

# Etude du mouvement du pendule couplé

Matthieu Schaller  
[matthieu.schaller@epfl.ch](mailto:matthieu.schaller@epfl.ch)

12 novembre 2007

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Equations du mouvement</b>	<b>2</b>
2.1	Formalisme de Lagrange . . . . .	2
2.2	Schéma du système . . . . .	2
2.3	Energie potentielle . . . . .	3
2.4	Energie cinétique . . . . .	3
2.5	Lagrangien du système . . . . .	4
2.6	Equations du mouvement . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Modes propres</b>	<b>5</b>
3.1	Fréquences propres . . . . .	5
3.2	Amplitude des modes propres . . . . .	6
<b>4</b>	<b>Résultats</b>	<b>6</b>
4.1	Petits mouvements . . . . .	6
4.1.1	Comparaison avec la solution analytique . . . . .	6
4.1.2	Convergence du schéma . . . . .	9
4.1.3	Conservation de l'énergie mécanique . . . . .	10
4.2	Recherche du chaos . . . . .	10
4.2.1	Variation des conditions initiales . . . . .	11
4.2.2	Conservation de l'énergie mécanique . . . . .	17
4.3	Régime chaotique . . . . .	18
4.3.1	Sensibilité aux conditions initiales . . . . .	18
<b>5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>19</b>

## 1 Introduction

L'oscillateur harmonique joue un rôle central en physique puisqu'on le retrouve dans tous les domaines. Le pendule est un exemple d'un tel oscillateur en mécanique. Les équations du mouvement du pendule simple sont entièrement intégrable et il est possible de décrire complètement le mouvement d'un tel objet. Le pendule articulé est très semblable au pendule simple ; il ne possède qu'un degré de liberté de plus. Il n'y a cependant pas de solution analytique aux équations du mouvement de ce pendule. De plus, ce mouvement devient même chaotique si la condition initiale s'éloigne trop du point d'équilibre.

L'étude de cet objet ne peut donc se faire que par simulation numérique. C'est ce qui va être fait dans cette étude. Dans un premier temps, on va vérifier la compatibilité de la simulation numérique avec la solution approximée pour des petits angles. Dans un deuxième temps, nous allons étudier le comportement de ce pendule pour de plus grands angles, notamment la sensibilité aux conditions initiales.

## 2 Equations du mouvement

### 2.1 Formalisme de Lagrange

Ce problème se prête particulièrement bien à l'utilisation du formalisme lagrangien puisqu'il permet d'éviter le calcul de forces de réactions dans les fils. De plus, il permet d'obtenir plus rapidement les équations du mouvement ; Elles sont données par :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \quad (1)$$

où  $L$  est le lagrangien du système et  $q$  la coordonnée généralisée. Pour obtenir le lagrangien, il faut passer par le calcul des énergies cinétiques et potentielles du systèmes.

### 2.2 Schéma du système

Le pendule articulé est représenté dans son système d'axe sur la figure 1. Les angles  $\theta_1$  et  $\theta_2$ , correspondent aux coordonnées généralisées qui seront utilisées pour la résolution du problème

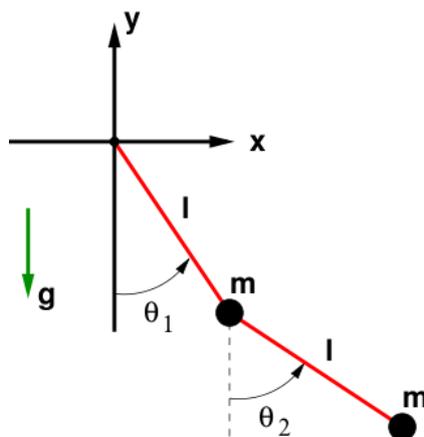


FIG. 1 – Le pendule articulé

Les longueurs des barres sont  $l = 0.35 \text{ m}$  et les masses valent  $m = 0.5 \text{ kg}$ .

### 2.3 Energie potentielle

L'énergie potentielle d'un objet dans le champ gravitationnel terrestre est donné par la relation :

$$V = m \cdot g \cdot h \quad (2)$$

Où  $m$  est la masse de l'objet,  $g$  l'accélération de la pesanteur et  $h$  la hauteur par rapport à un point de potentiel nul. En choisissant le point de potentiel nul sur l'axe des X, on obtient par un petit calcul géométrique, un potentiel de :

$$V = -2l \cos \theta_1 mg - l \cos \theta_2 mg \quad (3)$$

### 2.4 Energie cinétique

L'énergie cinétique d'un corps en mouvement est donnée par :

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\|\vec{v}\|^2 = \frac{1}{2}m\|\dot{\vec{r}}\|^2 \quad (4)$$

où  $v$  est la vitesse du corps et  $m$  sa masse. Dans notre cas, il faut passer par les coordonnées polaires. Pour la première masse, on a :

$$\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} l \sin \theta_1 \\ l \cos \theta_1 \end{pmatrix} \Rightarrow \dot{\vec{r}}_1 = \begin{pmatrix} l\dot{\theta}_1 \cos \theta_1 \\ -l\dot{\theta}_1 \sin \theta_1 \end{pmatrix} \Rightarrow \|\dot{\vec{r}}_1\| = l^2\dot{\theta}_1^2 \Rightarrow T_1 = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}_1^2 \quad (5)$$

L'énergie cinétique de la deuxième masse est par contre un peu plus difficile à calculer. En effet, la position s'exprime de manière plus complexe. On a :

$$\vec{r}_2 = \begin{pmatrix} l \sin \theta_1 + l \sin \theta_2 \\ l \cos \theta_1 + l \cos \theta_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \dot{\vec{r}}_1 = \begin{pmatrix} l\dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + l\dot{\theta}_2 \cos \theta_2 \\ -l\dot{\theta}_1 \sin \theta_1 - l\dot{\theta}_2 \sin \theta_2 \end{pmatrix} \quad (6)$$

On obtient en calculant la norme de  $\dot{\vec{r}}_1$  :

$$\|\dot{\vec{r}}_1\| = l\sqrt{\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)} \quad (7)$$

D'où l'on tire l'énergie cinétique :

$$T_2 = \frac{1}{2}ml^2 \left( \dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \right) \quad (8)$$

## 2.5 Lagrangien du système

Une fois que les énergies ont été calculées, le lagrangien s'obtient aisément en regroupant les équations 3, 5 et 8.

$$L = T - V = \frac{1}{2}ml^2 \left( 2\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \right) + 2l \cos \theta_1 mg + l \cos \theta_2 mg \quad (9)$$

On remarque que le lagrangien ne dépend pas explicitement du temps, c'est donc que l'énergie mécanique totale ( $T + V$ ) est conservée. C'est ce à quoi on s'attendait puisqu'il n'y a pas de forces non-conservatives en jeu.

