\gamma_0 \gamma_i)^+ = \gamma_i^+ \gamma_0^+ = -\gamma_i \gamma_0 = \gamma_0 \gamma_i$ par (2.105) et (2.103) pour $\mu=0$ et $\nu=i$. En fait elle satisfait

$$H^+ = H \quad (2.109)$$

On observe ensuite que l'équation (2.100) implique un courant conservé donné par :

$$J^\mu = c \psi^+ \gamma_0 \gamma_\mu \psi \quad (2.110)$$

En effet, on calcule facilement

$$\begin{aligned} \partial_\mu J^\mu &= c \partial_\mu \psi^+ \gamma_0 \gamma_\mu \psi + c \psi^+ \gamma_0 \gamma_\mu \partial_\mu \psi \\ &= c [\psi^+ \gamma_\mu^+ \partial_\mu \psi]^+ + c [\psi^+ \gamma_0 \gamma_\mu \partial_\mu \psi] \\ &= c [\psi^+ \gamma_0 \gamma_\mu \partial_\mu \psi]^+ + c [\psi^+ \gamma_0 \gamma_\mu \partial_\mu \psi] \\ &= c [\psi^+ \gamma_0 \gamma_\mu \partial_\mu \psi]^+ + c [\psi^+ \gamma_0 \gamma_\mu \partial_\mu \psi] \\ &= c \left[-i \frac{mc}{\hbar} \psi^+ \gamma_0 \psi \right]^+ + c \left[-i \frac{mc}{\hbar} \psi^+ \gamma_0 \psi \right] \\ &= i \frac{mc^2}{\hbar} \psi^+ \gamma_0 \psi - i \frac{mc^2}{\hbar} \psi^+ \gamma_0 \psi \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc :

$$\partial_{\mu} \vec{j}^{\mu} = 0 \quad (2.111)$$

c'est-à-dire :

$$\frac{d\rho}{dt} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 \quad (2.112)$$

avec

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{1}{c} \dot{\psi}^0 \\ &= 4^+ 4 \gg 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{j} &= \vec{j} \\ &= c 4^+ \gamma^0 \vec{\gamma} 4 \end{aligned}$$

Les quantités ρ et \vec{j} représentent donc une densité et un courant de probabilité physiquement acceptables.

Finalement, on remarque que tout changement de base dans la représentation de l'algèbre de Clifford du type (2.106) peut être compensé par une transformation $\psi = U\psi$ sur la fonction d'onde. Afin de préserver les propriétés (2.105), on doit demander que $U^{\dagger} = U^{-1}$. Cette propriété d'unitarité garantit que le 4-courant donné par (2.110) reste invariant. Ceci montre que les prédictions physiques de la théorie dépendent seulement des propriétés algébriques de matrices γ^{μ} .

Verrons maintenant à la construction explicite de matrices γ^μ satisfaisant l'algèbre de Clifford (2.103). On peut montrer que la dimensionnalité de ces matrices doit être paire, mais elle n'est pas limitée à des valeurs précises. On essaie donc d'utiliser la dimensionnalité la plus basse possible.

Pour $d=2$, on remarque que les matrices de Pauli σ_i satisfaisant l'algèbre $\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij}$. Mais il n'existe pas d'autre matrice hermitienne qui anticommute avec les trois σ_i , et l'algèbre (2.103) ne peut donc pas être réalisée avec des matrices 2×2 .

Pour $d=4$, on peut au contraire trouver une représentation de (2.103). Il existe en effet 5 matrices 4×4 indépendantes qui anticommulent entre elles. 4 d'entre elles peuvent être identifiées avec les matrices γ^μ , et la cinquième peut être choisie comme :

$$\gamma^5 = -i \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \tag{2.115}$$

Il suit de (2.103) que :

$$\{\gamma^\mu, \gamma^5\} = 0 \tag{2.116}$$

de (2.104) que :

$$(\gamma^5)^2 = 1 \tag{2.117}$$

et de (2.105) que

$$(\gamma^5)^\dagger = \gamma^5 \tag{2.118}$$

Une représentation simple de ces matrices 4×4 est la représentation standard, donnée en bloc 2×2 comme

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} \quad (2.119)$$

avec

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \quad (2.120)$$

Une autre représentation utile est la représentation de Weyl, définie comme :

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} \quad (2.121)$$

avec

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \quad (2.122)$$

Les deux représentations sont équivalentes, c'est-à-dire liées l'une à l'autre par une transformation unitaire qui réorganise simplement les composantes de la fonction d'onde. La première est la plus utile pour discuter les solutions de l'équation de Dirac et sa limite non relativiste, tandis que la deuxième est la plus utile pour discuter la propriété de transformation de l'équation.

En présence d'un champ électromagnétique externe $A^\mu = (\Phi, \vec{A})$, le couplage minimal change le moment canonique de P_μ à $P_\mu + \frac{q}{c} A_\mu$ et la prescription de quantification devient donc $P_\mu + \frac{q}{c} A_\mu \rightarrow i\hbar \partial_\mu$, c'est-à-dire $P_\mu \rightarrow i\hbar D_\mu$ avec :

$$D_\mu = \partial_\mu + i \frac{q}{\hbar c} A_\mu \quad (2.123)$$

Il est alors naturel de postuler que la généralisation de l'équation de Dirac libre (2.109) soit donnée par :

$$(i\hbar \gamma^\mu D_\mu - \frac{mc}{\hbar}) \psi(x) = 0 \quad (2.124)$$

Un point très important à discuter à ce point est la covariance relativiste de l'équation de Dirac, c'est-à-dire sa compatibilité avec le principe de relativité. Celui-ci demande que sous une transformation de Lorentz associée à un changement de référentiel inertiel, il doit exister une transformation sur la fonction d'onde telle que la nouvelle équation transformée soit équivalente à celle d'origine. Il est évident que pour les spineurs cette condition est non-triviale, à cause du fait qu'ils portent des indices, et que ces indices ne sont pas du simple type vecteur déjà rencontré, avec des propriétés de transformation encore à découvrir.

Pour commencer, il faut déterminer les propriétés de transformation de l'opérateur qui apparaît dans l'équation, c'est-à-dire de la dérivée (2.123), comme dans le cas de Klein-Gordon.

Sous une transformation de Lorentz propre, on a :

$$D_{\mu} \rightarrow D_{\mu'} = \Lambda_{\mu}^{\nu} D_{\nu} \quad [\text{Lorentz propres}] \quad (2.125)$$

Sous parité ou temps :

$$D_{\mu} \rightarrow D_{\mu'} = \eta_{\mu\nu} D_{\nu} \quad [\text{parité}] \quad (2.126)$$

Enfin, sous renversement temporel, on a :

$$D_{\mu} \rightarrow D_{\mu'} = -\eta_{\mu\nu} D_{\nu} \quad [\text{renversement temporel}] \quad (2.127)$$

Pour démontrer que la théorie est covariante sous ces transformations, il est nécessaire de trouver les transformations correspondantes sur les fonctions d'onde, telles que l'équation se transforme dans une équation équivalente. Comme dans le cas des scalaires, il existe essentiellement deux possibilités. La première est que l'équation transformée soit identique à celle de départ, et la deuxième est qu'elle soit égale à sa complexe conjuguée. Il est évident que les transformations de Lorentz propres et la parité doivent être réalisées de la première manière, et le renversement temporel de la deuxième façon.

Considérons d'abord une transformation de Lorentz propre, et postulons que la transformation soit réalisée comme :

$$\left. \begin{aligned} x^{\mu} &\rightarrow x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} \\ \psi_a(x) &\rightarrow \psi'_a(x') = S_{ab}(\Lambda) \psi_b(x) \end{aligned} \right\} \quad (2.128)$$

L'équation de Dirac se transforme alors de la façon suivante, selon l'équation (2.125) :

$$\left[(i\gamma^\mu \partial_\mu - \frac{mc}{\hbar}) \psi(x) = 0 \right] \rightarrow \left[(i\gamma^\mu D'_\mu - \frac{mc}{\hbar}) \psi'(x') = 0 \right] = S(A) \left[(iS^{-1}(A) \gamma^\mu S(A) \Lambda_\mu^\nu D_\nu - \frac{mc}{\hbar}) \psi(x) = 0 \right]$$

La nouvelle équation coïncide avec celle de départ à condition que :

$$S^{-1}(A) \gamma^\mu S(A) \Lambda_\mu^\nu = \gamma^\nu \quad (2.129)$$

Étant donné que $\Lambda^\alpha_\nu \Lambda_\mu^\nu = \delta^\alpha_\mu$, on peut récrire cette condition dans la forme :

$$S^{-1}(A) \gamma^\mu S(A) = \Lambda^\mu_\nu \gamma^\nu \quad (2.130)$$

Cette condition signifie que la matrice $S(A)$ provenant de la transformation de la fonction d'onde doit conjuguer les matrices γ^μ de telle façon à engendrer effectivement la transformation de Lorentz sur l'indice vectoriel qu'elles portent, qui à son tour garantit l'invariance de l'opérateur de Dirac. On remarque que si les matrices γ^μ satisfont l'algèbre de Clifford (2.103), alors les matrices $\Lambda^\mu_\nu \gamma^\nu$ la satisfont aussi, parce que $\Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta \eta^{\alpha\beta} = \eta^{\mu\nu}$. Il doit donc exister une matrice qui relie γ^μ et $\Lambda^\mu_\nu \gamma^\nu$ par conjugaison, et cette matrice est précisément $S(A)$. Pour la déterminer, on paramétrise Λ et $S(A)$ comme :

$$\left. \begin{aligned} \Lambda^\mu_\nu &= e^{-\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} T^{\mu\nu}} = \delta^\mu_\nu + \omega^\mu_\nu + \dots \\ S(A) &= e^{-\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} \Sigma^{\mu\nu}} = \mathbb{1} - \frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} \Sigma^{\mu\nu} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (2.131)$$

Les paramètres $\omega^{\mu\nu}$ doivent satisfaire la condition $\omega^{\mu\nu} = -\omega^{\nu\mu}$, et par conséquent les générateurs $S^{\mu\nu}$ doivent eux-mêmes satisfaire $S^{\mu\nu} = -S^{\nu\mu}$. Pour déterminer S , il est suffisant de considérer une transformation infinitésimale. On a alors :

$$\begin{aligned} S^{-1}(1) \gamma^\mu S(1) &\approx \left(1 + \frac{i}{2} \omega_{\alpha\beta} S^{\alpha\beta}\right) \gamma^\mu \left(1 - \frac{i}{2} \omega_{\alpha\beta} S^{\alpha\beta}\right) \\ &\approx \gamma^\mu + \frac{i}{2} \omega_{\alpha\beta} [\gamma^\mu, S^{\alpha\beta}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Lambda^\mu{}_\nu &= \gamma^\mu + \omega^{\mu\nu} \gamma^\nu \\ &= \gamma^\mu + \frac{1}{2} \omega_{\alpha\beta} (\eta^{\mu\alpha} \gamma^\beta - \eta^{\mu\beta} \gamma^\alpha) \end{aligned}$$

La condition (2.130) implique alors que :

$$[\gamma^\mu, S^{\alpha\beta}] = i (\eta^{\mu\alpha} \gamma^\beta - \eta^{\mu\beta} \gamma^\alpha) \quad (2.132)$$

Il est clair que le fait que l'anticommutateur de deux matrices γ^μ est l'identité permet de construire $S^{\alpha\beta}$ comme produit de deux matrices γ^α et γ^β . Vu que le résultat doit être antisymétrique en α et β , la seule possibilité est que $S^{\alpha\beta} \propto [\gamma^\alpha, \gamma^\beta]$. Pour vérifier que ce type de matrice vérifie effectivement une algèbre du type (2.132) avec les matrices γ^μ , on considère l'identité suivante :

$$[C, AB] = [C, A]B + A[C, B] = \{C, A\}B - A\{C, B\} \quad (2.133)$$

En appliquant la deuxième relation, on obtient :

$$\begin{aligned}
 [\gamma^\mu, [\gamma^\alpha, \gamma^\beta]] &= [\gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\beta] - [\gamma^\mu, \gamma^\beta \gamma^\alpha] \\
 &= (\{\gamma^\mu, \gamma^\alpha\} \gamma^\beta - \gamma^\alpha \{\gamma^\mu, \gamma^\beta\}) \\
 &\quad - (\{\gamma^\mu, \gamma^\beta\} \gamma^\alpha - \gamma^\beta \{\gamma^\mu, \gamma^\alpha\}) \\
 &= (2\eta^{\mu\alpha} \gamma^\beta - \gamma^\alpha 2\eta^{\mu\beta}) - (2\eta^{\mu\beta} \gamma^\alpha - \gamma^\beta 2\eta^{\mu\alpha}) \\
 &= 4(\eta^{\mu\alpha} \gamma^\beta - \eta^{\mu\beta} \gamma^\alpha)
 \end{aligned} \tag{2.134}$$

En comparant (2.132) avec (2.134) on déduit qu'on peut prendre :

$$\Sigma^{\alpha\beta} = -\frac{i}{4} [\gamma^\alpha, \gamma^\beta] \tag{2.135}$$

Il est facile de vérifier que ces matrices satisfont l'algèbre du groupe de Lorentz. En effet, on a :

$$\begin{aligned}
 [[\gamma^\mu, \gamma^\nu], [\gamma^\alpha, \gamma^\beta]] &= [\gamma^\mu \gamma^\nu, [\gamma^\alpha, \gamma^\beta]] - [\gamma^\nu \gamma^\mu, [\gamma^\alpha, \gamma^\beta]] \\
 &= ([\gamma^\mu, \gamma^\alpha] \gamma^\beta + \gamma^\alpha [\gamma^\mu, \gamma^\beta]) \\
 &\quad - ([\gamma^\nu, \gamma^\alpha] \gamma^\beta + \gamma^\alpha [\gamma^\nu, \gamma^\beta]) \\
 &\stackrel{(2.134)}{=} [4(\eta^{\mu\alpha} \gamma^\beta - \eta^{\mu\beta} \gamma^\alpha) + \gamma^\alpha (2\eta^{\mu\nu} - 2\eta^{\nu\mu})] \\
 &\quad - [4(\eta^{\nu\alpha} \gamma^\beta - \eta^{\nu\beta} \gamma^\alpha) + \gamma^\alpha (2\eta^{\nu\mu} - 2\eta^{\mu\nu})] \\
 &= -4(\eta^{\mu\alpha} [\gamma^\nu, \gamma^\beta] - \eta^{\nu\alpha} [\gamma^\mu, \gamma^\beta] \\
 &\quad - \eta^{\mu\beta} [\gamma^\nu, \gamma^\alpha] + \eta^{\nu\beta} [\gamma^\mu, \gamma^\alpha])
 \end{aligned} \tag{2.136}$$

Donc :

$$[\Sigma^{\mu\nu}, \Sigma^{\alpha\beta}] = -i(\eta^{\mu\alpha}\Sigma^{\nu\beta} - \eta^{\nu\alpha}\Sigma^{\mu\beta} - \eta^{\mu\beta}\Sigma^{\nu\alpha} + \eta^{\nu\beta}\Sigma^{\mu\alpha}) \quad (2.137)$$

On remarque que les générateurs $\Sigma^{\alpha\beta}$ ne sont pas Hermitiens.

