

9: Le moment cinétique

Bilan d'énergie pendant les collisions

I. Que se passe-t-il lors d'une collision ?

Collisions inélastiques

II. Qu'est-ce qui est conservé pendant un mouvement circulaire ?

Energie des rotations

Conservation du moment cinétique

Préparation au cours et aux exos

Chapitres du Giancoli à lire **avant le cours** (2 p):

11-3 angular momentum of a particle

11-6 conservation of angular momentum

Exercices simples (5) à faire **avant la séance d'exos**:

Giancoli 9-24, 10-63

11-1, 5, 7

Giancoli chapitres 9-1; 9-6, 9-7; 11-1, 11-3, 11-4 (6)

9-1

Phys I SV 2013

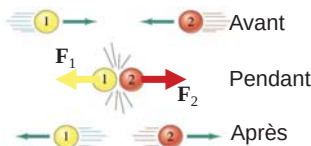
9-1. Qu'est-ce qui se passe pendant une collision ?

Impulsion

Situation: Collision élastique de deux balles avec des masses et célérités égales:

$$m_1 = m_2 = m$$

$$v_1 = -v_2 = v$$



Bilan d'énergie (cinétique):

$$E_{\text{avant}} = K_{\text{tot}} = mv^2$$

$$K_{\text{pendant}} = 0 \quad (v = 0)$$

$$E_{\text{après}} = K_{\text{tot}} = mv^2$$

Mais: l'énergie mécanique est conservée!

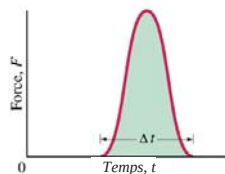
K doit être convertie en ...

$K_i = K_f$ (élastique) $\Rightarrow F_1$ et F_2 sont conservatives

Quelle force ? K est transformé dans une énergie élastique comme un ressort:

$$mv^2 = k\Delta x^2 \Rightarrow \text{Il y a une petite déformation}$$

Analyse: Pour arriver à $v=0$ il faut avoir une accélération négative, fournie par la force de contact ($F=ma$), qui augmente de façon non-linéaire et complexe (voir droite)



9-2

Phys I SV 2013

Comment analyser les forces pendant une collision ?

Impulsion J et Force Moyenne

Définition: Impulsion

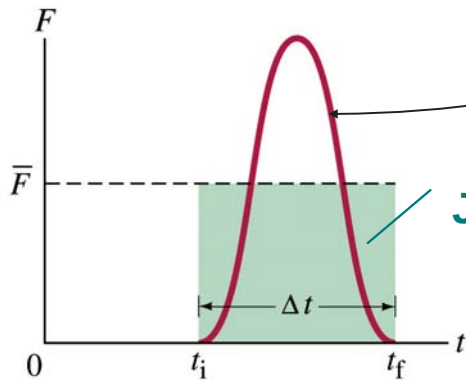
$$\vec{J} = \vec{p}_f - \vec{p}_i = \int \vec{F} dt$$

unité: Ns

$$\vec{p}_f - \vec{p}_i = \int_{t_i}^{t_f} \frac{d\vec{p}(t)}{dt} dt = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}(t) dt = \vec{J}$$

$$\vec{p}_f - \vec{p}_i \equiv \int_{t_i}^{t_f} d\vec{p}(t)$$

F(t): Fonction complexe

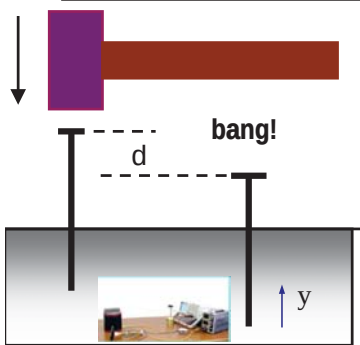


Pour simplifier on se contente d'estimer une *force moyenne* de contact exercée pendant le temps Δt

Force moyenne:

$$\vec{F} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t}$$

Impulsion J et force moyenne (exemple et démo)



Situation: Un marteau de masse $m=0.5\text{kg}$, $v_i=-2\text{m/s}$ enfonce un clou sur une profondeur $d=1\text{cm}$ dans un bout de bois avant d'être arrêté ($v_f=0$).