## 2.6 Equations du mouvement

En dérivant le lagrangien, on obtient les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \theta_1} &= 2ml^2\dot{\theta}_1 + ml^2\dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) &= 2ml^2\ddot{\theta}_1 + ml^2\ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) - ml^2\dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) \\ \frac{\partial L}{\partial \theta_1} &= -ml^2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - 2mgl \sin \theta_1 \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} &= ml^2\dot{\theta}_2 + ml^2\dot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) &= ml^2\ddot{\theta}_2 + ml^2\ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - ml^2\dot{\theta}_1 \sin(\theta_1 - \theta_2) (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) \\ \frac{\partial L}{\partial \theta_1} &= -ml^2\dot{\theta}_2\dot{\theta}_1 \sin(\theta_1 - \theta_2) - mgl \sin \theta_2 \end{aligned}$$

Les équations du mouvement sont alors obtenues en utilisant la relation 1 et en simplifiant par  $ml$  :

$$\boxed{\begin{cases} 2l\ddot{\theta}_1 + l\ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + l\dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + 2g \sin \theta_1 = 0 \\ l\ddot{\theta}_2 + l\dot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) + l\dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + g \sin \theta_2 = 0 \end{cases}} \quad (10)$$

Ces équations ne possèdent pas de solution analytique dans le cas général. On peut néanmoins chercher une solution approchée dans le cas où  $\theta_1$  et  $\theta_2$  sont petits. Cela permet aussi une étude des modes propres.

### 3 Modes propres

#### 3.1 Fréquences propres

Les équations du mouvement ne possèdent pas de solution analytique dans le cas général. On peut néanmoins approximer la solution en faisant une étude des petites oscillations et en négligeant les termes d'ordre supérieur à 1. Les équations du mouvement sont alors :

$$\begin{cases} 2l\ddot{\theta}_1 + l\ddot{\theta}_2 + 2g\theta_1 = 0 \\ l\ddot{\theta}_2 + l\dot{\theta}_1 + g\theta_2 = 0 \end{cases} \quad (11)$$

Les solutions d'un tel système, sont de la forme :

$$\theta_1(t) = A_1 e^{i\omega t} \quad \text{et} \quad \theta_2(t) = A_2 e^{i\omega t} \quad (12)$$

L'équation 11 s'écrit alors sous la forme :

$$\begin{cases} (-2l\omega^2 A_1 - l\omega^2 A_2 + 2gA_1) e^{i\omega t} = 0 \\ (-l\omega^2 A_1 - l\omega^2 A_2 + gA_2) e^{i\omega t} = 0 \end{cases} \quad (13)$$

Comme le terme  $e^{i\omega t}$  ne s'annule jamais, on obtient l'équation suivante :

$$\begin{pmatrix} -2l\omega^2 + 2g & -l\omega^2 \\ -l\omega^2 & -l\omega^2 + g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \vec{0} \quad (14)$$

Cette équation ne possède de solution que si le déterminant de la matrice s'annule, c'est-à-dire, si :

$$2(g - l\omega^2)^2 - (l\omega^2)^2 = 0 \quad (15)$$

Cette équation possède 2 solutions pour  $\omega^2$  qui sont :

$$\omega_1^2 = \frac{2g + \sqrt{2}g}{l} \quad \text{et} \quad \omega_2^2 = \frac{2g - \sqrt{2}g}{l} \quad (16)$$

En utilisant la relation  $\omega = 2\pi f$  et en remplaçant par les valeurs numériques, on obtient les 2 fréquences propres et donc les 2 périodes propres du système :

$f_1 = 1.557 \text{ Hz}$	et	$f_2 = 0.645 \text{ Hz}$	(17)
$T_1 = 0.642 \text{ s}$	et	$T_2 = 1.550 \text{ s}$	

### 3.2 Amplitude des modes propres

En insérant la relation 16 dans l'équation 14, on obtient une nouvelle matrice :

$$-g \begin{pmatrix} 2 + 2\sqrt{2} & 2 + \sqrt{2} \\ 2 + \sqrt{2} & 1 + \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \vec{0} \quad (18)$$

dont les solutions sont de la forme :

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \quad (19)$$

Les angles au cours du temps sont donc caractérisés par les équations :

$\theta_1(t) = \alpha \cos(\omega_1 t)$	et	$\theta_1(t) = \alpha \cos(\omega_2 t)$	(20)
$\theta_2(t) = -\sqrt{2}\alpha \cos(\omega_1 t)$		$\theta_2(t) = \sqrt{2}\alpha \cos(\omega_2 t)$	

où  $\alpha$  est la valeur de l'angle en  $t = 0^1$ . Ces équations ne sont valables que pour des petits angles sinon les approximations au premier ordre ne sont plus correctes. Elles permettront néanmoins de tester la validité du schéma numérique.

## 4 Résultats

### 4.1 Petits mouvements

#### 4.1.1 Comparaison avec la solution analytique

La première chose à faire est de valider le schéma en vérifiant si la solution numérique avec des petites amplitudes correspond à la solution analytique

---

<sup>1</sup>La solution exacte serait plutôt de la forme  $\theta(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$  mais comme dans ce problème, on part toujours d'une vitesse initiale nulle, un rapide calcul montre que  $B = 0$ .

(équation 20). La figure 2 représente les angles en fonction du temps pour une condition initiale  $\theta_1(0) = 1 \cdot 10^{-8}$  et  $\theta_2(0) = \sqrt{2} \cdot 10^{-8}$ . Les angles étant très petit, on devrait obtenir une courbe proche celle calculée dans la section précédente.

