

Mathématiques II

Giordano Favi*

Février 2015

*Ces notes de cours sont quasi intégralement dues à Gavin J. Seal.

Maths II: Table des matières

1	Les fonctions hyperboliques	3
1.1	Formules associées aux fonctions hyperboliques	6
1.2	Fonctions hyperboliques inverses:	6
1.3	Dérivées et graphes	7
2	Techniques d'intégration	8
2.1	L'intégration par substitution	8
2.2	L'intégration par parties	9
3	Représentation paramétrique et équations implicites	12
3.1	La Conchoïde de Nicomède	12
3.2	Différentiation d'une équation paramétrique	13
3.3	Différentiation d'une équation implicite	14
4	Enveloppe, courbure et développée	15
4.1	La caustique du cercle	16
4.2	Courbure	18
4.3	Courbure d'une courbe en représentation paramétrique	20
5	Longueur d'arc et développantes	22
5.1	Longueur d'arc via une équation explicite	22
5.2	Longueur d'arc via une paramétrisation	23
5.3	Développantes	23
6	Surfaces et courbes de l'espace	27
6.1	Comparaison: courbes du plan et surfaces	27
6.2	Courbes de l'espace	29
6.3	Surfaces particulières	31
7	Courbes de Bézier	38
7.1	Courbes de Bézier linéaires	38
7.2	Courbes de Bézier quadratiques	39
7.3	Courbes de Bézier cubiques	41
7.4	L'algorithme de Casteljau	42
7.5	Subdivision d'une courbe de Bézier	43
7.6	Recollements de courbes de Bézier	44

Ce cours est en grande partie basé sur les ouvrages suivants:

E. Hairer et G. Wanner, *L'Analyse au Fil de l'Histoire*, éditions Springer (1996/2001).

P. Buser, *Cours de Géométrie pour les Sections EL et MX*, version printemps 2010 (EPFL).

Une excellente référence illustrant l'application en architecture des concepts présentés ici est:

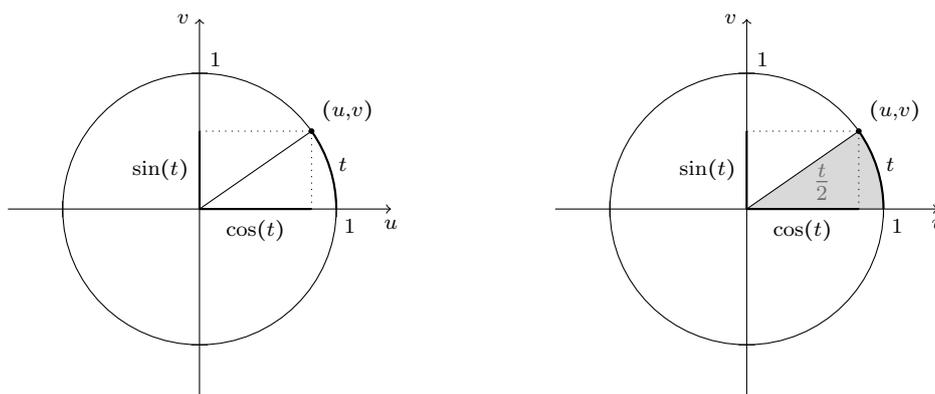
H. Pottmann, A. Asperl, M. Hofer and A. Kilian, *Architectural Geometry*, Bentley Institute Press (2007).

1 Les fonctions hyperboliques

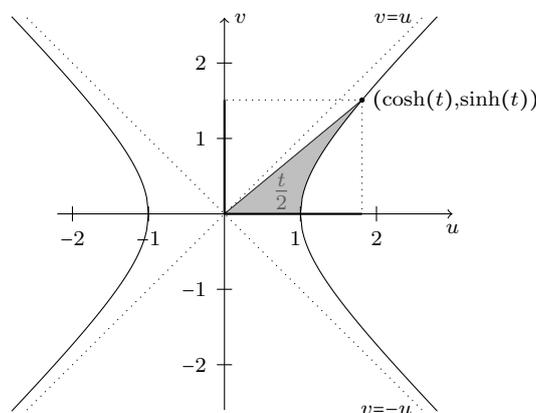
Rappelons que le cercle unité (de rayon 1 et centré en l'origine) est l'ensemble des points (u, v) tels que:

$$u^2 + v^2 = 1.$$

Les fonctions $\cos(t)$ et $\sin(t)$ sont définies par les coordonnées d'un point sur ce cercle déterminant un arc de longueur t . On aurait aussi pu définir $\cos(t)$ et $\sin(t)$ comme les coordonnées d'un point sur le cercle unité déterminant une *surface* de $\frac{t}{2}$ [unités²]:



Par analogie, on définit les **fonctions hyperboliques** comme suit: dans l'hyperbole $u^2 - v^2 = 1$, les coordonnées d'un point déterminant une aire de $\frac{t}{2}$ (comme ci-dessous) sont données par le **cosinus hyperbolique** $\cosh(t)$ et le **sinus hyperbolique** $\sinh(t)$, respectivement:



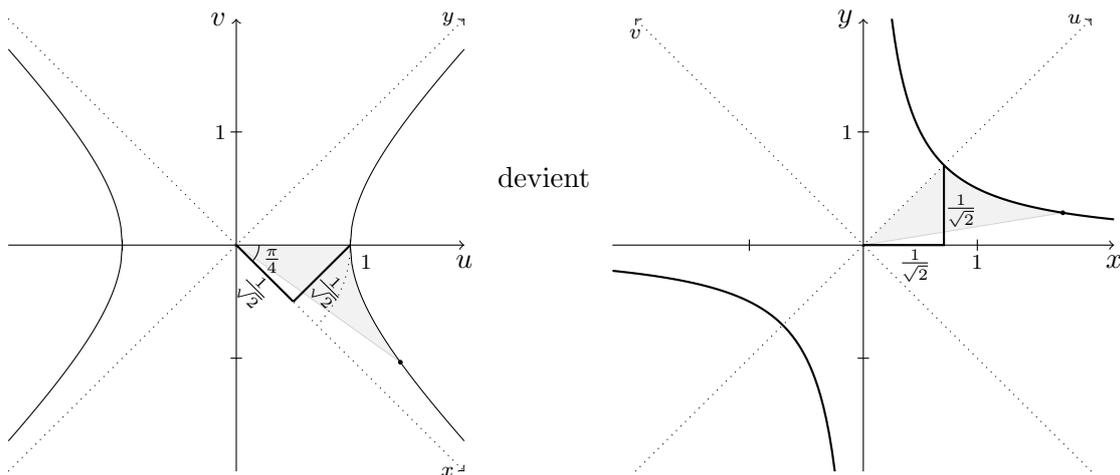
Ici, on considère qu'une aire sous l'axe horizontal est négative; $\sinh(t)$ est donc négatif lorsque l'aire $\frac{t}{2}$ est négative. Le cosinus hyperbolique $\cosh(t)$, lui, est toujours positif.

Remarque. Pour dessiner l'hyperbole, on note que $u^2 - v^2 = 1$ est équivalent à $v = \pm\sqrt{u^2 - 1}$; en particulier les points $(1, 0)$ et $(-1, 0)$ appartiennent au graphe de la courbe. Si on remplace u par $-u$, on trouve la même valeur de v (par exemple $u = \pm 2$ donne $v = \sqrt{3}$); il y a donc une symétrie par rapport à l'axe vertical. Si (u, v) appartient à la courbe, alors $(u, -v)$ aussi; il y a donc une symétrie par rapport à l'axe horizontal. Si u devient grand, alors $v = \sqrt{u^2 - 1}$ se rapproche de $v = \sqrt{u^2} = \pm u$, c'est-à-dire de la diagonale $v = u$ — qui en est donc une *asymptote*; en fait, la distance verticale $u - \sqrt{u^2 - 1}$ entre les courbes $v = u$ et $v = \sqrt{u^2 - 1}$ est toujours strictement positive: l'hyperbole ne coupe donc pas ses asymptotes et s'en approche depuis un seul côté.

Proposition. Pour toute valeur de t réelle, on a:

$$\cosh(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \quad \text{et} \quad \sinh(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}.$$

Preuve. Une rotation de $\frac{\pi}{4}$ donne un changement de coordonnées comme suit:



Pour passer du premier système au second, on observe que

$$u = \frac{x + y}{\sqrt{2}} \quad v = \frac{y - x}{\sqrt{2}}$$

et donc

$$x = \frac{u - v}{\sqrt{2}} \quad y = \frac{u + v}{\sqrt{2}}.$$

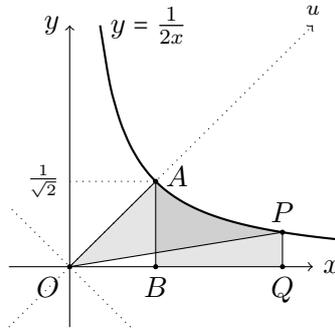
Par exemple, le point $(u, v) = (1, 0)$ dans le premier système de coordonnées devient $(x, y) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ dans le second système, et $(0, 1)$ devient $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$. L'équation $u^2 - v^2 = 1$ est donc transformée comme suit dans le nouveau système de coordonnées:

$$1 = \left(\frac{x + y}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{y - x}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{x^2 + 2xy + y^2}{2} - \frac{y^2 - 2xy + x^2}{2} = 2xy$$

ou

$$y = \frac{1}{2x}.$$

Considérons les points $A = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ et $P = \left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}a}\right)$ sur la nouvelle hyperbole $y = \frac{1}{2x}$:



Avant la transformation de coordonnées, le point P était le point $(\cosh(t), \sinh(t))$ (sous l'axe des u) qui déterminait une aire de $-\frac{t}{2}$. Après la rotation, l'aire n'a pas changé et l'on trouve:

$$-\frac{t}{2} = \text{Aire}(OAP) = \text{Aire}(OAPQ) - \text{Aire}(OPQ) = \text{Aire}(OAPQ) - \text{Aire}(OAB) = \text{Aire}(ABPQ)$$

car

$$\text{Aire}(OPQ) = \frac{1}{2} \left(\frac{a}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}a} \right) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \text{Aire}(OAB)$$

L'aire de la figure $ABPQ$ peut aussi être calculée par une intégrale:

$$\begin{aligned} \text{Aire}(ABPQ) &= \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{a}{\sqrt{2}}} \frac{1}{2x} dx = \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{a}{\sqrt{2}}} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = \left[\frac{1}{2} \ln(x) \right]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{a}{\sqrt{2}}} \\ &= \frac{1}{2} \left(\ln\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right) - \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{a}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{1}\right) \\ &= \frac{1}{2} \ln(a) \end{aligned}$$

On trouve ainsi que $\frac{1}{2} \ln(a) = \frac{-t}{2}$, et donc $a = e^{-t}$. En revenant dans le premier système de coordonnées, les coordonnées de $P = \left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}a}\right)$ deviennent:

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{a}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}a} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{a^2 + 1}{\sqrt{2}a} \right) = \frac{1}{a} \left(\frac{a^2 + 1}{2} \right) = \frac{a + \frac{1}{a}}{2} = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \\ v &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}a} - \frac{a}{\sqrt{2}} \right) = \frac{\frac{1}{a} - a}{2} = \frac{e^t - e^{-t}}{2}. \end{aligned}$$

Mais ces coordonnées étaient originellement celles du point $(u, v) = (\cosh(t), \sinh(t))$. On a donc bien les égalités annoncées. \square

1.1 Formules associées aux fonctions hyperboliques.

Comme ils déterminent les coordonnées d'un point sur l'hyperbole $u^2 - v^2 = 1$, les sinus et cosinus hyperboliques vérifient

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1.$$

La fonction $\cosh(x)$ est paire, et $\sinh(x)$ impaire:

$$\cosh(-x) = \cosh(x) \quad \text{et} \quad \sinh(-x) = -\sinh(x)$$

des propriétés que l'on vérifie aisément graphiquement, ou grâce aux formulations en fonction de e^x et e^{-x} de ces fonctions. De même, on peut voir que, comme pour les fonctions trigonométriques, les fonctions hyperboliques satisfont des **formules de somme des arguments**:

$$\begin{aligned} \sinh(x+y) &= \sinh(x)\cosh(y) + \cosh(x)\sinh(y) \\ \cosh(x+y) &= \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y). \end{aligned}$$

De ces égalités, on déduit les **formules de l'argument double**

$$\begin{aligned} \sinh(2x) &= 2\sinh(x)\cosh(x), \\ \cosh(2x) &= \cosh^2(x) + \sinh^2(x) = 1 + 2\sinh^2(x) = 2\cosh^2(x) - 1 \end{aligned}$$

puis les **formules du demi-argument**:

$$\begin{aligned} \sinh\left(\frac{x}{2}\right) &= \pm\sqrt{\frac{\cosh(x)-1}{2}} \\ \cosh\left(\frac{x}{2}\right) &= \sqrt{\frac{\cosh(x)+1}{2}} \end{aligned}$$

(voir la Série 1 d'exercices pour les calculs).