En effet :

$$\begin{aligned} (\Sigma^{\alpha\beta})^\dagger &= -\frac{i}{4} [\gamma^\alpha, \gamma^\beta]^\dagger = \frac{i}{4} [(\gamma^\alpha)^\dagger, (\gamma^\beta)^\dagger] \\ &= \frac{i}{4} [\gamma_0 \gamma^\alpha \gamma_0, \gamma_0 \gamma^\beta \gamma_0] \\ &= \frac{i}{4} \gamma_0 [\gamma^\alpha, \gamma^\beta] \gamma_0 \\ &= \gamma_0 (\Sigma^{\alpha\beta}) \gamma_0 \end{aligned} \quad (2.138)$$

Il suit que :

$$S^\dagger = \gamma_0 S^{-1} \gamma_0 \quad (2.139)$$

La raison pour laquelle $S^\dagger \neq S^{-1}$ est que $\tilde{\gamma}^\mu = \gamma^\mu$ satisfait la condition $\tilde{\gamma}^{\mu\dagger} = \gamma_0 \tilde{\gamma}^\mu \gamma_0$ et non pas la condition $\tilde{\gamma}^{\mu\dagger} = \tilde{\gamma}_0 \tilde{\gamma}^\mu \tilde{\gamma}_0$. Pour une rotation on a $S^\dagger = S^{-1}$, vu que $(\Sigma^{ij})^\dagger = \Sigma^{ij}$, mais pour un glissement on a au contraire $S^\dagger = S$, vu que $(\Sigma^{0i})^\dagger = -\Sigma^{0i}$. Toutefois, la transformation du 4-courant est toujours acceptable et appropriée, dans les deux cas. En effet, en utilisant la propriété (2.139) on déduit que :

$$\begin{aligned}
 \bar{\psi}'^M(x') &= c \psi'^{\dagger}(x') \gamma^0 \gamma^M \psi'(x') \\
 &= c \psi^{\dagger}(x) S^{\dagger} \gamma^0 \gamma^M S \psi(x) \\
 &= c \psi^{\dagger}(x) \gamma^0 \gamma^0 S^{\dagger} \gamma^0 \gamma^M S \psi(x) \\
 &= c \psi^{\dagger}(x) \gamma^0 S^{-1} \gamma^M S \psi(x) \\
 &= c \psi^{\dagger}(x) \gamma^0 \Lambda^{\mu}_{\nu} \gamma^{\nu} \psi(x) \\
 &= \Lambda^{\mu}_{\nu} \bar{\psi}^{\mu}(x) \tag{2.140}
 \end{aligned}$$

En d'autres termes, la présence des γ^0 dans l'équation (2.139) est exactement ce qu'il faut pour que le covariant (conserve) (2.140), qui contient lui aussi un γ^0 , se transforme comme un 4-vecteur. En fait, on peut définir un nouveau type de conjugation qui tienne compte automatiquement de tous les γ^0 associés à la conjugaison ordinaire. Cette conjugaison est définie comme:

$$\bar{\psi} = \psi^{\dagger} \gamma^0 = (\gamma^0 \psi)^{\dagger} \tag{2.141}$$

Sous une transformation de Lorentz on a alors :

$$\begin{aligned}
 \bar{\psi}' &= (\gamma^0 \psi')^{\dagger} = (\gamma^0 S \psi)^{\dagger} = \psi^{\dagger} S^{\dagger} \gamma^0 \\
 &= \psi^{\dagger} \gamma^0 \gamma^0 S^{\dagger} \gamma^0 \\
 &= \bar{\psi} S^{-1} \tag{2.142}
 \end{aligned}$$

Donc, ψ et $\bar{\psi}$ se transforment de façons inverses :

$$\begin{cases} \psi \rightarrow \psi' = S \psi \\ \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}' = \bar{\psi} S^{-1} \end{cases} \tag{2.143}$$

Ces règles de transformation, en addition de la propriété

$$S^{-1} \gamma^\mu S = \Lambda^\mu_\nu \gamma^\nu \quad (2.144)$$

garantissent que tout bilinéaire fermionique obtenu en insérant des matrices γ^μ entre $\bar{\psi}$ et ψ se transforme comme un tenseur sous transformations de Lorentz.

En particulier, le courant de probabilité (2.110) se écrit comme :

$$j^\mu = c \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \quad (2.145)$$

De cette façon, il devient plus évident qu'il se transforme comme un 4-vecteur, comme simple conséquence de (2.143) et (2.144) :

$$j^\mu \rightarrow j'^\mu = \Lambda^\mu_\nu j^\nu \quad (2.146)$$

On remarque finalement que :

$$[\Sigma^{\alpha\beta}, \gamma^5] = 0 \quad (2.147)$$

et donc

$$[S, \gamma^5] = 0 \quad (2.148)$$

On peut donc construire des tenseurs additionnels en insérant non seulement des matrices γ^μ mais également un γ^5 entre $\bar{\psi}$ et ψ .

Il est instructif de construire plus explicitement la forme des transformations de Lorentz sur les spineurs. Pour cela, il convient comme d'habitude de considérer séparément les rotations et les glissements, et de définir les générateurs correspondents comme :

$$\begin{cases} S_i = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \Sigma^{jk} = \frac{i}{4} \epsilon_{ijk} \gamma^{jk} \\ K_i = \Sigma^{0i} = \frac{i}{2} \gamma^0 \gamma^i \end{cases} \quad (2.149)$$

Considérons d'abord une rotation d'angle α_i autour d'un axe x^i . On a :

$$S(\alpha_i) = e^{-i\alpha_i S_i} \quad [\text{indices non sommés}] \quad (2.150)$$

On calcule facilement

$$(S_i)^2 = \frac{1}{4} \mathbb{1}$$

On a donc :

$$(S_i)^{2n} = \frac{1}{2^{2n}} \mathbb{1} \quad ; \quad (S_i)^{2n+1} = \frac{1}{2^{2n}} S_i = \frac{1}{2^{2n+1}} (2S_i) \quad (2.151)$$

Il suit que :

$$\begin{aligned} S(\alpha_i) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} (-i\alpha_i S_i)^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} (-i\alpha_i S_i)^{2n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} \frac{(-1)^n \alpha_i^{2n}}{2^{2n}} \mathbb{1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} \frac{(-1)^n \alpha_i^{2n+1}}{2^{2n+1}} (-2i S_i) \\ &= \cos \frac{\alpha_i}{2} \mathbb{1} - 2i \sin \frac{\alpha_i}{2} S_i \end{aligned} \quad (2.152)$$

On remarque qu'une rotation de π a un effet non banal sur les fermions, et il faut tourner de 4π pour trouver l'identité :

$$S(2\pi) = -1 \quad ; \quad S(4\pi) = 1 \quad (2.153)$$

Pour un glissement de rapidité δ_i le long d'un axe x_i , on a

$$S(\delta_i) = e^{-i\delta_i K_i} \quad [\text{indices non sommés}] \quad (2.154)$$

On calcule facilement :

$$(K_i)^2 = -\frac{1}{4} \mathbb{1}$$

On a donc :

$$(K_i)^2 = \frac{(-1)^n}{2^{2n}} \mathbb{1} \quad ; \quad (K_i)^{2n+1} = \frac{(-1)^n}{2^{2n}} K_i = \frac{(-1)^n}{2^{2n+1}} (2K_i) \quad (2.155)$$

Il suit que :

$$\begin{aligned} S(\delta_i) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} (-i\delta_i K_i)^{2n} + \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{(2h+1)!} (-i\delta_i K_i)^{2h+1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} \frac{1}{2^{2n}} \delta_i^{2n} \mathbb{1} + \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{(2h+1)!} \frac{1}{2^{2h+1}} \delta_i^{2h+1} (-2iK_i) \\ &= \cosh \frac{\delta_i}{2} \mathbb{1} - 2i \sinh \frac{\delta_i}{2} K_i \end{aligned} \quad (2.156)$$

La rapidité δ_i est reliée à la vitesse v_i par la relation

$$\delta_i = \operatorname{arctanh} \frac{v_i}{c} \quad (2.157)$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \tanh \frac{\delta_i}{2} &= \frac{\tanh \delta_i}{1 + \sqrt{1 - \tanh^2 \delta_i}} = \frac{v/c}{1 + \sqrt{1 - (v/c)^2}} = \frac{v/c}{1 + \gamma^{-1}} \\ &= \frac{\gamma}{1 + \gamma} \frac{v}{c} \end{aligned} \quad (2.158)$$

Il suit que :

$$\begin{aligned} \cosh \frac{\delta_i}{2} &= \frac{1}{\sqrt{1 - \tanh^2 \frac{\delta_i}{2}}} = \frac{1 + \gamma^{-1}}{\sqrt{2\gamma^{-1}(1 + \gamma^{-1})}} = \sqrt{\frac{1 + \gamma^{-1}}{2\gamma^{-1}}} \\ &= \sqrt{\frac{1 + \gamma}{2}} \end{aligned} \quad (2.159)$$

$$\begin{aligned} \sinh \frac{\delta_i}{2} &= \frac{\tanh \frac{\delta_i}{2}}{\sqrt{1 - \tanh^2 \frac{\delta_i}{2}}} = \frac{v/c}{1 + \gamma^{-1}} \frac{1 + \gamma^{-1}}{\sqrt{2\gamma^{-1}(1 + \gamma^{-1})}} = \frac{v/c}{\sqrt{2\gamma^{-1}(1 + \gamma^{-1})}} \\ &= \frac{\gamma}{\sqrt{2(1 + \gamma)}} \frac{v}{c} \end{aligned} \quad (2.160)$$

La transformation peut donc être écrite en fonction de la vitesse V et du facteur de contraction γ comme :

$$S(v_i) = \sqrt{\frac{1 + \gamma}{2}} \left(\mathbb{1} - 2i \frac{\gamma}{1 + \gamma} \frac{v_i}{c} K_i \right) \quad (2.161)$$

Pour rendre les expressions (2.152) et (2.161) plus explicites et les généraliser à des directions arbitraires, il est nécessaire de spécifier une représentation des matrices γ^{μ} . Mais il est clair que les systèmes correspondent à un spin $1/2$.

Considérons maintenant une transformation de type discret de parité. En suivant la même logique on postule dans ce cas :

$$\begin{cases} x'^{\mu} = \eta^{\mu\nu} x^{\nu} \\ \psi'(x') = P \psi(x) \end{cases} \quad (2.162)$$

L'équation de Dirac se transforme alors de la façon suivante, selon l'équation (2.162) :

$$\left[(i \gamma^{\mu} D_{\mu} - \frac{mc}{\hbar}) \psi(x) = 0 \right] \rightarrow \left[(i \gamma'^{\mu} D'_{\mu} - \frac{mc}{\hbar}) \psi'(x') = 0 \right] = P \left[(i P^{-1} \gamma^{\mu} P D_{\mu} \eta_{\mu\nu} - \frac{mc}{\hbar}) \psi(x) = 0 \right]$$

La nouvelle équation coïncide avec celle de départ à condition que la relation suivante soit satisfaite :

$$P^{-1} \gamma^{\mu} P \eta_{\mu\nu} = \gamma^{\mu} \quad (2.163)$$

c'est-à-dire :

$$P^{-1} \gamma^{\mu} P = \eta_{\mu\nu} \gamma^{\nu} \quad (2.164)$$

Comme avant, cette équation implique que la transformation P engendrée par les champs doit conjuguer γ^{μ} de telle façon à reproduire la matrice $\eta_{\mu\nu} \gamma^{\nu}$. Etant donné que si γ^{μ} satisfait l'algèbre de Clifford alors $\eta_{\mu\nu} \gamma^{\nu}$ la satisfait aussi, la conjugaison P doit exister, par le théorème d'unicité des représentations de l'algèbre de Clifford.

Vu que $\gamma^0 \gamma^{\mu} \gamma^0 = \eta_{\mu\nu} \gamma^{\nu}$ on peut prendre

$$P = \gamma^0 \quad (2.165)$$

On note qu'on a $P^2 = 1$ et que, vu que $(\eta_{\mu\nu} \gamma^\mu)^\dagger = (\eta_{00} \gamma^0) (\eta_{\mu\nu} \gamma^\mu) (\eta_{00} \gamma^0)$:

$$P^\dagger = P^{-1}, \text{ mais aussi } P^\dagger = \gamma^0 P^{-1} \gamma^0 \quad (2.166)$$

L'équation de Dirac est donc invariante sous transformations de parité. Dans la notation $\psi, \bar{\psi}$, on a sous parité

$$\begin{cases} \psi \rightarrow \psi' = P\psi \\ \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}' = \bar{\psi} P^{-1} \end{cases} \quad (2.167)$$

et :

$$P^\dagger \gamma^\mu P = \Lambda^\mu_\nu \gamma^\nu \quad (2.168)$$

Ceci garantit que tous les bilinéaires formés en contractant des matrices γ^μ entre $\bar{\psi}$ et ψ sont des tenseurs P-covariants.

Finalement, on note que :

$$\{P, \gamma_5\} = 0 \quad (2.169)$$

Ceci implique que les bilinéaires contenant γ_5 sont eux P-pseudocovariants, au contraire.

Considérons finalement une transformation de renversement du temps. Dans ce cas, il est nécessaire de considérer une conjugaison complexe de la fonction d'onde et on postule la transformation suivante :

$$\begin{cases} X'^\mu = -\eta_{\mu\nu} X^\nu \\ \psi'(x') = T \psi^*(x) \end{cases} \quad (2.170)$$

l'équation de Dirac se transforme alors de la façon suivante, selon l'équation (2.127) :

$$[(i\gamma^\mu \partial_\mu - \frac{mc}{\hbar})\psi(x)=0] \rightarrow [(i\gamma'^\mu \partial'_\mu - \frac{mc}{\hbar})\psi'(x')=0] = T [(i(T^{-1}\gamma^\mu T)^* \partial_\mu \eta_{\mu\nu} - \frac{mc}{\hbar})\psi(x)=0]^*$$

l'équation transformée coïncide avec la conjuguée complexe de l'équation originale si :

$$(T^{-1}\gamma^\mu T)^* \eta_{\mu\nu} = \gamma^\mu \quad (2.171)$$

c'est-à-dire :

$$T^{-1}\gamma^\mu T = \eta_{\mu\nu} \gamma^{\nu*} \quad (2.172)$$

Cette équation implique que la matrice T provenant de la transformation des champs doit conjuguer γ^μ de telle façon à reproduire la matrice $\eta_{\mu\nu} \gamma^{\nu*}$. Étant donné que si γ^μ satisfait l'algèbre de Clifford alors $\eta_{\mu\nu} \gamma^{\nu*}$ la satisfait également, il suit du théorème d'unicité des représentations de l'algèbre de Clifford que la conjugaison T existe bien. Sa forme dépend toutefois de la représentation choisie pour les matrices. Dans les représentations standard et de Weyl considérées dans les équations (2.119) et (2.121), on trouve dans les deux cas que $(\gamma^0)^* = +\gamma^0$, $(\gamma^1)^* = +\gamma^1$, $(\gamma^2)^* = -\gamma^2$, $(\gamma^3)^* = +\gamma^3$, c'est-à-dire

$$(\gamma^\mu)^* = -\eta_{\mu\nu} (\gamma^1 \gamma^3) \gamma^\mu (\gamma^1 \gamma^3)$$

On peut donc prendre dans les deux cas :

$$T = i\gamma^1\gamma^3 \quad (2.173)$$

Dans d'autres représentations de l'algèbre de Clifford, la matrice T aura une forme différente, liée toutefois à la (2.173) par une conjugaison de type (2.106). On a donc dans tous les cas $T^2 = 1$ et, vu que $(\eta_{\mu\nu}\gamma^\mu)^\dagger = (\eta_{\mu\nu}\gamma^\nu)(\eta_{\mu\mu}\gamma^{\mu\nu})(\eta_{\mu\mu}\gamma^{\mu\nu})$:

$$T^\dagger = T^{-1}, \text{ mais aussi } T^\dagger = \gamma^0 T^{-1} \gamma^0 \quad (2.174)$$

En outre, on a également :

$$[T, \gamma^5] = 0 \quad (2.175)$$

Ayant analysé en détail la réalisation des transformations du groupe complet de Lorentz sur les spineurs, il est intéressant de comprendre le rôle de la cinquième matrice γ^5 qui commute avec les matrices γ^μ satisfaisant l'algèbre de Clifford et apparaissent dans l'équation de Dirac. Vu que $(\gamma^5)^2 = 1$ et $(\gamma^5)^\dagger = \gamma^5$, on peut utiliser cette matrice pour construire deux projecteurs complémentaires de chiralité donnés par :

$$P_\pm = \frac{1}{2}(1 \pm \gamma^5) \quad (2.176)$$

On vérifie facilement que :

$$\cdot P_+ + P_- = 1$$

$$\cdot P_{\pm}^2 = P_{\pm}$$

(2.177)

$$\cdot P_{\pm} P_{\mp} = 0$$

Il est donc possible de séparer l'espace vectoriel des spineurs à quatre composantes en deux sous-espaces propres définis par les images de P_{\pm} , dits à chiralité positive et négative respectivement, avec deux composantes indépendantes:

$$\left. \begin{array}{l} \psi_+ = P_+ \psi \quad ; \quad \text{chiralité} +1 \\ \psi_- = P_- \psi \quad ; \quad \text{chiralité} -1 \end{array} \right\} \quad (2.178)$$

Étant donné que

$$[\gamma^5, S] = 0 \quad \Rightarrow \quad P_{\pm}(S\psi) = S(P_{\pm}\psi)$$

$$\{\gamma^5, P\} = 0 \quad \Rightarrow \quad P_{\pm}(P\psi) = P(P_{\pm}\psi) \quad (2.179)$$

$$[\gamma^5, T] = 0 \quad \Rightarrow \quad P_{\pm}(T\psi^*) = T(P_{\mp}\psi^*)$$

on conclut que les transformations de Lorentz propres, ainsi que les transformations de renversement du laps, préservent la chiralité, tandis que la transformation de parité change la chiralité. Ceci implique que seuls les spineurs à quatre composantes forment des représentations du groupe de Lorentz complet, mais que pour le sous-groupe propre du groupe de Lorentz, elle est réductible.