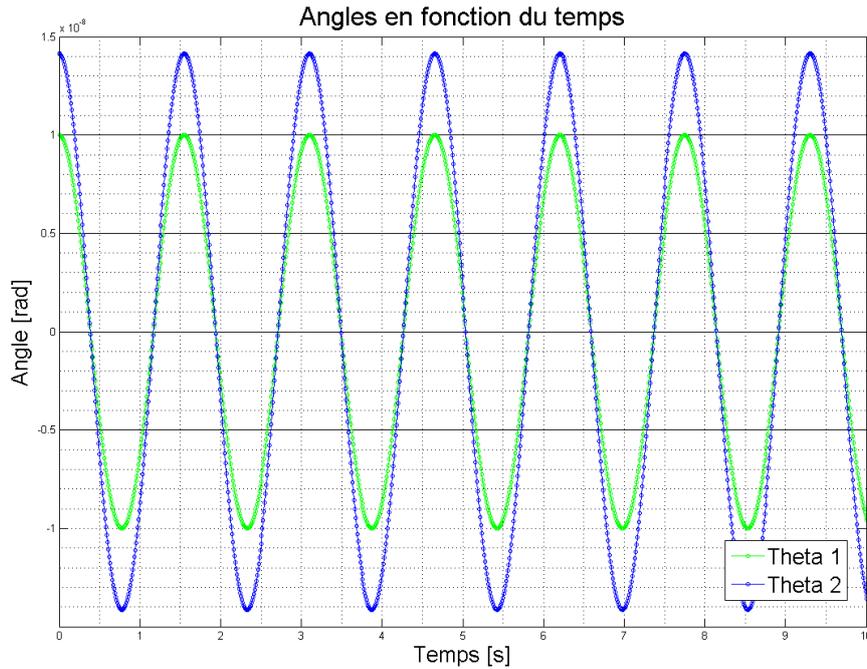


FIG. 2 – Angles en fonction du temps

La courbe ressemble particulièrement à un sinus. Les oscillations semblent régulières et l'amplitude semble être constante au cours du temps. Si l'on trace la fonction obtenue à l'équation 20 sur le même graphique, on observe que la solution numérique est très proche de la solution analytique, comme le montre le graphique 3. La ressemblance semble parfaite.

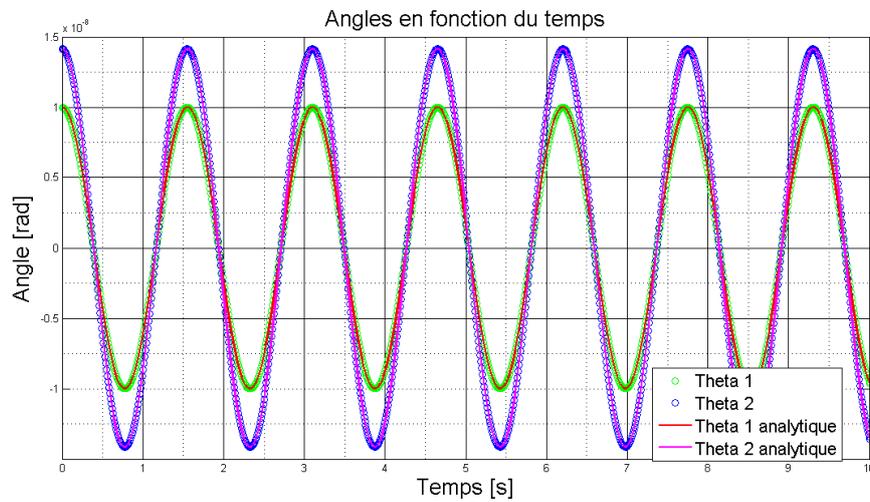


FIG. 3 – Angles en fonction du temps avec la solution analytique

Pour confirmer la régularité, on peut aussi tracer le graphique des vitesses en fonction des angles pour un temps très long (ici, 10000 s) et observer que l'on obtient 2 ellipses parfaites, ce qui implique que le mouvement est parfaitement périodique et régulier. C'est ce qui est représenté sur le graphique 6.

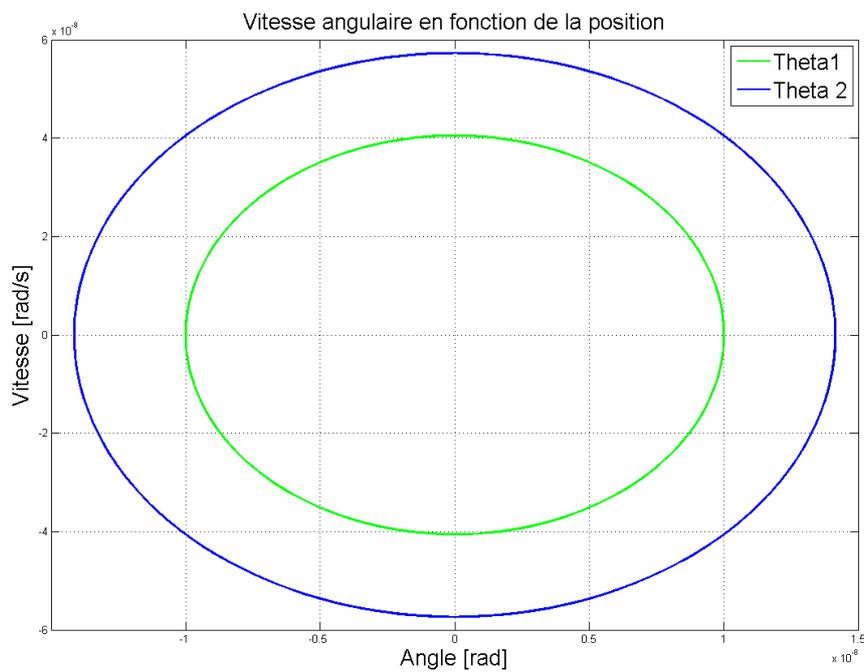


FIG. 4 – Vitesse angulaire en fonction de la position

On aurait tout aussi bien pu choisir l'autre mode propre pour faire ces essais, les résultats auraient été identiques.