1.2 Fonctions hyperboliques inverses:

Les fonctions inverses des fonctions sinus et cosinus hyperboliques sont définies par:

$$\begin{aligned} x = \operatorname{arsinh}(y) &\iff y = \sinh(x) && \text{pour } -\infty < x < \infty \text{ et } -\infty < y < \infty \\ x = \operatorname{arcosh}(y) &\iff y = \cosh(x) && \text{pour } 0 \leq x < \infty \text{ et } 1 \leq y < \infty. \end{aligned}$$

Comme ces fonctions inverses décrivent une *aire* associée à un point sur l'hyperbole, on écrit arsinh et arcosh (comme *area sinus hyperbolicus* ou *area cosinus hyperbolicus*).

Pour exprimer ces fonctions inverses à l'aide de fonctions connues, on peut procéder comme suit: on pose $y = \sinh(x)$, puis on utilise l'expression de cette dernière fonction via les e^x et e^{-x} :

$$2y = e^x - e^{-x} \quad \text{donne} \quad 2ye^x = e^{2x} - 1 \quad \text{soit} \quad e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0.$$

En posant $t = e^x$, on voit que la dernière équation devient $t^2 - 2yt - 1 = 0$, et on obtient

$$t = \frac{2y \pm \sqrt{4y^2 + 4}}{2} = \frac{2y \pm 2\sqrt{y^2 + 1}}{2} = y \pm \sqrt{y^2 + 1}.$$

Comme $t = e^x$ est toujours strictement positif et que $y < \sqrt{y^2 + 1}$, on choisit la solution positive qui donne

$$e^x = y + \sqrt{y^2 + 1} \quad \text{et donc} \quad x = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1}).$$

Cette égalité exprime x comme fonction de y , mais par définition on a aussi $x = \operatorname{arsinh}(y)$; on peut donc déduire

$$\operatorname{arsinh}(y) = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1}), \quad \text{et} \quad \operatorname{arcosh}(y) = \ln(y + \sqrt{y^2 - 1})$$

s'obtient de la même manière.

1.3 Dérivées et graphes.

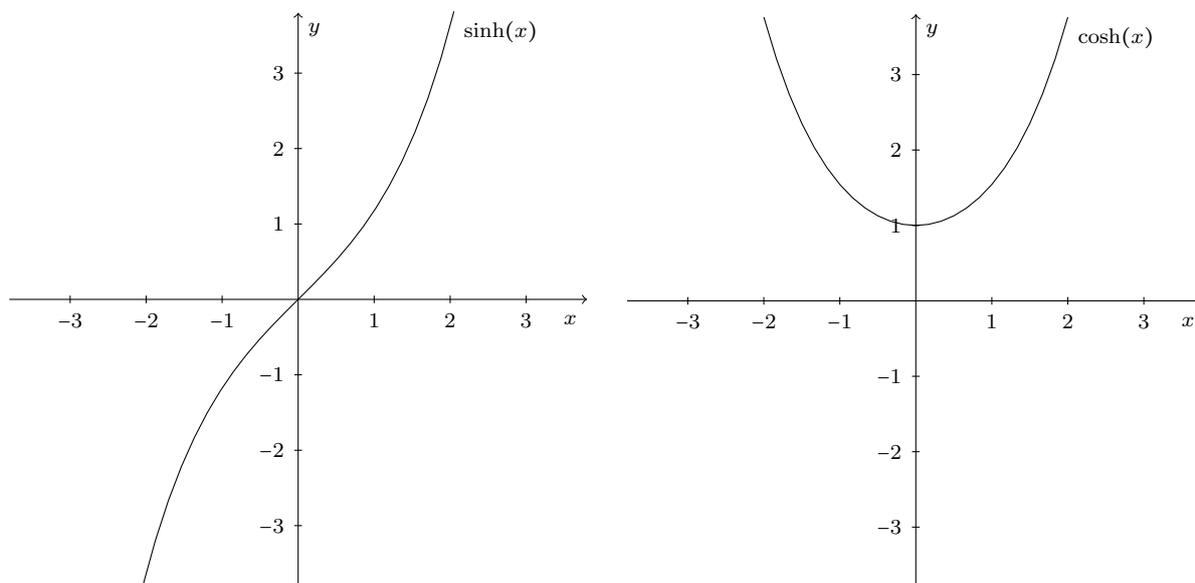
Les dérivées des fonctions hyperboliques se calculent facilement grâce à leur expression analytique comme fonctions de e^x et e^{-x} :

$$\sinh'(x) = \cosh(x) \quad \text{et} \quad \cosh'(x) = \sinh(x) .$$

Les dérivées des fonctions hyperboliques inverses s'obtiennent soit en dérivant leur expression comme fonction de \ln , soit en utilisant la technique de dérivation pour les fonctions inverses (voir la première partie du cours, *Mathématiques I*). On obtient:

$$\operatorname{arsinh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \quad \text{et} \quad \operatorname{arcosh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} .$$

Les fonctions $y = \sinh(x)$ et $y = \cosh(x)$ sont représentées graphiquement comme suit:



En 1691 — et suite à un défi lancé par Jacob Bernoulli — Christiaan Huyghens, Gottfried Leibniz, et Johann Bernoulli démontrent indépendamment que le cosinus hyperbolique décrit la forme prise par un fil pendu par ses extrémités. Ainsi, cette courbe hérite du nom de **chaînette** en français ou de **catenary** en anglais (du latin *cateneria*, “relatif à la chaîne”). Renversée, elle apparaît notamment comme arche dans l’œuvre d’Antoni Gaudí (architecte catalan, 1852–1926).

2 Techniques d'intégration

Rappel. L'intégration est l'opération inverse de la dérivation.

L'intégration d'une fonction f (c'est-à-dire la recherche d'une fonction F tel que $F'(x) = f(x)$) est en général un problème *difficile*. Il y a pourtant un certain nombre de techniques qui permettent de trouver des primitives de fonctions "simples". Nous allons étudier deux de ces techniques: l'intégration *par substitution*, et l'intégration *par parties*.

Remarque. Le site www.wolframalpha.com donne non seulement les intégrales... mais aussi la méthode pour les obtenir! On peut demander

`integrate sqrt(1-x^2)` ou `Integrate[Sqrt[1-x^2],x]`

cette dernière expression utilisant directement la syntaxe du programme `Mathematica` exploité par le site.

2.1 L'intégration par substitution.

Supposons que $F(z)$ soit une primitive de $f(z)$, c'est-à-dire

$$F'(z) = f(z) \quad \text{ou plus précisément} \quad \frac{d}{dz}F(z) = f(z).$$

En substituant $z = g(x)$, nous transformons la variable z en la variable x . L'égalité

$$\frac{dF}{dx} = \frac{dF}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}$$

(voir *Mathématiques I*) devient explicitement

$$\frac{d}{dx}F(g(x)) = F'(g(x)) \cdot g'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x).$$

L'intégration d'une dérivée redonne la fonction d'origine (à constant près). D'un côté, on a donc

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int_a^b \frac{d}{dx}F(g(x)) dx = [F(g(x))]_a^b = F(g(b)) - F(g(a)),$$

et de l'autre,

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(z) dz = \int_{g(a)}^{g(b)} \frac{d}{dz}F(z) dz = [F(z)]_{g(a)}^{g(b)} = F(g(b)) - F(g(a));$$

on voit que ces deux expressions sont égales et on peut écrire:

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(z) dz.$$

En résumé, l'expression de droite est obtenue via celle de gauche suite à la substitution

$$z = g(x) \quad \text{et} \quad dz = g'(x) dx$$

(notons que $\frac{dz}{dx} = g'(x)$). Le but de cette technique est de rendre la seconde expression plus facile à intégrer — la difficulté résidant dans la recherche de la bonne substitution!

Exemples.

(1) Dans l'intégrale qui suit, on pose $z = x^2$ et donc $dz = 2x dx$ pour obtenir

$$\begin{aligned} \int_0^2 \frac{4x}{1+x^2} dx &= \int_0^2 \frac{2 \cdot 2x}{1+x^2} dx = \int_{0=0^2}^{4=2^2} \frac{2}{1+z} dz = [2 \ln(1+z)]_0^4 \\ &= 2 \ln(5) - 2 \ln(1) = 2 \ln(5) = \ln(25). \end{aligned}$$

(2) Pour les fonctions de la forme $f(ax+b)$ avec a et b des constantes, on pose $z = ax+b$, et donc $dz = a dx$ (ci-dessous $z = 5x+2$ et $dz = 5 dx$, soit $\frac{1}{5} dz = dx$):

$$\int e^{5x+2} dx = \int e^z \cdot \frac{1}{5} dz = \frac{1}{5} e^z + C = \frac{1}{5} e^{5x+2} + C.$$

(3) On sait que $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(x) + C$ et $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin(x) + C$ (des intégrales similaires sont valables à signes près pour les fonctions hyperboliques). Pour calculer par exemple $\int \frac{1}{7+x^2} dx$, on veut $x^2 = 7z^2$. On pose donc $x = \sqrt{7}z$ ainsi que $dx = \sqrt{7} dz$:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{7+x^2} dx &= \int \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{1+z^2} \cdot \sqrt{7} dz = \int \frac{\sqrt{7}}{7} \cdot \frac{1}{1+z^2} dz \\ &= \frac{\sqrt{7}}{7} \arctan(z) + C = \frac{\sqrt{7}}{7} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{7}}\right) + C. \end{aligned}$$

(4) En présence de fonctions quadratiques, $x^2 + 2bx + c$, on complète en premier lieu le carré:

$$x^2 + 2bx + c = (x+b)^2 + (c-b^2).$$

On effectue ensuite la substitution $z = x+b$ et $dz = dx$. Ci-dessous, on pose $z = x + \frac{1}{2}$, puis on se retrouve dans la situation de l'exemple (3); on procède alors au changement de variable adéquat (ici $z = \frac{\sqrt{3}}{2}t$):

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2+x+1} dx &= \int \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2 + (1-\frac{1}{4})} dx = \int \frac{1}{z^2 + \frac{3}{4}} dz = \int \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\frac{3}{4}t^2 + \frac{3}{4}} dt \\ &= \int \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{t^2+1} dt = \frac{2\sqrt{3}}{3} \arctan(t) + C = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}z\right) + C \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C. \end{aligned}$$

2.2 L'intégration par parties.

Pour deux fonctions $u(x)$, $v(x)$ on a la formule de dérivation d'un produit:

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'.$$

En intégrant de chaque côté de l'égalité, on obtient

$$u(x) \cdot v(x) = \int u'(x) \cdot v(x) dx + \int u(x) \cdot v'(x) dx.$$

Cette formule devient pratique sous la forme

$$\int u'(x) \cdot v(x) dx = u(x) \cdot v(x) - \int u(x) \cdot v'(x) dx$$

lorsque la dernière intégrale est plus facile à calculer que celle d'origine.

