

# Viscosité de l'air

Matthieu Schaller et Xavier Buffat

[matthieu.schaller@epfl.ch](mailto:matthieu.schaller@epfl.ch)

[xavier.buffat@epfl.ch](mailto:xavier.buffat@epfl.ch)

13 décembre 2007

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Théorie</b>	<b>2</b>
2.1	Valeur empirique . . . . .	2
2.2	Théorie de la viscosité . . . . .	3
<b>3</b>	<b>Méthode</b>	<b>4</b>
3.1	Principe physique . . . . .	4
<b>4</b>	<b>Résultats et Discussion</b>	<b>6</b>
4.1	Variation de la pression . . . . .	6
4.2	Facteur d'erreur . . . . .	8
4.3	Variation de la vitesse de rotation . . . . .	8
<b>5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>9</b>
<b>6</b>	<b>Annexe</b>	<b>10</b>

## 1 Introduction

Dans notre expérience quotidienne, nous sommes toujours confrontés à la viscosité ou au frottement, que ce soit en utilisant des liquides visqueux tels que l'huile ou en constatant l'échauffement créé par le frottement de deux corps l'un sur l'autre. Comme l'air est un fluide, il existe un coefficient de viscosité qui décrit ses propriétés. Ce coefficient de viscosité  $\eta$  est cependant très faible en comparaison de ceux que l'on a pour les liquides, c'est pour cela que le phénomène de viscosité peut souvent être négligé dans l'air. Ce n'est pas le cas pour toutes les expériences et il faut donc avoir une expérience qui permette de déterminer cette valeur.

Dans ce travail, nous allons tenter de déterminer cette valeur et essayer de vérifier si elle dépend de la pression.

## 2 Théorie

### 2.1 Valeur empirique

Il est assez difficile en règle générale de calculer le coefficient de viscosité d'un fluide. Cette difficulté est encore accentuée lorsqu'il s'agit d'un gaz, car la valeur que l'on cherche à obtenir est très faible et ses effets difficilement observables. De plus la théorie permettant d'expliquer correctement les effets de la viscosité est assez complexe et fait intervenir une grande gamme de paramètres dépendants de l'environnement. C'est pour cela qu'une loi empirique, connue sous le nom de *loi semi-empirique de Sutherland* est souvent utilisée. Cette loi donne la viscosité en fonction de la température :

$$\eta = B \frac{\sqrt{T}}{1 + \frac{c}{T}} \quad (2.1)$$

où  $c$  et  $B$  sont des coefficients empiriques. Pour l'air, ces coefficients valent respectivement  $B = 1.48 \cdot 10^{-6} \text{ N s K}^{-1/2} \text{ m}^2$  et  $c = 119.4 \text{ K}$ . Si l'on applique cette formule pour une température de  $298 \text{ K}$ , on obtient une valeur de la viscosité de l'air de :

$$\eta = 1.799 \cdot 10^{-5} \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-1} \quad (2.2)$$

On remarque cependant que la formule ne montre pas de dépendance entre la viscosité et la pression, ce qui intuitivement devrait être le cas. La phénoménologie montre en effet que en-dessous d'une certaine pression limite, la viscosité tend rapidement vers 0, ce qui n'est pas décrit par cette loi empirique. Il faut donc une théorie plus avancée pour obtenir des valeurs cohérentes dans des domaines de faibles pressions.

## 2.2 Théorie de la viscosité

La théorie des gaz parfaits décrit un gaz comme un ensemble de molécules se déplaçant rapidement et en changeant très souvent de direction suite aux collisions qu'elles subissent entre-elles ou contre les parois. On peut alors déduire toutes les grandeurs macroscopiques tels que la densité ou la viscosité à partir des lois de la mécanique.