Question: Quelle est la force moyenne ?
Solution en trois pas (1D : notation scalaire):

1.) Calculer la vitesse moyenne

$$v_m = (v_f + v_i) / 2 = -1\text{m/s}.$$

2.) Du déplacement pendant l'impact et la vitesse moyenne, calculer la durée de l'impact:

$$\Delta t \approx d / v_m = 10^{-2}\text{s},$$

3.) Impulsion du changement de la quantité de mouvement:

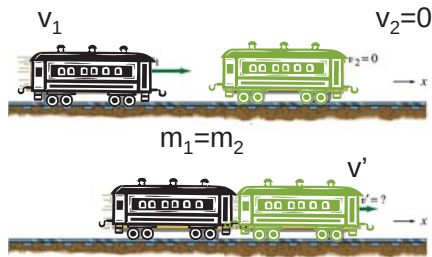
$$J = \Delta p = m(v_f - v_i) = +1\text{Ns}$$

⇒ Force nette moyenne sur le marteau: $\vec{F} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \vec{F}_{mc} - mg$

$$\rightarrow \vec{F}_{mc} = \frac{\Delta p}{\Delta t} + mg = 1/10^{-2} + 0.5 \cdot 9.8 \approx 105\text{N}$$

[NB. Pour un clou d'une section S de 1mm^2 cela représente une pression moyenne $\frac{|\vec{F}_{bc}|}{S} \approx \frac{|\vec{F}_{cm}|}{S} \approx 10^8 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$ exercée par le clou sur le bois de $10^3 p_{\text{atm}}$ (voir 2^{ème} sem.)]

Démo collision: rail à coussin d'air



1) Chariots munis de ressorts les repoussant

$K_f = K_i$, car les forces des ressorts sont conservatives : **collision élastique**

2) Chariots restent attachés (**collision complètement inélastique**):

Avant: $p_i = mv_1$

Après: $p_f = mv_1' + mv_2' = 2mv'$

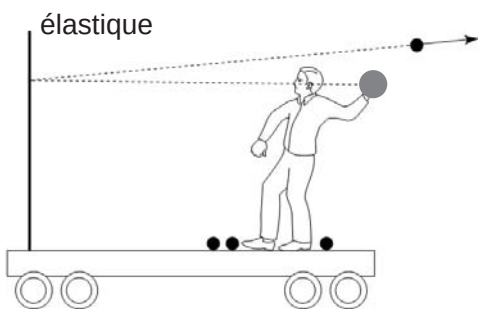
Donc: $mv_1 = 2mv' \rightarrow v' = v_1/2$

Conservation de l'énergie mécanique ?

$$K_i = \frac{mv_1^2}{2}$$

$$K_f = \frac{2mv'^2}{2} = m(v_1/2)^2 = \frac{K_i}{2}$$

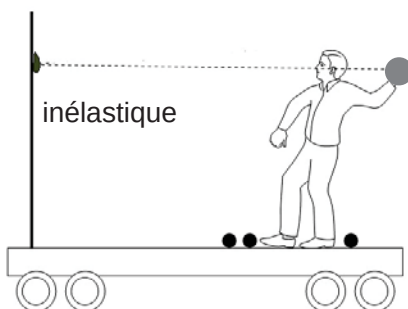
Quiz et démo



Situation: Wagon à l'arrêt avant le lancer.

A) Le mouvement final s'effectue

- 1) vers la gauche
- 2) vers la droite
- 3) avec vitesse zéro



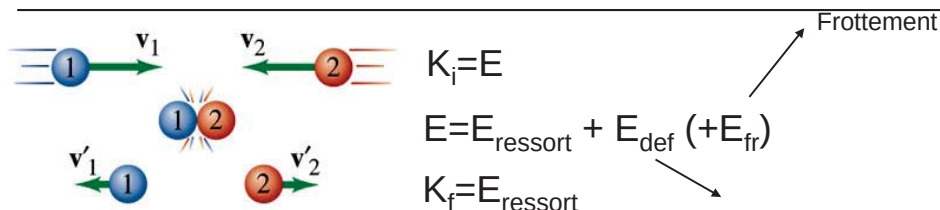
B) Le mouvement final s'effectue

- 1) vers la gauche
- 2) vers la droite
- 3) avec vitesse zéro



9-2. Quelle est l'énergie cinétique après une collision inélastique ?

le coefficient de restitution C_R



K n'est pas conservée. Pourquoi?