Les spineurs à deux composantes à chiralité définie forment, eux, deux représentations irréductibles du groupe de Lorentz propre, mais sont échangés par l'opération de parité.

Dans la représentation de Weyl, la décomposition des spineurs en terme de chiralité est particulièrement simple. De la (2.122) il suit en effet que les projecteurs (2.176) sont donnés simplement par :

$$P_+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.180)$$

Les spineurs chiraux sont donc ceux avec les seules deux premières composantes non nulles, et les spineurs anti-chiraux ceux avec les seules deux dernières composantes non nulles. Dans cette base, les générateurs de rotations et des boosts propres, définis par les équations (2.149), sont donnés par les matrices suivantes :

$$S_i = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma_i & 0 \\ 0 & \sigma_i \end{pmatrix} \quad (2.181)$$

$$K_i = -\frac{i}{2} \begin{pmatrix} \sigma_i & 0 \\ 0 & -\sigma_i \end{pmatrix}$$

On remarque que tout est construit à partir de la représentation spinorielle $\frac{\sigma_i}{2}$ des générateurs de $su(2)$, avec $j = 1/2$.

Dans la notation $SU(2) \times SU(2)$ introduite par le groupe de Lorentz, les générateurs complexes étaient définis comme :

$$N_i^{\pm} = \frac{1}{2} (S_i \pm iK_i) \quad (2.182)$$

En utilisant les (A.140) on trouve :

$$N_i^+ = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma_i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N_i^- = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\sigma_i \end{pmatrix} \quad (2.183)$$

On conclut donc que

$$4_+ = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} : \text{représentation } (\frac{1}{2}, 0)$$

$$4_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} : \text{représentation } (0, \frac{1}{2})$$

$$4 = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} : \text{représentation } (\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2})$$

Dans la représentation standard, la décomposition des spineurs en terme de chiralité est moins simple. En effet, il suit de la (2.120) que dans cette base :

$$P_+ = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_- = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.184)$$

Etant donné que ces expressions ne sont pas diagonales, aucune composante des spineurs n'est à elle seule un état à chiralité définie, et il faut considérer des combinaisons appropriées. Les générateurs des rotations et des glissements assurent dans cette base les formes suivantes :

$$S_i = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma_i & 0 \\ 0 & \sigma_i \end{pmatrix}$$

$$K_i = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} \quad (2.185)$$

Les rotations agissent comme avant, mais les glissements mélangent les deux premières et les deux dernières composantes entre elles.

Finalement, on observe que l'équation de Dirac est covariante sous transformations de jauge. Sous ces dernières on a :

$$D_\mu \rightarrow D_\mu - e \frac{q}{\hbar c} \lambda \partial_\mu e^{-i \frac{q}{\hbar c} \lambda} \quad (2.186)$$

En prenant alors la transformation suivante :

$$\begin{cases} \psi(x) \rightarrow \psi'(x) = \psi(x) + \partial_\mu \lambda(x) \\ \psi(x) \rightarrow \psi'(x) = e^{-i \frac{q}{\hbar c} \lambda} \psi(x) \end{cases} \quad (2.187)$$

l'équation se transforme de façon covariante :

$$[(i \gamma^\mu D_\mu - \frac{mc}{\hbar}) \psi(x) = 0] \rightarrow [(i \gamma^\mu D'_\mu - \frac{mc}{\hbar}) \psi'(x) = 0] = e^{-i \frac{q}{\hbar c} \lambda} [(i \gamma^\mu D_\mu - \frac{mc}{\hbar}) \psi(x) = 0]$$

2.6 Solutions de l'équation de Dirac libre

Pour déterminer la solution générale de l'équation de Dirac (2.100) on peut procéder comme dans le cas de l'équation de Klein-Gordon. Les solutions générales sont comme avant des ondes planes du type $e^{-ik_\mu x^\mu}$, avec $k^\mu = (\frac{\omega}{c}, \vec{k})$. On paramétrise les champs, comme avant, par une transformée de Fourier :

$$\psi(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \tilde{\psi}(p) e^{-ik_\mu x^\mu} \quad (2.188)$$

La relation inverse est :

$$\tilde{\psi}(p) = \int d^4x \psi(x) e^{ik_\mu x^\mu} \quad (2.189)$$

Les ondes planes $e^{\pm ik_\mu x^\mu}$ peuvent satisfaire l'équation de Dirac seulement si elles satisfont l'équation de Klein-Gordon également, vu que cette dernière est dupliquée par deux itérations de l'opérateur de Dirac. Il suit que le vecteur k^μ doit satisfaire, comme avant, la condition

$$k^2 = \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \quad (2.190)$$

comme avant, cette équation détermine la relation de dispersion de l'onde, et permet de trouver la pulsation ω en fonction du vecteur d'onde \vec{k} . On trouve :

$$\omega = \pm \sqrt{\frac{m^2 c^4}{\hbar^2} + \vec{k}^2 c^2} = \pm \omega_k \quad (2.191)$$

Rappelons aussi que $\hbar k^\mu = (\frac{\hbar \omega}{c}, \hbar \vec{k}) = (\frac{E}{c}, \vec{p}) = p^\mu$, et la condition (2.190) correspond à la condition de conservation de masse $p^2 = m^2 c^2$.

Comme dans le cas du scalaire, on peut obtenir la superposition générale d'ondes planes satisfaisant la (2.190) d'une façon Lorentz-invariante en introduisant $2\pi \delta(k^2 - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2})$ dans la décomposition (2.188). On considère donc :

$$\psi(x) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \tilde{\psi}(k) e^{-i k_\mu x^\mu} (2\pi) \delta(k^2 - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2}) \quad (2.192)$$

En utilisant la relation :

$$\delta(k^2 - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2}) = \frac{c^2}{2\omega k} [\delta(\omega - \omega_k) + \delta(\omega + \omega_k)] \quad (2.193)$$

On trouve alors :

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \int \frac{d\omega}{c} \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3} \tilde{\psi}(k) e^{i(\vec{k}\vec{x} - \omega t)} \frac{c^2}{2\omega k} [\delta(\omega - \omega_k) + \delta(\omega + \omega_k)] \\ &= \int \frac{d^3 \vec{k} c}{(2\pi)^3 2\omega k} [\tilde{\psi}(\omega_k, \vec{k}) e^{i(\vec{k}\vec{x} - \omega_k t)} + \tilde{\psi}(-\omega_k, \vec{k}) e^{i(\vec{k}\vec{x} + \omega_k t)}] \\ &= \int \frac{d^3 \vec{k} c}{(2\pi)^3 2\omega k} [\tilde{\psi}(\omega_k, \vec{k}) e^{i(\vec{k}\vec{x} - \omega_k t)} + \tilde{\psi}(-\omega_k, -\vec{k}) e^{-i(\vec{k}\vec{x} - \omega_k t)}] \quad (2.194) \end{aligned}$$

En définissant :

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}(\omega_k, \vec{k}) &= \frac{\sqrt{2m}}{\hbar} u(k) \\ \tilde{\psi}(-\omega_k, -\vec{k}) &= \frac{\sqrt{2m}}{\hbar} v(k) \end{aligned} \quad (2.195)$$

et en désignant maintenant par k^μ le 4-vecteur d'onde sur coquille, c'est-à-dire :

$$k^\mu = (\frac{\omega_k}{c}, \vec{k}) \quad (2.196)$$

on peut finalement écrire :

$$\psi(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\sqrt{2mc^2}}{2\hbar\omega_k} \left[u(k) e^{-ik_\mu x^\mu} + v(k) e^{ik_\mu x^\mu} \right] \quad (2.197)$$

Le champ conjugué est alors donné par :

$$\bar{\psi}(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\sqrt{2mc^2}}{2\hbar\omega_k} \left[\bar{v}(k) e^{-ik_\mu x^\mu} + \bar{u}(k) e^{ik_\mu x^\mu} \right] \quad (2.198)$$

Il reste à déterminer la forme des spineurs $u(\vec{k})$ et $v(\vec{k})$.

En introduisant la paramétrisation (2.197) dans l'équation de Dirac, on trouve qu'elle est satisfaite si $u(k)$ et $v(k)$

satisfont les équations matricielles suivantes :

$$\begin{cases} \left(\gamma^\mu k_\mu - \frac{mc}{\hbar} \right) u(\vec{k}) = 0 \\ \left(-\gamma^\mu k_\mu - \frac{mc}{\hbar} \right) v(\vec{k}) = 0 \end{cases} \quad (2.199)$$

En divisant par $\frac{mc}{\hbar}$ on peut récrire ces équations comme :

$$\begin{cases} \Lambda^-(\vec{k}) u(\vec{k}) = 0 \\ \Lambda^+(\vec{k}) v(\vec{k}) = 0 \end{cases} \quad (2.200)$$

avec :

$$\Lambda^\pm(\vec{k}) = \frac{1}{2} \left(1 \pm \frac{\hbar}{mc} \gamma^\mu k_\mu \right) \quad (2.201)$$

Les deux matrices représentent un ensemble complet et orthogonal de projecteurs qui divisent l'espace vectoriel 4-dimensionnel de spineurs en deux sous-espaces 2-dimensionnels propres à chaque projecteur. En effet,

La quantité :

$$K = \gamma^\mu k_\mu$$

(2.202)

satisfait l'identité :

$$\begin{aligned} K K &= \gamma^\mu \gamma^\nu k_\mu k_\nu = \frac{1}{2} \{ \gamma^\mu, \gamma^\nu \} k_\mu k_\nu \\ &= \frac{1}{2} 2 \eta^{\mu\nu} k_\mu k_\nu \\ &= k^2 \end{aligned}$$

(2.203)

On trouve alors :

$$\begin{aligned} 1) \Lambda^+(\vec{k}) + \Lambda^-(\vec{k}) &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\hbar}{mc} K \right) + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\hbar}{mc} K \right) \\ &= \mathbb{1} \end{aligned}$$

(2.204)

$$\begin{aligned} 2) \Lambda^\pm(\vec{k}) \Lambda^\pm(\vec{k}) &= \frac{1}{4} \left(1 \pm \frac{\hbar}{mc} K \right) \left(1 \pm \frac{\hbar}{mc} K \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(1 \pm 2 \frac{\hbar}{mc} K + \frac{\hbar^2}{m^2 c^2} K^2 \right) \\ &\stackrel{(7.203)}{=} \frac{1}{4} \left(1 \pm 2 \frac{\hbar}{mc} K + 1 \right) \\ &= \Lambda^\pm(\vec{k}) \end{aligned}$$

(2.205)

$$\begin{aligned} 3) \Lambda^\pm(\vec{k}) \Lambda^\mp(\vec{k}) &= \frac{1}{4} \left(1 \pm \frac{\hbar}{mc} K \right) \left(1 \mp \frac{\hbar}{mc} K \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(1 - \frac{\hbar^2}{m^2 c^2} K^2 \right) \\ &\stackrel{(7.203)}{=} \frac{1}{4} (1 - 1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

(2.206)

Pour résoudre les équations (2.200), on peut utiliser le fait que les deux projecteurs $\Lambda^\pm(\vec{k})$ sont complémentaires, ce qui implique que le noyau de l'un coïncide avec l'image de l'autre. La solution générale de (2.200) a donc la forme:

$$\begin{cases} u(\vec{k}) = \Lambda^+(\vec{k}) w \\ v(\vec{k}) = \Lambda^-(\vec{k}) w \end{cases} \quad (2.207)$$

avec :

$w =$ spineur arbitraire

Pour rendre ces expressions plus explicites, il convient de choisir le référentiel inertiel particulier où la particule est au repos, avec $\vec{k} = 0$ et $\omega_k = \frac{mc^2}{\hbar}$. Dans ce cas on a:

$$\Lambda^\pm(\vec{0}) = \frac{1}{2}(\mathbb{1} \pm \gamma^0) \quad (2.208)$$

Les matrices demeurent particulièrement simple en choisissant la représentation standard (2.119) pour les matrices γ^μ . On trouve alors :

$$\Lambda^+(\vec{0}) = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Lambda^-(\vec{0}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix} \quad (2.209)$$

Les matrices projettent simplement sur les deux premières et deux dernières composantes des spineurs à quatre composantes. On peut donc prendre comme base des spineurs :

$$u^{(1)}(\vec{o}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u^{(2)}(\vec{o}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v^{(1)}(\vec{o}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v^{(2)}(\vec{o}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.210)$$

Les quatre systèmes sont orthogonaux, dans le sens qu'ils satisfont les relations :

$$\begin{aligned} \bar{u}^{(\alpha)}(\vec{o}) u^{(\beta)}(\vec{o}) &= -\bar{v}^{(\alpha)}(\vec{o}) v^{(\beta)}(\vec{o}) = \delta^{\alpha\beta} \\ \bar{u}^{(\alpha)}(\vec{o}) v^{(\beta)}(\vec{o}) &= \bar{v}^{(\alpha)}(\vec{o}) u^{(\beta)}(\vec{o}) = 0 \end{aligned} \quad (2.211)$$

Il forment un ensemble complet, dans le sens que :

$$\sum_{\alpha=1}^2 \left[u_a^{(\alpha)}(\vec{o}) \bar{u}_b^{(\alpha)}(\vec{o}) - v_a^{(\alpha)}(\vec{o}) \bar{v}_b^{(\alpha)}(\vec{o}) \right] = \delta_{ab} \quad (2.212)$$

La solution générale des équations (2.200) avec $k=0$ peut alors s'écrire comme :

$$\left\{ \begin{aligned} u(\vec{o}) &= \sum_{\alpha=1}^2 b^{(\alpha)}(\vec{o}) u^{(\alpha)}(\vec{o}) \\ v(\vec{o}) &= \sum_{\alpha=1}^2 d^{(\alpha)}(\vec{o}) v^{(\alpha)}(\vec{o}) \end{aligned} \right. \quad (2.213)$$

On note que les (2.213) ont effectivement la forme (2.207), vu que $u^{(\alpha)}(\vec{o}) = A^{(\alpha)}(\vec{o}) u^{(0)}$ et $v^{(\alpha)}(\vec{o}) = A^{(\alpha)}(\vec{o}) v^{(0)}$.

