

# Expérience de Millikan

Matthieu Schaller et Xavier Buffat

[matthieu.schaller@epfl.ch](mailto:matthieu.schaller@epfl.ch)

[xavier.buffat@epfl.ch](mailto:xavier.buffat@epfl.ch)

24 novembre 2007

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Théorie</b>	<b>2</b>
2.1	Forces en présence . . . . .	2
2.2	Champ électrique uniforme . . . . .	3
2.3	Champ électrique alternatif . . . . .	4
2.4	Statistique . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Résultats</b>	<b>7</b>
3.1	Constantes . . . . .	7
3.2	Champ continu . . . . .	7
3.3	Champ alternatif . . . . .	7
<b>4</b>	<b>Discussion</b>	<b>9</b>
4.1	Erreur . . . . .	9
4.2	Champ continu . . . . .	9
4.3	Champ alternatif . . . . .	10
<b>5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>10</b>
<b>6</b>	<b>Annexes</b>	<b>11</b>
6.1	Mesures effectuées . . . . .	11

## 1 Introduction

Au début du siècle passé, une des importantes questions en physique était de savoir si la charge électrique était quantifiée comme l'a proposé Planck ou continue. C'est Millikan qui a répondu à cette question par l'expérience en réussissant à montrer la répartition discrète de la charge de petites gouttelettes d'huile. Il a par la même occasion pu mesurer la valeur de la charge élémentaire. Le but de ce travail est de réaliser la même expérience que Millikan (avec l'aide de moyens plus modernes) et d'essayer d'observer des résultats identiques.

## 2 Théorie

L'expérience consiste à placer une gouttelette d'huile de petite taille dans un champ électrique vertical. Les gouttelettes sont ionisées par une petite source radioactive émettant des rayons  $\beta$ . En observant le mouvement des gouttelettes, on peut déduire leur charge. Il est alors possible de vérifier si cette charge est distribuée de manière continue ou discrète. Dans ce deuxième cas, il devrait alors être possible de déterminer la charge élémentaire ; la charge de l'électron.

### 2.1 Forces en présence

Une gouttelette d'huile chargée placée entre deux électrodes subit quatre forces. La première de ces forces est la force de gravitation. Elle est simplement donnée par :

$$\vec{F}_g = m\vec{g} = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho \vec{g} \quad (1)$$

où  $\rho$  est la densité de l'huile et  $r$  le rayon de la gouttelette. Comme la particule se situe dans un fluide, il faut lui ajouter deux forces, la force de trainée, donnée par la formule de Stokes :

$$\vec{F}_t = -6\pi\eta r \vec{v} \quad (2)$$

où  $\eta$  est la viscosité de l'air et  $\vec{v}$  la vitesse de la gouttelette. La deuxième force due au fluide est la poussée d'Archimède, valant ici :

$$\vec{F}_a = -\frac{4}{3}\pi r^3 \rho_a \vec{g} \quad (3)$$

Cependant, la valeur de la densité de l'air  $\rho_a$  étant très faible, cette force est négligeable par rapport aux autres <sup>1</sup>. Finalement, il y a la force due au

---

<sup>1</sup>Cette force sera donc ignorée dans le reste du développement

champ électrique dont la valeur est :

$$\vec{F}_e = q\vec{E} \quad (4)$$

avec  $q$  la charge de la gouttelette et  $\vec{E}$  le champ électrique.

On obtient alors en utilisant la deuxième loi de Newton sur l'axe vertical :

$$\frac{4}{3}\pi r^3 \rho g - 6\pi\eta r v - qE = \frac{dv}{dt} \quad (5)$$

Ce qui donne en intégrant :

$$v(t) = \frac{1}{6\pi\eta r} \left( \frac{4}{3}\pi r^3 \rho g - qE \right) \left( 1 - \exp\left(-t \frac{6\pi\eta r}{m}\right) \right) \quad (6)$$

On peut remarquer que la valeur de la constante de temps dans l'exponentielle ( $\tau = \frac{m}{6\pi\eta r}$ ) est très petite et donc que la gouttelette atteint quasi-instantanément sa vitesse limite qui est donnée par :

$$\boxed{v(t) = \frac{1}{6\pi\eta r} \left( \frac{4}{3}\pi r^3 \rho g - qE \right)} \quad (7)$$

L'expérience montre effectivement que la gouttelette se déplace à vitesse constante. L'approximation faite ici ne pèjore donc pas la qualité des résultats. Pour notre expérience, nous allons considérer deux cas, selon que le champ électrique est constant ou alternatif.