Pour déformer un objet permanent, il faut appliquer une force F pendant une certaine distance = travail

Définition: coefficient de restitution C_R

(Collision avec objet stationnaire, e.g. Terre)

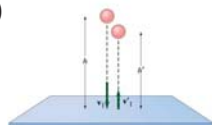
$$C_R = -v_f / v_i$$

De $\Delta U + \Delta K = 0$ et $\Delta K = \Delta K' + W_{NC}$, i.e.

$$C_R = \sqrt{(\Delta K' / \Delta K)} = \sqrt{(\Delta U' / \Delta U)}$$

Il s'en suit que

$$C_R = \sqrt{(h' / h)}$$



Observations de la vidéo:

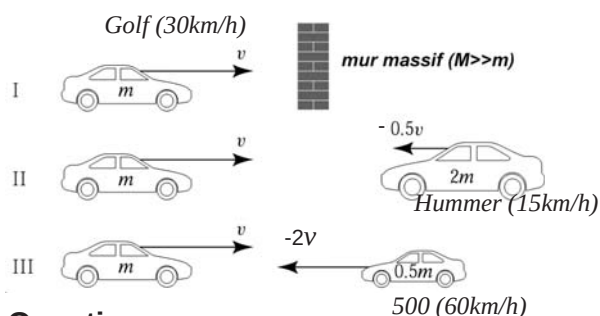
$h =$

$h' =$

$C_R =$

9-7

Quiz: Analyse des collisions



Simplifications: Les collisions sont parfaitement inélastiques. Les voitures restent en contact après la collision. Les dégâts sont proportionnels au travail des forces non-conservées.

Questions

1. Quelle collision amène à l'arrêt de la Golf ?
2. Laquelle produit le plus de dégâts?

	Arrêt	Dégâts
I		
II		
III		

9-8

9-3. Quelle est l'énergie cinétique des rotations ?

Cinématique/dynamique
en coordonnées
cylindriques/linéaires:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\sum \vec{F}_k = m\vec{a}$$

Linéaire

cylindrique

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

$$\sum \vec{\tau}_k^O = I^O \vec{a}$$

Situation: objet ponctuel en trajectoire circulaire.

Quelle est son énergie cinétique ?

$$K = \frac{1}{2} m v^2 \rightarrow = \frac{\omega_z^2}{2} m r_{\perp}^2$$

$$v = \omega_z r_{\perp}$$

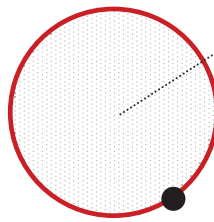
$$(\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r})$$

Moment d'inertie, I^O

$$I^O = m r_{\perp}^2$$

$$K_{rot} = \frac{I^O \omega^2}{2}$$

«Les lois linéaire sont jumelées
avec celles des rotations»



$\vec{r}$ et $\vec{v}$ pr au repère
en O

9-9

Phys I SV 2013

Comment écrire la 2^{ème} loi de Newton des rotations ? moment cinétique

La 2^{ème} loi de Newton $\vec{F} = m\vec{a}$

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} + \text{conservation de } \vec{p}$$

La 2^{ème} loi des rotations $\vec{\tau} = I\vec{\alpha}$

?

Définition: moment cinétique L

$$\vec{L}^O \equiv \vec{r} \times \vec{p}$$

NB. $\vec{r} \times \vec{F} = m r^2 \vec{\alpha}$

Établit une relation entre la force et
l'accélération angulaire.

