

# Etude théorique de la chute d'une météorite dans l'atmosphère terrestre.

Matthieu Schaller  
[matthieu.schaller@epfl.ch](mailto:matthieu.schaller@epfl.ch)

21 octobre 2007

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Position du problème</b>	<b>2</b>
2.1	Forces en jeu . . . . .	2
2.2	Force de traînée . . . . .	3
2.3	Equation du mouvement . . . . .	3
2.4	Schéma d'Euler . . . . .	3
2.5	Puissance dissipée . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Résultats</b>	<b>4</b>
3.1	Trajectoire de la météorite . . . . .	4
3.2	Convergence du schéma . . . . .	7
3.3	Vitesse d'impact . . . . .	8
3.4	Puissance dissipée . . . . .	10
3.5	Vitesse limite . . . . .	11
<b>4</b>	<b>Conclusion</b>	<b>13</b>

## 1 Introduction

La chute des corps fait partie des problèmes classiques de la physique ; en effet qui n'a jamais calculé la trajectoire balistique d'un objet dans le champ de pesanteur terrestre ? Il est relativement simple d'approximer une telle trajectoire en négligeant les frottements de l'air et autres effets thermodynamiques ; il devient cependant beaucoup plus difficile d'en tenir compte. Les équations du mouvement que l'on obtient deviennent rapidement impossible à résoudre analytiquement et l'on se contente souvent d'une approximation de ces forces ou d'une solution analytique approchée.

Le but de ce travail est d'analyser numériquement la chute verticale d'une météorite dans l'atmosphère terrestre en tenant compte des forces de frottement qui la freinent. On négligera ici les effets thermodynamiques et on supposera une forme sphérique pour la météorite. Malgré ces deux approximations, on obtient une représentation largement plus fidèle de la réalité que si l'on néglige simplement les effets des forces de traînée aérodynamique.

## 2 Position du problème

### 2.1 Forces en jeu

Un objet pesant se trouvant dans le champ de pesanteur de la terre subit une force de pesanteur dirigée vers le centre de la terre. Cette force est inversement proportionnelle à la distance entre la terre et la météorite. La différence est cependant négligeable si la masse de l'objet en chute libre est petite.

Tout corps se déplaçant dans un fluide subit une force de traînée aérodynamique  $F_t$  donnée par la formule suivante :

$$F_t = -\frac{1}{2}\rho SC_x v^2 \quad (1)$$

où  $\rho$  est la densité du fluide, S la surface effective de l'objet,  $C_x$  un coefficient dépendant de la forme de l'objet et v la vitesse du corps. Le signe - indiquant que la force est opposée au mouvement.

Les forces agissant sur la météorite sont représentées sur l'image 1.

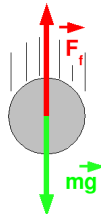


FIG. 1 – Les forces agissant sur la météorite

## 2.2 Force de traînée

Pour connaître la force de traînée donnée par l'équation 1, il faut déterminer la valeur de plusieurs des constantes utilisées. Le coefficient  $C_x$  pour une sphère de 0.3. La valeur de la surface spécifique est plus difficile à évaluer, il faut intégrer la force par unité de surface pour la demi-sphère dirigée dans la direction du mouvement.

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \pi R^2 \cos \theta d\theta = \pi R^2 \quad (2)$$

La surface de contact est ainsi assimilable à la surface d'un cercle de même rayon que la sphère. Le rayon de la météorite est quant à lui donné par la relation entre la masse volumique, la masse et le rayon  $R = \sqrt[3]{\frac{3m\pi}{4\rho}}$ . Dans toute cette étude la masse volumique de la météorite sera de  $3000 \text{ kg/m}^3$ . Le dernier coefficient à calculer est celui de la densité. En effet, la densité de l'air varie en fonction de l'altitude. Cette densité est donnée par la relation :

$$\rho = \rho_0 e^{-\frac{z}{\lambda}} \quad (3)$$

ou  $z$  est l'altitude et  $\lambda$  est un coefficient ici  $\lambda = 10 \text{ km}$ .