## 2.2 Champ électrique uniforme

Si l'on considère le cas d'un champ électrique uniforme créé par deux plaques métalliques séparés par une distance  $d$ , on obtient un champ uniforme  $E = \frac{U}{d}$  avec  $U$  la tension appliquée aux bornes des plaques. On peut alors réécrire l'équation 7 pour la montée et pour la descente en faisant simplement varier le signe de la force de gravitation suivant que l'on monte ou que l'on descende :

$$\begin{cases} q\frac{U}{d} + \frac{4}{3}\pi r^3 \rho g - 6\pi\eta r v_d = 0 \\ q\frac{U}{d} - \frac{4}{3}\pi r^3 \rho g - 6\pi\eta r v_m = 0 \end{cases} \quad (8)$$

avec  $v_m$  la vitesse en montée et  $v_d$ , la vitesse en descente. En additionnant ces 2 dernières lignes, on obtient la relation suivante :

$$2q\frac{U}{d} - 6\pi\eta r (v_d + v_m) = 0 \quad \Rightarrow \quad r = \frac{qU}{3\pi\eta d (v_d + v_m)} \quad (9)$$

Et en faisant la même chose mais en soustrayant les deux lignes, on trouve :

$$\frac{8}{3}\pi r^3 \rho g + 6\pi\eta r (v_m - v_d) = 0 \quad \Rightarrow \quad r = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{\eta (v_d - v_m)}{\rho g}} \quad (10)$$

On peut alors égaliser ces 2 expressions et sortir  $q$ . On a ainsi l'expression de la charge de la gouttelette.

$$q = \frac{9}{2}\pi \sqrt{\frac{\eta^3 d^2 (v_d + v_m) \sqrt{v_d - v_m}}{\rho g U}} \quad (11)$$

Il suffit donc de mesurer la vitesse à la montée et à la descente d'une gouttelette pour obtenir sa charge. Puisque les autres valeurs sont simplement des constantes dépendant uniquement du milieu et de l'installation. C'est l'équation que nous allons utiliser pour nos mesures.

### 2.3 Champ électrique alternatif

Si cette fois, la tension aux bornes de plaques est donnée par  $U(t) = U_o \sin \omega t$ , on observe un champ électrique variable  $E(t) = \frac{U_o}{d} \sin \omega t$ . Le mouvement de la goutte peut alors se décomposer en une oscillation de fréquence  $\omega$  associé à la variation du champ électrique et un mouvement de translation vers le bas dû à la gravitation. Ce mouvement de chute est négligeable si l'on applique une tension  $U_o$  assez grande et si le temps d'observation est beaucoup plus court que le temps de chute. Ces deux derniers points sont faciles à réaliser et ne sont donc pas des restrictions importantes ; il n'est donc pas restrictif de négliger la force de pesanteur dans ce cas. On peut alors récrire l'équation 5 comme suit :

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{qU_o}{d} \sin \omega t - 6\pi\eta r \frac{dz}{dt} \quad (12)$$

En remplaçant  $m$  par sa valeur ( $m = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$ ) et en réarrangeant les termes, on a l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{9}{2} \frac{\eta}{\rho r^2} \frac{dz}{dt} - \frac{3qU_o}{4d\pi r^3 \rho} \sin \omega t = 0 \quad (13)$$

On obtient alors en résolvant une équation de la forme  $z(t) = |Z| \cos \omega t$  avec l'amplitude des oscillations  $|Z|$  donnée par :

$$|Z| = \frac{1}{6} \frac{qU_o}{\pi r \omega \eta d} \quad (14)$$

En utilisant l'équation 7 avec un champ électrique nul, on trouve une expression pour le rayon en fonction de la vitesse de chute ( $v_c$ ) :

$$r = \sqrt{\frac{9\eta v_c}{2\rho g}} \quad (15)$$

On a ainsi une expression pour  $|Z|$  qui ne comprend que des valeurs mesurables facilement :

$$|Z| = \frac{1}{6} \frac{qU_o}{\pi\omega\eta d} \sqrt{\frac{2\rho g}{9\eta v_c}} \quad (16)$$

Pour simplifier les mesures, il est plus facile de prendre  $A = 2Z$  la double amplitude et  $U_{eff} = \sqrt{2}U_o$  la tension efficace. On obtient ainsi une expression pour  $q$  en inversant la dernière relation :

$$q = \frac{9\pi A d \omega}{2 U_{eff}} \sqrt{\frac{\eta^3}{\rho g}} \sqrt{v_c} \quad (17)$$

Ainsi, en faisant une première mesure de la vitesse de chute sans tension puis en mesurant la double-amplitude des oscillations, on obtient une valeur pour la charge de la gouttelette.