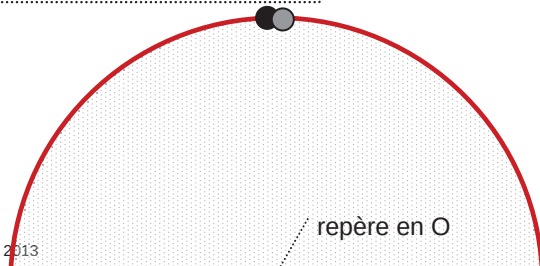
(La force centripète est une condition qui ne sert qu'à
assurer que l'objet reste sur la trajectoire circulaire)

Pour un objet de petite dimension et de
masse m qui circule autour O

Pendant la collision F_R est
négligeable: $\vec{p}$ conservé

$$\vec{r} \times \vec{p}$$

} Conservée (constante) pendant la
collision et juste après



9-10

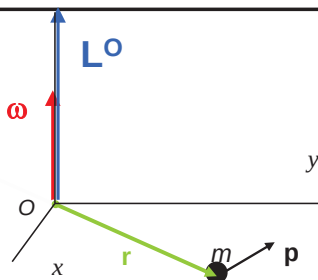
Phys I SV 2013

9-4. Quand est le moment cinétique conservé ?

L^O : moment cinétique pr à O,
 $\vec{r}$: vecteur de déplacement pr à O
 La 2^{ème} loi pour les rotations ?

$$\frac{d\vec{L}^O}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p}}_{\vec{F}_{net}, (2^{ème} \text{ loi linéaire})} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} \quad \vec{F}_{net} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$\vec{r} \times \vec{F}_{net} = \vec{\tau}^O \Rightarrow \boxed{\vec{\tau}^O_{net} = \frac{d\vec{L}^O}{dt}}$$



Pour un système isolé, i.e. sans moment de force externe net, le moment cinétique est conservé

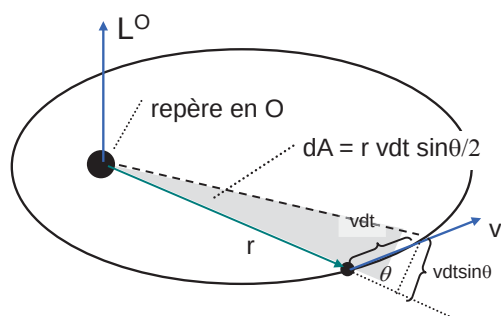
valable si la 2^{ème} loi est valable, donc si O est dans un RI

$\vec{F}$, $\vec{p}$ ne dépendent pas du choix d'origine O

$\vec{\tau}$, L dépendent du choix d'O

Preuve: la 2^{ème} loi de Kepler

« Aire balayée par une planète pendant Δt fixe est constante »
 (leçon 6)



$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{rv \sin \theta}{2}$$

$$L = mrv \sin \theta$$

$$dA = \frac{L}{2m} dt$$

$$\int_{t_1}^{t_2} dA = \Delta A = \frac{L}{2m} \Delta t \quad \Delta t = \int_{t_1}^{t_2} dt$$

$\Delta A = \text{constante}$

Force centrale (Gravitation) :
 $\vec{\tau}^O = 0$

(Manifestation de la conservation de L)



Quiz

Le moment cinétique en coordonnées cylindriques:

$$\vec{L}^O = \vec{r} \times \vec{p}$$

$$\vec{\tau}_{net}^O = I^O \vec{\alpha}$$

$$\vec{\tau}_{net}^O = \frac{d\vec{L}^O}{dt}$$

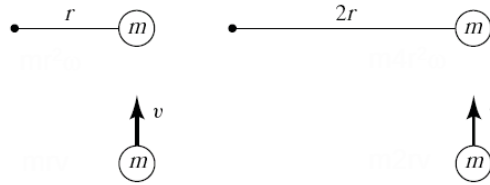
$$\boxed{\vec{L}^O = I^O \vec{\omega}}$$

$$I^O = mr_{\perp}^2$$

Situation: Un palet de masse m avec vitesse v percute un palet identique qui est rattaché à une perche avec un fil de longueur r .

Après la collision élastique le palet est en rotation autour la perche.