Dans un référentiel inertiel arbitraire où $\vec{k} \neq 0$, la forme des spineurs de polarisation peut être obtenue en appliquant une transformation de Lorentz appropriée. Une transformation de Lorentz avec vitesse $-\vec{v}$ arbitraire est réalisée sur les spineurs par une matrice qui est la généralisation directe de l'équation (2.161). On trouve :

$$\begin{aligned}
 S(\vec{v}) &= \sqrt{\frac{1+\gamma}{2}} \left[\mathbb{1} - \frac{\gamma}{1+\gamma} \frac{\vec{v}}{c} \gamma^0 \vec{\gamma} \right] \\
 &= \sqrt{\frac{2}{1+\gamma}} \left[\frac{1+\gamma}{2} + \frac{\gamma \vec{v}}{2c} \gamma^0 \vec{\gamma} \right] \\
 &= \sqrt{\frac{2}{1+\gamma}} \left[\frac{1}{2} + \frac{\gamma c}{2c} \gamma^0 \gamma^2 + \frac{\gamma \vec{v}}{2c} \gamma^0 \vec{\gamma} \right] \\
 &= \sqrt{\frac{2}{1+\gamma}} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2c} \gamma^0 m_\mu \gamma^\mu \right]
 \end{aligned} \tag{2.214}$$

Le 4-vecteur $u^\mu = (\gamma c, \gamma \vec{v})$ est identifié avec la 4-vitesse de la particule, et on doit donc prendre :

$$\begin{aligned}
 u^\mu &= \frac{p^\mu}{m} = \frac{\hbar k^\mu}{m} \\
 \gamma &= \frac{E}{mc^2} = \frac{p^0}{mc} = \frac{\hbar k^0}{mc}
 \end{aligned} \tag{2.215}$$

On trouve finalement :

$$S(\vec{k}) = C(\vec{k})^{-1} \frac{1}{2} \left(1 + \gamma^0 \frac{\hbar}{mc} \not{k} \right) \tag{2.216}$$

avec :

$$C(\vec{k}) = \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{\hbar k^0}{mc} \right)} \tag{2.217}$$

Etant donné que $\gamma^0 \rightarrow +1$ sur $u^{(\alpha)}(\vec{0})$ et $\gamma^0 \rightarrow -1$ sur $v^{(\alpha)}(\vec{0})$,
les nouveaux spineurs de polarisation sont donnés par

$$\begin{cases} u^{(\alpha)}(\vec{k}) = S(\vec{k}) u^{(\alpha)}(\vec{0}) = c(\vec{k})^{-1} \Lambda^+(\vec{k}) u^{(\alpha)}(\vec{0}) \\ v^{(\alpha)}(\vec{k}) = S(\vec{k}) v^{(\alpha)}(\vec{0}) = c(\vec{k})^{-1} \Lambda^-(\vec{k}) v^{(\alpha)}(\vec{0}) \end{cases} \quad (2.218)$$

Dans la représentation standard (2.119) des matrices γ^μ ,

on a :

$$\Lambda^+(\vec{k}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\hbar k^0}{mc}\right) & -\frac{\hbar \vec{k} \cdot \vec{\sigma}}{2mc} \\ -\frac{\hbar \vec{k} \cdot \vec{\sigma}}{2mc} & \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\hbar k^0}{mc}\right) \end{pmatrix} \quad (2.219)$$

$$\Lambda^-(\vec{k}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\hbar k^0}{mc}\right) & \frac{\hbar \vec{k} \cdot \vec{\sigma}}{2mc} \\ -\frac{\hbar \vec{k} \cdot \vec{\sigma}}{2mc} & \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\hbar k^0}{mc}\right) \end{pmatrix}$$

Les spineurs de polarisation sont alors donnés par :

$$u^{(1)}(\vec{k}) = \begin{pmatrix} c(k) \\ 0 \\ \frac{\hbar k^3}{2mc} c^{-1}(k) \\ \frac{\hbar k^+}{2mc} c^{-1}(k) \end{pmatrix} ; \quad u^{(2)}(\vec{k}) = \begin{pmatrix} 0 \\ c(k) \\ \frac{\hbar k^-}{2mc} c^{-1}(k) \\ -\frac{\hbar k^3}{2mc} c^{-1}(k) \end{pmatrix}$$

$$v^{(1)}(\vec{k}) = \begin{pmatrix} \frac{\hbar k^3}{2mc} c^{-1}(k) \\ \frac{\hbar k^+}{2mc} c^{-1}(k) \\ c(k) \\ 0 \end{pmatrix} ; \quad v^{(2)}(\vec{k}) = \begin{pmatrix} \frac{\hbar k^-}{2mc} c^{-1}(k) \\ -\frac{\hbar k^3}{2mc} c^{-1}(k) \\ 0 \\ c(k) \end{pmatrix} \quad (2.220)$$

Etant donne que :

$$S^{\dagger} = \gamma_0 S^{-1} \gamma_0 \tag{2.221}$$

et que :

$$[\Lambda^{\pm}(k)]^{\dagger} = \gamma_0 \Lambda^{\pm}(k) \gamma_0 \tag{2.222}$$

les spineurs conjugués sont donnés par :

$$\left\{ \begin{aligned} \bar{u}^{(\alpha)}(k) &= \bar{u}^{(\alpha)}(0) S^{-1}(k) = c(k)^{-1} \bar{u}^{(\alpha)}(0) \Lambda^+(k) \\ \bar{v}^{(\alpha)}(k) &= \bar{v}^{(\alpha)}(0) S^{-1}(k) = c(k)^{-1} \bar{v}^{(\alpha)}(0) \Lambda^-(k) \end{aligned} \right. \tag{2.223}$$

Les nouveaux spineurs satisfont manifestement les équations (2.200) vu qu'ils sont de la forme (2.207), et le coefficient $c(k)$ de normalisation est tel qu'ils forment un ensemble orthonormal, on a en effet :

$$\begin{aligned} \bar{u}^{(\alpha)}(k) u^{(\beta)}(k) &= \bar{u}^{(\alpha)}(0) S^{-1}(k) S(k) u^{(\beta)}(0) \\ &= \bar{u}^{(\alpha)}(0) u^{(\beta)}(0) \\ &= \delta^{\alpha\beta} \end{aligned} \tag{2.224}$$

$$\begin{aligned} \bar{v}^{(\alpha)}(k) v^{(\beta)}(k) &= \bar{v}^{(\alpha)}(0) S^{\dagger}(k) S(k) v^{(\beta)}(0) \\ &= \bar{v}^{(\alpha)}(0) v^{(\beta)}(0) \\ &= -\delta^{\alpha\beta} \end{aligned} \tag{2.225}$$

$$\begin{aligned} U^{(\alpha)}(\vec{k}) V^{(\beta)}(\vec{k}) &= \bar{u}^{(\alpha)}(\vec{0}) S^{-1}(\vec{k}) S(\vec{k}) V^{(\beta)}(\vec{0}) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (2.226)$$

$$\begin{aligned} \bar{V}^{(\alpha)}(\vec{k}) U^{(\beta)}(\vec{k}) &= \bar{v}^{(\alpha)}(\vec{0}) S^{-1}(\vec{k}) S(\vec{k}) U^{(\beta)}(\vec{0}) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (2.227)$$

Il forment également un ensemble complet. En effet, la transformation de Lorentz présente la relation (2.212) qui est valable dans le référentiel du repos :

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha=1}^2 \left[u_a^{(\alpha)}(\vec{k}) \bar{u}_b^{(\alpha)}(\vec{k}) - v_a^{(\alpha)}(\vec{k}) \bar{v}_b^{(\alpha)}(\vec{k}) \right] &= \\ &= S_{ac}(\vec{k}) \sum_{\alpha=1}^2 \left[u_c^{(\alpha)}(\vec{0}) \bar{u}_d^{(\alpha)}(\vec{0}) - v_c^{(\alpha)}(\vec{0}) \bar{v}_d^{(\alpha)}(\vec{0}) \right] S_{db}^{-1}(\vec{k}) \\ &= S_{ac}(\vec{k}) \delta_{cd} S_{db}^{-1}(\vec{k}) \\ &= \delta_{ab} \end{aligned} \quad (2.228)$$

La solution générale des équations (2.200) pour \vec{k} arbitraire peut finalement s'écrire comme :

$$\left. \begin{aligned} u(\vec{k}) &= \sum_{\alpha=1}^2 b^{(\alpha)}(\vec{k}) u^{(\alpha)}(\vec{k}) \\ v(\vec{k}) &= \sum_{\alpha=1}^2 d^{*(\alpha)}(\vec{k}) v^{(\alpha)}(\vec{k}) \end{aligned} \right\} \quad (2.229)$$

Finalement, la solution générale de l'équation de Dirac libre s'écrit comme :

$$\psi(x) = \sum_{\alpha=1}^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\sqrt{2mc^2}}{2\hbar\omega_k} \left[b^{(\alpha)}(\vec{k}) u^{(\alpha)}(\vec{k}) e^{-ik_{\mu}x^{\mu}} + d^{(\alpha)\dagger}(\vec{k}) v^{(\alpha)}(\vec{k}) e^{ik_{\mu}x^{\mu}} \right] \quad (2.230)$$

et son conjugué comme :

$$\bar{\psi}(x) = \sum_{\alpha=1}^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\sqrt{2mc^2}}{2\hbar\omega_k} \left[d^{(\alpha)}(\vec{k}) \bar{v}^{(\alpha)}(\vec{k}) e^{-ik_{\mu}x^{\mu}} + b^{(\alpha)\dagger}(\vec{k}) \bar{u}^{(\alpha)}(\vec{k}) e^{ik_{\mu}x^{\mu}} \right] \quad (2.231)$$

2.7 Limite non-relativiste de l'équation de Dirac

Pour définir une limite non-relativiste de l'équation de Dirac, on peut procéder comme pour l'équation de Klein-Gordon après sa décomposition en équation usuelle du premier degré. On cherche une transformation U dans l'espace de Hilbert qui préserve l'Hermiticité de l'Hamiltonien et la densité de probabilité, et qui diagonalise l'Hamiltonien.

Dans le cas libre, l'équation s'écrit comme :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x) = H \psi(x) \quad (2.232)$$

avec une Hamiltonienne donnée par

$$H = mc^2 \gamma^0 + \vec{p} c \gamma^0 \vec{\gamma} \quad (2.233)$$

et qui est Hermitien dans le sens usuel :

$$H^\dagger = H \quad (2.234)$$

le courant de probabilité est donné par :

$$j = \psi^\dagger \psi \quad (2.235)$$

Dans ce cas, les transformations U autorisées doivent être unitaires par rapport au produit scalaire usuel entre ψ^\dagger et ψ , et non pas entre $\bar{\psi}$ et ψ :

$$U^\dagger = U^{-1} \quad (2.236)$$

De cette façon on a :

$$\begin{cases} \psi \rightarrow U\psi \\ \psi^\dagger \rightarrow \psi^\dagger U^{-1} \\ H \rightarrow U H U^{-1} \end{cases} \quad (2.237)$$

et les valeurs moyennes des opérateurs Hermitiens entre ψ^\dagger et ψ restent invariants. On remarque que la situation diffère de celle rencontrée pour l'équation de Klein-Gordon, où il est nécessaire de considérer le produit scalaire modifié entre $\bar{\psi}$ et ψ . L'Hamiltonien de Dirac (2.233) a la même structure que l'Hamiltonien de Klein-Gordon (1.56), avec γ_0 et $\gamma_0 \vec{\gamma} \cdot \vec{p}$ jouant un rôle similaire à η et p . On essaie alors de prendre :

$$U = e^{i \delta(p) \frac{\vec{p} \cdot \vec{\gamma}}{|\vec{p}|}} \quad (2.238)$$

Etant donné que $(\frac{\vec{p} \cdot \vec{\gamma}}{|\vec{p}|})^2 = -1$, on peut écrire cette matrice comme :

$$U = \cos \delta(p) + \sin \delta(p) \frac{\vec{p} \cdot \vec{\gamma}}{|\vec{p}|} \quad (2.239)$$

De plus, vu que $(\frac{\vec{p} \cdot \vec{\gamma}}{|\vec{p}|})^\dagger = -(\frac{\vec{p} \cdot \vec{\gamma}}{|\vec{p}|})$ on a bien :

$$U^\dagger = U^{-1} \quad (2.240)$$

Dans la nouvelle base on a :

$$\psi' = \left[\cos \delta(p) + \sin \delta(p) \frac{\vec{p} \cdot \vec{\sigma}}{|\vec{p}|} \right] \psi \quad (2.241)$$

et :

$$\begin{aligned} H' &= \left[\cos \delta(p) + \sin \delta(p) \frac{\vec{p} \cdot \vec{\sigma}}{|\vec{p}|} \right] \gamma^0 \left[\cos \delta(p) - \sin \delta(p) \frac{\vec{p} \cdot \vec{\sigma}}{|\vec{p}|} \right] mc^2 \\ &\quad + \left[\cos \delta(p) + \sin \delta(p) \frac{\vec{p} \cdot \vec{\sigma}}{|\vec{p}|} \right] \gamma^0 \frac{\vec{p} \cdot \vec{\sigma}}{|\vec{p}|} \left[\cos \delta(p) - \sin \delta(p) \frac{\vec{p} \cdot \vec{\sigma}}{|\vec{p}|} \right] |\vec{p}| c \\ &= \left[(\cos \delta(p))^2 - \sin \delta(p)^2 \right] \gamma^0 - 2 \sin \delta(p) \cos \delta(p) \gamma^0 \frac{\vec{p} \cdot \vec{\sigma}}{|\vec{p}|} \Big] mc^2 \\ &\quad + \left[(\cos \delta(p))^2 - \sin \delta(p)^2 \right] \gamma^0 \frac{\vec{p} \cdot \vec{\sigma}}{|\vec{p}|} + 2 \sin \delta(p) \cos \delta(p) \gamma^0 \Big] |\vec{p}| c \\ &= \left[\cos 2\delta(p) \gamma^0 - \sin 2\delta(p) \gamma^0 \frac{\vec{p} \cdot \vec{\sigma}}{|\vec{p}|} \right] mc^2 \\ &\quad + \left[\cos 2\delta(p) \gamma^0 \frac{\vec{p} \cdot \vec{\sigma}}{|\vec{p}|} + \sin 2\delta(p) \gamma^0 \right] |\vec{p}| c \\ &= \left[\cos 2\delta(p) mc^2 + \sin 2\delta(p) |\vec{p}| c \right] \gamma^0 \\ &\quad + \left[\cos 2\delta(p) |\vec{p}| c - \sin 2\delta(p) mc^2 \right] \gamma^0 \frac{\vec{p} \cdot \vec{\sigma}}{|\vec{p}|} \quad (2.242) \end{aligned}$$

Pour que le terme en $\gamma^0 \frac{\vec{p} \cdot \vec{\sigma}}{|\vec{p}|}$ disparaisse, on choisit :

$$\tan 2\delta(p) = \frac{|\vec{p}|}{mc} \quad (2.243)$$

et donc

$$\delta(p) = \frac{1}{2} \arctan \frac{|\vec{p}|}{mc} \quad (2.244)$$

On a alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos 2\delta(p) = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 2\delta(p)}} = \frac{mc^2}{\sqrt{m^2c^4 + \vec{p}^2c^2}} \\ \sin 2\delta(p) = \frac{\tan 2\delta(p)}{\sqrt{1 + \tan^2 2\delta(p)}} = \frac{|\vec{p}|c}{\sqrt{m^2c^4 + \vec{p}^2c^2}} \end{array} \right. \quad (2.245)$$

et donc :

$$\begin{aligned} \cos 2\delta(p) mc^2 + \sin 2\delta(p) |\vec{p}|c &= \frac{(mc^2)^2 + (\vec{p}c)^2}{\sqrt{m^2c^4 + \vec{p}^2c^2}} \\ &= \sqrt{m^2c^4 + \vec{p}^2c^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos \delta(p) |\vec{p}|c - \sin 2\delta(p) mc^2 &= \frac{(mc^2)(\vec{p}c) - (\vec{p}c)(mc^2)}{\sqrt{m^2c^4 + \vec{p}^2c^2}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Le nouvel Hamiltonien est donc simplement :

$$H' = \sqrt{m^2c^4 + |\vec{p}|^2c^2} \gamma_0 \quad (2.246)$$

Dans la représentation standard, cette expression est diagonale, et donne :

$$H' = \begin{pmatrix} \sqrt{m^2c^4 + |\vec{p}|^2c^2} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\sqrt{m^2c^4 + |\vec{p}|^2c^2} \mathbb{1} \end{pmatrix} \quad (2.247)$$

On retrouve donc les deux racines non locales de l'énergie, mais sur des spineurs à deux composantes.