La force de traînée est alors, en combinant le tout :

$$F_t = -\frac{1}{2}\rho_0 e^{-\frac{z}{\lambda}} C_x \pi R^2 \dot{z}^2 \quad (4)$$

## 2.3 Equation du mouvement

En utilisant la loi de Newton, on trouve l'équation suivante :

$$m\ddot{z} = mg - \frac{1}{2}\rho_0 e^{-\frac{z}{\lambda}} C_x \pi R^2 \dot{z}^2 \quad (5)$$

C'est une équation du premier et deuxième ordre en  $z$  avec une exponentielle, on ne peut donc pas la résoudre analytiquement.

## 2.4 Schéma d'Euler

Comme nous avons affaire à une équation du deuxième ordre, nous allons la transformer en un système de 2 équations du premier ordre, en utilisant le changement de variable  $\dot{z} = v$ , on peut alors réécrire l'équation du mouvement sous forme de système :

$$\begin{cases} \dot{v} = g - \frac{1}{2}\rho_0 e^{-\frac{z}{\lambda}} C_x \pi \left(\frac{3m\pi}{4\rho}\right)^{2/3} v^2 \\ \dot{z} = v \end{cases} \quad (6)$$

On a alors plus que des dérivées d'ordre 1 et on peut appliquer un schéma d'Euler progressif pour en approcher la solution. En remplaçant les dérivées

par leur expression approchée et en résolvant en fonction de  $z_{i+1}$  et  $v_{i+1}$ , on obtient :

$$\begin{cases} v_{i+1} &= v_i + \left( g - \frac{\rho_0 C_x \pi \left( \frac{3m\pi}{4\rho} \right)^{2/3} e^{-\frac{z_i}{\lambda}} v_i^2}{2m} \right) \cdot \Delta t \\ z_{i+1} &= z_i + v_i \cdot \Delta t \end{cases} \quad (7)$$

Il faut encore pour lancer la simulation, ajouter une condition initiale pour chacune des deux variables  $z$  et  $v$ . L'atmosphère terrestre a une épaisseur d'environ 100  $km$ , c'est la valeur qui sera utilisée pour  $z_0$ . Comme vitesse initiale, le choix peut être arbitraire, en effet il existe des corps avec des vitesses très variées dans notre système solaire. La valeur retenue pour cette simulation est de  $v_0 = 11 \text{ km/s}$ . C'est ce schéma qui sera implémenté en C++.

## 2.5 Puissance dissipée

Une partie du travail sera constituée par l'étude de la puissance dissipée par la force de frottement. Cette valeur est donnée par :

$$P = F_t \cdot \dot{z} = \frac{\rho_0 C_x \pi \left( \frac{3m\pi}{4\rho} \right)^{2/3} e^{-\frac{z}{\lambda}} v^3}{2m} \quad (8)$$

Le calcul informatique se fait en remplaçant les  $v$  par  $v_i$  et les  $z$  par  $z_i$ .

# 3 Résultats

## 3.1 Trajectoire de la météorite

La première chose intéressante à étudier est la trajectoire de la météorite. Pour cette première simulation, une masse de 100  $kg$  a été choisie, le pas de temps est lui de 0.01  $s$ . Le graphique 2 représente l'altitude de la météorite en fonction du temps.