#### 4.1.2 Convergence du schéma

Pour tester plus profondément la convergence du schéma, il convient d'introduire une norme sur l'espace des phases. L'erreur au temps  $t$  sera alors :

$$d(t) = \sqrt{(\theta_1(t) - \theta_{1a}(t))^2 + (\theta_2(t) - \theta_{2a}(t))^2} \quad (21)$$

où  $\theta_{1a}$  et  $\theta_{2a}$  sont les angles donnés par la solution analytique approchée. En calculant cette norme pour différentes valeurs du pas de temps et chaque fois à  $t = 10$  s, on obtient le graphique suivant :

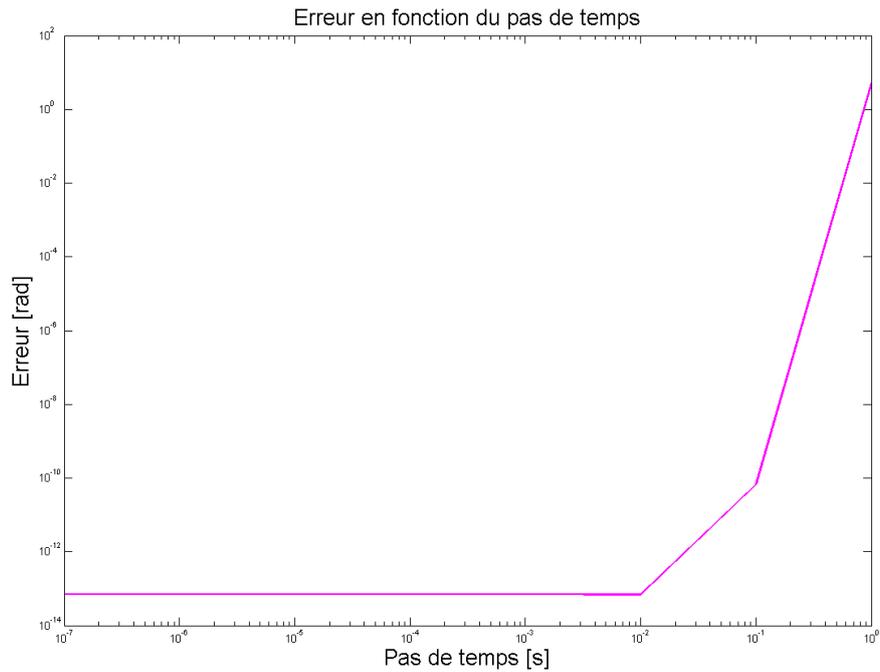


FIG. 5 – Erreur en fonction du pas de temps

On remarque que le schéma converge bien vers la solution analytique si l'on diminue le pas de temps. Un autre point essentiel est de remarquer que descendre en-dessous de 0.01 s n'est pas utile, puisque le gain en précision est très faible pour un temps de calcul nettement plus long.

### 4.1.3 Conservation de l'énergie mécanique

La dernière chose à vérifier, c'est la conservation de l'énergie mécanique ; elle doit être parfaitement conservée pour que la simulation soit correcte. En choisissant un pas de temps de  $0.01\text{ s}$  et un temps de simulation de  $10'000\text{ s}$ , on obtient le graphique suivant :

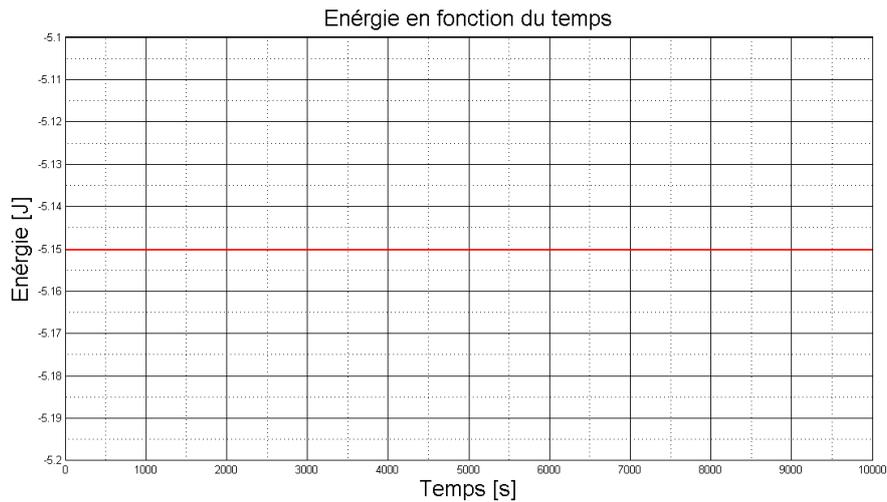


FIG. 6 – Énergie en fonction du temps

On observe que l'énergie est parfaitement conservée. Le schéma est donc correct pour des petites oscillations ; on peut par conséquent extrapoler qu'il sera correct pour de plus grands angles. Dans la section suivante, on s'intéressera au régime chaotique du système.

## 4.2 Recherche du chaos

Maintenant que l'on sait que notre simulation est correcte, il convient de le tester dans des cas plus intéressants, c'est-à-dire ceux où les angles deviennent plus grands. Si l'amplitude devient grande, il n'est plus possible de trouver une solution analytique et on est obligé de s'en remettre aux simulations pour prédire l'évolution du système.

Nous allons essayer de trouver les conditions initiales qui imposent le chaos en augmentant petit-à-petit les angles de départ (tout en conservant les vitesses initiales nulles). A partir d'ici, toutes les simulations seront faites avec un pas de temps  $\Delta t = 0.01\text{ s}$  et un temps final  $t_f = 100\text{ s}$ .