En présence de champs externes, on peut procéder de la même façon, mais la diagonalisation ne peut pas être faite exactement et il faut procéder perturbativement en développant en série de puissances inverses de m , en suivant la procédure de Foldy-Wouthuysen. L'équation de départ est

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = H \psi \quad (2.248)$$

avec

$$H = \gamma^0 mc^2 + (\vec{p} - \frac{q}{c} \vec{A}) c \gamma^0 \vec{\gamma} + q \Phi \mathbb{1} \quad (2.249)$$

Comme dans le cas de l'équation de Klein Gordon, la généralisation de la transformation (2.238) obtenue en substituant \vec{p} avec $\vec{p} - \frac{q}{c} \vec{A}$ ne suffit pas à diagonaliser l'Hamiltonien (2.249). Comme avant, les deux types de obstructions sont représentés par la dépendance du temps de \vec{A} et la dépendance de la position de ϕ , qui impliquent des corrections dépendant des champs électromagnétiques et qui doivent être calculés ordre par ordre perturbativement. Dans ce cas, il y a également un troisième nouvel effet dû à la présence du champ externe, lié au fait que la nouvelle matrice $\frac{(\vec{p} - \frac{q}{c} \vec{A}) \cdot \vec{\gamma}}{|\vec{p} - \frac{q}{c} \vec{A}|}$ a un carré qui n'est plus égale à $+1$.

En effet, on a, pour deux opérateurs \vec{a} et \vec{b} géométriques :

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{\gamma} \vec{b} \cdot \vec{\gamma} &= a_i b_j \gamma_i \gamma_j = a_i b_j \left(\frac{1}{2} \{ \gamma_i, \gamma_j \} + \frac{1}{2} [\gamma_i, \gamma_j] \right) \\ &= a_i b_j (\eta^{ij} - 2i \Sigma^{ij}) = a_i b_j (-\delta^{ij} - 2i \epsilon^{ijk} S_k) \\ &= -\vec{a} \cdot \vec{b} - 2i S_k \epsilon^{kij} a_i b_j \\ &= -\vec{a} \cdot \vec{b} - 2i \vec{S} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) \end{aligned} \quad (2.250)$$

Ponc, pour $\vec{a} = \vec{b} = \vec{p} - \frac{q}{c} \vec{A}$ on trouve :

$$\begin{aligned} \left[\left(\vec{p} - \frac{q}{c} \vec{A} \right) \cdot \vec{\gamma} \right]^2 &= - \left(\vec{p} - \frac{q}{c} \vec{A} \right)^2 - 2i \vec{S} \cdot \left(\vec{p} - \frac{q}{c} \vec{A} \right) \times \left(\vec{p} - \frac{q}{c} \vec{A} \right) \\ &= - \left(\vec{p} - \frac{q}{c} \vec{A} \right)^2 + \frac{2iq}{c} \vec{S} \cdot \left[\vec{p} \times \vec{A} + \vec{A} \times \vec{p} \right] \\ &= - \left(\vec{p} - \frac{q}{c} \vec{A} \right)^2 + \frac{2iq}{c} \vec{S} \cdot \left[(-i\hbar \vec{\nabla} \times \vec{A} - \vec{A} \times \vec{p}) + \vec{A} \times \vec{p} \right] \\ &= - \left(\vec{p} - \frac{q}{c} \vec{A} \right)^2 + \frac{2q}{c} \hbar \vec{S} \cdot \vec{B} \end{aligned} \quad (2.251)$$

Il suit que la matrice $\frac{[\vec{p} - \frac{q}{c} \vec{A}] \cdot \vec{\gamma}}{|\vec{p} - \frac{q}{c} \vec{A}|}$ au carré diffère de -1 par un terme qui est proportionnel à la matrice de spin, et même la généralisation bivariante de la transformation (2.238) produit ordre par ordre des nouveaux termes qui dépendent des champs électromagnétiques et du spin, en plus des termes correspondant à la substitution de \vec{p} par $\vec{p} - \frac{q}{c} \vec{A}$ dans le résultat libre

Pour simplifier, on peut considérer le cas particulier de champs statiques, et procéder exactement comme pour l'équation de Klein-Gordon pour effectuer perturbativement la diagonalisation.

On commence par écrire l'Hamiltonien (2.249) comme :

$$H = mc^2 \gamma^0 + \epsilon + \mathcal{O} \quad (2.252)$$

avec :

$$\left. \begin{array}{l} \epsilon = q\Phi \\ \mathcal{O} = (\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A})_c \gamma^0 \vec{\gamma} \end{array} \right\} \begin{array}{l} [\gamma^0 \epsilon = \epsilon \gamma^0] \\ [\gamma^0 \mathcal{O} = -\mathcal{O} \gamma^0] \end{array} \quad (2.253)$$

On a exactement les mêmes propriétés que dans le cas de Klein-Gordon, avec $\gamma^0 \leftrightarrow \eta$. On peut donc utiliser directement la formule obtenue dans le cas de Klein-Gordon au même ordre, c'est-à-dire :

$$H' = mc^2 \gamma^0 + \epsilon + \frac{\gamma^0 \mathcal{O}^2}{2mc^2} - \frac{1}{8m^2 c^4} [\mathcal{O}, [\mathcal{O}, \epsilon]] + \dots \quad (2.254)$$

On calcule, pour des champs statiques ($\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi$, $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$, $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$):

$$\cdot \epsilon = q\Phi$$

$$\begin{aligned} \cdot \frac{\gamma^0 \mathcal{O}^2}{2mc^2} &= \frac{1}{2m} \gamma^0 \left[(\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A}) \cdot \gamma^0 \vec{\gamma} \right]^2 = -\frac{1}{2m} \gamma^0 \left[(\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A}) \cdot \vec{\gamma} \right]^2 \\ &= \frac{1}{2m} \gamma^0 \left[(\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A})^2 - \frac{2q}{c} \hbar \vec{S} \cdot \vec{B} \right] \\ &= \frac{1}{2m} \gamma^0 (\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A})^2 - \frac{q}{mc} \gamma^0 \hbar \vec{S} \cdot \vec{B} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
- \frac{1}{8m^2c^4} [0, [0, \epsilon]] &= \frac{1}{8m^2c^2} [(\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A}) \vec{\gamma}, [(\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A}) \vec{\gamma}, q\phi]] \\
&= \frac{q}{8m^2c^2} [(\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A}) \vec{\gamma}, (-i\hbar) \vec{\nabla} \phi \cdot \vec{\gamma}] \\
&= \frac{i\hbar q}{8m^2c^2} [(\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A}) \vec{\gamma}, \vec{E} \cdot \vec{\gamma}] \\
&= \frac{i\hbar q}{8m^2c^2} [(\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A}) \vec{\gamma} \vec{E} \cdot \vec{\gamma} - \vec{E} \vec{\gamma} (\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A})] \\
&= \frac{i\hbar q}{8m^2c^2} [(-(\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A}) \vec{E} - 2i\vec{S} (\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A}) \times \vec{E}) \\
&\quad - (-\vec{E} \cdot (\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A}) - 2i\vec{S} \vec{E} \times (\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A}))] \\
&= \frac{i\hbar q}{8m^2c^2} [- (\vec{p} \vec{E} - \vec{E} \vec{p}) - 2i\vec{S} [(\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A}) \times \vec{E} - \vec{E} \times (\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A})]] \\
&= \frac{i\hbar q}{8m^2c^2} [- (-i\hbar \vec{\nabla} \vec{E}) - 2i\vec{S} (-i\hbar \vec{\nabla} \times \vec{E} - 2\vec{E} \times (\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A}))] \\
&= \frac{i\hbar q}{8m^2c^2} [- i\hbar \vec{\nabla}^2 \phi + 4i\vec{S} \vec{E} \times (\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A})] \\
&= - \frac{q}{8m^2c^2} [(\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A}), [(\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A}), \phi]] - \frac{q}{2m^2c^2} \hbar \vec{S} \cdot \vec{E} \times (\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A})
\end{aligned}$$

Donc, on obtient un Hamiltonien de la forme $H' = H'_c + H'_q$

avec :

$$H'_c = \sqrt{m^2c^4 + (\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A})^2c^2} \gamma^0 + q\phi \quad (2.255)$$

représente la partie classiquement attendue et

$$\begin{aligned}
H'_q &= - \frac{q}{mc} \hbar \vec{S} \gamma^0 (\vec{B} + \frac{\gamma^0}{2} \vec{E} \times \frac{\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A}}{m}) \\
&\quad - \frac{q}{8m^2c^2} [(\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A}), [(\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A}), \phi]] + \dots \quad (2.256)
\end{aligned}$$

Les deux premiers termes dans la correction (2.266) représentent l'énergie d'interaction entre le spin de la particule et le champ électromagnétique qu'elle subit. Cette interaction peut être écrite comme $-g \frac{q}{2mc} \gamma^0 \hbar \vec{S} (\vec{B} + \gamma^0 \vec{E} \times \vec{v}) + \hbar \vec{S} \left(\frac{g \vec{E} \times \vec{v}}{4mc} \right)$, avec $g=2$. Le premier terme est l'énergie d'interaction entre le spin et le champ magnétique effectif ressenti par la particule dans le référentiel où elle est au repos, tandis que le deuxième est dû à la précession de Thomas, un effet cinématique lié au fait que le système au repos subit effectivement une précession quand la trajectoire n'est pas rectiligne, à cause du fait que le commutateur de deux boosts successifs n'est pas nul mais représente une rotation. La fréquence angulaire de précession de Thomas est liée à la composante de l'accélération, ici due à la force de Coulomb, qui est orthogonale à la vitesse, et produit le terme Thomas. On obtient donc correctement l'interaction de spin et l'interaction de spin-orbite, avec les coefficients appropriés pour une particule de spin $1/2$ avec $g=2$. Le troisième terme dans (2.256) représente au contraire une correction de Darwin à l'énergie électrostatique, due à l'indétermination quantique sur les sources.

Comme dans le cas de Klein-Gordon, il est possible de obtenir la limite non-relativiste brutale de l'équation de Dirac par une méthode plus simple et intuitive, mais moins systématique. Le point de départ est donné par les équations (2.248) et (2.249). On cherche alors des solutions à énergie positive et dominée par l'énergie au repos de la particule mc^2 , l'énergie critique étant beaucoup plus petite. Pour ce faire, on factorise la fonction d'onde en une phase oscillant rapidement dans le temps à une fréquence déterminée par l'énergie au repos, et une fonction variant lentement dans le temps, avec une fréquence typique déterminée par l'énergie critique. Plus précisément, on pose :

$$\psi(x) = e^{-i \frac{mc^2}{\hbar} t} \psi_{n.r.}(x) \quad (2.257)$$

avec :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_{n.r.} \ll mc^2 \psi_{n.r.}$$

L'équation (2.248) donne alors :

$$(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + mc^2) \psi_{n.r.} = H_D \psi_{n.r.}$$

avec :

$$H_D = mc^2 \gamma^0 + c \gamma^0 (\vec{p} - \frac{q}{c} \vec{A}) \cdot \vec{\gamma} + q \Phi$$

Dans la représentation standard pour les matrices γ^μ , les deux composantes bidimensionnelles $\psi_{1.n.r.}$ et $\psi_{2.n.r.}$ de $\psi_{n.r.}$ satisfont donc les équations suivantes :

$$(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} + mc^2) \psi_{1.n.r.} = (mc^2 + q\Phi) \psi_{1.n.r.} + c\vec{\sigma}\cdot(\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A}) \psi_{2.n.r.}$$

$$(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} + mc^2) \psi_{2.n.r.} = -(mc^2 - q\Phi) \psi_{2.n.r.} + c\vec{\sigma}\cdot(\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A}) \psi_{1.n.r.}$$

Dans la première équation, les termes en mc^2 tombent, tandis que dans la deuxième il dominent sur les autres, et dans la limite non relativiste où $|\vec{p}| \ll mc$ et $|\Phi, \vec{A}| \ll mc^2$, ces deux équations deviennent :

$$\left\{ \begin{array}{l} i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \psi_{1.n.r.} \approx q\Phi \psi_{1.n.r.} + c\vec{\sigma}\cdot(\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A}) \psi_{2.n.r.} \\ \psi_{2.n.r.} \approx \frac{\vec{\sigma}\cdot(\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A})}{2mc} \psi_{1.n.r.} \end{array} \right.$$

La deuxième équation implique que $\psi_{2.n.r.}$ est négligeable par rapport à $\psi_{1.n.r.}$, et la première, une fois réduite en fonction de $\psi_{1.n.r.}$ seulement en substituant la valeur de $\psi_{2.n.r.}$ déterminée par la deuxième et en utilisant l'identité $[\vec{\sigma}\cdot(\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A})]^2 = (\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A})^2 - \frac{q}{c}\hbar\vec{\sigma}\cdot\vec{B}$, représente l'équation de Pauli pour $\psi_{1.n.r.}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \psi_{1.n.r.} \approx H_p \psi_{1.n.r.} \\ \psi_{2.n.r.} \approx 0 \end{array} \right. \quad (2.258)$$

avec :

$$H_p = \frac{(\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A})^2}{2m} + q\Phi - \frac{q}{2mc}\hbar\vec{\sigma}\cdot\vec{B} \quad (2.259)$$

3. PARTICULES ET ANTIPARTICULES

3.1 Généralités

Nous avons vu que la mécanique quantique relativiste requiert l'existence simultanée de particules et antiparticules, correspondant à des solutions à énergie positive et négative, respectivement. Nous allons maintenant voir qu'il existe une relation formelle qui relie ces deux types de solutions et qui permet de définir de façon plus précise les concepts de particules et antiparticules. Cette relation provient d'une symétrie des équations d'ondes relativistes appelée conjugaison de charge, qui relie les solutions à énergie positive/négative de l'équation originale aux solutions à énergie négative/positive de l'équation obtenue en inversant le signe de la charge. Pour préciser la nature de cette relation et en déduire une interprétation, nous allons étudier plus en détail le cas des équations de Klein-Gordon et de Dirac, mais le concept s'applique de façon générale à toute théorie quantique relativiste.

Etant donné que nous considérons l'aspect corpusculaire d'une théorie quantique relativiste, il convient d'utiliser la 4-impulsion $p^\mu = \hbar k^\mu$ à la place de 4-vecteur d'onde k^μ . Sur la couche de masse $p^2 = m^2 c^2$ et on a :

$$p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \vec{p} \right) = \left(\sqrt{m^2 c^2 + \vec{p}^2}, \vec{p} \right) \tag{3.11}$$

Une remarque est à faire ici concernant la dépendance des équations d'une théorie quantique relativiste de la vitesse de la lumière c et de la constante de Planck \hbar . On remarque à cet effet que les masses, les temps et les longueurs peuvent être exprimés en fonction d'énergies en utilisant c et \hbar . En effet :

$$\begin{cases} [\text{masse}] = c^{-2} [\text{Energie}] \\ [\text{temps}] = \hbar [\text{Energie}]^{-1} \\ [\text{longueur}] = \hbar c [\text{Energie}]^{-1} \end{cases} \tag{3.2}$$

Par un choix judicieux des unités de mesure, il est possible de prendre $c = \hbar = 1$, et de mesurer la masse, le temps et la longueur en fonction de l'énergie, en utilisant les relations ci-dessus. On dit alors que masse, temps et longueur ont dimensions $+1, -1, -1$ en énergie.