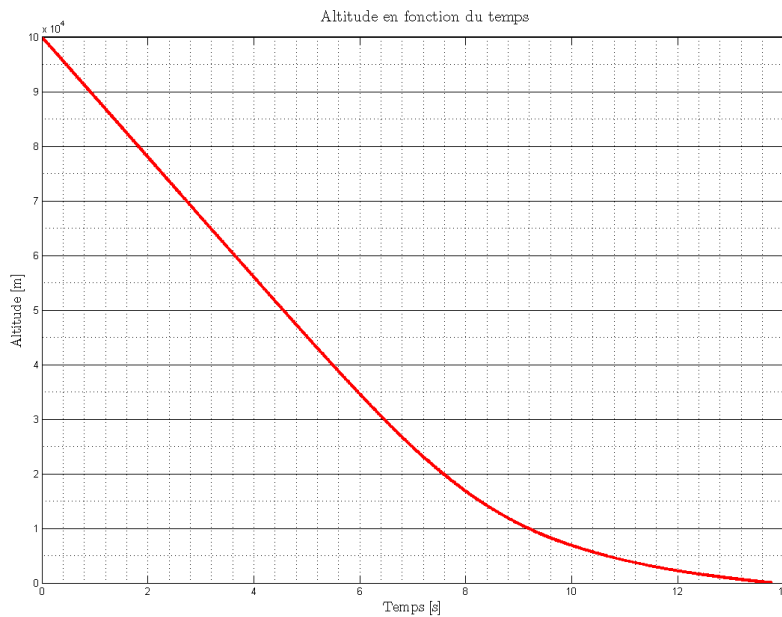


FIG. 2 – Altitude en fonction du temps

Sur ce graphique on peut lire l'altitude en fonction du temps, on peut se poser la question de savoir quel est le temps de chute avant que la météorite ne touche le sol. On obtient ainsi un temps de chute de  $13.8$  s, ce qui semble correct si on le compare au temps que mettrait le même objet en chutant dans le vide.  $0 = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t + z_0 \Rightarrow t = 9.13$  s. Le temps obtenu est plus long que le temps sans atmosphère, ce qui est cohérent avec le fait que la force de frottement agit. On remarque aussi que la météorite semble chuter à vitesse constante pendant près de 6 secondes avant d'être enfin freinée. Un graphique (figure 3) de la vitesse en fonction du temps confirme cette intuition.

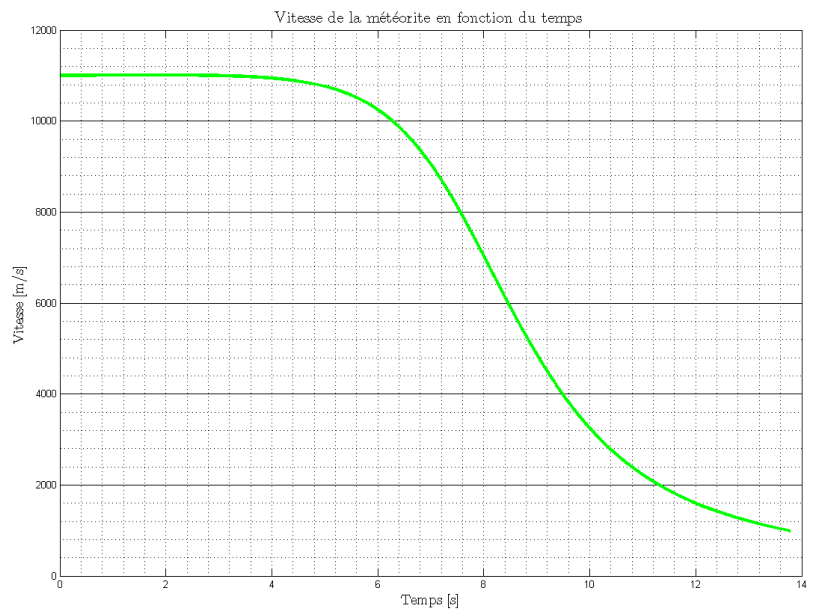


FIG. 3 – Vitesse en fonction du temps

On voit clairement que la vitesse reste pratiquement constante durant 5 secondes avant de décroître rapidement. La vitesse semble presque se stabiliser lorsque la météorite comme si elle atteignait presque sa vitesse limite. Cette question sera approfondie dans la partie sur la vitesse limite. Le graphique le plus intéressant à représenter avec cette première série de donnée est celui de la vitesse en fonction de l'altitude (figure 4).