Une molécule de diamètre  $\sigma$  et de vitesse moyenne  $m$ , balaye pendant un temps  $\Delta t$  un volume  $\pi\sigma^2v\Delta t$ . Elle va donc rencontrer  $n\pi\sigma^2v\Delta t$  autres molécules si il y a  $n$  molécules par unité de volume dans l'enceinte. On définit alors, le *libre parcours moyen*  $\lambda$ , la distance  $v\Delta t$  telle que ce nombre de chocs est égal à 1. On a donc :

$$\lambda = \frac{1}{\pi\sigma^2n} \quad (2.3)$$

Si l'on tient compte du mouvement des autres particules et de la distribution des vitesses, on obtient :

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\pi\sigma^2n} \quad (2.4)$$

Supposons pour la suite que toutes les molécules du gaz ont une même vitesse moyenne  $\bar{v}$ . Intuitivement, un sixième des molécules se déplacent dans chacune des directions de l'espace à chaque instant, ainsi il y a  $\frac{n}{6}vS\Delta t$  qui traversent le plan  $S$  selon l'axe vertical vers le haut, et de même vers le bas. Par définition de  $\lambda$ , les molécules qui traversent le plan  $S$  ont eu leur dernière collision en  $z - \lambda$  ou  $z + \lambda$  selon leur direction. Les composantes de la vitesse selon  $X$  et  $Y$  dépendent alors de  $z \pm \lambda$ , on obtient alors comme bilan pour la composante  $X$  de la quantité de mouvement :

$$\Delta p_x = \frac{n}{6}m\bar{v}S\Delta t (V_x(z + \lambda) - V_x(z - \lambda)) \quad (2.5)$$

On obtient alors en développant au premier ordre :

$$\Delta p_x = \frac{n}{6}m\bar{v}S\Delta t \cdot 2\frac{\partial v_x}{\partial z}\lambda \quad (2.6)$$

On a alors en utilisant Newton ( $\frac{dp}{dt} = \sum F_e \vec{x}t$ ), la relation :

$$\vec{F} = \frac{\Delta p_x}{\Delta t} = \frac{n}{3}m\bar{v}S\frac{\partial v_x}{\partial z}\lambda \quad (2.7)$$

Mais comme par définition,  $\frac{\vec{F}}{S} = \eta \frac{dv}{dz}$ , on obtient :

$$\eta = \frac{n}{3}\bar{v}m\lambda \quad (2.8)$$

On peut alors remplacer  $\lambda$  par des valeurs plus facilement mesurables, en utilisant le fait que  $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{3}{2}kT$  avec  $k$  la constante de Boltzmann, ce qui donne :

$$\eta = \frac{\sqrt{mkT}}{\sqrt{6}\pi\sigma^2} \quad (2.9)$$

A nouveau, on obtient une relation indépendant de la pression. Cependant, le libre parcours moyen dépend de la pression puisque la pression est intimement liée à la distance entre les molécules. La pression joue donc indirectement un rôle dans cette expression.

Si l'on cherche à obtenir une valeur numérique pour la viscosité, il faut simplement utiliser la formule (2.9). On obtient alors une valeur de :

$$\eta = 1.791 \cdot 10^{-5} \text{ kgm}^{-1}\text{s}^{-1} \quad (2.10)$$

C'est cette valeur que nous allons essayer de confirmer par l'expérience.

## 3 Méthode

### 3.1 Principe physique

Le dispositif expérimental que nous allons utiliser est représenté sur la figure 1. Deux disques de même rayon  $R$  séparés par une petite distance  $e$  sont placés dans une enceinte où l'on peut créer un vide partiel. Le disque du bas est relié à un petit moteur permettant de le faire tourner à une vitesse  $\omega$  constante. Le disque du haut est accroché à un petit fil qui fait office de pendule de torsion.

Si l'on considère un petit anneau  $dS$  du disque supérieur placé à un rayon  $r$  du centre, on a  $dS = 2\pi r dr$ . La force agissant sur cet anneau est alors  $dF_t = \eta \frac{dS \cdot v_t}{e}$  où  $\eta$  est la viscosité de l'air entre les plaques et  $v_t$  la vitesse du disque inférieur. Comme  $v_r = \omega r$ , on peut écrire le moment de force induit sur le fil par l'anneau :

$$dM_1 = r \cdot F_t = r \frac{\eta}{e} \omega r 2\pi r dr \quad (3.1)$$

On a alors le moment total en intégrant de 0 à  $R$ .

$$M_1 = \frac{2\pi\eta\omega}{e} \int_0^R r^3 dr = \frac{\pi\eta\omega}{2e} R^4 \quad (3.2)$$

Le disque du haut va osciller jusqu'à arriver à un point d'équilibre  $\theta$  Le