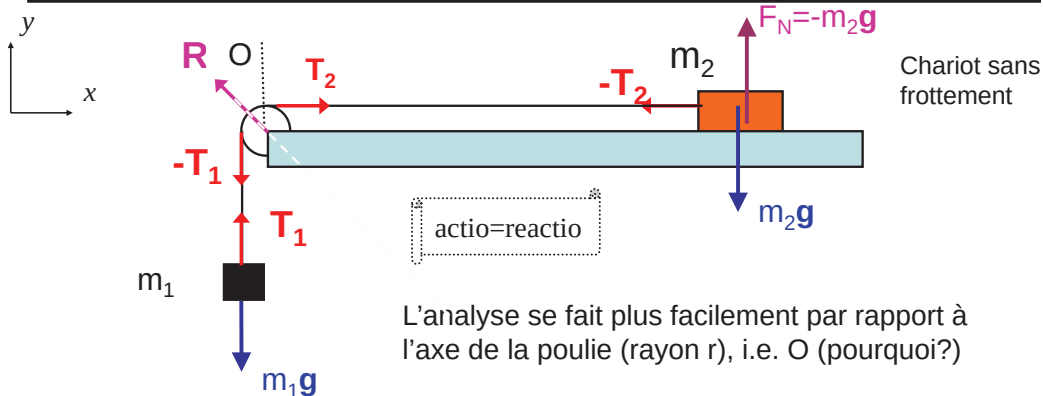
On double la longueur du fil (situation à droite) et on répète l'expérience.



Question: Comment est la vitesse angulaire par rapport à la première situation ?

- a) deux-fois plus grande
- b) égale
- c) Deux fois plus petite
- d) Pas assez d'informations

Comment analyser l'expérience «Chariot et masse» (voir Leçon 4) par moment cinétique ?



L'analyse se fait plus facilement par rapport à l'axe de la poulie (rayon r), i.e. O (pourquoi?)

1. Moments de forces:

Associés avec T_1 : $T_1 r - T_1 r = 0$

Associés avec T_2 : $T_2 r - T_2 r = 0$

Masse: $m_1 g r$

nul sur le chariot et de R

2. Moments cinétiques:

$L_1 = m_1 r v$ sur la masse,

$L_2 = m_2 r v$ sur le chariot

$$\left. \begin{aligned} \sum \vec{\tau}^O &= \frac{d \sum \vec{L}^O}{dt} = r m_1 g = \frac{d(r m_1 v + r m_2 v)}{dt} \\ &= r(m_1 + m_2) a \end{aligned} \right\} a = \frac{m_1}{(m_1 + m_2)} g$$

Exemple: Pendule conique de longueur variable

Situation: Une masse suit initialement une trajectoire horizontale circulaire de rayon R_1 . On raccourcit le fil, tel que le rayon soit R_2 .

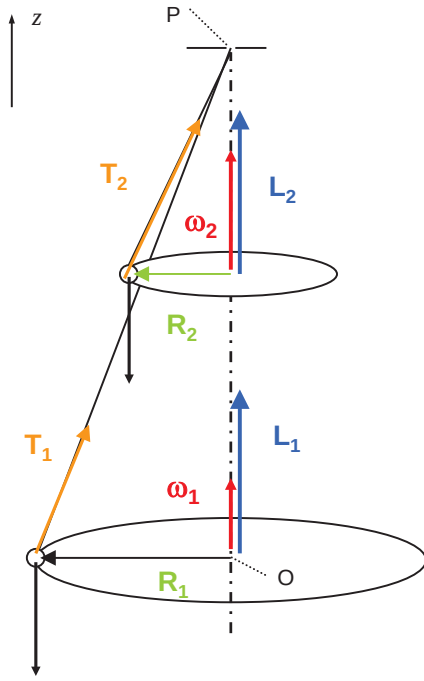


Question A: L est-il conservé?

- Oui, $L_1 = L_2$
- Non, $L_1 \neq L_2$

Question B: La vitesse angulaire changera-t-elle?