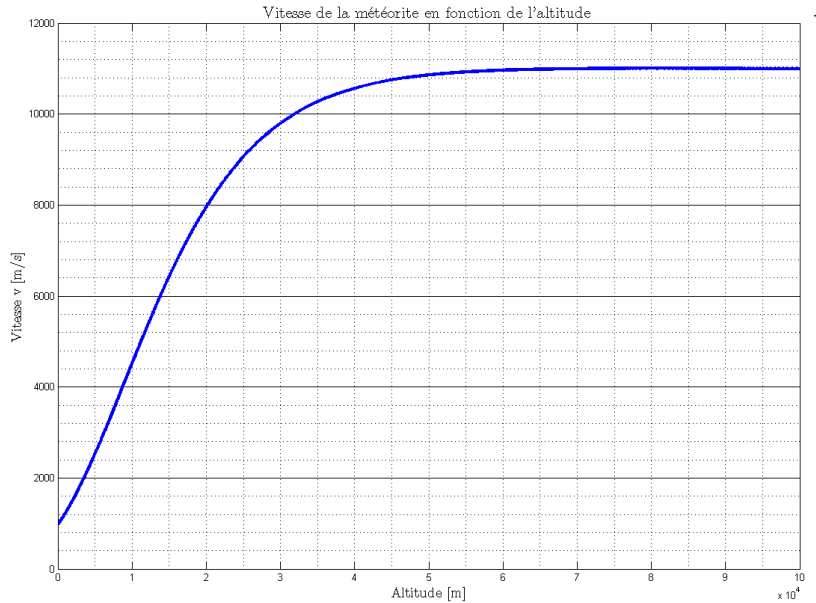


FIG. 4 – Vitesse en fonction de l'altitude

Ce graphique permet facilement de déduire la vitesse d'impact, on trouve ici  $v_f \cong 990 \text{ m/s}$ . Il y a donc effectivement une grosse chute de vitesse, qui a lieu à partir de  $6000 \text{ m}$  d'altitude. On voit donc clairement qu'il faut un certain temps avant que la force de frottement ait une réelle influence, ceci est certainement dû à la densité croissante de l'air ; le facteur exponentiel commençant à s'éloigner significativement de 0 à partir d'ici. On peut également remarquer que la vitesse commence à se stabiliser en arrivant au sol, comme le laissait entrevoir le graphique précédent. Mais à nouveau, la vitesse limite ne peut pas être atteinte avant le crash.

### 3.2 Convergence du schéma

La première simulation semble réaliste du point de vue physique. On observe ce à quoi on pouvait s'attendre pour ce type de chute dans l'atmosphère. Il faut cependant encore vérifier si ce schéma converge bien vers une valeur cohérente si l'on diminue le pas de temps. Pour le vérifier, il suffit de choisir un temps fixe (ici  $t = 10 \text{ s}$ ) et de représenter une des variables en fonction du pas de temps. Le graphique 5 représente la vitesse en fonction du pas de temps au temps  $t = 10 \text{ s}$  et pour une masse de  $100 \text{ kg}$ .