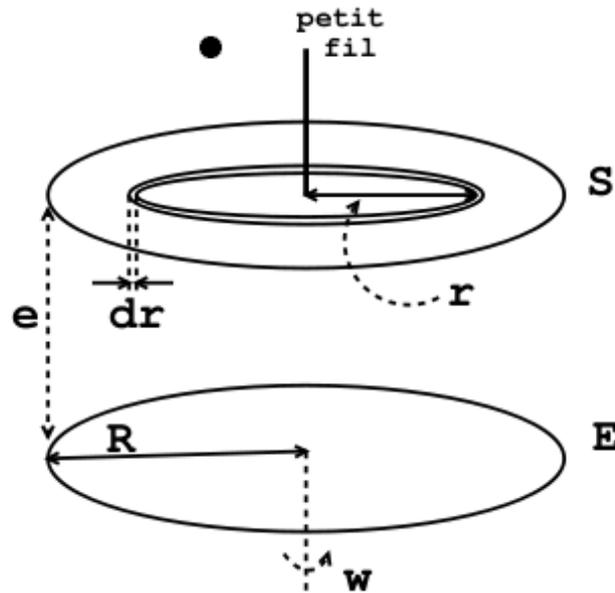


FIG. 1: Montage expérimental

moment de torsion créée par le disque sur le petit fil crée vaut  $M_2 = \frac{\pi G d^4 \theta}{2L} = C\theta$  avec  $d$  le diamètre du fil,  $L$  sa longueur et  $G$  son module. A l'équilibre on a évidemment égalité des moment  $M_1$  et  $M_2$ .

Avant d'atteindre l'équilibre, le disque va osciller, on a alors en utilisant le théorème du moment cinétique, la relation :

$$I\ddot{\theta} + C\theta = 0 \quad (3.3)$$

avec  $I$  le moment d'inertie du disque autour de son axe. On obtient alors comme solution de cette équation différentielle, :

$$\theta(t) = \theta_0 \cos\left(\sqrt{\frac{C}{I}}t + \phi\right) \quad (3.4)$$

La période de cet oscillateur est ainsi :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{C}} \quad (3.5)$$

On remarque que la période des oscillations est indépendante de la vitesse  $\omega$ , ce que nous allons essayer de vérifier par l'expérience.

On peut ainsi trouver la valeur de  $C$  en fonction de la période qui est une grandeur facilement mesurable.

$$C = 4 \frac{\pi^2 I}{T^2} = 2 \frac{\pi^2 m R^2}{T^2} \quad (3.6)$$

Si l'on utilise cette dernière équation ainsi que 3.2, on obtient l'expression cherchée pour la viscosité :

$$\eta = \frac{4\pi em}{R^2} \frac{1}{T^2} \frac{\theta}{\omega} \quad (3.7)$$

Il suffit alors de connaître la masse du disque, son rayon, l'espace entre les disques puis de mesurer la période d'oscillation et l'angle d'équilibre pour connaître la viscosité de l'air.

## 4 Résultats et Discussion

### 4.1 Variation de la pression

Intuitivement, la période des oscillations autour de l'angle d'équilibre dépend uniquement du pendule de torsion utilisé et de la géométrie du système. Afin de le vérifier, on mesure la période des oscillations du disque sur cinq à six oscillations pour différentes pressions, on obtient une valeur constante de  $27 \pm 1$  s. Ainsi, la période d'oscillation ne dépend pas de la pression dans l'enceinte, ce qui confirme notre intuition.

En mesurant l'angle de torsion du disque en faisant varier la pression, en maintenant la vitesse de rotation du premier disque à 0.15 tour par seconde, on obtient le graphique de la figure 2. Ce graphique permet d'observer la pression limite à laquelle la viscosité diminue avec la pression. En effet, on constate que pour des pressions supérieures à 5 Torr, la viscosité est quasi constante à environ 2.7 Pas. L'expression 2.4 montre la dépendance du parcours moyen en fonction de la quantité d'atome par unité de volume, ainsi lorsque la pression baisse, le nombre de particule par unité de volume est très faible, le temps de parcours moyen peut devenir très grand et dépasser la largeur du récipient. Ainsi, la viscosité mesurée ne correspond pas à la réalité. En effet, d'un point de vue microscopique, on mesure la viscosité au travers de la quantité de mouvement transmise aux particules entre les couches de molécule qui est finalement transmise au disque. Lorsque le parcours moyen dépasse la largeur de l'enceinte, Les particules peuvent être propulsées par le disque rotatif et réfléchies par les parois sur l'autre disque avec une vitesse dans une direction