- Oui, $\omega_2 > \omega_1$
- Non $\omega_2 = \omega_1$
- Oui, $\omega_2 < \omega_1$



(Presque) toute la dynamique du point matériel

force et couple, masse et moment d'inertie, énergie cinétique



NB. Les lois de rotation sont une conséquence directe des lois de Newton du mouvement linéaire. Les lois sont alors jumelées ...

	linéaire (voir leçons 4,5,7)	rotation (voir leçons 5, 9)
Une dimension (composante)	$\sum F = ma$	$\sum \tau_{ext}^{axe} = I^{axe} \alpha$
vectorielle	$\sum \vec{F}_k = m\vec{a}$	$\sum \vec{\tau}_{ext}^{axe} = I^{axe} \vec{\alpha}$ $\vec{\tau} \equiv \vec{r} \times \vec{F}$
Masse, moment d'inertie	m (Résistance à changer la vitesse)	$I^{axe} = mr_{\perp}^2$ (Résistance à changer la vitesse angulaire)
Energie cinétique	$K = m \frac{v^2}{2}$	$K_{rot} = I^{axe} \frac{\omega^2}{2}$



2^{ème} loi de Newton du point matériel (leçons 8-9)

$$\vec{p} \equiv m\vec{v}$$

$$\sum \vec{F}_i = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$\vec{L}^O \equiv \vec{r} \times \vec{p} = mr_{\perp}^2 \vec{\omega}$$

$$\sum \vec{\tau}^O_i = \frac{d\vec{L}^O}{dt}$$

Sans forces extérieures **nettes**:

Conservation de p

Sans moments de force **nets**:

Conservation de L

NB. $\vec{r} \times \vec{p} = \vec{r}_{\perp} \times \vec{p} = m\vec{r}_{\perp} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{\perp}) = mr_{\perp}^2 \vec{\omega}$

	Mouvement linéaire (voir leçons 4, 8 - 9)	Mouvement de rotation (voir leçons 5, 9)
1D	$F_{ext} = ma$ ($a = dv/dt$) ($\sum F_i = ma$)	$\tau_z = I\alpha_z$ ($\alpha_z = d\omega_z/dt$) ($\sum \tau_z = I\alpha$)
vectorielle	$\vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ ($\vec{p} = m\vec{v}$)	$\sum \vec{\tau}^O = \frac{d\vec{L}^O}{dt}$ $\vec{L}^O \equiv I^O \vec{\omega}$

$$I^{axe} = mr_{\perp}^2$$

9-17

11-3 Angular Momentum of a Particle

The most general way of writing Newton's second law for the translational motion of a particle (or system of particles) is in terms of the linear momentum $\vec{p} = m\vec{v}$ as given by Eq. 9-2 (or 9-5):

$$\Sigma \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

The rotational analog of linear momentum is *angular momentum*. Just as the rate of change of $\vec{p}$ is related to the net force $\Sigma \vec{F}$, so we might expect the rate of change of angular momentum to be related to the net torque. Indeed, we saw this was true in Section 11-1 for the special case of a rigid object rotating about a fixed axis. Now we will see it is true in general. We first treat a single particle.

Suppose a particle of mass m has momentum $\vec{p}$ and position vector $\vec{r}$ with respect to the origin O in some chosen inertial reference frame. Then the general definition of the **angular momentum**, $\vec{L}$, of the particle about point O is the vector cross product of $\vec{r}$ and $\vec{p}$:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}. \quad [\text{particle}] \quad (11-6)$$

Angular momentum is a vector.[†] Its direction is perpendicular to both $\vec{r}$ and $\vec{p}$ as given by the right-hand rule (Fig. 11-12). Its magnitude is given by

$$L = rp \sin \theta$$

or

$$L = rp_{\perp} = r_{\perp}p$$

where θ is the angle between $\vec{r}$ and $\vec{p}$ and $p_{\perp} (= p \sin \theta)$ and $r_{\perp} (= r \sin \theta)$ are the components of $\vec{p}$ and $\vec{r}$ perpendicular to $\vec{r}$ and $\vec{p}$, respectively.