3.2 Particules/antiparticules de Klein-Gordon

Nous avons vu que les solutions de l'équation de Klein-Gordon libre ont la forme générale :

$$\phi(x) = \phi^+(x) + \phi^-(x) \quad (3.3)$$

avec $([\phi] = 1, [a] = [b] = -1)$

$$\begin{cases} \phi^+(x) = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi\hbar)^3 2E} a(\vec{p}) e^{-i p_\mu x^\mu / \hbar} \\ \phi^-(x) = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi\hbar)^3 2E} b^*(\vec{p}) e^{i p_\mu x^\mu / \hbar} \end{cases} \quad (3.4)$$

Dans la formulation à deux composantes, où la particule d'onde est $\psi(x) = \sqrt{2a} \left(\frac{1}{2} (\phi(x) + \frac{i\hbar}{mc^2} \frac{\partial}{\partial t} \phi(x)), \frac{1}{2} (\phi(x) - \frac{i\hbar}{mc^2} \frac{\partial}{\partial t} \phi(x)) \right)^T$, on a :

$$\psi(x) = \psi^+(x) + \psi^-(x) \quad (3.5)$$

avec $([\psi] = 3/2, [a] = [b] = -1, [x] = [y] = 0)$

$$\begin{cases} \psi^+(x) = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi\hbar)^3 2E} \sqrt{2mc^2} a(\vec{p}) \chi(\vec{p}) e^{-i p_\mu x^\mu / \hbar} \\ \psi^-(x) = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi\hbar)^3 2E} \sqrt{2mc^2} b^*(\vec{p}) \gamma(\vec{p}) e^{i p_\mu x^\mu / \hbar} \end{cases} \quad (3.6)$$

et :

$$\chi(\vec{p}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \frac{E}{mc^2} \\ 1 - \frac{E}{mc^2} \end{pmatrix}, \quad \gamma(\vec{p}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 - \frac{E}{mc^2} \\ 1 + \frac{E}{mc^2} \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

Rappelons que dans cette formulation à deux composantes la densité de probabilité et toutes les valeurs moyennes d'opérateurs quantiques sont définies par un produit scalaire non banal avec métrique $\eta = \text{diag}(1, -1)$. Le conjugué de ψ est alors $\bar{\psi} = \psi^\dagger \eta$. Par rapport à ce produit scalaire, les éléments de polarisation (3.7) sont ortho normaux:

$$\begin{cases} \bar{\chi}(\vec{p}) \chi(\vec{p}) = -\bar{Y}(\vec{p}) Y(\vec{p}) = \frac{E}{mc^2} \\ \bar{\chi}(\vec{p}) Y(\pm\vec{p}) = Y(\vec{p}) Y(\pm\vec{p}) = 0 \end{cases} \quad (3.8)$$

et forment une base complète:

$$\chi_a(\vec{p}) \bar{\chi}_b(\vec{p}) - Y_a(\vec{p}) \bar{Y}_b(\vec{p}) = \frac{E}{mc^2} \delta_{ab} \quad (3.9)$$

On calcule facilement que la probabilité totale intégrée est donnée par:

$$\begin{aligned} \langle \text{Prob} \rangle &= \int d^3\vec{x} \bar{\Psi}(x) \Psi(x) \\ &= \int d^3\vec{x} \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi\hbar)^3 2E} \int \frac{d^3\vec{p}'}{(2\pi\hbar)^3 2E'} (2mc^2) \\ &\quad [a^*(\vec{p}) \bar{\chi}(\vec{p}) e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}/\hbar} + b(\vec{p}) \bar{Y}(\vec{p}) e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}/\hbar}] \\ &\quad [a(\vec{p}') \chi(\vec{p}') e^{-i\vec{p}'\cdot\vec{x}/\hbar} + b^*(\vec{p}') Y(\vec{p}') e^{i\vec{p}'\cdot\vec{x}/\hbar}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi\hbar)^3 2E} \int \frac{d^3\vec{p}'}{(2\pi\hbar)^3 2E'} \int d^3\vec{x} (2mc^2) \\
&\quad \left[a^*(\vec{p}) a(\vec{p}') \bar{\chi}(\vec{p}) \chi(\vec{p}') e^{i(p-p')x/\hbar} \right. \\
&\quad + a^*(\vec{p}) b^*(\vec{p}') \bar{\chi}(\vec{p}) \gamma(\vec{p}') e^{i(p+p')x/\hbar} \\
&\quad + b(\vec{p}) a(\vec{p}') \bar{\gamma}(\vec{p}) \chi(\vec{p}') e^{-i(p+p')x/\hbar} \\
&\quad \left. + b(\vec{p}) b^*(\vec{p}') \bar{\gamma}(\vec{p}) \gamma(\vec{p}') e^{-i(p-p')x/\hbar} \right] \\
&= \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi\hbar)^3 2E} \int \frac{d^3\vec{p}'}{(2\pi\hbar)^3 2E'} \frac{(2\pi\hbar)^3 (2mc^2)}{(2\pi\hbar)^3 2E'} \\
&\quad \left[a^*(\vec{p}) a(\vec{p}') \bar{\chi}(\vec{p}) \chi(\vec{p}') \delta^3(\vec{p}-\vec{p}') e^{i(E-E')t/\hbar} \right. \\
&\quad + a^*(\vec{p}) b^*(\vec{p}') \bar{\chi}(\vec{p}) \gamma(\vec{p}') \delta^3(\vec{p}+\vec{p}') e^{i(E+E')t/\hbar} \\
&\quad + b(\vec{p}) a(\vec{p}') \bar{\gamma}(\vec{p}) \chi(\vec{p}') \delta^3(\vec{p}+\vec{p}') e^{-i(E+E')t/\hbar} \\
&\quad \left. + b(\vec{p}) b^*(\vec{p}') \bar{\gamma}(\vec{p}) \gamma(\vec{p}') \delta^3(\vec{p}-\vec{p}') e^{-i(E-E')t/\hbar} \right] \\
&= \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi\hbar)^3 2E} \frac{mc^2}{E} \\
&\quad \left[a^*(\vec{p}) a(\vec{p}) \bar{\chi}(\vec{p}) \chi(\vec{p}) \right. \\
&\quad + a^*(\vec{p}) b^*(-\vec{p}) \bar{\chi}(\vec{p}) \gamma(-\vec{p}) e^{2iEt/\hbar} \\
&\quad + b(\vec{p}) a(-\vec{p}) \bar{\gamma}(\vec{p}) \chi(-\vec{p}) e^{-2iEt/\hbar} \\
&\quad \left. + b(\vec{p}) b^*(\vec{p}) \bar{\gamma}(\vec{p}) \gamma(\vec{p}) \right] \\
&= \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi\hbar)^3 2E} \left[a^*(\vec{p}) a(\vec{p}) - b(\vec{p}) b^*(\vec{p}) \right] \\
&= \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi\hbar)^3 2E} \left[|a(\vec{p})|^2 - |b(\vec{p})|^2 \right] \tag{3.10}
\end{aligned}$$

La valeur moyenne de l'a 4-impulsion peut être calculée exactement de la même façon, et on obtient :

$$\begin{aligned}
\langle P^\mu \rangle &= \int d^3 \vec{x} \bar{\Psi}(x) (i \hbar \partial^\mu) \Psi(x) \\
&= \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi \hbar)^3 2E} \left[p^\mu a^*(\vec{p}) a(\vec{p}) - (-p^\mu) b(\vec{p}) b^*(\vec{p}) \right] \\
&= \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi \hbar)^3 2E} p^\mu \left[|a(\vec{p})|^2 + |b(\vec{p})|^2 \right] \tag{3.11}
\end{aligned}$$

On voit donc que $a(\vec{p})$ décrit une composante avec 4-impulsion p^μ qui contribue avec densité $|a(\vec{p})|^2$, tandis que $b(\vec{p})$ décrit une composante avec 4-impulsion $-p^\mu$ qui contribue avec densité $-|b(\vec{p})|^2$.

Dans les cas où les deux types de composantes n'interagissent pas et peuvent être découplés, il existe la possibilité de redéfinir la probabilité et les valeurs moyennes en utilisant la métrique banale $\mathbb{1} = \text{diag}(1, 1)$ au lieu de $\eta = \text{diag}(1, -1)$, avec un conjugué donné par ψ^\dagger et pas $\bar{\psi} = \psi^\dagger \eta$. Ceci correspond à introduire un ultime facteur η dans les expressions ci-dessus. l'effet de cette

opération est de changer le signe avec lequel les solutions à énergie négative contribuent à la probabilité et aux valeurs moyennes. De cette manière, $a(\vec{p})$ décrit une composante avec 4-impulsion p^μ qui contribue avec densité $|a(\vec{p})|^2$, et $b(\vec{p})$ une composante avec 4-impulsion $-p^\mu$ qui contribue avec densité $|b(\vec{p})|^2$. On observe que ces deux manières de procéder sont toutes deux compatibles avec un 4-courant conservé en absence d'interactions. En fait, il existe deux courants qui sont séparément conservés et associés aux deux types de solutions. Finalement, on note que quelle que soit l'approche adoptée, il existe un problème lié à des contributions négatives soit à la probabilité soit à l'énergie.

En résumé, il n'y a pas vraiment moyen de définir formellement une théorie quantique à une particule, et une solution conceptuellement bien fondée n'est possible que dans le contexte de la théorie des champs.

L'obstruction à utiliser la théorie de Klein-Gordon comme théorie à une particule se manifeste clairement dès que l'on essaye de localiser la particule à des distances inférieures à la longueur d'onde de Compton associée, $\lambda_c = \frac{h}{mc}$. La raison est que seul l'ensemble des solutions à énergie positive et à énergie négative représentent un ensemble complet. Ceci implique que tout paquet d'onde à énergie positive aura une composante d'ondes à énergies positives et aussi une petite composante à énergies négatives. Plus précisément, pour un champ $\psi(x)$ donné on déduit que sa décomposition en ondes planes implique les amplitudes:

$$\begin{cases} a(\vec{p}) = \int d^3\vec{x} \sqrt{2m^2c^2} \bar{X}(\vec{p}) \psi(x) e^{i\vec{p}\vec{x}/\hbar} \\ b^*(\vec{p}) = - \int d^3\vec{x} \sqrt{2m^2c^2} \bar{Y}(\vec{p}) \psi(x) e^{-i\vec{p}\vec{x}/\hbar} \end{cases}$$

En supposant que $\psi(x)$ soit une solution à énergie positive, c'est-à-dire avec première composante non nulle et deuxième composante nulle, on déduit des équations (3.7) que $a(\vec{p}) \approx 1$ et $b^*(\vec{p}) \approx \left(\frac{\vec{p}}{mc}\right)^2$. D'autre part, pour localiser le paquet d'ondes sur

une distance typique Δ , il est nécessaire d'interagir avec une amplitude significative des ondes planes avec impulsions allant jusqu'à $p \approx \frac{\hbar}{\Delta}$. A cette valeur de l'impulsion, on trouve alors $a(\vec{p}) \approx 1$ et $b^*(\vec{p}) \approx \left(\frac{\hbar}{mc\Delta}\right)^2 = \left(\frac{\lambda_c}{\Delta}\right)^2$. Il suit que la composante en ondes à énergie négative devient inévitablement significative quand Δ devient de l'ordre de λ_c ou plus petit:

$$\Delta \approx \lambda_c \tag{3.12}$$

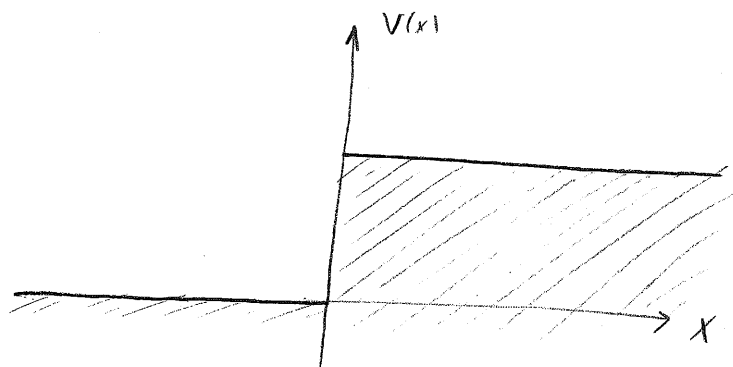
Plus en général, la présence d'un potentiel d'interaction avec une magnitude V correspond à influencer la dynamique de la particule à des distances de l'ordre de $\frac{\hbar c}{V}$. Cette distance devient de l'ordre de λ_c si V devient de l'ordre de l'énergie au repos de la particule:

$$V \approx mc^2 \tag{3.13}$$

Quand ces limites sont atteintes, le phénomène de création de paires particule/antiparticule devient important.

La difficulté d'interpréter la théorie dans une conception à une seule particule est bien illustrée en considérant un marche de potentiel électrostatique :

$$V(x) = e\Phi(x) = V_0 \theta(x) \quad (3.14)$$



Pour $x \neq 0$, le potentiel est constant, et le seul effet du potentiel est de changer $E \rightarrow E - V$ dans les substitutions de l'équation libre. Avec cette remarque, on cherche des solutions stationnaires représentant une onde incidente à énergie positive E et une onde réfléchie à énergie positive E pour $x < 0$, et une onde transmise à énergie positive $E - V_0$ pour $x > 0$. On prend donc

$$\phi(x) = \begin{cases} A e^{i p_x x / \hbar} + B e^{-i p_x x / \hbar} & , x < 0 \\ C e^{i q_x x / \hbar} & , x > 0 \end{cases} \quad (3.15)$$

avec :

$$p_x = \frac{1}{c} \sqrt{E^2 - m^2 c^4} \quad ; \quad q_x = \frac{1}{c} \sqrt{(E - V_0)^2 - m^2 c^4} \quad (3.16)$$

On impose ensuite la continuité de la fonction d'onde et de sa dérivée première, dont le courant de probabilité dépend, en $x=0$. Ceci implique que :

$$1) A+B=C$$

$$2) A-B = \frac{q_x}{p_x} C$$

Il suit que :

$$\frac{B}{A} = \frac{1-r}{1+r} \quad , \quad \frac{C}{A} = \frac{2}{1+r} \quad (3.17)$$

avec :

$$r = \frac{q_x}{p_x} = \sqrt{\frac{E-V_0+mc^2}{E+mc^2}} \sqrt{\frac{E-V_0-mc^2}{E-mc^2}} \quad (3.18)$$

Les coefficients de réflexion R et de transmission T de l'onde sont donc donnés par :

$$\begin{cases} R = \left| \frac{B}{A} \right|^2 = \left| \frac{1-r}{1+r} \right|^2 \\ T = \frac{q_x}{p_x} \left| \frac{C}{A} \right|^2 = \frac{4r}{|1+r|^2} \end{cases} \quad (3.19)$$

Il y a trois cas possibles, en fonction de la hauteur V_0 de la barrière par rapport à l'énergie incidente E . Mais dans tous les cas, le paramètre adimensionnel qui contrôle l'effet de la barrière est donné par la (3.18).

$$1) \underline{0 \leq V_0 \leq E - mc^2}$$

Dans ce cas, q est réel et positif et on a $r = |r|$. Une fraction R de l'onde est donc réfléchie et une autre T transmise. On a $R+T=1$ avec :

$$R = \frac{(1-|r|)^2}{(1+|r|)^2} \in [0,1] \quad , \quad T = \frac{4|r|}{(1+|r|)^2} \in [0,1] \quad (3.20)$$

$$2) \underline{E - mc^2 \leq V_0 \leq E + mc^2}$$

Dans ce cas, q est imaginaire et on a $-r = i|r|$. L'onde est alors totalement réfléchie, et pénètre au delà de la barrière sur une distance Δ plus grande que λ_c . On a donc :

$$R = 1 \quad , \quad T = 0$$

(3.21)

$$3) \underline{E + mc^2 \leq V_0}$$

Dans ce cas, q redonne réel et doit être plus négatif, et on a donc $r = -|r|$. L'onde est totalement réfléchie, mais la barrière produit une localisation à des distances plus petites que λ_c , et ceci génère un phénomène de création de paires. On a $R+T=1$ avec :

$$R = \frac{(1+|r|)^2}{(1-|r|)^2} \in [1, \infty[\quad , \quad T = \frac{-4|r|}{(1-|r|)^2} \in]-\infty, 0] \quad (3.22)$$

L'interprétation de ce dernier cas est que des paires de solutions à énergies positives et négatives sont produites par l'interaction avec la barrière.