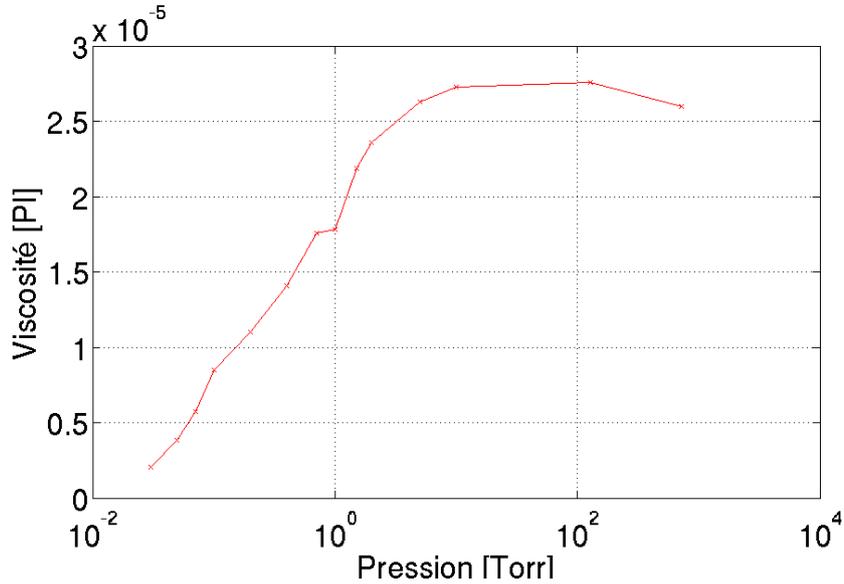


FIG. 2: Viscosité de l'air en fonction de la pression

différente de celle avec laquelle elle a été propulsée. Ainsi, la force mesuré par le dispositif n'est pas due à la viscosité de l'air mais à un effet des parois du système, car les particules n'atteignent plus systématiquement le deuxième disque avec une vitesse dans la direction de rotation du premier disque. D'un point de vue macroscopique, puisque les collisions avec le disque de mesure se font dans des directions différentes de celle imposée par le disque rotatif, la force résultante devient de plus en plus faible, ce qui correspond à une baisse de la viscosité dans nos mesures.

L'augmentation du parcours libre moyen n'est pas le seul effet qui provoque la diminution de la viscosité pour des pressions basses. En effet, lorsque la pression devient très basse, le nombre de particules par unité de volume devient faible, les considérations statistiques utilisées pour le calcul n'ont plus de sens, on ne peut donc pas conclure que la viscosité est indépendante de la pression. En fait, il est même évident que la viscosité dépend de la pression lorsque l'on s'approche du vide. En effet, si l'on pouvait créer un vide total dans notre enceinte, la viscosité serait nulle, la viscosité suit donc une augmentation continue jusqu'à sa valeur maximum.

## 4.2 Facteur d'erreur

On a constaté que la géométrie du système est extrêmement importante lorsque la pression est faible, puisque c'est elle qui détermine la pression limite à laquelle on peut mesurer la viscosité. La géométrie garde de l'importance pour des pressions plus élevées, en effet, la rotation du disque provoque des courants sur les cotés de l'enceintes qui perturbe la mesure. En particulier, ces courants provoque une force sur la surface supérieure du disque de mesure qui est difficilement calculable. Ainsi, il est préférable d'effectuer l'expérience dans une enceinte suffisamment grande de manière à atténuer au maximum les courants. Il est toutefois difficile de quantifié l'erreur induite par ces facteurs, mais il est évident qu'ils s'amplifient avec la vitesse de rotation, se qui justifie la vitesse lente utilisée pour les mesures. La constante de correction caractéristique de l'appareil permet d'améliorer la mesure, mais il est clair que les erreurs commise dépendent de la vitesse, de la température et de la pression. L'erreur due à ces effets reste donc assez conséquente.