Now let us find the relation between angular momentum and torque for a particle. If we take the derivative of $\vec{L}$ with respect to time we have

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$$

But

$$\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} = \vec{v} \times m\vec{v} = m(\vec{v} \times \vec{v}) = 0,$$

since $\sin \theta = 0$ for this case. Thus

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$$

If we let $\Sigma \vec{F}$ represent the resultant force on the particle, then in an inertial reference frame, $\Sigma \vec{F} = d\vec{p}/dt$ and

$$\vec{r} \times \Sigma \vec{F} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

But $\vec{r} \times \Sigma \vec{F} = \Sigma \vec{\tau}$ is the net torque on our particle. Hence

$$\Sigma \vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}. \quad [\text{particle, inertial frame}] \quad (11-7)$$

The time rate of change of angular momentum of a particle is equal to the net torque applied to it. Equation 11-7 is the rotational equivalent of Newton's second law for a particle, written in its most general form. Equation 11-7 is valid only in an inertial frame since only then is it true that $\Sigma \vec{F} = d\vec{p}/dt$, which was used in the proof.

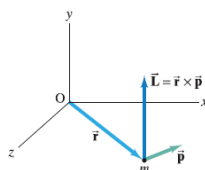


FIGURE 11-12 The angular momentum of a particle of mass m is given by $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}$.

9-18

11–6 Conservation of Angular Momentum

In Chapter 9 we saw that the most general form of Newton’s second law for the translational motion of a particle or system of particles is

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \frac{d\vec{P}}{dt},$$

where $\vec{P}$ is the (linear) momentum, defined as $m\vec{v}$ for a particle, or $M\vec{v}_{\text{CM}}$ for a system of particles of total mass M whose CM moves with velocity $\vec{v}_{\text{CM}}$, and $\sum \vec{F}_{\text{ext}}$ is the net external force acting on the particle or system. This relation is valid only in an inertial reference frame.

In this Chapter, we have found a similar relation to describe the general rotation of a system of particles (including rigid objects):

$$\sum \vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt},$$

where $\sum \vec{\tau}$ is the net external torque acting on the system, and $\vec{L}$ is the total angular momentum. This relation is valid when $\sum \vec{\tau}$ and $\vec{L}$ are calculated about a point fixed in an inertial reference frame, or about the CM of the system.

For translational motion, if the net force on the system is zero, $d\vec{P}/dt = 0$, so the total linear momentum of the system remains constant. This is the law of conservation of linear momentum. For rotational motion, if the net torque on the system is zero, then

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \quad \text{and} \quad \vec{L} = \text{constant.} \qquad [\sum \vec{\tau} = 0] \quad (11-12)$$

In words:

The total angular momentum of a system remains constant if the net external torque acting on the system is zero.

This is the **law of conservation of angular momentum** in full vector form. It ranks with the laws of conservation of energy and linear momentum (and others to be discussed later) as one of the great laws of physics. In Section 11–1 we saw some Examples of this important law applied to the special case of a rigid object rotating about a fixed axis. Here we have it in general form. We use it now in interesting Examples.

24. (II) A 12-kg hammer strikes a nail at a velocity of 8.5 m/s and comes to rest in a time interval of 8.0 ms. (a) What is the impulse given to the nail? (b) What is the average force acting on the nail?
63. (I) A centrifuge rotor has a moment of inertia of $4.25 \times 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$. How much energy is required to bring it from rest to 9750 rpm?
1. (I) What is the angular momentum of a 0.210-kg ball rotating on the end of a thin string in a circle of radius 1.35 m at an angular speed of 10.4 rad/s?
5. (II) A diver (such as the one shown in Fig. 11–2) can reduce her moment of inertia by a factor of about 3.5 when changing from the straight position to the tuck position. If she makes 2.0 rotations in 1.5 s when in the tuck position, what is her angular speed (rev/s) when in the straight position?
7. (II) Determine the angular momentum of the Earth (a) about its rotation axis (assume the Earth is a uniform sphere), and (b) in its orbit around the Sun (treat the Earth as a particle orbiting the Sun). The Earth has mass = $6.0 \times 10^{24} \text{ kg}$ and radius = $6.4 \times 10^6 \text{ m}$, and is $1.5 \times 10^8 \text{ km}$ from the Sun.