### 4.2.1 Variation des conditions initiales

Il y a plusieurs possibilités d'observer l'instauration d'un régime chaotique. J'ai choisi de passer par une représentation d'une partie de l'espace des phases. En représentant les vitesses angulaires en fonction des angles (C'est donc un sous-espace de dimension 2 de l'espace des phases.). Si l'on prend des angles qui correspondent à l'équation 20, on obtient le graphique suivant (pour un temps final de 100 s) :

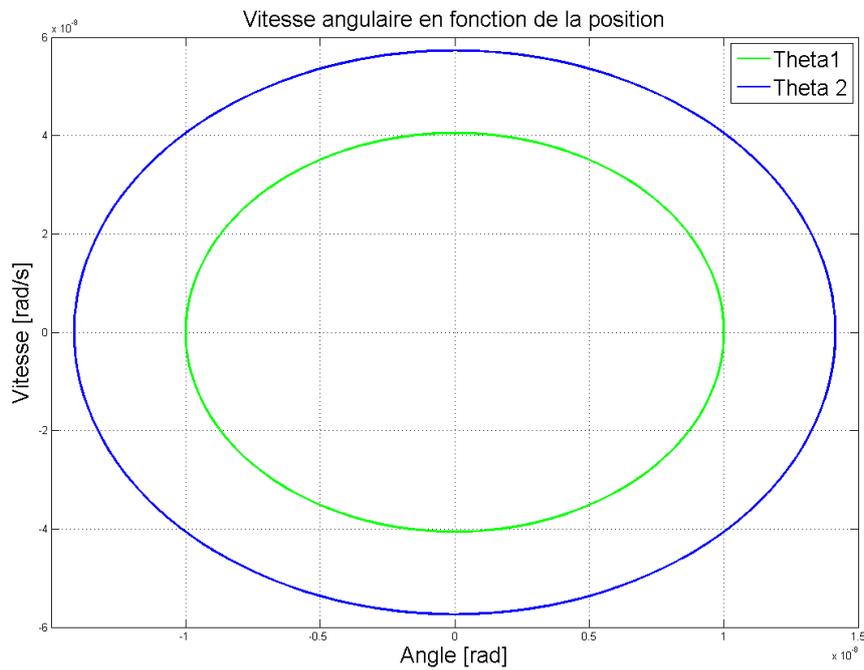


FIG. 7 – Espace des phases pour  $\theta_1(0) = 1 \cdot 10^{-8}$  et  $\theta_2(0) = \sqrt{2} \cdot 10^{-8}$

On obtient 2 ellipses quasi-parfaites, ce qui implique que le mouvement est parfaitement régulier et cyclique, comme on l'a vu précédemment. Si l'on prend des conditions initiales identiques  $\theta_1(0) = \theta_2(0) = 1 \cdot 10^{-8}$ , on obtient la figure 8

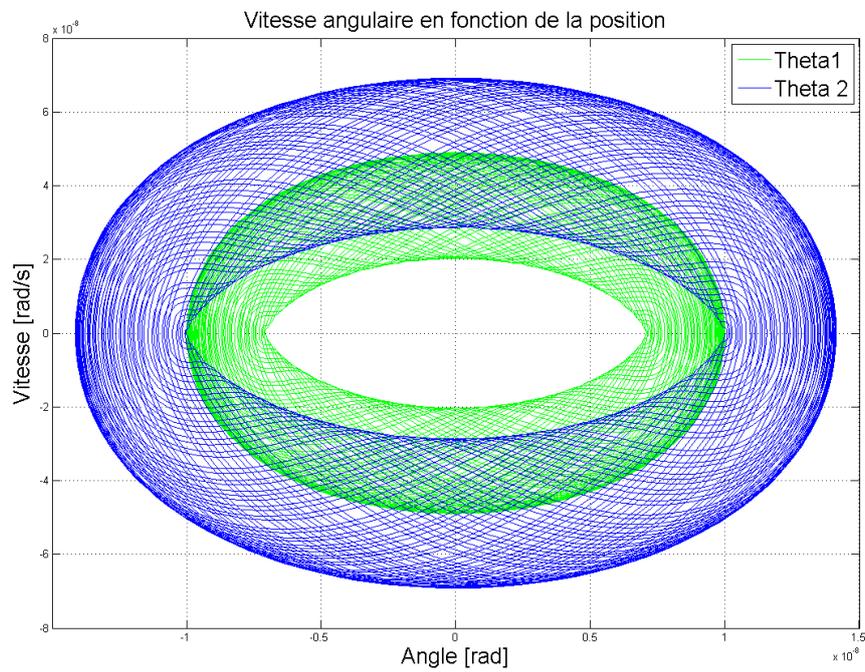


FIG. 8 – Espace des phases pour  $\theta_1(0) = \theta_2(0) = 1 \cdot 10^{-8}$

On observe cette fois 2 tores. Le mouvement est donc complètement cyclique même si le pendule ne repasse pas exactement sur son chemin ; il reste dans un certain domaine. En augmentant petit-à-petit les angles initiaux, on obtient les graphiques suivants :