En plus de ses erreurs due à la géométrie du système, il existe des erreurs de type aléatoire qui sont responsable de l'allure relativement discontinue de la courbe obtenue. Lorsqu'on travaille avec des basses pressions, on ne peut maintenir une pression stable que part l'intermédiaire d'un pompage constant en parallèle avec une mirco-fuite, se qui provoque des courants perturbateur. On note aussi la mesure de l'angle de rotation. En effet, la méthode de mesure de l'angle n'est pas très précise, due en partie à l'instabilité du faisceau lumineux sur la règle de mersure, mais surtout à l'imprecision de la distance entre le miroir rotatif et la règle.

## 4.3 Variation de la vitesse de rotation

On observe que l'expérience menée précédement ne permet pas de déterminer avec précision le coefficient de viscosité de l'air à pression et température ambiante car une seule mesure dans ses conditions à été effectuée. Afin d'améliorer la précision, on effectue une série de mesure donnée dans le tableau 3 en variant la vitesse de rotation du disque. L'incertitude sur la vitesse de rotation vient d'une incertitude de 0.5 s sur le temps de mesures, la précision dépend donc du nombre de tour sur lequel la mesure à été effectuée. L'incertitude sur la viscosité à été calculée en additionnant les incertitudes relatives des grandeures utilisées (équation 3.7).

La valeure moyenne est de  $2.41 \pm 0.67$ , ou l'incertitude correspond à la déviation standard. Ainsi la valeur obtenue souffre d'une erreur d'environ 23% par rapport à la valeur théorique. Cette déviation s'explique notamment par les effets discutés à la section 4.2. En effet, seule une partie d'entre

Vitesse [Tour/s]	viscosité [Pas] $10^{-5}$
$0.06 \pm 0.01$	$2.52 \pm 0.25$
$0.1 \pm 0.01$	$2.48 \pm 0.24$
$0.15 \pm 0.02$	$2.60 \pm 0.26$
$0.2 \pm 0.03$	$2.38 \pm 0.23$
$0.25 \pm 0.04$	$2.32 \pm 0.23$
$0.33 \pm 0.07$	$2.16 \pm 0.21$

FIG. 3: Mesure de la viscosité avec différente vitesse de rotation

eux sont aléatoire et sont améliorés par la statistique, mais la majeure partie sont des erreurs à répétitions.

## 5 Conclusion

L'expérience effectuée ne permet pas d'obtenir avec précision le coefficient de viscosité de l'air, mais permet par contre d'appréhender la viscosité d'un gaz à basse pression. En effet, la mesure de la viscosité de l'air nécessite une grande précision et donc un matériel plus approprié. Le même montage avec une enceinte plus grande et un système de maintien de la pression sans courant interne permettrait une meilleure mesure. L'expérience n'est toutefois pas vaine puisqu'elle met en évidence le comportement du gaz lorsque la pression baisse et montre la faille des calculs statistiques dans une telle situation.

## 6 Annexe

Résultats bruts :

pression [Torr]	vitesse [tour/s]	Position d'équilibre[m]	Viscosité
0.030	0.15	0.007	$2.57 \cdot 10^{-6}$
0.050	0.15	0.015	$4.76 \cdot 10^{-6}$
0.070	0.15	0.021	$7.17 \cdot 10^{-6}$
0.100	0.15	0.031	$1.06 \cdot 10^{-5}$
0.200	0.15	0.040	$1.37 \cdot 10^{-5}$
0.400	0.15	0.052	$1.77 \cdot 10^{-5}$
0.700	0.15	0.064	$2.19 \cdot 10^{-5}$
1.000	0.15	0.065	$2.23 \cdot 10^{-5}$
1.500	0.15	0.086	$2.74 \cdot 10^{-5}$
2.000	0.15	0.086	$2.94 \cdot 10^{-5}$
5.000	0.15	0.096	$3.28 \cdot 10^{-5}$
10.000	0.15	0.100	$3.42 \cdot 10^{-5}$
127.820	0.15	0.101	$3.45 \cdot 10^{-5}$
721.805	0.15	0.095	$3.25 \cdot 10^{-5}$
721.8	15.600	0.039	$3.15 \cdot 10^{-5}$
721.8	9.800	0.061	$3.09 \cdot 10^{-5}$
721.8	6.625	0.095	$3.25 \cdot 10^{-5}$
721.8	5.000	0.116	$2.98 \cdot 10^{-5}$
721.8	4.000	0.154	$2.90 \cdot 10^{-5}$
721.8	3.000	0.211	$2.70 \cdot 10^{-5}$