## 2.4 Statistique

Cette expérience est basée sur une interprétation statistique des résultats. Il faut donc réaliser un nombre important de mesures pour observer un résultat valide. Si la distribution de la charge était continue, on observerait une distribution uniforme des résultats. On obtiendrait donc quelque chose comme ce qui est représenté sur le graphique 1.

Si le nombre de mesure est infini on aurait évidemment obtenu une ligne droite. Les fluctuations sur l'image sont là pour rendre compte des incertitudes de mesure.

Si par contre les charges sont quantifiées, les gouttelettes seront chargées avec des multiples d'une certaine charge, la charge élémentaire. On aura alors une représentation statistique ressemblant à la figure 2.

On observe sur le graphique des pics correspondants aux multiples de la charge élémentaire. Les pics ne sont pas parfaitement verticaux puisqu'il y a une certaine incertitude sur chaque une des mesures. Chaque pic a donc un certain écart type. Selon la théorie, nous devrions obtenir un graphique de ce type. C'est ce que nous allons vérifier.

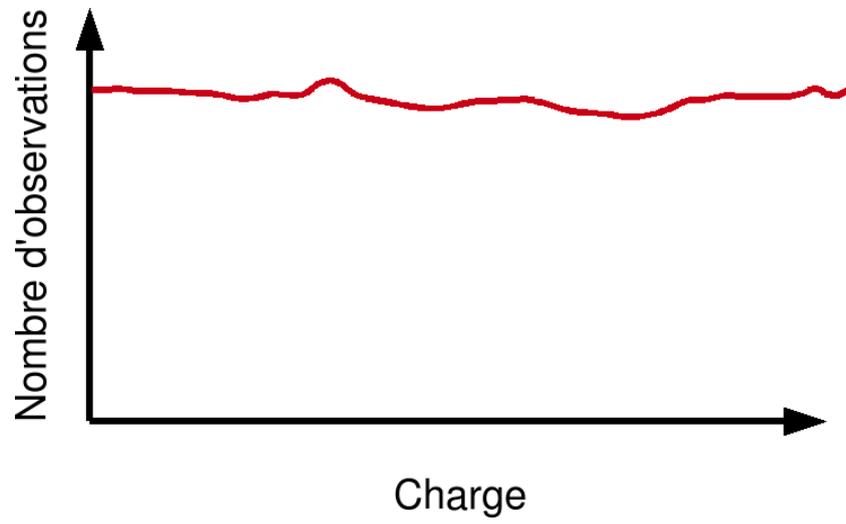


FIG. 1: Distribution de charge continue

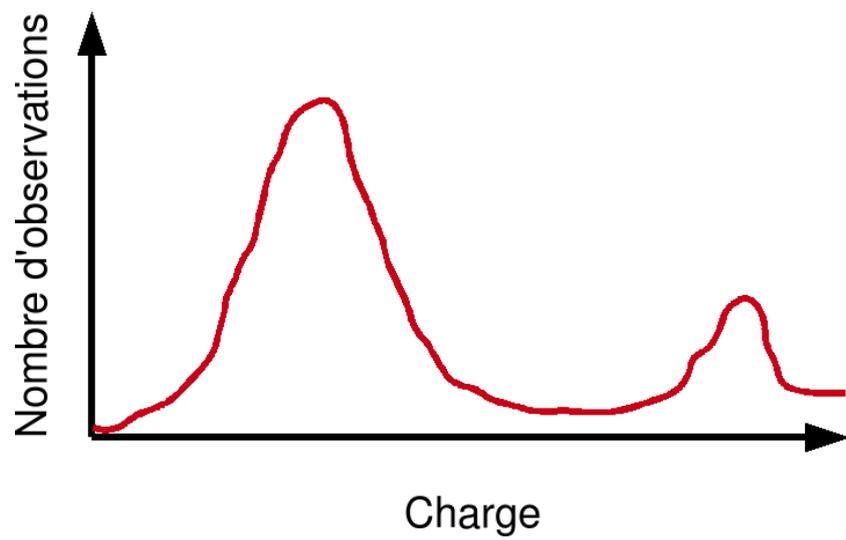


FIG. 2: Distribution de charge discrète

## 3 Résultats

### 3.1 Constantes

Pour réaliser cette série de mesures, nous avons utilisé les constantes suivantes :