Exemples.

(1) Essayons d'évaluer $\int x \cdot \sin(x) dx$.

(a) Posons $u'(x) = x$ et $v(x) = \sin(x)$. Donc $u(x) = \frac{x^2}{2}$ (à une constante près) et la formule d'intégration par parties donne

$$\int x \cdot \sin(x) dx = \frac{x^2}{2} \cdot \sin(x) - \int \frac{x^2}{2} \cdot \cos(x) dx,$$

mais cette dernière intégrale semble encore plus difficile à calculer! Notre choix pour les fonctions u et v n'était pas le bon.

(b) Posons $u'(x) = \sin(x)$ et $v(x) = x$. Donc $u(x) = -\cos(x)$ et on obtient

$$\int x \cdot \sin(x) dx = -\cos(x) \cdot x + \int \cos(x) dx = -\cos(x) \cdot x + \sin(x) + C.$$

Cette fois, la seconde intégrale est effectivement plus facile à calculer et nous mène au résultat.

(2) Pour calculer $\int x^2 \cdot e^x dx$, on doit appliquer deux fois la méthode d'intégration par parties (la première fois, on pose $v(x) = x^2$ et $u'(x) = e^x$, la seconde on pose $v(x) = x$ et $u'(x) = e^x$):

$$\int x^2 \cdot e^x dx = e^x \cdot x^2 - \int 2x \cdot e^x dx = e^x \cdot x^2 - 2 \left(e^x \cdot x - \int e^x dx \right) = e^x \cdot x^2 - 2e^x \cdot x + 2e^x + C.$$

Comme pour toutes les intégrations, on peut vérifier sa réponse en la dérivant:

$$(e^x \cdot x^2 - 2e^x \cdot x + 2e^x + C)' = e^x \cdot x^2 + 2x \cdot e^x - 2e^x \cdot x - 2e^x + 2e^x = e^x \cdot x^2,$$

qui est bien la fonction que l'on voulait intégrer en premier lieu.

(3) Une des astuces classique de l'intégration par parties et de poser $u'(x) = 1$ (pour avoir ensuite $u(x) = x$ dans nos calculs).

(a) Ci-dessous, on pose $u'(x) = 1$ et $v(x) = \ln(x)$:

$$\begin{aligned} \int \ln(x) dx &= \int 1 \cdot \ln(x) dx = x \cdot \ln(x) - \int x \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= x \cdot \ln(x) - x + C = x(\ln(x) - 1) + C. \end{aligned}$$

(b) Dans le calcul suivant, on pose $u'(x) = 1$ et $v(x) = \arctan(x)$, puis on procède au changement de variables $z = 1 + x^2$ et donc $\frac{1}{2} dz = x dx$:

$$\begin{aligned} \int \arctan(x) dx &= \int 1 \cdot \arctan(x) dx = x \cdot \arctan(x) - \int x \cdot \frac{1}{1+x^2} dx \\ &= x \cdot \arctan(x) - \frac{1}{2} \int \frac{1}{z} dz = x \cdot \arctan(x) - \frac{1}{2} \ln(z) + C \\ &= x \cdot \arctan(x) - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C. \end{aligned}$$

- (4) Les astuces pour les calculs d'intégrales sont encore nombreuses. Dans l'exemple qui suit on commence par intégrer par parties en posant $u'(x) = 1$ et $v(x) = \sqrt{1+4x^2}$,

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1+4x^2} dx &= \int 1 \cdot \sqrt{1+4x^2} dx = x \cdot \sqrt{1+4x^2} - \int x \cdot \frac{1}{2} \cdot 8x \cdot \frac{1}{\sqrt{1+4x^2}} dx \\ &= x \cdot \sqrt{1+4x^2} - \int \frac{4x^2}{\sqrt{1+4x^2}} dx. \end{aligned}$$

Pour évaluer cette dernière intégrale, on ajoute et on soustrait 1 au numérateur:

$$\begin{aligned} \int \frac{4x^2}{\sqrt{1+4x^2}} dx &= \int \frac{(1+4x^2) - 1}{\sqrt{1+4x^2}} dx = \int \sqrt{1+4x^2} - \frac{1}{\sqrt{1+4x^2}} dx \\ &= \int \sqrt{1+4x^2} dx - \int \frac{1}{\sqrt{1+4x^2}} dx. \end{aligned}$$

En remplaçant cette expression dans notre calcul d'origine, on obtient:

$$\int \sqrt{1+4x^2} dx = x \cdot \sqrt{1+4x^2} - \int \sqrt{1+4x^2} dx + \int \frac{1}{\sqrt{1+4x^2}} dx,$$

une égalité où l'intégrale à calculer réapparaît dans la tentative de réponse! Après réflexion, cela peut être tourné à notre avantage en faisant repasser cette intégrale à gauche:

$$2 \int \sqrt{1+4x^2} dx = x \cdot \sqrt{1+4x^2} + \int \frac{1}{\sqrt{1+4x^2}} dx.$$

En divisant par deux, nous obtiendrons la réponse. Il ne nous reste donc plus qu'à calculer $\int \frac{1}{\sqrt{1+4x^2}} dx$, une intégrale qui semble receler une fonction $\operatorname{arsinh}(x)$; on procède comme à l'exemple (3) de 2.1 en posant $z = 2x$ et donc $\frac{1}{2} dz = dx$:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+4x^2}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{1+z^2}} dz = \frac{1}{2} \operatorname{arsinh}(z) + C = \frac{1}{2} \operatorname{arsinh}(2x) + C.$$

On trouve au final

$$\int \sqrt{1+4x^2} dx = \frac{1}{2} x \cdot \sqrt{1+4x^2} + \frac{1}{4} \operatorname{arsinh}(2x) + C$$

ou (en utilisant la formule de 1.2 pour la fonction inverse du sinus hyperbolique)

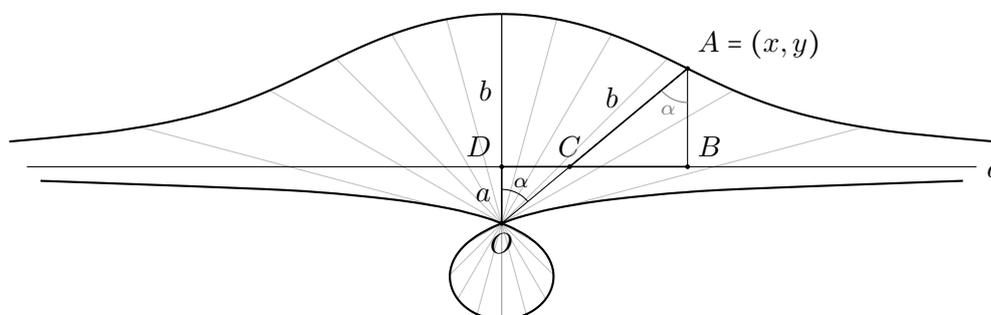
$$\int \sqrt{1+4x^2} dx = \frac{1}{2} x \cdot \sqrt{1+4x^2} + \frac{1}{4} \ln(2x + \sqrt{4x^2+1}) + C.$$

3 Représentation paramétrique et équations implicites

Certaines sources indiquent qu'en Grèce antique, les architectes utilisaient la conchoïde de Nicomède dans le dessin des profils de colonnes (de temples par exemple). En effet, cette courbe est plus facile à dessiner par des moyens mécaniques que l'hyperbole. (Dans la figure ci-dessous, la partie de la courbe utilisée par les architectes prend b comme le rayon à la base de la colonne et a sa hauteur; le profil représenté ici serait celui d'une colonne couchée.)

3.1 La Conchoïde de Nicomède. (200 avant J.-C.)

Définition. Donnés deux nombres a et b , on considère un point O du plan et une droite d à distance a de O . L'intersection d'une demi-droite issue de O avec d donne un point C , depuis lequel on mesure b le long de la demi-droite pour obtenir un point A . Le lieu des points A déterminés en faisant varier la demi-droite issue de O est la **conchoïde de Nicomède**:



La distance b sur la demi-droite est prise à partir de C dans la direction opposée à O lorsque l'angle α indiqué ci-dessus est tel que $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ et dans la direction de O lorsque $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

Équation de la conchoïde. On pose O à l'origine et d parallèle à l'axe Ox , et on considère le point $A = (x, y)$. Comme ABC et ODC sont semblables, on a $\frac{OD}{AB} = \frac{OC}{AC}$, soit

$$\frac{a}{y-a} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}-b}{b}.$$

Comme $\frac{\sqrt{x^2+y^2}-b}{b} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{b} - 1$, on obtient $\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{b} = \frac{a}{y-a} + 1 = \frac{y}{y-a}$ et après avoir élevé au carré:

$$y^2 \cdot b^2 = (x^2 + y^2)(y-a)^2.$$

Pour obtenir une équation de la forme $y = f(x)$, il faudrait résoudre une équation du quatrième degré, ce qui n'est *a priori* pas un problème facile. On peut par contre travailler avec cette dernière **équation implicite** de la courbe ou encore chercher d'autres représentations. Pour cela, considérons par exemple l'angle $\alpha = \widehat{COD} = \widehat{CAB}$. On a alors $x = \overline{DC} + \overline{CB}$ et $y = \overline{OD} + \overline{BA}$, c'est-à-dire

$$\begin{cases} x = a \cdot \tan(\alpha) + b \cdot \sin(\alpha) \\ y = a + b \cdot \cos(\alpha) \end{cases}.$$

Une telle représentation de courbe est une **représentation paramétrique** (de paramètre α) et ne s'écrit pas nécessairement précédée d'une accolade:

$$x = a \cdot \tan(\alpha) + b \cdot \sin(\alpha) , \quad y = a + b \cdot \cos(\alpha) .$$

De plus, de telles représentations ne sont pas uniques. En effet, en choisissant la distance $\overline{OC} = t$ comme paramètre, on obtient

$$x = \left(\frac{b+t}{t}\right) \cdot \sqrt{t^2 - a^2} , \quad y = \left(\frac{b+t}{t}\right) \cdot a .$$

Dans ce cas précis, les équations donnent une représentation d'une partie de la courbe seulement (dans le premier et troisième quadrant); pour l'autre partie, il faut remplacer x par $-x$.

Exemples.

- Une équation implicite d'une ellipse (de grand axe de longueur $2a$ et de petit axe de longueur $2b$) est

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 ,$$

et une équation paramétrique est

$$x = a \cos(t) , \quad y = b \sin(t) .$$

- Une équation implicite d'une hyperbole (de "grand axe" de longueur $2a$ et de "petit axe" de longueur $2b$) est

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 ,$$

et une équation paramétrique de la *branche de droite* de cette hyperbole est

$$x = a \cosh(t) , \quad y = b \sinh(t) ;$$

pour obtenir toute l'hyperbole, il faut considérer $(x(t), y(t)) = (\pm a \cosh(t), b \sinh(t))$.