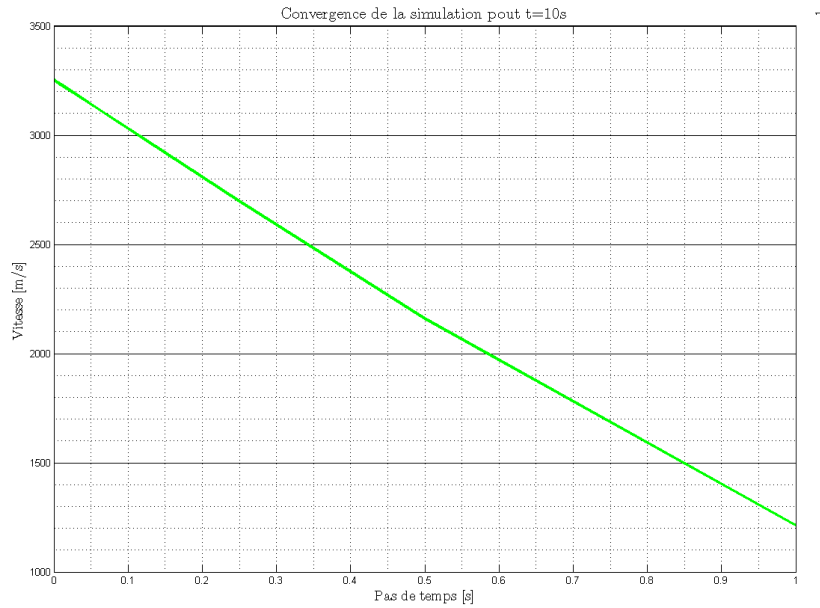


FIG. 5 – Convergence du schéma à  $t = 10$  s pour  $m = 100$  kg

On observe d'une part que le schéma converge, les simulations ont donc valides et d'autre part que la convergence est linéaire comme on s'y attendait pour un schéma d'Euler. Comme il n'y a pas de solution analytique à l'équation du mouvement, on ne peut pas comparer la solution numérique à la « vraie » valeur, on est obligé d'extrapoler, mais ce graphique montre bien que la convergence est linéaire.

### 3.3 Vitesse d'impact

En réalisant plusieurs simulations avec des masses différentes et en représentant la vitesse en fonction de l'altitude pour ces cas, on remarque que la vitesse au moment du crash varie énormément. Le graphique 6 montre les trajectoires obtenues pour des masses allant de 1 à 10'000 kg



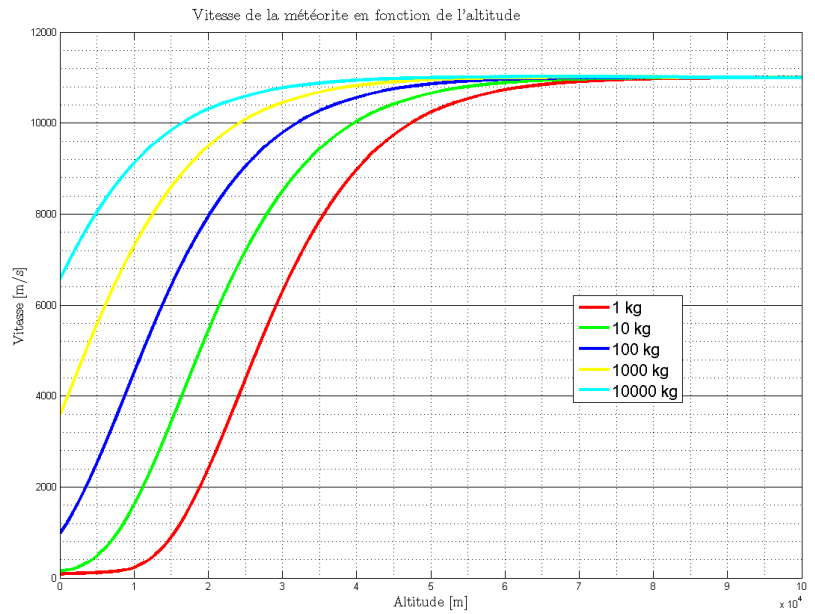


FIG. 6 – Vitesse en fonction de l'altitude pour différentes masses

Il est donc intéressant d'étudier cette vitesse qui a une grande importance pour considérer les dégâts au sol que causeraient un tel impact. Le graphique 7 représente la vitesse au sol de la météorite en fonction de sa masse.