Constante	Symbole	Valeur	Unité
Viscosité de l'air	$\eta$	$1.84 \cdot 10^{-5}$	$Pa \cdot s$
Accélération de la pesanteur	$g$	9.81	$m \cdot s^{-2}$
Densité de l'huile	$\rho$	898	$kg \cdot m^{-3}$
Distance entre les plaques	$d$	$2.5 \cdot 10^{-3}$	$m$
Tension entre les plaques	$U$	154	$V$

FIG. 3: Constantes physiques

Nous avons choisi de laisser la tension aux bornes du condensateur constante pour simplifier le travail. Ceci a été fait après avoir observé que la trajectoire dépendait de cette tension, comme prévu par la théorie.

### 3.2 Champ continu

On divise la droite réel en intervalle régulier de  $5 \cdot 10^{-21}$ , on peut alors compter le nombre de mesures contenues dans chaque intervalle. On obtient la distribution du graphique de la figure 4. Le distribution obtenue n'est pas exactement gaussienne, mais elle est loin d'être uniforme.

Afin d'obtenir une valeur de la charge élémentaire, on peut s'intéresser aux premiers résultats, qui sont relativement proche d'une distribution gaussienne. En diminuant l'intervalle et en se limitant aux valeurs comprise entre 0 et  $2.5 \cdot 10^{-19}[C]$ , on obtient le graphique de la figure 5. Le calcul de la moyenne est de la variance sur ces valeurs donne respectivement  $1.60 \cdot 10^{-19}[C]$  et  $0.54 \cdot 10^{-19}$ . Il y a deux petits pics correspondant à deux occurrences, aux valeurs  $3.1 \cdot 10^{-19}[C]$  et  $5.5 \cdot 10^{-19}$ . Ainsi, si on suppose que la valeur de la charge proche de la valeur moyenne obtenue, alors ces deux pics correspondent à des gouttes d'huile chargé d'environ 2 et 3 fois la charge.

### 3.3 Champ alternatif

Mesurer l'amplitude des oscillations des particules de fluides chargée s'est avérée difficile avec le matériel à disposition, on peut toutefois constater des oscillations d'une amplitude de l'ordre de  $3 \cdot 10^{-5}[m]$ . Aucune modification de la charge n'a été possible durant l'observation des oscillations. Nous avons