3.2 Différentiation d'une équation paramétrique.

Si une courbe est donnée par des équations paramétriques

$$x = a \tan(\alpha) + b \sin(\alpha) , \quad y = a + b \cos(\alpha)$$

ou plus généralement

$$x = f(\alpha) , \quad y = g(\alpha) ,$$

il est possible de calculer la pente de la dérivée sans avoir à recalculer une équation de la forme $y = f(x)$. En effet, à la place de $x = f(\alpha)$, on peut considérer α comme une fonction de x : $\alpha = h(x)$ (où h serait la fonction inverse de f). On a alors

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\alpha} \cdot \frac{d\alpha}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\alpha}}{\frac{dx}{d\alpha}} = \frac{\text{"variation en } y\text{"}}{\text{"variation en } x\text{"}} .$$

En d'autres termes, la pente de la tangente à la courbe $(f(\alpha), g(\alpha))$ est simplement

$$p = \frac{g'(\alpha)}{f'(\alpha)}$$

où les dérivées des fonctions sont prises par rapport à leur paramètre (ici α).

Exemple. Pour la conchoïde $(x(\alpha), y(\alpha))$, on calcule d'abord les dérivées de chacune des coordonnées par rapport au paramètre:

$$\frac{dx}{d\alpha} = \frac{a}{\cos^2(\alpha)} + b \cos(\alpha) = \frac{a + b \cos^3(\alpha)}{\cos^2(\alpha)} \quad \text{et} \quad \frac{dy}{d\alpha} = -b \sin(\alpha) .$$

On trouve ainsi que la pente de la tangente à la courbe en un point $(x(\alpha), y(\alpha))$ est donnée par

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-b \sin(\alpha) \cos^2(\alpha)}{a + b \cos^3(\alpha)} .$$

Pour la seconde paramétrisation $(x(t), y(t))$ de la conchoïde, nous trouvons après calculs

$$\frac{dx}{dt} = \frac{a^2 b + t^3}{t^2 \sqrt{t^2 - a^2}} , \quad \text{et} \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{ab}{t^2} .$$

On a donc

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{ab}{t^2} \cdot \frac{t^2 \sqrt{t^2 - a^2}}{a^2 b + t^3} = -\frac{ab \sqrt{t^2 - a^2}}{a^2 b + t^3} .$$

Remarque. Pour trouver la pente en un point $(x(t_0), y(t_0))$, on remplace bien sûr le paramètre par la valeur de t_0 dans la formule que l'on a obtenu pour la pente.

3.3 Différentiation d'une équation implicite.

Pour trouver $\frac{dy}{dx}$ dans des équations de la forme

$$y^2 \cdot b^2 = (x^2 + y^2)(y - a)^2$$

on considère simplement y comme une fonction de x ; c'est-à-dire $y = y(x)$, et on utilise la règle de dérivation en chaîne. Par exemple, pour l'équation ci-dessus, on obtient

$$2y \cdot y' \cdot b^2 = (2x + 2y \cdot y')(y - a)^2 + (x^2 + y^2) \cdot 2y'(y - a) .$$

On isole ensuite les y' :

$$y' (2yb^2 - 2y(y - a)^2 - 2(y - a)(x^2 + y^2)) = 2x(y - a)^2 ,$$

et on conclut:

$$y' = \frac{x(y - a)^2}{b^2 y - y(y - a)^2 - (y - a)(x^2 + y^2)} .$$

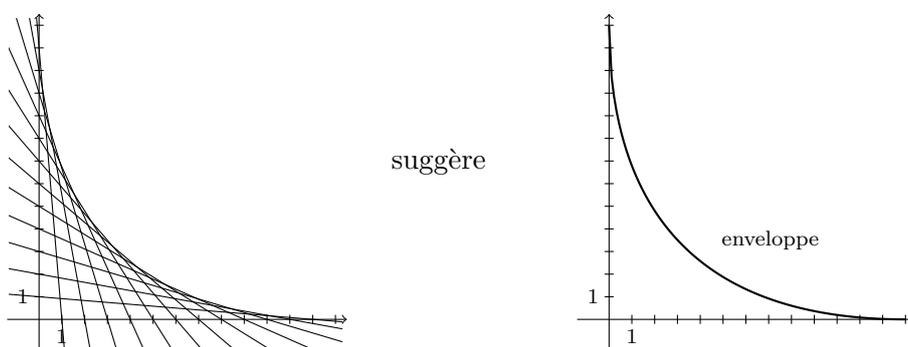
Remarque. Pour trouver la pente en un point (x_0, y_0) , on remplace (x, y) par (x_0, y_0) à droite de cette égalité.

4 Enveloppe, courbure et développée

En 1525, Dürer expose le problème suivant: un point $(a, 0)$ se déplace horizontalement (sur l'axe Ox), et un point $(0, 13 - a)$ verticalement (sur l'axe Oy). Si a est fixé, une droite passant par ces deux points sera donnée par $\frac{y-0}{x-a} = \frac{(13-a)-0}{0-a}$ ou

$$y = \frac{a - 13}{a}x + (13 - a) . \tag{*}$$

En faisant varier a , on obtient une famille de droites, et on dit que la famille est **paramétrée** par a . On observe que le profil de cette famille de droites dessine une courbe, appelée l'**enveloppe** de la famille:



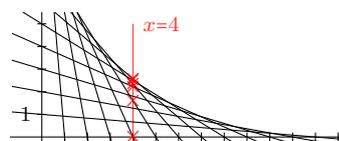
Problème. Comment déterminer l'équation de l'enveloppe?

Idée. On fixe un x et on fait varier le paramètre a : si $x = 4$ par exemple, la coordonnée de y sur la droite ci-dessus devient

$$y = \frac{4a - 52}{a} + 13 - a = 17 - a - \frac{52}{a} .$$

On obtient un échantillon de valeurs de y comme suit:

a	3	4	5	6	7	8	9
y	-3.33	0	1.6	2.33	2.57	2.5	2.22



On remarque que y augmente jusqu'à environ $a = 7$ puis commence à diminuer. La valeur de a donnant le point $(4, y)$ sur l'enveloppe est donc obtenue pour la valeur maximale de y . Pour trouver la valeur exacte de ce y maximal lorsque a varie, il faut dériver y par rapport à a , puis trouver pour quelle valeur de a la dérivée est nulle (voir la méthode de recherche des maxima locaux dans le cours de Mathématiques I). Dans notre cas,

$$\frac{dy}{da} = -1 + \frac{52}{a^2}$$

on trouve $a^2 = 52$ en posant $\frac{dy}{da} = 0$, et donc $a = \pm\sqrt{52}$. Pour $a = \sqrt{52} \simeq 7.2$ on a la valeur maximale de y cherchée (en $x = 4$): $y = 17 - \sqrt{52} - \frac{52}{\sqrt{52}} \simeq 2.6$.

Dans le cas général, x varie (et n'est plus forcément égal à 4), et on a

$$y = \frac{a-13}{a}x + (13-a);$$

en particulier, y est une fonction de deux variables x et a . Dans ce cas, on écrit

$$\frac{\partial y}{\partial a} \quad \text{et} \quad \frac{\partial y}{\partial x}$$

plutôt que $\frac{dy}{da}$ ou $\frac{dy}{dx}$ lorsqu'on dérive par rapport à a ou à x , respectivement.

Détermination de l'enveloppe. Comme ci-dessus, on cherche la valeur du paramètre a qui donne le y maximal (localement): on dérive par rapport à a

$$\frac{\partial y}{\partial a} = -1 + \frac{13x}{a^2},$$

on trouve la valeur de a telle que $\frac{\partial y}{\partial a} = 0$

$$a = \sqrt{13x}$$

(en fait $a = \pm\sqrt{13x}$, mais on veut $0 \leq a$), et on réintroduit cette valeur dans l'équation de départ pour trouver l'équation de l'enveloppe

$$y = \left(\frac{\sqrt{13x}-13}{\sqrt{13x}} \right) x + 13 - \sqrt{13x} = x - 2\sqrt{13x} + 13.$$

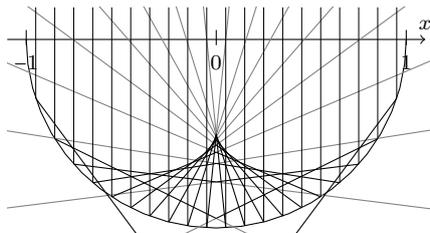
On en déduit l'équation implicite

$$(y-x-13)^2 = 52x$$

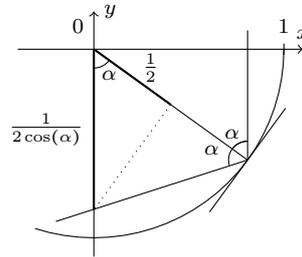
qui est l'équation d'une conique, ici une parabole. On conclut que l'enveloppe des droites passant par les points $(a, 0)$ et $(0, 13-a)$ (avec a positif ou nul) est une portion de parabole.

4.1 La caustique du cercle.

Un autre exemple d'enveloppe d'une famille de courbes est la "caustique d'un cercle". En vue de définir cette courbe considérons des rayons lumineux réfléchis par un demi-cercle (Johann Bernoulli, 1692). L'enveloppe des rayons réfléchis est la **caustique du cercle** visible dans les tasses à café par exemple:



Équation de la caustique du cercle. Notons α l'angle entre le rayon incident et le rayon du cercle:



La pente de la droite représentant le rayon réfléchi est

$$\tan\left(2\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sin\left(2\alpha - \frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{-\cos(2\alpha)}{\sin(2\alpha)}$$

L'équation du rayon réfléchi est donc

$$y = -\frac{\cos(2\alpha)}{\sin(2\alpha)}x - \frac{1}{2\cos(\alpha)} = -\left(\frac{\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)}{2\sin(\alpha)\cos(\alpha)}\right)x - \frac{1}{2\cos(\alpha)} = -\left(\frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} - \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}\right)\frac{x}{2} - \frac{1}{2\cos(\alpha)}$$

c'est-à-dire
$$y = \left(\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} - \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}\right)\frac{x}{2} - \frac{1}{2\cos(\alpha)} .$$

Ce rayon décrit une famille de droite paramétrées par α , et on calcule la dérivée

$$\frac{\partial y}{\partial \alpha} = \frac{x}{2} \left(\frac{\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)} + \frac{\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha)}{\sin^2(\alpha)} \right) - \frac{\sin(\alpha)}{2\cos^2(\alpha)} = \frac{x}{2\cos^2(\alpha)\sin^2(\alpha)} - \frac{\sin(\alpha)}{2\cos^2(\alpha)} .$$

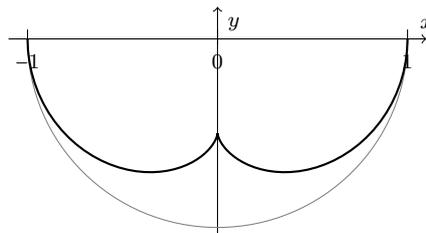
En posant $\frac{\partial y}{\partial \alpha} = 0$, on obtient $x = \sin^3(\alpha)$. En insérant cette valeur dans l'équation de la droite trouvée ci-dessus, on obtient:

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2} \left(\frac{\sin^4(\alpha)}{\cos(\alpha)} - \sin^2(\alpha)\cos(\alpha) - \frac{1}{\cos(\alpha)} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{(\sin^2(\alpha) - 1)(\sin^2(\alpha) + 1)}{\cos(\alpha)} - \sin^2(\alpha)\cos(\alpha) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(-2\cos(\alpha)\sin^2(\alpha) - \cos(\alpha) \right) = -\cos(\alpha) \left(\sin^2(\alpha) + \frac{1}{2} \right) . \end{aligned}$$

L'équation paramétrique de la caustique du cercle est donc:

$$x = \sin^3(\alpha) , \quad y = -\cos(\alpha) \cdot \left(\sin^2(\alpha) + \frac{1}{2} \right) .$$

Dans ce cas, il est facile de trouver l'**équation explicite** (c'est-à-dire de la forme $y = f(x)$) de la caustique. En effet, en posant $\sin(\alpha) = x^{\frac{1}{3}}$, on trouve $y = -\sqrt{1 - x^{\frac{2}{3}}} \cdot \left(x^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{2} \right)$:



4.2 Courbure.

Pour une courbe $y = f(x)$ et un point $(a, f(a))$ sur cette courbe, on cherche un cercle qui approxime le mieux $y = f(x)$ près de $(a, f(a))$. Ce sera le **cercle osculateur** de la courbe au point $(a, f(a))$ et son centre sera le **centre de courbure**. Si r est le rayon de ce cercle,

$$\kappa = \frac{1}{r}$$

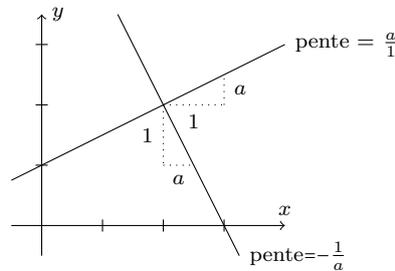
est la **courbure** de f en a . Le lien de tous les centres de courbure est la **développée** de la courbe d'origine.

Rappel. Si une droite a une pente de a , alors ses perpendiculaires ont une pente de $-\frac{1}{a}$. Une perpendiculaire à la droite

$$y = ax + b$$

est donc de la forme

$$y = -\frac{1}{a}x + c .$$



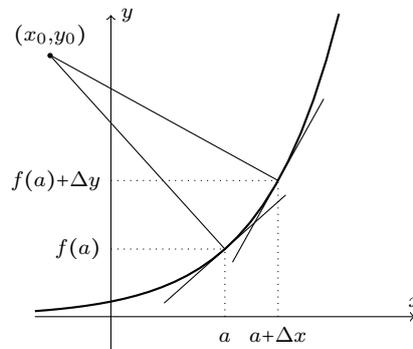
En 1671, Newton procède comme suit pour trouver le cercle osculateur. La perpendiculaire en $(a, f(a))$ à la courbe $y = f(x)$ est donnée par

$$\frac{y - f(a)}{x - a} = -\frac{1}{f'(a)} ,$$

c'est-à-dire

$$y = -\frac{1}{f'(a)}(x - a) + f(a) .$$

En déplaçant le point a d'une distance Δx sur l'axe Ox , $f(a)$ se verra augmentée de Δy , et on obtient une nouvelle perpendiculaire à la courbe en $(a + \Delta x, f(a) + \Delta y)$. Si Δx est "infiniment" petit, ces perpendiculaires s'intersecteront au centre (x_0, y_0) du cercle osculateur; le rayon du cercle sera donc $r = \sqrt{(a - x_0)^2 + (f(a) - y_0)^2}$:



Le problème est donc ramené au problème de détermination de l'enveloppe de la famille de perpendiculaires à la courbe $y = f(x)$ (famille paramétrée par a).

On calcule d'abord la dérivée de la famille de perpendiculaires par rapport au paramètre:

$$\frac{\partial y}{\partial a} = f'(a) + \frac{f''(a)}{f'(a)^2}(x_0 - a) + \frac{1}{f'(a)} .$$

Avec $\frac{\partial y}{\partial a} = 0$, on obtient $x_0 - a = \frac{f'(a)^2}{f''(a)} \left(-\frac{1}{f'(a)} - f'(a) \right) = -\frac{f'(a)(1+f'(a)^2)}{f''(a)}$. En insérant ceci dans $y_0 - f(a) = -\frac{x_0 - a}{f'(a)}$, on arrive finalement à

$$x_0 = a - \frac{f'(a)(1+f'(a)^2)}{f''(a)} , \quad y_0 = f(a) + \frac{1+f'(a)^2}{f''(a)} ,$$

des égalités qui nous donnent le centre (x_0, y_0) du cercle osculateur à la courbe $y = f(x)$ en $x = a$. Pour le rayon r et la courbure $\kappa = \frac{1}{r}$, on obtient:

$$r = \frac{(1 + (f'(a))^2)^{\frac{3}{2}}}{|f''(a)|} \quad \text{et} \quad \kappa = \frac{|f''(a)|}{(1 + (f'(a))^2)^{\frac{3}{2}}} .$$

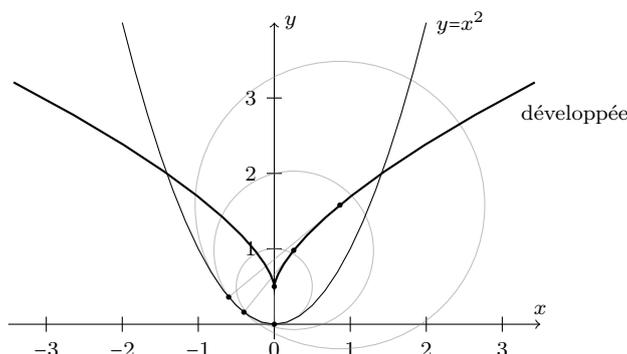
Lorsque a varie, on déduit une représentation paramétrique de la développée de f en écrivant $(x(a), y(a))$ au lieu de (x_0, y_0) :

$$x(a) = a - \frac{f'(a)(1+f'(a)^2)}{f''(a)} , \quad y(a) = f(a) + \frac{1+f'(a)^2}{f''(a)} .$$

Exemple. Pour la parabole $y = x^2$, on a $f'(x) = 2x$ et $f''(x) = 2$. Le rayon de courbure est donc $r = \frac{(1+4a^2)^{\frac{3}{2}}}{2}$ en (a, a^2) , et le centre du cercle osculateur est donné par

$$x_0 = a - \frac{2a(1+4a^2)}{2} = -4a^3 , \quad y_0 = a^2 + \frac{1+4a^2}{2} = \frac{1}{2} + 3a^2 .$$

Quand a varie, ces équations donnent une représentation paramétrique de la développée de $y = x^2$:



En posant $a = \left(-\frac{x}{4}\right)^{\frac{1}{3}}$, on obtient aussi l'équation explicite de la développée: $y = \frac{1}{2} + 3\left(\frac{x}{4}\right)^{\frac{2}{3}}$.

4.3 Courbure d'une courbe en représentation paramétrique.

Si une courbe est donnée par $(x(t), y(t))$ plutôt que par $y = f(x)$, nous pouvons aussi en calculer les centres des cercles osculateurs et leurs rayons. En effet, nous savons que

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y'(t)}{x'(t)} ;$$

de plus,

$$f''(x) = \frac{d}{dx} f'(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{y'(t)}{x'(t)} \right) = \frac{\frac{d}{dt} \left(\frac{y'(t)}{x'(t)} \right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{x'(t) \cdot y''(t) - x''(t) \cdot y'(t)}{x'(t)^3} .$$

(La notation “prime” indique que l’on dérive par rapport à la variable donnée entre parenthèses: par exemple, $f'(x)$ signifie $\frac{df}{dx}$ et $x'(t)$ veut dire $\frac{dx}{dt}$.)

En insérant ces expressions de $f'(x)$ et $f''(x)$ dans les formules du cercle osculateur obtenues pour la représentation explicite $y = f(x)$ de la courbe, nous obtenons pour le centre (x_0, y_0) du cercle osculateur (au point $(x(a), y(a))$ de la courbe):

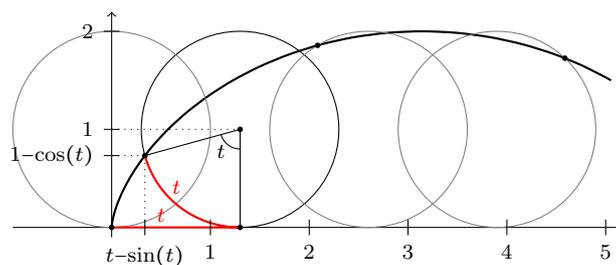
$$x_0 = x(a) - \frac{y'(a)(x'(a)^2 + y'(a)^2)}{x'(a)y''(a) - x''(a)y'(a)} , \quad y_0 = y(a) + \frac{x'(a)(x'(a)^2 + y'(a)^2)}{x'(a)y''(a) - x''(a)y'(a)}$$

et pour son rayon en (x_0, y_0) :

$$r = \frac{(x'(a)^2 + y'(a)^2)^{\frac{3}{2}}}{|x'(a)y''(a) - x''(a)y'(a)|} .$$

Exemple. La *cycloïde* est la courbe décrivant la trajectoire de la valve d’une roue de vélo de rayon 1. Une de ses représentations paramétrique est:

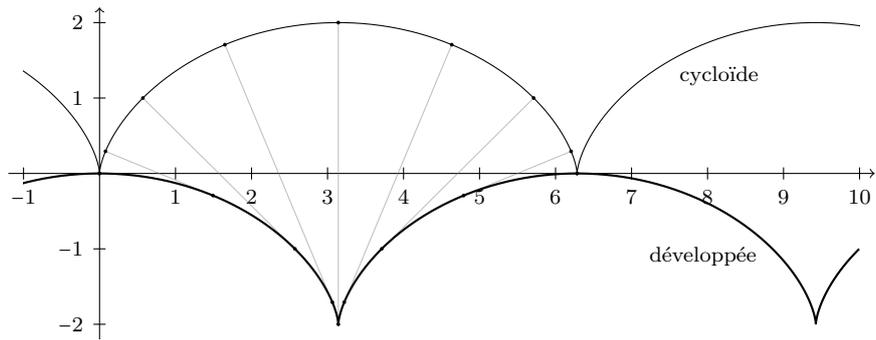
$$x = t - \sin(t) , \quad y = 1 - \cos(t) .$$



On calcule facilement $x'(t) = 1 - \cos(t)$ et $y'(t) = \sin(t)$. En insérant ces valeurs dans les formules du lieu des centres des cercles osculateur d’une courbe paramétrique, on obtient les équations suivantes pour la développée d’une cycloïde:

$$x_0 = a + \sin(a) , \quad y_0 = -1 + \cos(a) .$$

On observe une grande similarité avec l’équation de la cycloïde originale. En fait, en remplaçant t par $t + \pi$ dans l’équation de la cycloïde, on voit que sa développée est encore une cycloïde; il s’agit de la cycloïde originale translatée horizontalement de $-\pi$ et verticalement de -2 :



Remarque. Dans la figure ci-dessus, quelques centres de cercles osculateurs sont reliés aux points de tangence respectifs sur la courbe. On remarque que le rayon de courbure de la cycloïde n'est pas constant (il varie de 0 à 4). La cycloïde n'est donc *pas* une collection d'arcs de cercles.