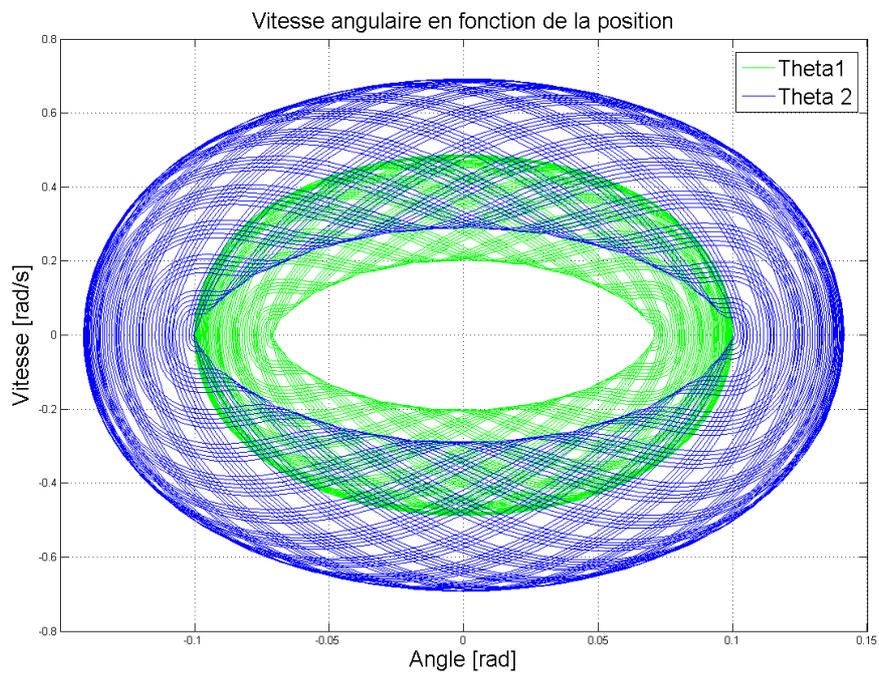
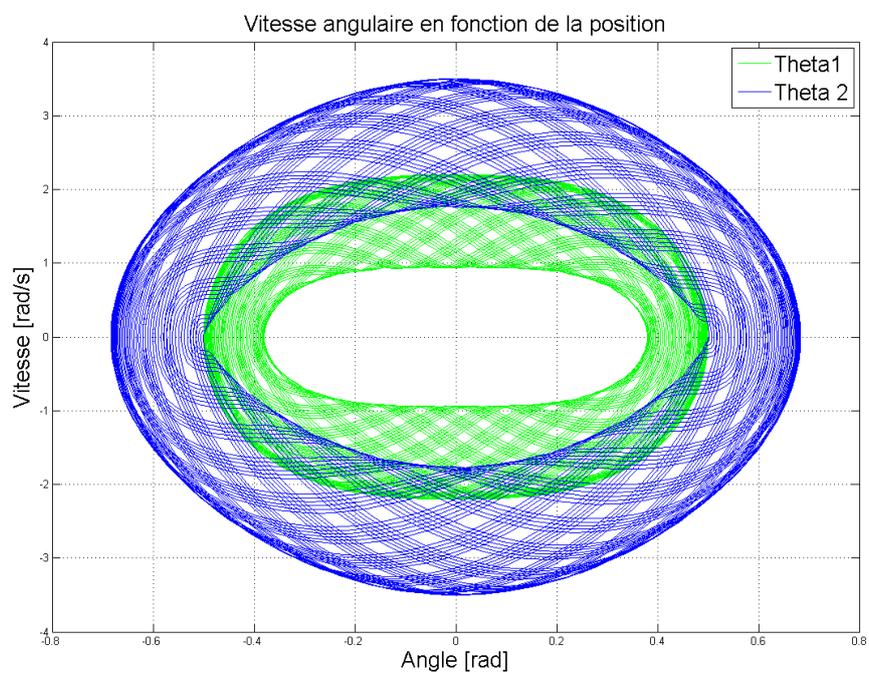
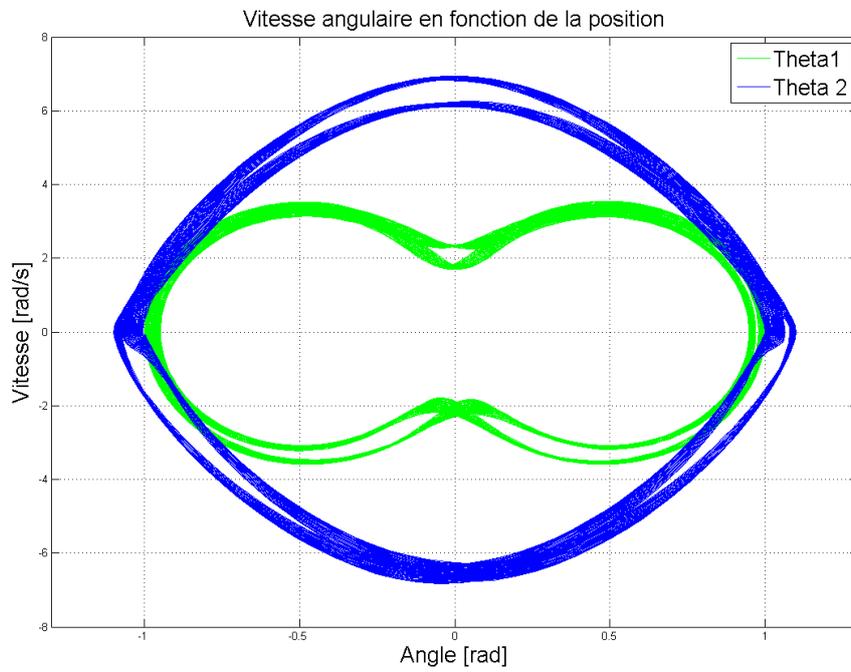
FIG. 9 – Espace des phases pour  $\theta_1(0) = \theta_2(0) = 0.1$ 

FIG. 10 – Espace des phases pour  $\theta_1(0) = \theta_2(0) = 0.5$ FIG. 11 – Espace des phases pour  $\theta_1(0) = \theta_2(0) = 1.0$

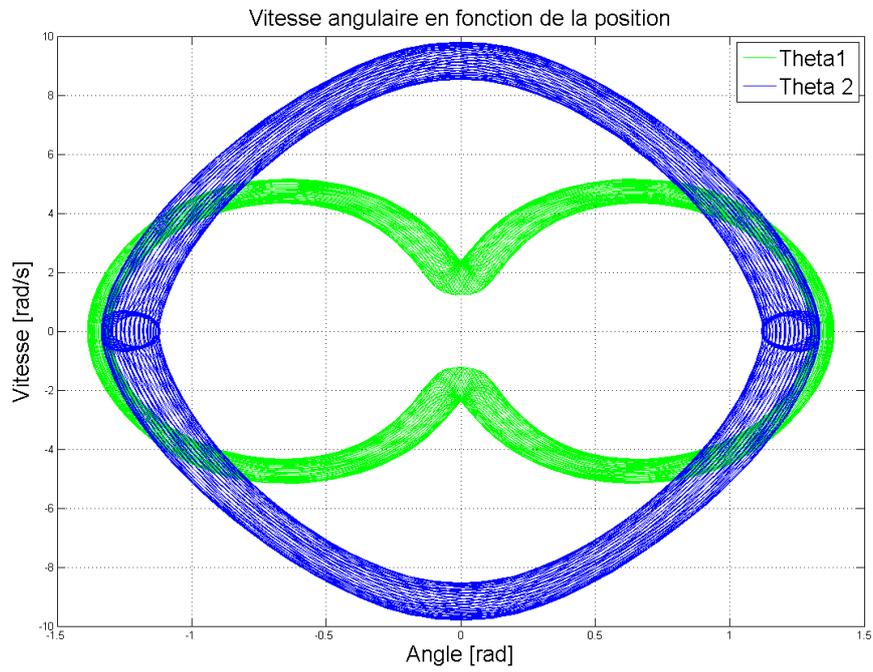


FIG. 12 – Espace des phases pour  $\theta_1(0) = \theta_2(0) = 1.3$

Ainsi jusqu'à une valeur initiale de  $1.3 \text{ rad}$ , on a un mouvement cyclique et régulier. Si par contre on passe à  $\theta_1(0) = \theta_2(0) = 1.4$ , on observe un régime chaotique, comme le montre le graphique suivant :