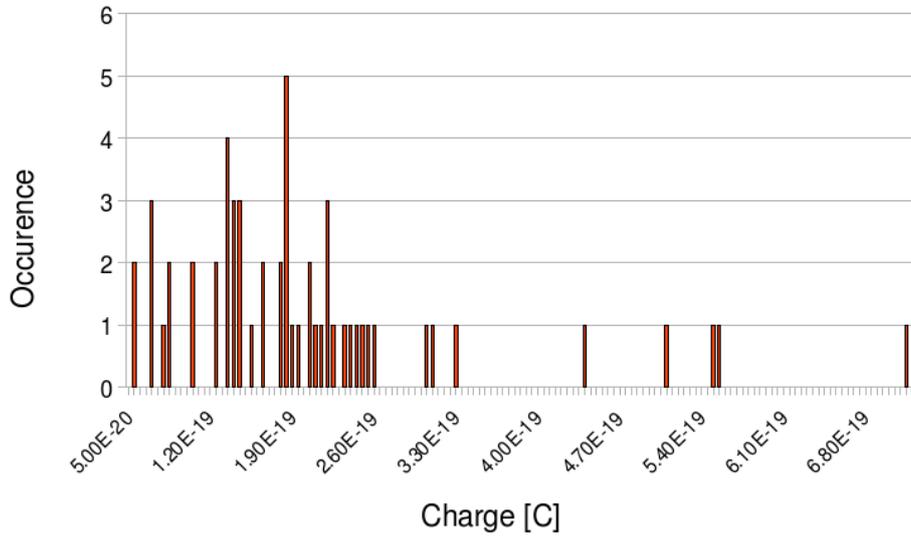


FIG. 4: Occurrences des valeurs de la charge obtenues

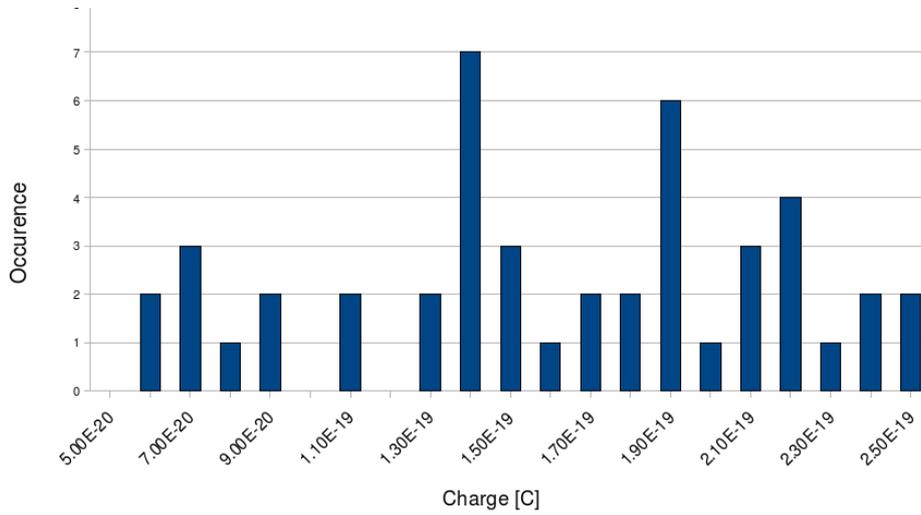


FIG. 5: Occurrences des valeurs de la charge obtenue, proche de la valeur théorique

seulement pu apprécier qualitativement la trajectoire des gouttelettes. En appliquant la formule théorique, nous avons obtenu des valeurs dont l'ordre de grandeur est cohérent avec la théorie. Il est cependant difficile d'en dire plus au vu de l'incertitude importante qui pèse sur la qualité des résultats.

## 4 Discussion

### 4.1 Erreur

Il y a plusieurs sources d'erreur qui nous incitent à utiliser une approche statistique. D'une part, le facteur humain a une importance, en effet, le changement de direction du champ, donc la mesure de la vitesse, se fait de façon manuelle, on a donc une erreur incontrôlable ; aléatoire. D'autre part, la taille des gouttes qui subit des variations dont nous ne tenons pas compte. Toutefois, la grosseur reste semblable d'une goutte à l'autre, ses facteurs d'erreur devrait donc s'atténuer avec un bon nombre de mesure. Pour la même raison, on peut supposer que les courants de convections à l'intérieur du dispositif sont sans importance sur les résultats obtenus avec beaucoup de mesures.

Si on cherche une valeur précise de la valeur de la charge élémentaire, la précision des instruments optiques utilisés, ainsi qu'une meilleure connaissance de la température est nécessaire, afin d'en déduire le bon coefficient de viscosité de l'air. En effet, lors de la réalisation de son expérience, R.A. Millikan a trouvé une valeur incorrecte de la charge quantique, probablement due à l'utilisation d'une mauvaise valeur de la viscosité de l'air. Toutefois, dans notre expérience, ces facteurs sont sans importance, car le petit nombre de mesures pèse bien plus sur la qualité de la mesure que les autres facteurs.

### 4.2 Champ continu

Le calcul de l'écart type sur les premières mesures montre que la valeur obtenue pour la moyenne n'est pas significative, le graphique de la figure 5 montre bien cette imprécision. En effet, on s'attend à une allure gaussienne, mais ce n'est pas tout à fait le cas, la courbe est déformée. Cette déformation est due au nombre de mesures effectuées, nous en avons effectué 56, un nombre bien insuffisant pour obtenir une statistique fiable et précise. Bien que la valeur de la moyenne obtenue soit proche de la valeur théorique, on ne peut pas donner de conclusion sur cette valeur. Toutefois, puisque on obtient un résultat proche avec un nombre de mesures restreint, l'expérience pourrait donner des résultats concluants en réalisant une grande quantité de

mesures.