5 Longueur d'arc et développantes

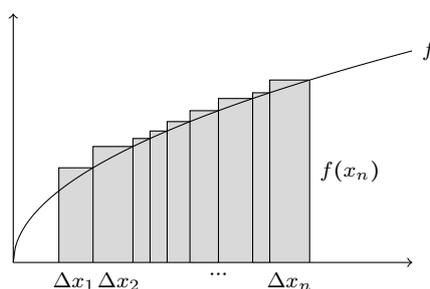
Rappel. L'aire sous la courbe $f(x)$ entre a et b est obtenue via la somme des aires rectangulaires

$$f(x_1) \cdot \Delta x_1 + f(x_2) \cdot \Delta x_2 + \dots + f(x_n) \cdot \Delta x_n$$

(avec $x_0 = a$, $x_n = b$, et $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$) dans laquelle on rend Δx_i "infinitement petit"; on écrit

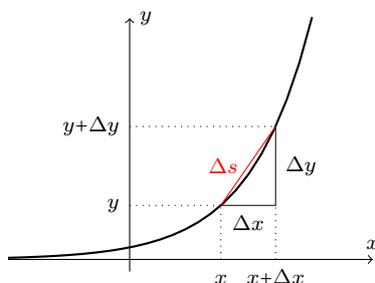
$$\int_a^b f(x) dx$$

pour désigner cette "somme infinie d'infinités petits" (voir le cours de Mathématiques I), l'intégrale de f :



5.1 Longueur d'arc via une équation explicite.

Pour calculer la *longueur* d'une portion de courbe, nous allons exploiter le fait qu'une intégrale est une *somme* (plutôt qu'une aire). Donnée $y = f(x)$, si x augmente de Δx , alors y croît de Δy :



La longueur d'arc entre (x, y) et $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ est donc approximée par Δs , où

$$(\Delta s)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 \simeq (\Delta x)^2 + f'(x)^2 \cdot (\Delta x)^2 = (1 + f'(x)^2) \Delta x^2$$

car $f'(x) \simeq \frac{\Delta y}{\Delta x}$, et donc $\Delta y \simeq f'(x) \cdot \Delta x$. Pour Δx devenant de plus en plus petit, on a que

$$\Delta s \simeq \sqrt{(1 + f'(x)^2)} \Delta x \quad \text{devient} \quad ds = \sqrt{1 + f'(x)^2} dx .$$

Si on partage l'arc de courbe entre $x = a$ et $x = b$ en n petits morceaux de longueurs Δs_i , la longueur d'arc entre $x = a$ et $x = b$ est approximée par la somme

$$\Delta s_1 + \Delta s_2 + \dots + \Delta s_n \simeq \sqrt{(1 + f'(x_1)^2)} \Delta x_1 + \sqrt{(1 + f'(x_2)^2)} \Delta x_2 + \dots + \sqrt{(1 + f'(x_n)^2)} \Delta x_n .$$

En prenant n de plus en plus grand, cette somme devient une “somme infinie d’infiniments petits”, c’est-à-dire une intégrale. La longueur d’arc L de la courbe $y = f(x)$ entre $x = a$ et $x = b$ est donc donnée par

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx .$$

Exemple. Pour la parabole $y = x^2$, on a $y' = 2x$, et la longueur d’arc entre $x = 0$ et $x = 1$ est donnée par

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + 4x^2} dx = \left[\frac{1}{2}x\sqrt{1 + 4x^2} + \frac{1}{4} \ln(2x + \sqrt{1 + 4x^2}) \right]_0^1 = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4} \ln(2 + \sqrt{5})$$

(la primitive de $\sqrt{1 + 4x^2}$ a été calculée à l’exemple (4) de 2.2).

5.2 Longueur d’arc via une paramétrisation.

Si la courbe est donnée par $(x(t), y(t))$, on a $dx = x'(t) dt$ (qu’on suppose ≥ 0) et $f'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)}$ (voir 3.2), d’où

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = \sqrt{1 + \left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)^2} \cdot x'(t) dt \\ &= \sqrt{\frac{x'(t)^2 + y'(t)^2}{x'(t)^2}} \cdot x'(t) dt = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt . \end{aligned}$$

En prenant la “somme infinie” de ces “éléments d’arcs” (c’est-à-dire l’intégrale), on obtient que la longueur d’arc de la courbe $(x(t), y(t))$ entre les points donnés par $t = a$ et $t = b$ est

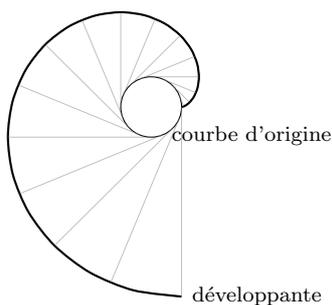
$$L = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt .$$

Exemple. Pour calculer la longueur d’arc d’un cycle de la cycloïde, on utilise la paramétrisation $(x(t), y(t)) = (t - \sin(t), 1 - \cos(t))$ (voir 4.3). On a donc $x'(t) = 1 - \cos(t)$, $y'(t) = \sin(t)$, et la longueur du cycle est

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - 2\cos(t) + \cos^2(t) + \sin^2(t)} dt \\ &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos(t)} dt = 2 \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{1 - \cos(t)}{2}} dt = 2 \int_0^{2\pi} \left| \sin\left(\frac{t}{2}\right) \right| dt \\ &= 2 \left[-2 \cos\left(\frac{t}{2}\right) \right]_0^{2\pi} = 4 + 4 = 8 . \end{aligned}$$

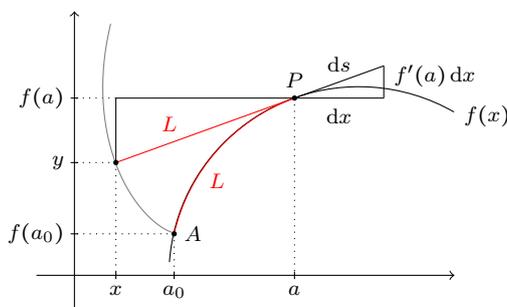
5.3 Développantes.

Donnée une courbe du plan, on attache un fil en un point de la courbe de sorte qu’elle se confonde avec la tangente. Le lieu des points parcourus par l’extrémité libre du fil lorsque celui-ci s’enroule autour de la courbe s’appelle la **développante** de la courbe. Ci-dessous, un fil s’enroule autour d’un cercle, dessinant sa développante:



Équation de la développante d'une courbe.

Pour obtenir l'équation de la développante, il est plus pratique de considérer que le fil est de longueur arbitraire, et qu'il se *déroule* le long de la courbe. Choisissons un point $A = (a_0, f(a_0))$ sur la courbe $y = f(x)$ qui sera l'extrémité du fil enroulé, c'est-à-dire le "point de départ" de la développante. Après avoir déroulé une longueur L du fil, celui-ci est tangent à la courbe en P :



Les calculs pour la longueur d'arc d'une courbe nous ont donné l'égalité $ds = \sqrt{1 + f'(a)^2} dx$ décrivant la "portion infinitésimale" de longueur d'arc obtenue en avançant de dx depuis le point $(a, f(a))$; on en tire que

$$\frac{dx}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1 + f'(a)^2}}.$$

En comparant les deux triangles rectangles semblables de sommet P représentés dans la figure ci-dessus, on obtient

$$\frac{a - x}{L} = \frac{dx}{ds} \quad \text{soit} \quad x - a = -\frac{L}{\sqrt{1 + f'(a)^2}}$$

Ces mêmes triangles nous donnent aussi

$$\frac{f(a) - y}{L} = \frac{f'(a) dx}{ds} \quad \text{soit} \quad y - f(a) = -\frac{f'(a) \cdot L}{\sqrt{1 + f'(a)^2}}$$

En remplaçant L par la longueur d'arc $L = \int_{a_0}^a \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$ de la courbe $y = f(x)$ entre $x = a_0$ et $x = a$, on obtient la représentation paramétrique de la développante de la courbe $y = f(x)$ au point $(a_0, f(a_0))$:

$$x(a) = a - \frac{\int_{a_0}^a \sqrt{1 + f'(x)^2} dx}{\sqrt{1 + f'(a)^2}}, \quad y(a) = f(a) - \frac{f'(a) \cdot \int_{a_0}^a \sqrt{1 + f'(x)^2} dx}{\sqrt{1 + f'(a)^2}}$$

Le paramètre a représente l'abscisse du point de tangence P sur la courbe du fil que l'on déroule.

Équation de la développante d'une courbe paramétrée.

Nous savons de 3.2 que la pente d'une courbe donnée par une représentation paramétrique $(x(t), y(t))$ est obtenue par le quotient $\frac{y'(t)}{x'(t)}$. On peut donc poser

$$f'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)}$$

dans les équations de la développante d'une courbe $y = f(x)$. La développante de la courbe $(f(t), g(t))$ au point $(f(t_0), g(t_0))$ est donc la courbe $(x(t), y(t))$ définie par

$$x(t) = f(t) - \frac{f'(t) \cdot \int_{t_0}^t \sqrt{f'(s)^2 + g'(s)^2} ds}{\sqrt{f'(t)^2 + g'(t)^2}}, \quad y(t) = g(t) - \frac{g'(t) \cdot \int_{t_0}^t \sqrt{f'(s)^2 + g'(s)^2} ds}{\sqrt{f'(t)^2 + g'(t)^2}}.$$

Remarques.

- (1) Une courbe possède *une* développée, mais *plusieurs* développantes: chaque développante dépend du choix d'un "point de départ" (donné par a_0 ou t_0) du déroulement du fil.
- (2) Ici comme ailleurs, la formule pour la représentation explicite de la développante d'une courbe $y = h(x)$ peut être retrouvée via celle pour l'équation paramétrique en paramétrant la courbe $y = h(x)$ par

$$\begin{cases} f(t) = t \\ g(t) = h(t) \end{cases}.$$

On a alors $f'(t) = 1$ et $g'(t) = h'(t)$, que l'on remplace dans les équations de la développante d'une courbe paramétrée pour retrouver les formules que l'on aurait obtenues pour $y = h(x)$.