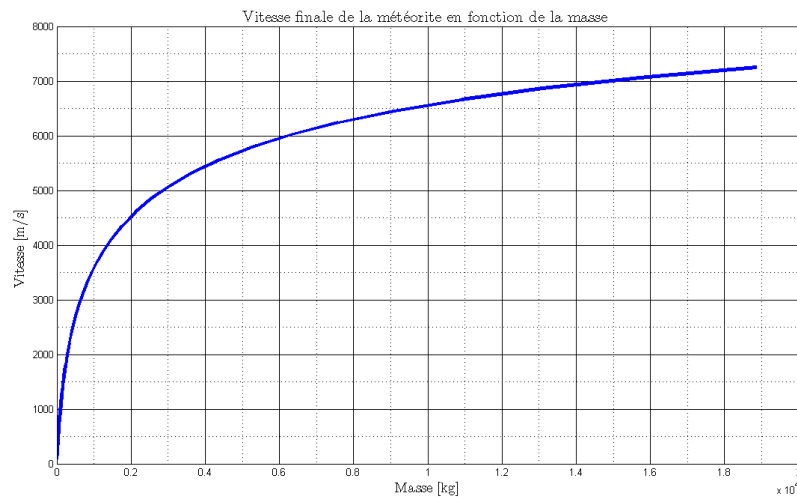


FIG. 7 – Vitesse finale en fonction de la masse

Ce graphique ressemble à celui d'une racine, ou même plus précisément celui d'une racine cubique. En représentant la même courbe sur un graphique semi-logX, on obtient une droite de pente  $\frac{1}{3}$ , c'est donc bien une racine cubique. En effet si l'on regarde l'expression de la vitesse, on remarque que  $v(m) \propto \sqrt[3]{m}$ , ce comportement est donc fidèlement reproduit par la simulation.

### 3.4 Puissance dissipée

Toute cette simulation s'est faite en ne tenant compte que de la force de traînée et donc en négligeant les effets thermodynamiques tels que l'échauffement de la météorite. La question qui se pose est de savoir si ces effets sont significatifs ou non afin de voir si la simulation est réellement réaliste ou non. En ajoutant le calcul de la puissance à chaque pas de temps dans l'algorithme, on peut calculer la puissance dissipée par la force de frottement. Le graphique 8 représente la puissance dissipée en fonction de l'altitude pour une masse de 100 kg.

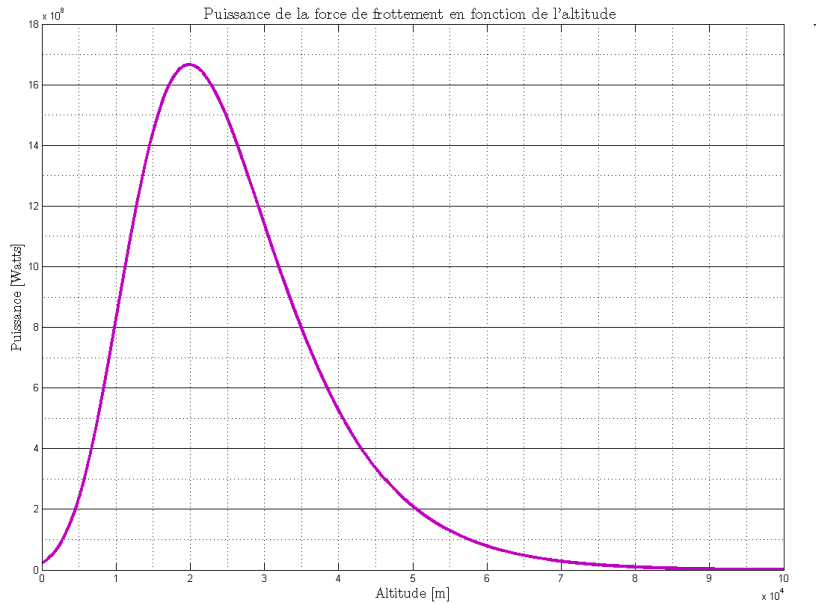


FIG. 8 – Puissance dissipée en fonction de l'altitude

On remarque au premier coup d'oeil qu'il y a un pic énorme aux environs de 20000 m. Ce pic débute vers 60000 m, là où la vitesse commençait à décroître fortement. Ces deux choses sont donc bien liées comme on pouvait s'y attendre. La puissance maximale dissipée est de  $1.67 \cdot 10^9$  Watt, c'est une valeur gigantesque ! Une quantité phénoménale d'énergie est dissipée par

cette force de frottement. On en peut donc pas du tout négliger les effets thermodynamiques.

On peut étudier un peu plus cette puissance en traçant le graphique du maximum de puissance dissipée en fonction de la masse de la météorite. Le résultat est présenté sur la figure 9 , la plage de masse va de 1 à 20'000 *kg*.

