Corrigé de la Série de Révision

Exercice 1. [Droites]

L'équation de la droite passant par $(1,1)$ et $(-3,2)$ est

☐ $y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$

☐ $y = -\frac{3}{4}x + \frac{5}{4}$

☐ $y = \frac{5}{4}x - \frac{1}{4}$

☒ $y = -\frac{1}{4}x + \frac{5}{4}$

Solution: On trouve la pente p de la droite facilement: $p = \frac{2-1}{-3-1} = -\frac{1}{4}$. On vérifie ensuite que la dernière équation passe bien par le point $(1,1)$: $-\frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{5}{4} = 1$.

Exercice 2. [Polynômes de degré 2]

Quel polynôme de degré 2 passe par les points $(1,0)$, $(3,0)$ et $(2,\pi)$?

☐ $p(x) = (x-1)(x-3)$

☐ $p(x) = \pi(x-1)(x-3)$

☒ $p(x) = -\pi(x-1)(x-3)$

☐ $p(x) = -(x-1)(x-3)$

Solution: Toutes les réponses ici vérifient $p(1) = p(3) = 0$ il faut donc prendre l'équation qui satisfait $p(2) = \pi$

Exercice 3. [Polynômes d'interpolation]

Quel est le polynôme d'interpolation qui passe par les points $(0,0)$, $(1,-1)$, $(2,-2)$, $(3,-3)$?

☐ $p(x) = x$

☒ $p(x) = -x$

☐ $p(x) = x + 1$

☐ $p(x) = -x - 1$

Solution: Ces 4 points sont alignés sur la droite d'équation $y = -x$ d'où le résultat. Alternativement on peut utiliser le schéma des différences vu en cours.

Exercice 4. [Polynômes de degré supérieur]

Si l'on se donne n points dans le plan, alors le polynôme d'interpolation passant par ces n points

☐ est toujours de degré $n-1$

☒ est toujours de degré $\leq n-1$

☐ est toujours de degré $\geq n$

☐ est toujours de degré n

Solution: Le polynôme d'interpolation passant par n points est de degré au plus $n-1$ et tous les degrés $\leq n-1$ peuvent apparaître.

Exercice 5. [Binôme de Newton]

Dans l'expression de $(2+x)^{90}$ le coefficient se trouvant devant le terme x^{20} vaut

☐ $\binom{90}{20}$

☐ $2^{20}\binom{90}{20}$

☒ $2^{70}\binom{90}{70}$

☐ $\binom{90}{70}$

Solution: D'après le théorème du binôme pour $(a+b)^n$ le coéfficient devant $a^k b^{n-k}$ vaut $\binom{n}{k}$. Dans le cas présent on prend $(2+x)^{90}$ avec $k=70$ et on trouve donc $\binom{90}{70}2^{70}x^{90-70} = \binom{90}{70}2^{70}x^{20}$

Exercice 6. [Puissances]

L'expression $(a^{b+c})^d$ est égale à

☐ $a^{bd}+a^{cd}$

☐ $a^{(b+c)^d}$

☒ a^{bd+cd}

☒ $(a^d)^{b+c}$

Solution: On se rappelle que $(x^y)^z = x^{yz}$ et donc $(a^{b+c})^d = a^{d(b+c)} = a^{bd+cd}$. Ici il y a donc deux solutions correctes (ceci n'arrivera pas à l'examen!)

Exercice 7. [Fonction exponentielle]

La valeur d'un terrain augmente chaque année de 10%. Après combien d'années ce terrain vaut-il entre 3 et 4 fois sa valeur initiale?

☐ 10

☐ 11

☒ 12

☐ 15

Solution: Soit V la valeur initiale du terrain. On cherche n tel que $3V \leq (1+\frac{1}{10})^n V \leq 4V$, en divisant par V (que l'on suppose non nul!) on doit résoudre l'inéquation $3 \leq (1+\frac{1}{10})^n \leq 4$. On prend le logarithme de part et d'autre et on trouve $\ln(3) \leq n\ln(\frac{11}{10}) = \ln(4)$. On résoud avec une machine et on trouve $11.5 \leq n \leq 14.5$. Ici la seule réponse possible est donc 12.

Exercice 8. [Logarithme]

Soit n un entier. Alors l'expression $\ln(n!)$ est égale à

☐ $\ln(2) - \ln(3) + \ln(4) - \cdots + (-1)^n \ln(n)$

☒ $\ln(2) + \ln(3) + \cdots + \ln(n)$

☐ $\ln(2)\ln(3)\cdots\ln(n)$

☐ $\ln(n)!$

Solution: Puisque $n! = 1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot n$ et que $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$ pour tout $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ on a que $\ln(n!) = \ln(1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot n) = \underbrace{\ln(1)}_{=0} + \ln(2) + \cdots + \ln(n)$

Exercice 9. [Suites géométriques/arithmétiques]

Une grenouille fait un bond de 1 mètre puis continue de bondir $\frac{1}{3}$ moins loin à chaque bond. Quelle distance a-t-elle parcouru après 12 bonds?

☐ 3 mètres

☐ $3 - \frac{2^{13}}{3^{13}}$ mètres

☐ $3 - \frac{2^{13}}{3^{12}}$ mètres

☐ $\frac{3}{2}(1 - (\frac{1}{3})^{13})$ mètres

Solution: Attention: la bonne réponse n'apparaît pas parmi les cases proposées!!!
En effet, la distance parcourue par la grenouille après n bonds est égale à $1 + \frac{2}{3} + (\frac{2}{3})^2 + \cdots + (\frac{2}{3})^{n-1}$. Cette somme est une somme d'une suite géométrique de raison $r = \frac{2}{3}$ et vaut donc (cf. Exercice 2, Série 5) $\frac{1-(\frac{2}{3})^n}{1-\frac{2}{3}}$. Dans notre cas on prend $n = 12$ et on trouve $3(1 - (\frac{2}{3})^{12})$. Donc la bonne réponse est $3 - \frac{2^{12}}{3^{11}}$.