Exemple. En 4.2, nous avons obtenu une équation paramétrique pour la développée de la parabole:

$$f(t) = -4t^3, \quad g(t) = \frac{1}{2} + 3t^2.$$

Cherchons la développante de cette courbe en $t_0 = 0$. D'après l'exercice 5 de la Série 7, la longueur d'arc L est

$$\int_0^t \sqrt{x'(s)^2 + y'(s)^2} ds = \frac{1}{2}(4t^2 + 1)^{3/2} - \frac{1}{2}$$

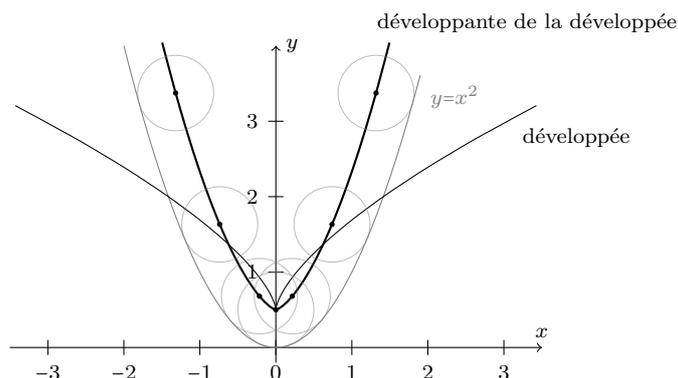
et de plus on a

$$\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} = 6t\sqrt{4t^2 + 1}.$$

Ces expressions insérées dans les formules pour la développante d'une courbe paramétrée donnent

$$\begin{aligned} x(t) &= -4t^3 + \frac{12t^2 \cdot \frac{1}{2}(\sqrt{(4t^2 + 1)^3} - 1)}{6t\sqrt{4t^2 + 1}} = -4t^3 + t(4t^2 + 1) - \frac{t}{\sqrt{4t^2 + 1}} = t - \frac{t}{\sqrt{4t^2 + 1}} \\ y(t) &= \frac{1}{2} + 3t^2 - \frac{6t \cdot \frac{1}{2}(\sqrt{(4t^2 + 1)^3} - 1)}{6t\sqrt{4t^2 + 1}} = \frac{1}{2} + 3t^2 - \frac{1}{2}(4t^2 + 1) + \frac{1}{2\sqrt{4t^2 + 1}} = t^2 + \frac{1}{2\sqrt{4t^2 + 1}}. \end{aligned}$$

En $t = 0$, la développante passe par $(0, \frac{1}{2})$ et n'est donc pas la parabole d'origine. On peut néanmoins montrer que la *développante de la développée* d'une courbe est "parallèle" à l'originale, c'est-à-dire est une courbe décrite par le centre d'un cercle qui roule sur la courbe d'origine:

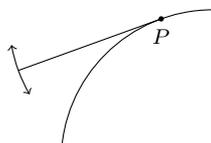


D'après l'exemple ci-dessus, la *développante de la développée* ne redonne pas la courbe d'origine; par contre, on a le résultat suivant.

Théorème. *La développée de la développante d'une courbe redonne la courbe d'origine.*

Preuve. Un gros calcul suffirait pour démontrer ce résultat, mais l'idée suivante en donne une bonne intuition.

On considère le fil traçant la développante d'une courbe en un point P de celle-ci. Si on déroule "infinitésimalement" le fil, son extrémité devra suivre un chemin perpendiculaire au fil, et dessinera alors un (très court) arc de cercle centré en le point de tangence P :



Pour trouver la développée de la développante, on cherche l'intersection de deux perpendiculaires à cet arc de cercle "infinitésimal": on retrouve le centre du cercle P , et donc la courbe d'origine. \square

Remarque. Un parallèle peut être fait entre ce théorème et le fait que la dérivée (assimilée à la développée) d'une primitive (assimilée à une développante) d'une fonction redonne la fonction d'origine, alors que la primitive d'une dérivée la redonne à constante près.

Exemple. La développée de la courbe

$$x(t) = t - \frac{t}{\sqrt{4t^2 + 1}}, \quad y(t) = t^2 + \frac{1}{2\sqrt{4t^2 + 1}}$$

est la courbe

$$f(t) = -4t^3, \quad g(t) = \frac{1}{2} + 3t^2.$$

En effet, à l'exemple précédant le théorème, on avait calculé que $(x(t), y(t))$ était une développante de $(f(t), g(t))$. Le théorème nous permet de déterminer la développée de $(x(t), y(t))$ sans calcul.

6 Surfaces et courbes de l'espace

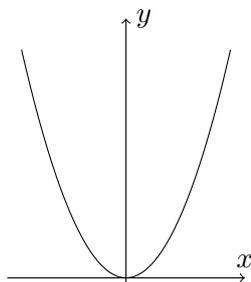
Intuitivement, une courbe dans l'espace à trois dimensions est une généralisation d'une courbe du plan. Algébriquement cependant, une *surface* de l'espace est plus directement comparable à une courbe du plan.

6.1 Comparaison: courbes du plan et surfaces.

Équations explicites. L'équation explicite d'une courbe du plan est de la forme

$$y = f(x) .$$

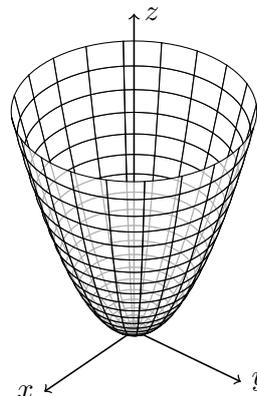
Par exemple, $y = x^2$ décrit une parabole:



L'équation explicite d'une surface est de la forme

$$z = f(x, y) .$$

Par exemple, $z = x^2 + y^2$ décrit un **paraboloïde de révolution**:

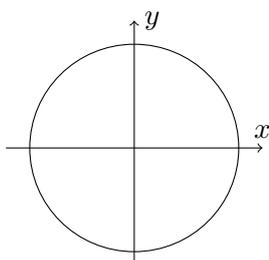


Remarque. Les courbes dessinées sur le paraboloïde de révolution suggèrent d'interpréter la surfaces de deux manières: comme un "empilement" de cercles (à une hauteur z_0 correspond un cercle horizontal $z_0 = x^2 + y^2$ de rayon $\sqrt{z_0}$), ou comme la rotation autour de l'axe Oz de la parabole $z = x^2$ contenue dans le plan Oxz .

Équations implicites. L'équation implicite d'une courbe du plan est une expression qui peut être réduite à

$$f(x, y) = 0 .$$

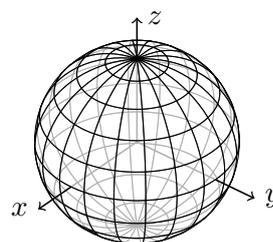
Par exemple, l'équation $x^2 + y^2 = r^2$ d'un cercle de rayon r est considérée comme implicite car on peut la ramener à $x^2 + y^2 - r^2 = 0$:



L'équation implicite d'une surface est une expression équivalente à

$$f(x, y, z) = 0 .$$

Par exemple, $x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0$, ou $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ décrit une sphère:

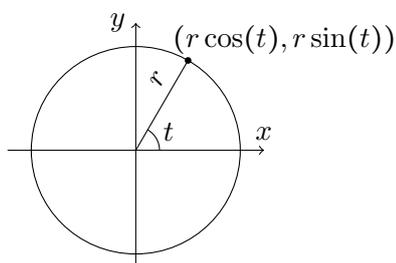


Remarque. Une équation explicite d'une courbe peut aussi être considérée comme une équation implicite: $y = f(x)$ peut être vue comme $f(x) - y = 0$, et $z = f(x, y)$ comme $f(x, y) - z = 0$.

Équations paramétriques. L'équation paramétrique d'une courbe du plan est une paire de fonctions à un paramètre:

$$(x(t), y(t)) \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) . \end{cases}$$

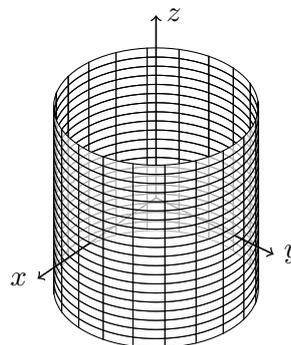
Par exemple, un cercle de rayon r peut être représenté par $(r \cos(t), r \sin(t))$:



L'équation paramétrique d'une surface est un triplet de fonctions à deux paramètres:

$$(x(s, t), y(s, t), z(s, t)) \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = f(s, t) \\ y = g(s, t) \\ z = h(s, t) . \end{cases}$$

Par exemple, un cylindre de rayon r peut être représenté par $(r \cos(t), r \sin(t), s)$:



Il est clair qu'une surface ou une courbe peut être représentée par une équation implicite aussi bien que paramétrique. Notons que dans le premier cas, il est important de spécifier le contexte; par exemple, l'équation

$$x^2 + y^2 = r^2$$

représente un *cercle* dans le plan, et un *cylindre* dans l'espace (la coordonnée z pouvant prendre

une valeur arbitraire). Les équations implicites sont utiles en particulier si l'on doit vérifier que deux représentations paramétriques représentent la même portion de courbe ou de surface.

6.2 Courbes de l'espace.

La représentation "explicite" d'une courbe de l'espace est relativement peu utile. Par contre, une courbe de l'espace peut être représentée "implicitement" comme l'intersection de deux surfaces:

$$\begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

Il est pourtant plus agréable de travailler avec une représentation paramétrique

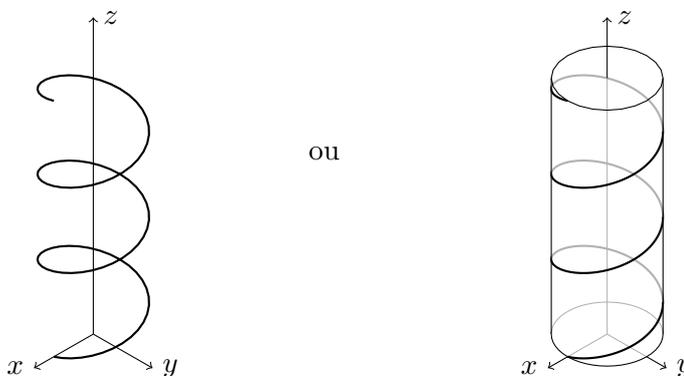
$$(x(t), y(t), z(t)) \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \\ z = h(t) . \end{cases}$$

Exemples.

- L'**hélice** est la courbe donnée paramétriquement par

$$(x(t), y(t), z(t)) = (r \cos(t), r \sin(t), t) .$$

Sa projection sur Oxy est un cercle de rayon r ; dans l'espace, cette courbe "monte" donc à vitesse constante, s'enroulant autour du cylindre $(r \cos(t), r \sin(t), s)$:



- Les équations implicites ne donnent pas nécessairement des représentations faciles à interpréter. Par exemple, pour une constante a , la courbe

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 \\ x^2 + y^2 = z \end{cases}$$

est l'intersection d'un cylindre de rayon a avec un parabolôide de révolution. On peut par contre paramétrer cette intersection par

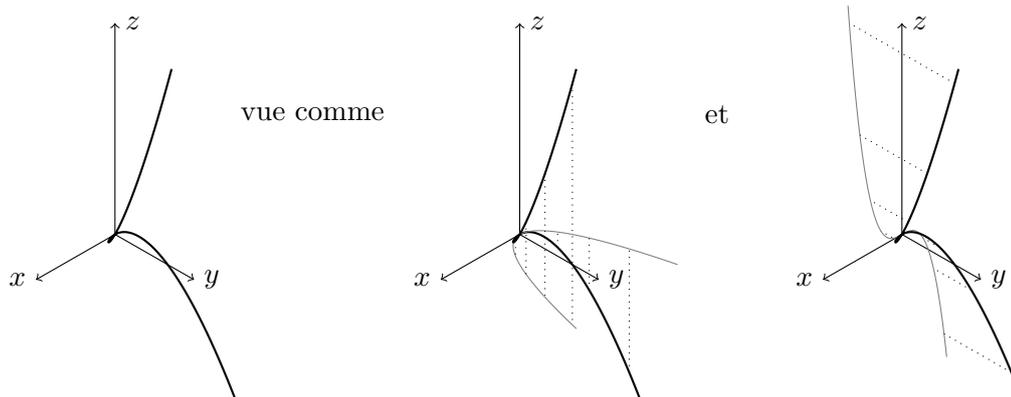
$$(a \cos(t), a \sin(t), a^2) .$$

La courbe est donc un cercle de rayon a posé sur le plan horizontal $z = a^2$.