La partie à énergie positive "redescend" la barrière vers la gauche, et s'additionne à l'onde totalement réfléchie pour donner $R > 1$. La partie à énergie négative, au contraire, "remonte" la barrière, et produit un $T < 0$. Ceci s'explique par le fait que la première correspond à une particule de charge q , qui subit le potentiel (3.14) et contribue de façon positive au courant électrique, tandis que la deuxième correspond à une anti-particule de charge $-q$, qui subit l'opposé du potentiel (3.14), et contribue de façon négative au courant électrique.

L'intuition gagnée par l'analyse de cet exemple peut être formalisée de façon générale en considérant la relation entre solutions à énergie positive et négative en présence de champs externes.

3.3 Conjugaison de charge dans la théorie de Klein Gordon

Considérons l'équation de Klein Gordon dans un potentiel électromagnétique externe :

$$\left(D_\mu D^\mu + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right) \phi(x) = 0 \quad (3.73)$$

Comme déjà expliqué, l'existence de solutions à énergies positives et négatives indépendantes reflète l'existence simultanée de particules et antiparticules avec des charges opposées. Plus précisément, cette interprétation repose sur l'existence d'une symétrie de conjugaison de charge, sous laquelle $qA_\mu \rightarrow (qA_\mu)' = -qA_\mu$. Sous cette transformation on a donc :

$$D_\mu \rightarrow D_\mu' = D_\mu^* \quad [\text{conjugaison de charge}] \quad (3.74)$$

Pour démontrer que cette opération représente une symétrie de la théorie, il est nécessaire de montrer qu'il existe une transformation de la fonction d'onde telle que la nouvelle équation est équivalente à celle d'origine.

Comme pour les renversements de temps déjà étudiés, la conjugaison de charge est réalisée par une transformation qui change l'équation de départ en sa complexe conjuguée.

En effet, en prenant :

$$\left\{ \begin{array}{l} qA_\mu \rightarrow (qA_\mu)' = -qA_\mu \\ \phi(x) \rightarrow \phi'(x) = \phi^*(x) \end{array} \right. \quad [\text{conjugaison de charge}] \quad (3.25)$$

On trouve, en utilisant la (3.24) on trouve que l'équation (3.23) se transforme dans sa complexe conjuguée :

$$\left[\left(D_\mu D^\mu + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right) \phi(x) = 0 \right] \rightarrow \left[\left(D'_\mu D'^\mu + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right) \phi'(x) = 0 \right] = \left[\left(D_\mu D^\mu + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right) \phi(x) = 0 \right]^*$$

On conclut que à toute solution ϕ de l'équation de Klein-Gordon avec charge q il correspond une solution donnée par ϕ^* de l'équation de Klein-Gordon avec charge $-q$. Etant donné que la conjugaison complexe renverse les phases, une onde plane à énergie positive est aussi reliée à une onde plane à énergie négative, et vice versa. On peut donc identifier les solutions libres de la façon suivante :

- 1) solutions avec charge q et énergie $E > 0$
 \Rightarrow particule
- 2) solutions avec charge q et énergie $E < 0$.
 \Leftrightarrow solutions avec charge $-q$ et énergie $-E > 0$
 \Rightarrow antiparticule

On observe que dans la théorie de Klein Gordon, l'opération de parité commutée avec l'opération de conjugaison de charge, et donc que particules et anti-particules de Klein-Gordon ont la même parité inhérente.

Finalement, on observe également que l'opération de renversement du temps a le même effet sur la parité d'onde que la conjugaison de charge, mais pas sur les potentiels électromagnétiques.

3.4 Particules / antiparticules de Dirac

Les solutions de l'équation de Dirac libre ont la forme générale :

$$\psi(x) = \psi^+(x) + \psi^-(x) \quad (3.26)$$

avec $[\psi] = \frac{3}{2}$, $[b] = [d] = -1$, $[u] = [v] = 0$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi^+(x) = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi\hbar)^3} \frac{\sqrt{2mc^2}}{2E} \sum_{\alpha=1}^2 b^{(\alpha)}(\vec{p}) u^{(\alpha)}(\vec{p}) e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}/\hbar} \\ \psi^-(x) = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi\hbar)^3} \frac{\sqrt{2mc^2}}{2E} \sum_{\alpha=1}^2 d^{(\alpha)*}(\vec{p}) v^{(\alpha)}(\vec{p}) e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}/\hbar} \end{array} \right. \quad (3.27)$$

et, dans la représentation standard des matrices γ^{μ} :

$$u^{(1)}(\vec{p}) = \sqrt{\frac{E+mc^2}{2mc^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_3 c}{E+mc^2} \\ \frac{p_+ c}{E+mc^2} \end{pmatrix} ; u^{(2)}(\vec{p}) = \sqrt{\frac{E+mc^2}{2mc^2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{p_- c}{E+mc^2} \\ -\frac{p_3 c}{E+mc^2} \end{pmatrix} \quad (3.28)$$

$$v^{(1)}(\vec{p}) = \sqrt{\frac{E+mc^2}{2mc^2}} \begin{pmatrix} \frac{p_3 c}{E+mc^2} \\ \frac{p_+ c}{E+mc^2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; v^{(2)}(\vec{p}) = \sqrt{\frac{E+mc^2}{2mc^2}} \begin{pmatrix} \frac{p_- c}{E+mc^2} \\ -\frac{p_3 c}{E+mc^2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Les spineurs de polarisation sont orthogonaux :

$$\left\{ \begin{array}{l} u^{(\alpha)}(\vec{p}) / u^{(\beta)}(\vec{p}) = v^{(\alpha)}(\vec{p}) / v^{(\beta)}(\vec{p}) = \frac{E}{mc^2} \delta^{\alpha\beta} \\ u^{(\alpha)}(\vec{p}) / v^{(\beta)}(-\vec{p}) = v^{(\alpha)}(\vec{p}) / u^{(\beta)}(-\vec{p}) = 0 \end{array} \right. \quad (3.29)$$

et forment une base complète :

$$\sum_{\alpha=1}^2 \left[u_{\alpha}^{(\alpha)}(\vec{p}) u_{\alpha}^{+(\alpha)}(\vec{p}) + v_{\alpha}^{(\alpha)}(\vec{p}) v_{\alpha}^{+(\alpha)}(\vec{p}) \right] = \frac{E}{mc^2} \delta_{\alpha\beta} \quad (3.30)$$

On calcule facilement la probabilité totale définie par la fonction d'onde $\psi(x)$ intégrée :

$$\begin{aligned} \langle \text{Prop} \rangle &= \int d^3\vec{x} \psi^\dagger(x) \psi(x) \\ &= \int d^3\vec{x} \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi\hbar)^3} \frac{\sqrt{2mc^2}}{2E} \int \frac{d^3\vec{p}'}{(2\pi\hbar)^3} \frac{\sqrt{2mc^2}}{2E'} \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{\beta=1}^2 \\ &\quad \left[b^{*(\alpha)}(\vec{p}) u^{+(\alpha)}(\vec{p}) e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}/\hbar} + d^{-(\alpha)}(\vec{p}) v^{+(\alpha)}(\vec{p}) e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}/\hbar} \right] \\ &\quad \left[b^{(\beta)}(\vec{p}') u^{(\beta)}(\vec{p}') e^{-i\vec{p}'\cdot\vec{x}/\hbar} + d^{*(\beta)}(\vec{p}') v^{(\beta)}(\vec{p}') e^{i\vec{p}'\cdot\vec{x}/\hbar} \right] \\ &= \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi\hbar)^3} \frac{\sqrt{2mc^2}}{2E} \int \frac{d^3\vec{p}'}{(2\pi\hbar)^3} \frac{\sqrt{2mc^2}}{2E'} \int d^3\vec{x} \sum_{\alpha,\beta=1}^2 \\ &\quad \left[b^{*(\alpha)}(\vec{p}) b^{(\beta)}(\vec{p}') u^{+(\alpha)}(\vec{p}) u^{(\beta)}(\vec{p}') e^{i(\vec{p}-\vec{p}')\cdot\vec{x}/\hbar} \right. \\ &\quad + b^{*(\alpha)}(\vec{p}) d^{*(\beta)}(\vec{p}') u^{+(\alpha)}(\vec{p}) v^{(\beta)}(\vec{p}') e^{i(\vec{p}+\vec{p}')\cdot\vec{x}/\hbar} \\ &\quad + d^{(\alpha)}(\vec{p}) b^{(\beta)}(\vec{p}') v^{+(\alpha)}(\vec{p}) u^{(\beta)}(\vec{p}') e^{-i(\vec{p}+\vec{p}')\cdot\vec{x}/\hbar} \\ &\quad \left. + d^{(\alpha)}(\vec{p}) d^{*(\beta)}(\vec{p}') v^{+(\alpha)}(\vec{p}) v^{(\beta)}(\vec{p}') e^{-i(\vec{p}-\vec{p}')\cdot\vec{x}/\hbar} \right] \\ &= \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi\hbar)^3} \frac{\sqrt{2mc^2}}{2E} \int \frac{d^3\vec{p}'}{(2\pi\hbar)^3} \frac{\sqrt{2mc^2}}{2E'} \sum_{\alpha,\beta=1}^2 (2\pi\hbar)^3 \\ &\quad \left[b^{*(\alpha)}(\vec{p}) b^{(\beta)}(\vec{p}') u^{+(\alpha)}(\vec{p}) u^{(\beta)}(\vec{p}') \delta^3(\vec{p}-\vec{p}') e^{i(E-E')t/\hbar} \right. \\ &\quad + b^{*(\alpha)}(\vec{p}) d^{*(\beta)}(\vec{p}') u^{+(\alpha)}(\vec{p}) v^{(\beta)}(\vec{p}') \delta^3(\vec{p}+\vec{p}') e^{i(E+E')t/\hbar} \\ &\quad + d^{(\alpha)}(\vec{p}) b^{(\beta)}(\vec{p}') v^{+(\alpha)}(\vec{p}) u^{(\beta)}(\vec{p}') \delta^3(\vec{p}+\vec{p}') e^{-i(E+E')t/\hbar} \\ &\quad \left. + d^{(\alpha)}(\vec{p}) d^{*(\beta)}(\vec{p}') v^{+(\alpha)}(\vec{p}) v^{(\beta)}(\vec{p}') \delta^3(\vec{p}-\vec{p}') e^{-i(E-E')t/\hbar} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi\hbar)^3} \frac{mc^2}{2E^2} \sum_{\alpha, \beta=1}^2 \\
&\quad \left[b^{*(\alpha)}(\vec{p}) b^{(\beta)}(\vec{p}) \cancel{u^{+(\alpha)}(\vec{p}) u^{(\beta)}(\vec{p})} \frac{E}{mc^2} \delta^{\alpha\beta} \right. \\
&\quad + b^{*(\alpha)}(\vec{p}) d^{*(\beta)}(-\vec{p}) \cancel{u^{+(\alpha)}(\vec{p}) v^{(\beta)}(-\vec{p})} e^{2iEt/\hbar} \\
&\quad + d^{(\alpha)}(\vec{p}) b^{(\beta)}(-\vec{p}) \cancel{v^{+(\alpha)}(\vec{p}) u^{(\beta)}(-\vec{p})} e^{-2iEt/\hbar} \\
&\quad \left. + d^{(\alpha)}(\vec{p}) d^{*(\beta)}(-\vec{p}) \cancel{v^{+(\alpha)}(\vec{p}) v^{(\beta)}(-\vec{p})} \frac{E}{m} \delta^{\alpha\beta} \right] \\
&= \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi\hbar)^3 2E} \sum_{\alpha=1}^2 \left[b^{*(\alpha)}(\vec{p}) b^{(\alpha)}(\vec{p}) + d^{(\alpha)}(\vec{p}) d^{*(\alpha)}(\vec{p}) \right] \\
&= \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi\hbar)^3 2E} \sum_{\alpha=1}^2 \left[|b^{(\alpha)}(\vec{p})|^2 + |d^{(\alpha)}(\vec{p})|^2 \right] \quad (3.31)
\end{aligned}$$

La valeur moyenne de la 4-impulsion peut être calculée de la même façon. On trouve :

$$\begin{aligned}
\langle p^\mu \rangle &= \int d^3\vec{x} \psi^\dagger(x) (i\hbar \partial^\mu) \psi(x) \\
&= \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi\hbar)^3 2E} \sum_{\alpha=1}^2 \left[p^\mu b^{(\alpha)}(\vec{p}) b^{(\alpha)}(\vec{p}) + (-p^\mu) d^{(\alpha)}(\vec{p}) d^{*(\alpha)}(\vec{p}) \right] \\
&= \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi\hbar)^3 2E} \sum_{\alpha=1}^2 p^\mu \left[|b^{(\alpha)}(\vec{p})|^2 - |d^{(\alpha)}(\vec{p})|^2 \right] \quad (3.32)
\end{aligned}$$

Dans ce cas, on voit que $b^{(\alpha)}(\vec{p})$ décrit deux corpuscules avec 4-impulsion p^μ et qui contribuent avec densité $|b^{(\alpha)}(\vec{p})|^2$, tandis que $d^{(\alpha)}(\vec{p})$ décrit deux corpuscules avec 4-impulsion $-p^\mu$ et qui contribuent avec densité $|d^{(\alpha)}(\vec{p})|^2$.

On trouve donc dans ce cas une situation différente que pour la théorie de Klein-Gordon. Plus précisément, on arrive naturellement à des probabilités positives et des énergies non-positives, et non pas des probabilités non-positives et des énergies positives, comme c'était le cas pour la théorie de Klein-Gordon. Toutefois, ceci représente néanmoins un problème semblable, vu que la présence d'états à énergies négatives arbitrairement grandes représente un risque d'instabilité. En fait, le point important est comme avant qu'il semble impossible de définir une théorie à une particule qui ait simultanément des probabilités et des énergies positives.

Comme dans le cas de la théorie de Klein-Gordon, il est problématique de définir formellement une théorie quantique à une particule, et une solution solide et conceptuellement claire est obtenue dans le contexte de la théorie des champs. Dans ce cas, il est toutefois possible de réinterpréter le résultat d'une autre façon.

Cette réinterprétation de la théorie est la théorie des trous de Dirac. Elle consiste à exploiter le fait que les particules en jeu satisfont le principe d'exclusion de Pauli pour postuler que l'état fondamental de la théorie, c'est-à-dire le vide physique, n'est pas l'état quantique où tous les niveaux d'énergie sont libres, mais au contraire celui où tous les niveaux à énergies négatives sont complètement occupés et seuls ceux à énergie positive sont libres. L'énergie de cet état est conventionnellement définie comme zéro. Tous les états excités possibles ont alors énergie positive. La présence d'une particule correspond à l'occupation d'un des niveaux à énergie positive. La présence d'une antiparticule, au contraire, correspond à la présence d'une lacune dans un des niveaux à énergie négative. Enfin, le processus de création d'une paire de particule / antiparticule correspond à une transition d'un des niveaux à énergie négative à un à énergie positive, produisant une lacune et une occupation.

L'obstruction à utiliser de façon directe la théorie de Dirac comme théorie à une particule se manifeste exactement comme pour la théorie de Klein-Gordon, dès que l'on essaye de localiser un paquet d'onde sur une distance inférieure à la longueur d'onde de Compton $\lambda_c = \frac{h}{mc}$. La raison est comme avant que l'ensemble des solutions libres est complet que si l'on inclut les solutions à énergies si bien positives que négatives, et même un paquet d'ondes à énergie positive aura une petite composante d'ondes à énergies négatives. Plus précisément, pour un champ $\psi(x)$ donné, on trouve :

$$\begin{cases} b^{(u)}(\vec{p}) = \int d^3x \sqrt{2mc^2} u^{(u)}(\vec{p}) \psi(x) e^{i\vec{p}\vec{x}/\hbar} \\ d^{(v)*}(\vec{p}) = \int d^3x \sqrt{2mc^2} v^{(v)*}(\vec{p}) \psi(x) e^{-i\vec{p}\vec{x}/\hbar} \end{cases}$$

Si $\psi(x)$ est une solution à énergie positive, c'est à dire un spinneur avec les deux premières composantes non nulles et les deux dernières nulles, on déduit des équations (3.28) que $b^{(u)}(\vec{p}) \approx 1$ et que $d^{(v)*}(\vec{p}) \approx \frac{p}{mc}$.