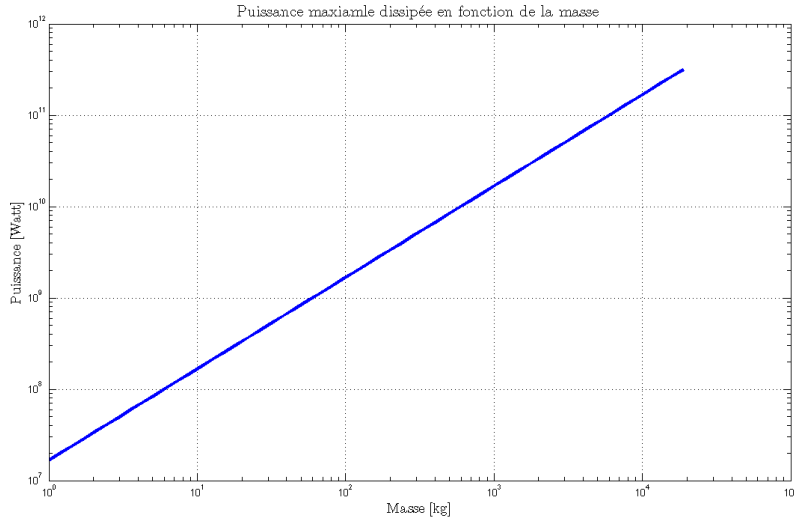


FIG. 9 – Puissance maximale dissipée en fonction de la masse

Le graphique montre que la puissance maximale dépend linéairement de la masse de la météorite. Ce résultat est plus ou moins étonnant, on aurait pû s'attendre à une dépendance sous forme de racine cubique comme pour la vitesse d'impact. Ce résultat est pourtant correct, en effet si on cherche les maximums de la puissance, en dérivant l'expression et en cherchant ses zéros, on obtient bien une droite. Il faut donc retenir que plus une météorite est lourde plus elle dissipe de chaleur et plus elle s'échauffe et perd de sa masse, chose non prise en compte dans la simulation.

### 3.5 Vitesse limite

Sur le premier graphique (figure 2), on remarque que la vitesse a tendance à s'aplatir près du sol, comme le ferait un corps qui a atteint sa vitesse limite. On peut dès lors se demander si le météore atteint cette vitesse limite. Pour des corps plutôt lourd, cela ne semble pas être le cas, car le graphe de leur vitesse ne s'aplatit pas, mais pour une petite, masse la question est intéressante. Si un corps atteint sa vitesse limite, son accélération est nulle, on a alors :

$$\sum \vec{F} = 0 \Rightarrow mg = \frac{1}{2} \rho_0 C_x \pi \left( \frac{3m\pi}{4\rho} \right)^{2/3} e^{-\frac{z}{\lambda}} v_{limit}^2 \quad (9)$$

La vitesse limite est alors :

$$v_{limit} = \sqrt{\frac{2mg}{\rho_0 C_x \pi \left(\frac{3m\pi}{4\rho}\right)^{2/3} e^{-\frac{z}{\lambda}}}} \quad (10)$$

Elle dépend donc de la masse et de l'altitude. Pour une masse de 10 kg, on obtient le graphique représenté sur la figure 10.