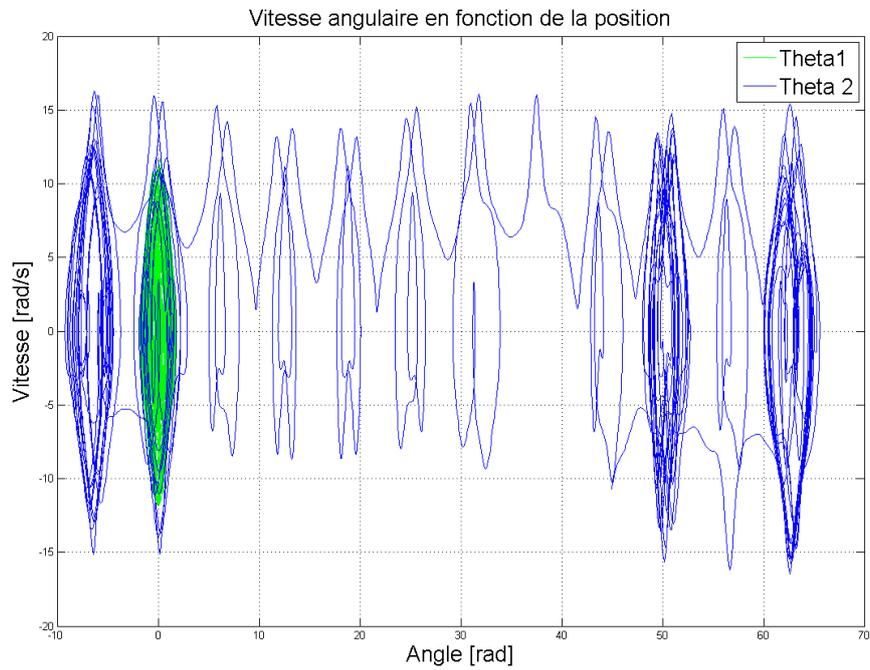


FIG. 13 – Espace des phases pour  $\theta_1(0) = \theta_2(0) = 1.4$

Cette fois, on a plus aucune régularité et plus aucun phénomène cyclique. On a obtenu un régime chaotique. Si l'on trace les angles en fonction du temps, pour cette condition initiale, on a le graphique suivant qui montre que notre intuition était correcte, le mouvement est chaotique, on a plus du tout un mouvement périodique.

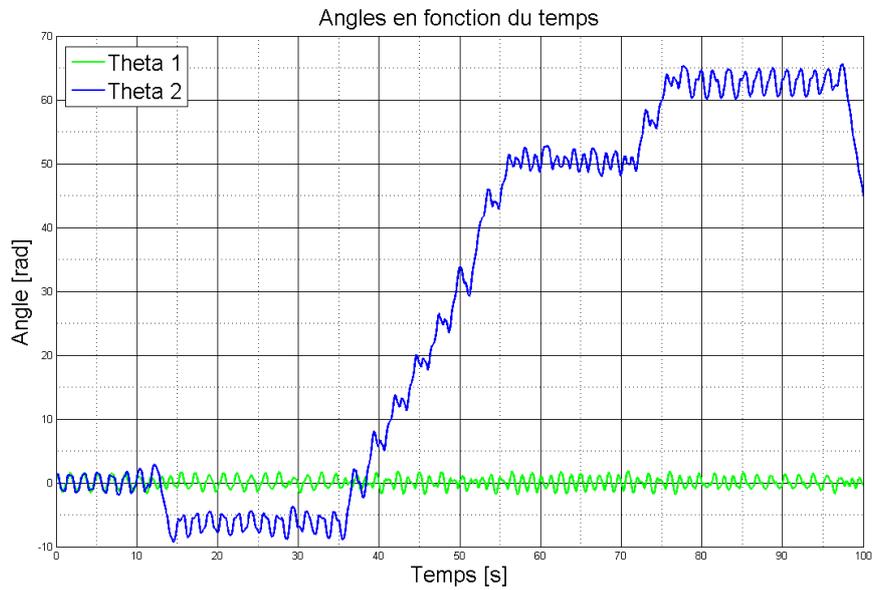


FIG. 14 – Angles en fonction du temps pour une valeur initiale de  $\theta_1(0) = \theta_2(0) = 1.4$

#### 4.2.2 Conservation de l'énergie mécanique

Puisqu'il n'y a pas de solution analytique si les angles initiaux sont trop grands, il est difficile d'évaluer la justesse du schéma. La seule chose que l'on peut vérifier, c'est la conservation de l'énergie mécanique ; qui malgré les effets chaotiques doit être constante. En traçant l'énergie en fonction du temps, on obtient le graphique suivant ( $\theta_1(0) = \theta_2(0) = 1.5$ ) :