Malgré l'imprécision de résultats, l'expérience permet de déduire la quantification de la charge. En effet, en considérant les premières valeurs, on a trouvé une plage de valeurs dans laquelle se trouve la charge élémentaire. Or on constate qu'on a mesuré deux petits pics après  $2.5 \cdot 10^{-19}[C]$ . Même si ces deux pics sont constitués de seulement deux occurrences, on peut dire qu'il existe une valeur plus probable de la charge proche de chacune de ses valeurs, et donc on peut supposer qu'avec un grand nombre de mesure, on observerait l'apparition de gaussienne autour de ses valeurs. Puisque la position de ses pics est très imprécise, on peut supposer que les distances qui les séparent sont semblables et sont, par ailleurs, proche de la valeur moyenne obtenue sur le premier pic. On pourrait alors en déduire que les gouttes d'huiles étaient chargées par deux et trois fois la charge élémentaire, ce qui montre l'aspect discret de la répartition de la charge. Il faut toutefois garder à l'esprit que ces suppositions sont basées sur une statistique trop faible pour avancer un résultat sûr. L'expérience permet seulement d'étayer l'hypothèse d'une répartition discrète des charges, mais nécessite d'être poursuivie afin d'obtenir un résultat concluant.

### 4.3 Champ alternatif

Cette partie de l'expérience n'est pas concluante. En effet, l'amplitude des vibrations des gouttes d'huile est extrêmement faible, du même ordre de grandeur que le diamètre visible de la goutte avec l'instrumentation optique à disposition. Il est donc impossible de le mesurer avec précision. De plus, observer un changement de charge de la goutte est très difficile, car, pour des raisons évidentes de sécurité, la source radioactive utilisée est faible et donc la probabilité que la goutte observée soit ionisée durant l'observation est très faible.

## 5 Conclusion

L'expérience de Millikan a été une étape importante dans le développement de la pensée scientifique, notre expérience montre qu'elle n'est pas triviale et nécessite un nombre de mesures très important pour obtenir des résultats vraiment concluants. En effet, dans notre cas, l'expérience permet d'appréhender une répartition de la charge qui ne peut pas être continue puisqu'on a l'apparition d'une courbe de type gaussienne. Toutefois, il est impossible de montrer l'existence d'une charge élémentaire précise, car les erreurs aléatoires sont trop importantes par rapport au nombre de mesures effectuées.

## 6 Annexes

### 6.1 Mesures effectuées

Les mesures ont été effectuées en utilisant les valeurs des constantes indiquées plus haut. La mesure de la vitesse a été réalisée grâce à la mesure du temps de deux aller-retour totalisant une distance de  $9.52 \cdot 10^{-24} \text{ m}$ . Les valeurs obtenues sont reportées dans le tableau suivant :

Temps montée [s]	Temps descente [s]	Charge [C]
17.6	10.2	1.78E-019
8.9	8	1.51E-019
5.4	4.9	3.03E-019
6.7	6.6	8.09E-020
6.7	6	2.36E-019
8	7	2.02E-019
3.5	3.3	4.38E-019
13.9	4.2	7.15E-019
8.6	7.9	1.39E-019
8.5	7.8	1.43E-019
8.2	7	2.17E-019
7.2	7	1.00E-019
9.9	8.2	1.82E-019
9.1	8.2	1.44E-019
9	8.2	1.37E-019
9.1	7.7	1.92E-019
9.1	8.3	1.34E-019
8.7	7.6	1.80E-019
4.3	4.18	2.18E-019
6	5.6	2.13E-019
5.4	5.2	1.80E-019
5.3	5.1	1.87E-019
5.7	5.4	2.01E-019
5.9	5.2	3.09E-019
5.6	5.2	2.46E-019
6.2	5.6	2.53E-019
5.4	5.2	1.80E-019
5.4	5.3	1.25E-019

FIG. 6: Première partie

Temps montee [s]	Temps descente [s]	Charge [C]
5.9	5.8	1.05E-019
6	5.7	1.81E-019
3.1	3	1.36E-019
5.6	5.55	8.14E-020
5.9	5.5	2.21E-019
2.7	2.6	5.10E-019
2.66	2.65	1.60E-019
2.8	2.75	3.28E-019
2.6	2.5	5.50E-019
2.51	2.49	2.56E-019
5.6	5.58	5.12E-020
6.1	6.05	6.85E-020
6.1	5.9	1.41E-019
6.08	6.02	7.57E-020
6.3	5.8	2.19E-019
6.9	6.1	2.41E-019
6.34	6.28	6.96E-020
6.5	6.46	5.39E-020
6.25	6.05	1.34E-019
6.35	6.05	1.61E-019
6.14	6.09	6.76E-020
5.87	5.51	2.10E-019
5.91	5.75	1.33E-019
6.1	5.77	1.85E-019
5.92	5.48	2.31E-019
2.9	2.75	5.49E-019
6.55	6.35	1.22E-019
6.38	6.17	1.33E-019

FIG. 7: Deuxième partie