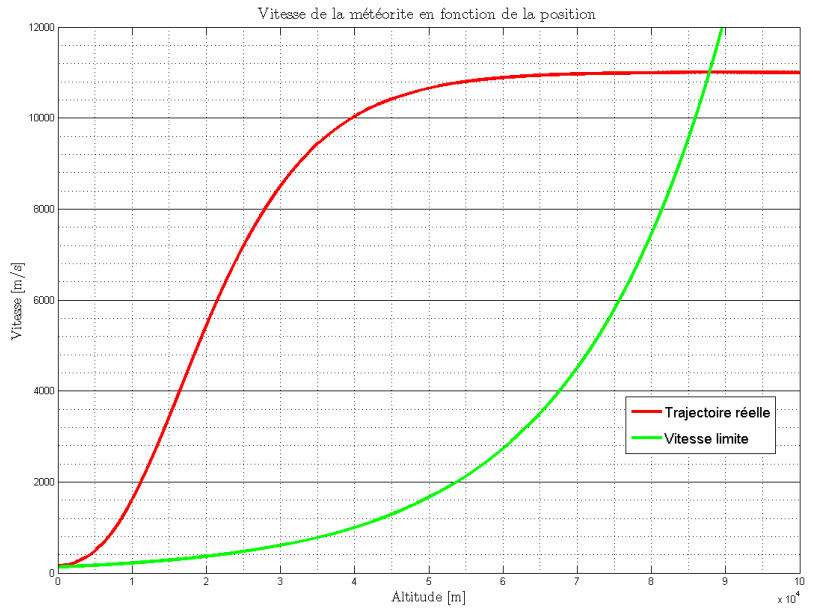


FIG. 10 – Vitesse de la météorite ( $m = 10 \text{ kg}$ ) et vitesse limite

On voit clairement que la météorite tend vers sa vitesse limite sans pour autant l'atteindre. On voit aussi qu durant toute la première partie de sa chute, la météorite est au-dessous de la vitesse limite, chose qui paraît étonnante, cependant, la vitesse limite dépend de la densité de l'air, à haute altitude, la densité est très faible et l'air n'oppose donc quasiment aucune résistance au mouvement. L'objet céleste a lui une vitesse initiale de 11 km/s, bien plus faible que la vitesse limite. Il faut attendre une altitude de 85000 m pour que la vitesse limite soit inférieure à celle de l'objet et le reste définitivement. En effet à partir d'ici, la force de frottement commence à travailler et il ne devient plus possible alors de compenser l'accélération terrestre.

Au point où les 2 courbes se croisent, la météorite est à sa vitesse limite, mais cela ne dure pas, en effet, elle atteint directement une couche d'air plus dense et est donc freinée.

Le graphique 11 est le même que le précédent mais pour une masse de 1000 kg.

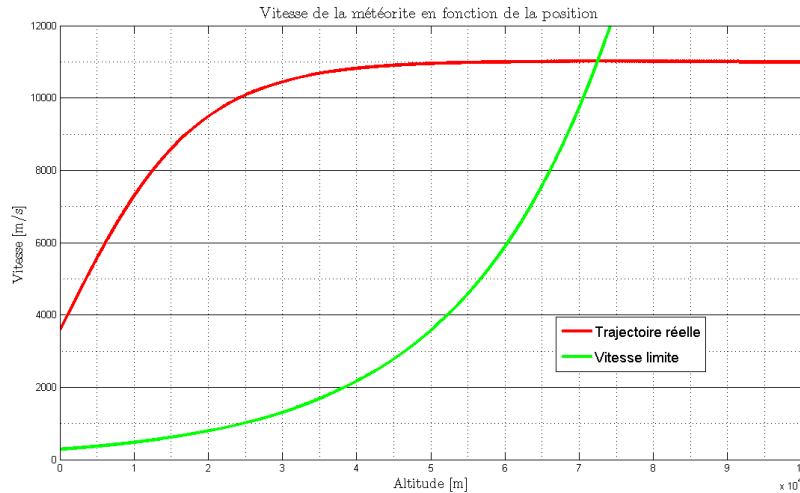


FIG. 11 – Vitesse de la météorite ( $m = 1000 \text{ kg}$ ) et vitesse limite

On voit alors clairement que la météorite n'atteint pas sa vitesse limite, il faudrait un air bien plus dense ou une atmosphère plus épaisse pour que cela arrive.

## 4 Conclusion

La simulation réalisée permet une excellente approximation de la réalité si on néglige les effets thermodynamiques. En effet, tous les comportements physiques attendus ont été observés et on a pu sans problème étudier les effets d'une telle chute sur la terre. Les mesures ont également montré une forte dissipation de chaleur ; une simulation plus complète et précise devrait les prendre en compte pour encore plus précisément une image de la réalité. Sur un plan plus technique, ce travail nous a permis d'utiliser un schéma d'Euler à plusieurs variables  $z$  et  $v$ , nous avons donc pu nous familiariser encore plus avec cette méthode couramment utilisée pour des simulations temporelles simples.