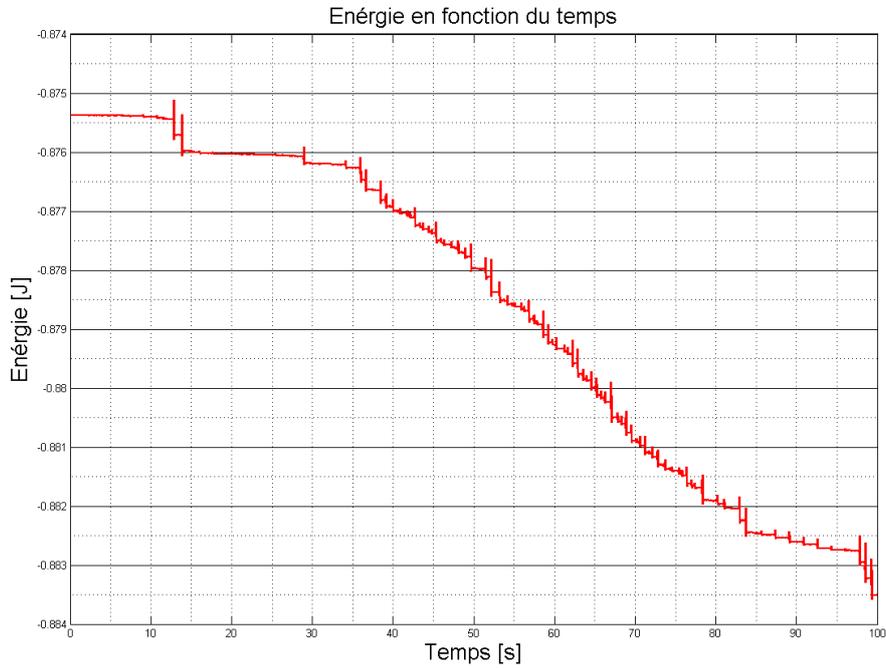


FIG. 15 – Énergie en fonction du temps pour une valeur initiale de  $\theta_1(0) = \theta_2(0) = 1.4$

On voit que l'énergie décroît légèrement avec le temps (moins de 1% en 100 s). Cela est dû au schéma numérique de Runge-Kutta. On voit cependant que la décroissance est très faible. Ce qui veut dire que le schéma est correct puisque l'erreur provient du calcul numérique et pas du schéma.

### 4.3 Régime chaotique

Dans la section précédente, on a pu observer que le mouvement semblait aléatoire, mais cela ne suffit pas pour le qualifier de chaotique. Pour cela il faut vérifier la sensibilité aux conditions initiales et tenter de calculer l'exposant de Lyapunov de ce système.

#### 4.3.1 Sensibilité aux conditions initiales

Pour pouvoir calculer l'exposant de Lyapunov du système chaotique, il faut auparavant définir une métrique sur l'espace des phases pour pouvoir évaluer la différence entre 2 évolutions du système de manière univoque. Pour ce faire, on utilisera la norme déjà introduite pour la convergence du schéma

à l'équation 21. Il faut juste modifier légèrement la formule pour prendre en compte 2 simulations différentes.

$$d(t) = \sqrt{(\theta_{1a}(t) - \theta_{1b}(t))^2 + (\theta_{2a}(t) - \theta_{2b}(t))^2} \quad (22)$$

où  $\theta_{1a}$  est le premier angle pour la première simulation,  $\theta_{2a}$  le deuxième angle pour la première simulation, etc. En choisissant 2 conditions initiales  $\theta_{1a} = \theta_{2a} = 2$  et  $\theta_{1b} = \theta_{2b} = 2.00001$ , on obtient le graphique suivant :

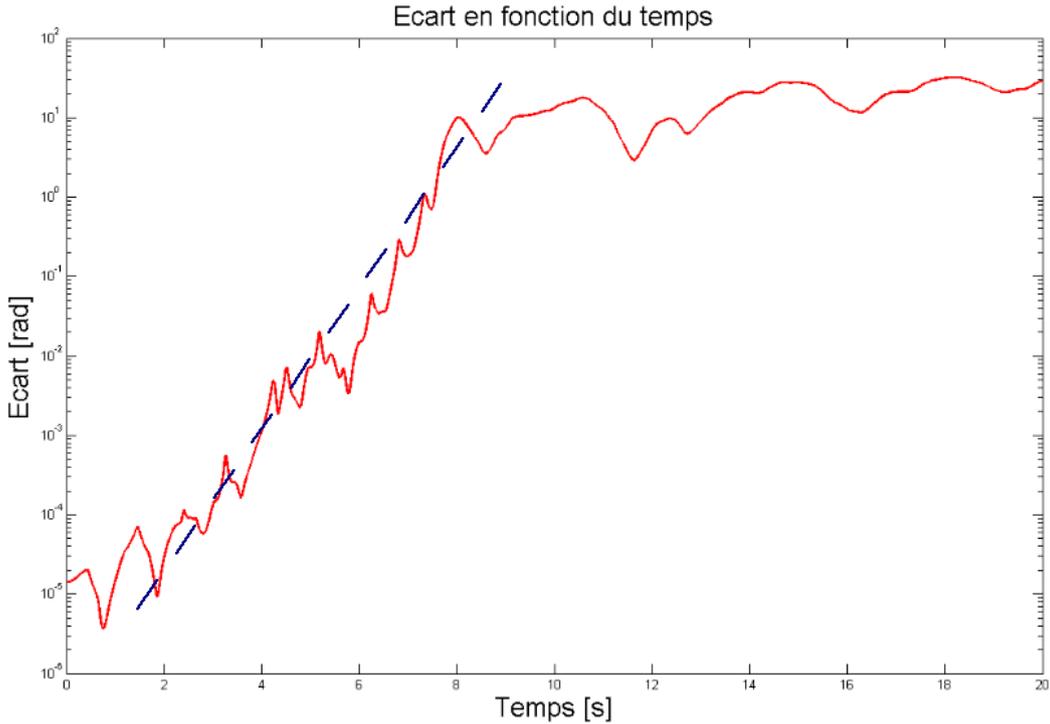


FIG. 16 – Ecart en fonction du temps

La ligne droite sur le graphique permet de calculer l'exposant de Lyapunov. Ce nombre étant la pente de la droite. On a ici une valeur approximative de 5. Il faudrait cependant plus de calculs pour obtenir une valeur plus correcte. Ce n'est ici qu'une estimation. Ce graphique permet donc de confirmer que le mouvement est bien chaotique comme le laissait supposer les équations du mouvement et les simulations précédentes.

## 5 Conclusion

Ce troisième travail nous a fait découvrir les régimes chaotiques et les problèmes qu'ils posent pour la résolution exacte des équations du mouvement. Il nous a aussi permis d'être confronté à un problème en apparence

simple, dans le sens où il n'y a que 2 degrés de liberté, mais qui ne possède pas de solution analytique dans le cas général. C'est ce qui rend ce problème intéressant.