Exercice 10. [Fonctions trigonométriques]
L'expression $\tan(3x)$ vaut

☐ $\tan(x)^3$

☐ $\tan(x)\frac{2\cos^2(x)-\sin^2(x)}{\cos^2(x)-2\sin^2(x)}$

☐ $\tan(x)\frac{3-\tan(x)}{1-3\tan(x)}$

☒ $\tan(x)\frac{3-\tan^2(x)}{1-3\tan^2(x)}$

Solution: On a que $\tan(3x) = \frac{\sin(3x)}{\cos(3x)}$. Or $\sin(3x) = 3\sin(x)\cos^2(x) - \sin^3(x)$ et $\cos(3x) = \cos^3(x) - 3\sin^2(x)\cos(x)$ (formule de de Moivre). Ainsi $\tan(3x) = \frac{3\sin(x)\cos^2(x)-\sin^3(x)}{\cos^3(x)-3\sin^2(x)\cos(x)}$. Après simplification on trouve $\tan(3x) = \tan(x)\frac{3-\tan^2(x)}{1-3\tan^2(x)}$

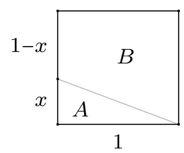
Exercice 11. [Extrême et moyenne raison]
On partage un carré de côté 1 en deux portions d'aires égales à A et B comme dans la figure ci-contre. Pour quelle valeur de x les grandeurs A et B forment une extrême et moyenne raison?

☐ $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

☐ $x = 3 + \sqrt{5}$

☒ $x = 3 - \sqrt{5}$

☐ $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$



Solution: On a que $A = \frac{x}{2}$ et $B = 1 - \frac{x}{2}$. Deux nombres A et B forment une extrême et moyenne raison lorsque $\frac{A+B}{B} = \frac{B}{A}$ (cf. Exercice 3 Série 7). Dans notre cas on a donc $\frac{1}{B} = \frac{B}{A}$ ce qui donne $A = B^2$ d'où $\frac{x}{2} = (1 - \frac{x}{2})^2$. On peut poser $a = \frac{x}{2}$ et résoudre l'équation $a = (1-a)^2$. On développe et on trouve l'équation $a^2 - 3a + 1 = 0$ dont les solutions sont $\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$. De là on tire que $x = 3 \pm \sqrt{5}$ et comme $x \leq 1$ on ne garde que la solution $x = 3 - \sqrt{5}$.

Exercice 12. [Fonctions trigonométriques inverses]
Soit y un nombre. Pour quelle valeur de x a-t-on $\arccos(x) = 2y$?

☐ $x = \cos(y^2)$

☒ $x = \cos^2(y) - \sin^2(y)$

☐ $x = 1 - \sin^2(y)$

☐ $x = \cos(\frac{y}{2})$

Solution: On a que $\arccos(x) = 2y$ si et seulement si $x = \cos(2y) = \cos^2(y) - \sin^2(y)$.

Exercice 13. [Dérivées]

La dérivée de la fonction $f(x) = x^{(x^2)}$ vaut

- ☐ $x^{(x^2)}$
- ☐ $x^{(x^2)}\ln(x)$
- ☐ $x^{(x^2)}2x\ln(x)$
- ☒ $x^{(x^2)}(x + 2x\ln(x))$

Solution: La fonction f s'écrit comme $f(x) = e^{x^2\ln(x)}$ et sa dérivée vaut donc $f'(x) = e^{x^2\ln(x)}(x^2\ln(x))'$. Après calcul on trouve que $(x^2\ln(x))' = x + 2x\ln(x)$ et donc la bonne réponse est la dernière.

Exercice 14. [Min et Max] Quelle est la valeur minimale de la fonction $f(x) = e^x + \frac{1}{e^x}$?

- ☐ 0
- ☐ 1
- ☒ 2
- ☐ $e + \frac{1}{e}$

Solution: La fonction f s'écrit aussi $f(x) = e^x + e^{-x}$. On dérive f et on trouve $f'(x) = e^x - e^{-x}$. On cherche le(s) zéro(s) de la dérivée: $f'(x) = 0 = e^x - e^{-x} \iff e^x = e^{-x}$ et en multipliant par e^x on trouve $e^{2x} = 1$ d'où $x = 0$. D'après la dérivée seconde $f''(x) = e^x + e^{-x} = f(x)$ évaluée en $x = 0$ on a que $2 = f(0)$ est un minimum.

Exercice 15. [Primitives] Une primitive de la fonction $\frac{e^{\tan(x)}}{\cos^2(x)}$ est

- ☐ $e^{\cos(x)}$
- ☐ $\frac{e^{\tan(x)}}{\cos(x)}$
- ☐ $e^{\cot(x)}$
- ☒ $e^{\tan(x)}$

Solution: Une simple dérivation de $f(x) = e^{\tan(x)}$ donne la réponse.

Exercice 16. [Intégrales]

L'intégrale $\int_1^e \frac{1}{x}dx$ vaut

- ☒ 1
- ☐ $\frac{3}{2}$
- ☐ $e - 1$
- ☐ $\frac{1}{2}$

Solution: Une primitive de $\frac{1}{x}$ est donnée par $\ln(x)$ donc $\int_1^e \frac{1}{x}dx = \ln(x)|_0^e = \ln(e) - \ln(1) = 1$