D'autre part, pour localiser le paquet d'onde sur une distance Δ , il est nécessaire d'inclure des impulsions allant jusqu'à $p \sim \frac{\hbar}{\Delta}$. Pour cette valeur de p on trouve $b^{(w)}(\vec{p}) \sim 1$ et $d^{(w)*} \sim \frac{\hbar}{mc\Delta} = \frac{\lambda_c}{\Delta}$. Il suit que, comme dans le cas de la théorie de Klein-Gordon, la composante en ondes à énergies négatives devient significative quand :

$$\Delta \sim \lambda_c$$

(3.33)

Plus en général, la présence d'un potentiel de magnitude V influence la dynamique jusqu'à des distances de l'ordre de $\frac{\hbar c}{V}$, qui devient de l'ordre de λ_c quand :

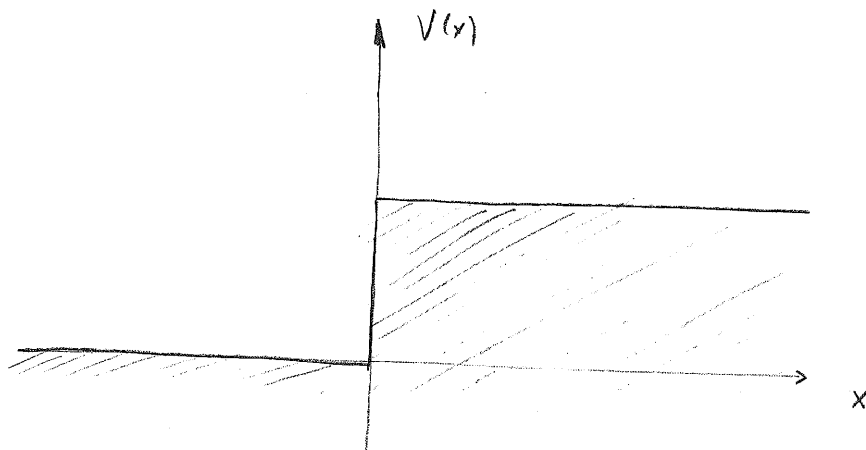
$$V \sim mc^2$$

(3.34)

Pour des potentiels de cette importance, le phénomène de création de paires de particule/antiparticule devient important et il n'est plus possible de se contenter d'une vision à une particule.

Comme dans le cas de Klein-Gordon, on peut illustrer le problème en considérant une marche de potentiel électrostatique :

$$V(x) = e\bar{\Phi}(x) = V_0 \theta(x) \quad (3.35)$$



Comme avant, le seul effet du potentiel est de changer $E \rightarrow E - V$ dans les solutions de l'équation libre. Les solutions d'onde stationnaire à énergie positive ont donc la forme :

$$\psi(x) = \begin{cases} \sum_{\alpha=1}^2 A^{(\alpha)} u^{(\alpha)}(p_x) e^{ip_x x/\hbar} + \sum_{\beta=1}^2 B^{(\beta)} u^{(\beta)}(-p_x) e^{-ip_x x/\hbar} \\ \sum_{\gamma=1}^2 C^{(\gamma)} u^{(\gamma)}(q_x) e^{iq_x x/\hbar} \end{cases} \quad (3.36)$$

avec :

$$p_x = \frac{1}{c} \sqrt{E^2 - m^2 c^4} ; \quad q_x = \frac{1}{c} \sqrt{(E - V_0)^2 - m^2 c^4} \quad (3.37)$$

On a donc des ondes incidentes et réfléchies à énergie E et une onde transmise à énergie $E - V_0$.

On impose ensuite la continuité de la fonction d'onde en $x=0$. La donnée première n'entre pas en ligne de compte, étant donné que l'équation de Dirac est du premier degré et que le courant de probabilité ne dépend donc pas des dérivées de la fonction d'onde.

On trouve que la continuité implique tout d'abord :

$$\alpha = \beta = \gamma \Rightarrow \text{spin préservé} \tag{3.38}$$

Les conditions sur les coefficients dans la (3.36) peuvent être déduites en utilisant la forme explicite (3.28) des spineurs de polarisation. On trouve les deux équations suivantes :

$$1) A^{(\alpha)} + B^{(\alpha)} = \frac{\sqrt{E - V_0 + mc^2}}{E + mc^2} C^{(\alpha)}$$

$$2) A^{(\alpha)} - B^{(\alpha)} = \frac{q_x}{p_x} \frac{E + mc^2}{E - V_0 + mc^2} \sqrt{\frac{E - V_0 + mc^2}{E + mc^2}} C^{(\alpha)}$$

Le facteur $\frac{\sqrt{E - V_0 + mc^2}}{E + mc^2}$ est induit par le fait que les spineurs de polarisations ont une normalisation qui dépend de l'énergie. Le facteur $\frac{q_x}{p_x} \frac{E + mc^2}{E - V_0 + mc^2}$ est au contraire lié au rapport des différentes composantes des spineurs de polarisation et c'est ce facteur qui contrôle véritablement l'effet de la barrière.

La solution des équations de continuité 1) et 2) donne :

$$\frac{B^{(\alpha)}}{A^{(\alpha)}} = \frac{1-r}{1+r} \quad , \quad \frac{C^{(\alpha)}}{A^{(\alpha)}} = \sqrt{\frac{E+mc^2}{E-V_0+mc^2}} \frac{2}{1+r} \quad (3.39)$$

avec :

$$r = \frac{q\chi}{P\chi} \frac{E+mc^2}{E-V_0+mc^2} = \sqrt{\frac{E+mc^2}{E-V_0+mc^2}} \sqrt{\frac{E-V_0-mc^2}{E-mc^2}} \quad (3.40)$$

Les coefficients de réflexion R et de transmission T sont alors donnés par :

$$\left\{ \begin{array}{l} R = \left| \frac{B^{(\alpha)}}{A^{(\alpha)}} \right|^2 = \left| \frac{1-r}{1+r} \right|^2 \\ T = \frac{q\chi}{P\chi} \left| \frac{C^{(\alpha)}}{A^{(\alpha)}} \right|^2 = \frac{4r}{|1+r|^2} \end{array} \right. \quad (3.41)$$

Comme avant, il y a trois situations possibles, en fonction de la hauteur V_0 de la barrière par rapport à l'énergie incidente E . Dans tous les cas, le paramètre adimensionnel qui contrôle l'effet de la barrière est donné par le paramètre r défini par l'équation (3.40).

$$1) \underline{0 \leq V_0 \leq E - mc^2}$$

Dans ce cas, q est réel et positif et on a $r = |r|$. Une fraction R de l'onde est réfléchie et une fraction T est transmise, avec $R+T=1$ et :

$$R = \frac{(1-|r|)^2}{(1+|r|)^2} \in [0,1] \quad , \quad T = \frac{4|r|}{(1+|r|)^2} \in [0,1] \quad (3.42)$$

$$2) \underline{E - mc^2 \leq V_0 \leq E + mc^2}$$

Dans ce cas, q est imaginaire et on a $r = i|r|$. L'onde est alors totalement réfléchie, et pénètre au delà de la barrière sur une distance Δ qui est plus grande que λ_c . On a donc :

$$R = 1 \quad , \quad T = 0$$

(3.43)

$$3) \underline{E + mc^2 \leq V_0}$$

Dans ce cas, q redevient réel et doit être pris négatif, et on a donc $r = -|r|$. L'onde est totalement réfléchie, mais la barrière opère une localisation à des distances plus petites que λ_c , et ceci génère un phénomène de création de paires. On trouve $R+T=1$, mais avec :

$$R = \left(\frac{1+|r|}{1-|r|} \right)^2 \in [1, \infty[\quad , \quad T = \frac{-4|r|}{(1-|r|)^2} \in]-\infty, 0] \quad (3.44)$$

Comme dans le cas de Klein-Gordon, l'interprétation du dernier cas est que des paires de solutions à charges positives et négatives, se déplaçant vers la gauche et vers la droite et s'additionnant et se soustrayant donc aux ondes réfléchies et transmises, sont créées par la barrière. Comme avant, la composante à énergie positive est interprétée comme une particule de charge q , tandis que la composante à énergie négative est interprétée comme une antiparticule de charge $-q$. Cette paire de particule et antiparticule contribue de façons opposées à R et T , et ceci explique pourquoi on trouve $R > 1$ et $T < 0$.

En procédant comme dans le cas de Klein-Gordon, il est possible de formaliser de façon générale cette interprétation en terme de particules et antiparticules en considérant la relation entre solutions à énergies positives et négatives en présence de champs externes.

3.5 Conjugaison de charge dans la théorie de Dirac

Considérons l'équation de Dirac en présence d'un potentiel électromagnétique externe :

$$(i\gamma^\mu D_\mu - \frac{mc}{\hbar})\Psi(x) = 0 \quad (3.45)$$

Pour formaliser la relation entre solutions à énergie positive et négative, et particules et antiparticules, on cherche une symétrie de conjugaison de charge, sous laquelle on a $qA_\mu \rightarrow (qA_\mu)' = -qA_\mu$. Sous cette transformation :

$$D_\mu \rightarrow D_\mu' = D_\mu^* \quad [\text{conjugaison de charge}] \quad (3.46)$$

Pour démontrer que cette transformation représente bien une symétrie de la théorie, il est nécessaire de trouver une transformation de la fonction d'onde telle que la nouvelle équation est équivalente à l'originale.

Comme dans la théorie de Klein-Gordon, la conjugaison de charge est réalisée dans la théorie de Dirac par une transformation qui change l'équation d'onde en sa complexe conjuguée, comme suggéré de façon évidente par la propriété de transformation (3.46).

En effet, en prenant :

$$\left\{ \begin{array}{l} gA_\mu(x) \rightarrow (gA_\mu(x))' = -gA_\mu(x) \\ \psi(x) \rightarrow \psi'(x) = C\psi^*(x) \end{array} \right. \quad (3.47)$$

on trouve, en utilisant la (3.46) que l'équation (3.45) se transforme comme :

$$\left[(i\gamma^\mu D_\mu - \frac{mc}{\hbar})\psi(x) = 0 \right] \rightarrow \left[(i\gamma^\mu D'_\mu - \frac{mc}{\hbar})\psi'(x) = 0 \right] = C \left[(-i(C^{-1}\gamma^\mu C)^* D'_\mu - \frac{mc}{\hbar})\psi(x) = 0 \right]^*$$

La nouvelle équation coïncide avec la complexe conjuguée de l'originale à condition que :

$$(C^{-1}\gamma^\mu C)^* = -\gamma^\mu$$

On peut récrire cette condition de façon équivalente comme :

$$C^{-1}\gamma^\mu C = -\gamma^{\mu*} \quad (3.48)$$

On remarque que si les matrices γ^μ satisfont l'algèbre de Clifford, les matrices $-\gamma^{\mu*}$ la satisfont également, et l'existence d'une matrice C satisfaisant la condition (3.48) est donc garantie par le théorème d'unicité des représentations de l'algèbre de Clifford. Sa forme dépend toutefois de la représentation choisie pour les matrices γ^μ , et doit être déterminée dans chaque base.

Dans les représentations standard et de Weyl, définies par les équations (2.119) et (2.121), on a $(\gamma^0)^* = \gamma^0$, $(\gamma^1)^* = \gamma^1$, $(\gamma^2)^* = -\gamma^2$ et $(\gamma^3)^* = \gamma^3$, c'est-à-dire :

$$(\gamma^\mu)^* = \gamma^2 \gamma^\mu \gamma^2$$

On peut donc prendre dans les deux cas :

$$C = i\gamma^2 \quad (3.49)$$

) Dans d'autres représentations, la forme de la matrice C sera différente, mais liée à l'expression ci-dessus par une conjugaison de type (2.106). Dans tous les cas on a $C^2 = \mathbb{1}$ et, vu que $(\gamma^{\mu*})^\dagger = (-\gamma^0)(-\gamma^{\mu*})(-\gamma^0)$:

$$C^\dagger = C^{-1}, \text{ mais aussi } C^\dagger = -\gamma^0 C^{-1} \gamma^0 \quad (3.50)$$

En outre, on a également

$$\{C, \gamma_5\} = 0$$

On conclut que à toute solution ψ de l'équation de Dirac avec charge q il correspond une solution donnée par $C\psi^*$ de l'équation de Dirac avec charge $-q$.

Comme la conjugaison complexe renverse les phases, une onde plane à énergie positive est aussi reliée à une onde plane à énergie négative, et vice versa.

L'action de la conjugaison de charge change aussi les spins de polarisation. Dans le référentiel où $\vec{p} = \vec{0}$, on trouve, en utilisant la forme explicite de $C = i\gamma^2$, que :

$$C U^{(1)}(\vec{0}) = V^{(2)}(\vec{0}) \quad , \quad C U^{(2)} = -V^{(1)}(\vec{0})$$

$$C V^{(1)}(\vec{0}) = -U^{(2)}(\vec{0}) \quad , \quad C V^{(2)} = U^{(1)}(\vec{0})$$

c'est-à-dire :

$$C U^{(\alpha)}(\vec{0}) = E^{\alpha\beta} V^{(\beta)}(\vec{0})$$

$$C V^{(\alpha)}(\vec{0}) = -E^{\alpha\beta} U^{(\beta)}(\vec{0})$$

Pour trouver l'action dans un référentiel arbitraire où $\vec{p} \neq \vec{0}$, on utilise les formules (2.218). On note que :

$$C \Lambda^{\pm}(\vec{p}) C^{-1} = C \frac{1}{2} \left(1 \pm \frac{\not{p}}{mc} \right) C^{-1} = \frac{1}{2} \left(1 \pm \frac{C \not{p} C^{-1}}{mc} \right)$$

$$\stackrel{(3.98)}{=} \frac{1}{2} \left(1 \mp \frac{\not{p}}{mc} \right)$$

$$= \Lambda^{\mp}(\vec{p})$$

Donc :

$$C U^{(\alpha)}(\vec{p})^{\dagger} = C \left(C(\vec{p})^{-1} \Lambda^{+}(\vec{p}) U^{(\alpha)}(\vec{0}) \right)^{\dagger} = C(\vec{p})^{-1} C \Lambda^{+}(\vec{p}) C^{-1} C U^{(\alpha)}(\vec{0})$$

$$= C(\vec{p})^{-1} \Lambda^{-}(\vec{p}) E^{\alpha\beta} V^{(\beta)}(\vec{0})$$

$$= E^{\alpha\beta} V^{(\alpha)}(\vec{p})$$

$$\begin{aligned}
 C V^{(\alpha)}(\vec{p}) &= C \left(C^{-1}(\vec{p}) \Lambda^{-1}(\vec{p}) V^{(\alpha)}(\vec{0}) \right)^* = (C(\vec{p})^{-1} C \Lambda^{-1}(\vec{p}) C^{-1} C V^{(\alpha)}(\vec{0}))^* \\
 &= C(\vec{p})^{-1} \Lambda^{-1}(\vec{p}) (-\epsilon^{\alpha\beta} U^{(\beta)}(\vec{0})) \\
 &= -\epsilon^{\alpha\beta} U^{(\beta)}(\vec{p})
 \end{aligned}$$

En résumé, la conjugaison de charge échange, à part un signe irrelevant, les deux types de spineurs de polarisation u et v , ainsi que les deux orientations possibles, α égal à 1 ou 2, pour le spin. On peut donc identifier les solutions libres de la façon suivante :

- 1) solutions avec charge q , énergie $E > 0$ et spin s
 \Rightarrow particule
- 2) solutions avec charge q , énergie $E < 0$ et spin s
 \Leftrightarrow solutions avec charge $-q$, énergie $-E > 0$ et spin $-s$
 \Rightarrow antiparticule

On observe que dans la théorie de Dirac l'opération de parité anticommute avec l'opération de conjugaison de charge, et donc particules et antiparticules de Dirac ont des parités intrinsèques opposées.

Finalement, on observe également que l'opération de renversement du temps a un effet semblable à celui de la conjugaison de charge sur la fonction d'onde, mais pas sur les potentiels électromagnétiques.