- La **cubique tordue** est la courbe paramétrée par

$$(t, t^2, t^3) .$$

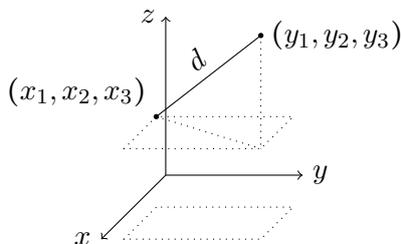
Pour la visualiser, on peut utiliser que sa projection (t, t^2) sur Oxy est une parabole et sa projection (t, t^3) sur Oxz est une cubique. Sans cette indication, sa représentation tridimensionnelle (à gauche ci-dessous) peut laisser perplexe:



Longueur d'une courbe de l'espace.

Rappelons que la distance entre deux points (x_1, x_2, x_3) et (y_1, y_2, y_3) de l'espace est donnée par

$$d = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + (y_3 - x_3)^2} :$$



Cette longueur peut être exprimée comme $\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}$, (où les Δ représentent les différences dans les directions respectives). En prenant deux points sur une courbe de l'espace

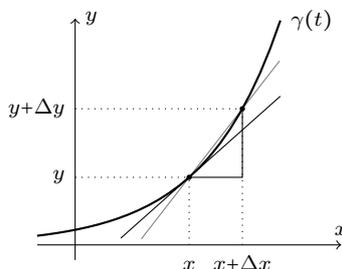
$$\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

et en considérant des différences Δ "infinitement petites", on trouve en raisonnant comme dans le cas des courbes planes (et avec $dx = x'(t) dt$, $dy = y'(t) dt$, $dz = z'(t) dt$) que la longueur d'arc de γ entre $t = a$ et $t = b$ vaut

$$L = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt .$$

Vecteurs tangents à une courbe paramétrée.

Donnée une courbe paramétrée du plan $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, des variations de Δx et Δy sur cette courbe vont permettre d'approximer la tangente lorsqu'ils deviennent de plus en plus petit:



(voir le cours de Mathématiques I); dans ce cas, le vecteur $(\Delta x, \Delta y)$ s'approche de (dx, dy) . Comme $dx = x'(t) dt$ et $dy = y'(t) dt$, on a

$$(dx, dy) = (x'(t), y'(t)) \cdot dt$$

dont on déduit que

$$\gamma'(t) = (x'(t), y'(t))$$

est un vecteur tangent à la courbe en $(x(t), y(t))$.

Le même raisonnement s'applique directement dans l'espace, et on obtient que le vecteur

$$\gamma'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$$

est un vecteur tangent à la courbe γ au point $(x(t), y(t), z(t))$. On écrit aussi parfois

$$(x'(t), y'(t), z'(t))_{\gamma(t)}$$

pour exprimer le fait que l'origine graphique du vecteur est $\gamma(t)$ plutôt que l'origine $(0, 0, 0)$.

6.3 Surfaces particulières.

Passons en revue quelques surfaces courantes avec leurs équations.

Plans.

Un plan de l'espace est déterminé par deux vecteurs (de directions différentes) $u = (u_1, u_2, u_3)$ et $w = (v_1, v_2, v_3)$ et un point (représenté par le vecteur $a = (a_1, a_2, a_3)$). Le plan peut donc être donné par une équation paramétrique (de paramètres s et t)

$$x = a + su + tv ,$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} x(s, t) = a_1 + su_1 + tv_1 \\ y(s, t) = a_2 + su_2 + tv_2 \\ z(s, t) = a_3 + su_3 + tv_3 . \end{cases}$$

Un plan peut aussi être représenté par une équation implicite:

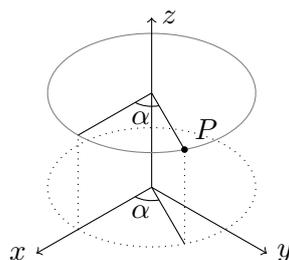
$$n_1x + n_2y + n_3z = c ,$$

où $n = (n_1, n_2, n_3)$ est un vecteur orthogonal au plan (voir le cours de Géométrie II pour les détails).

Surfaces de révolution.

Une **surface de révolution** est une surface obtenue en faisant tourner une courbe de l'espace autour d'un axe de rotation. Ici, nous prendrons presque toujours l'axe Oz comme axe de rotation, mais toute autre droite fait aussi bien l'affaire.

Pour la paramétrisation d'une telle surface, considérons une courbe de l'espace $\gamma(t)$ et $P = (x, y, z)$ un point de cette courbe. Lors de la rotation de $\gamma(t)$ autour de Oz , le point P va parcourir un cercle horizontal (de rayon $\sqrt{x^2 + y^2} = r$) à la hauteur du point P :



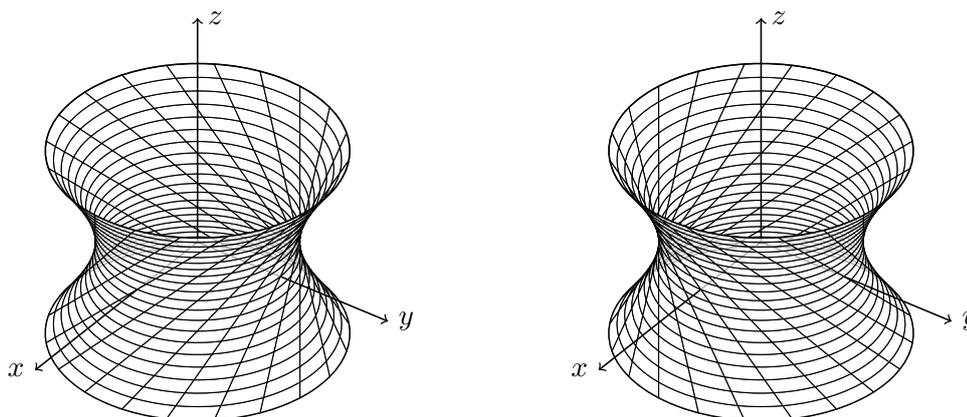
Une paramétrisation de ce cercle est $(r \cos(\alpha), r \sin(\alpha), c)$ avec $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ et $c = z$. En laissant varier les coordonnées de P le long de la courbe $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ et en prenant α comme second paramètre, on obtient une paramétrisation de la surface de révolution engendrée par γ :

$$\begin{cases} f(t, \alpha) = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2} \cdot \cos(\alpha) \\ g(t, \alpha) = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2} \cdot \sin(\alpha) \\ h(t, \alpha) = z(t) . \end{cases}$$

Exemple. On considère la droite $\gamma(t) = (1, t, t)$ (appartenant au plan perpendiculaire à Ox passant par $(1, 0, 0)$). La surface de révolution obtenue en faisant tourner cette droite autour de Oz peut être paramétrée par

$$(\sqrt{1+t^2} \cdot \cos(\alpha), \sqrt{1+t^2} \cdot \sin(\alpha), t) .$$

Cette surface est un **hyperboloïde à une nappe** qui peut également être vue comme le résultat de la rotation de la droite $(1, t, -t)$ autour du même axe:



Cas particulier. Si la courbe γ et l'axe de rotation appartiennent au même plan, la paramétrisation prend une forme plus simple. Par exemple, si Oz est l'axe de rotation et γ est dans le plan Oxz , c'est-à-dire

$$\gamma(t) = (x(t), 0, z(t)) ,$$

la paramétrisation de la surface de révolution engendrée devient

$$\begin{cases} f(t, \alpha) = x(t) \cdot \cos(\alpha) \\ g(t, \alpha) = x(t) \cdot \sin(\alpha) \\ h(t, \alpha) = z(t) . \end{cases}$$

Exemples.

- Si $\gamma(t)$ est l'hyperbole $(\cosh(t), 0, \sinh(t))$, on obtient la surface paramétrée

$$(\cosh(t) \cdot \cos(\alpha), \cosh(t) \cdot \sin(\alpha), \sinh(t)) .$$

Cela suggère une équation implicite pour l'hyperboloïde à une nappe:

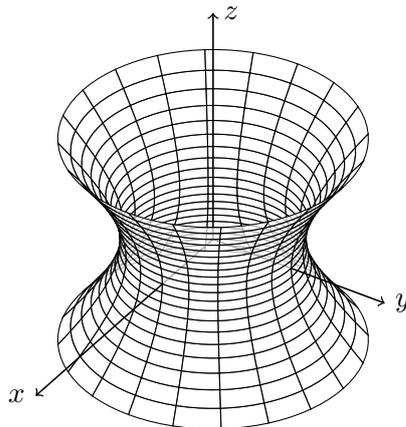
$$x^2 + y^2 - z^2 = 1$$

(on exploite que $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$ et $\cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1$).

La surface $(\sqrt{1+t^2} \cdot \cos(\alpha), \sqrt{1+t^2} \cdot \sin(\alpha), t)$ obtenue plus tôt comme surface de révolution engendrée par une droite satisfait aussi cette équation, ce qui confirme qu'elle est aussi une paramétrisation de l'hyperboloïde à une nappe. En observant bien cette dernière paramétrisation, on voit que l'hyperboloïde à une nappe est aussi obtenue en faisant tourner la courbe

$$\gamma(t) = (\sqrt{1+t^2}, 0, t)$$

autour de l'axe Oz :

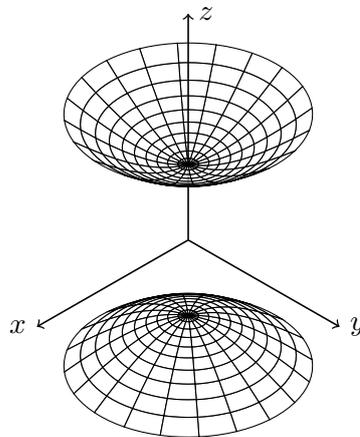


- En faisant tourner les deux branches d'hyperboles $(\sinh(t), 0, \pm \cosh(t))$ autour de l'axe Oz , on obtient deux morceaux de surfaces paramétrées

$$(\sinh(t) \cdot \cos(\alpha), \sinh \cdot \sin(\alpha), \pm \cosh(t))$$

formant l'**hyperboloïde à deux nappes**

$$x^2 + y^2 - z^2 = -1 :$$

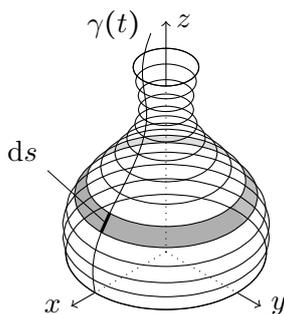


Aire d'une surface de révolution et volume engendré.

Si la courbe $\gamma(t)$ appartient au même plan que l'axe de rotation, il devient facile de calculer l'aire latérale et le volume engendré par la surface de révolution. Supposons que l'axe de rotation est Oz est que la courbe γ est de la forme

$$\gamma(t) = (x(t), 0, z(t)) .$$

Pour évaluer l'**aire latérale**, on découpe la surface en bandelettes horizontales:



De 3.2, on sait que l'“élément d'arc” de γ est

$$ds = \sqrt{x'(t)^2 + z'(t)^2} dt .$$

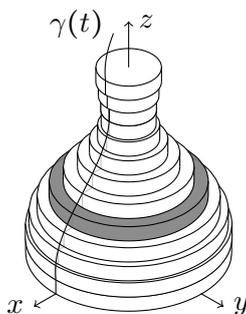
En “sommant” les aires

$$2\pi \cdot x(t) \cdot \sqrt{x'(t)^2 + z'(t)^2} dt$$

des bandelette infiniment fines, on obtient que l'aire latérale de la surface de révolution entre les points donnés par $t = a$ et $t = b$ est

$$A_{\text{lat}} = 2\pi \cdot \int_a^b x(t) \cdot \sqrt{x'(t)^2 + z'(t)^2} dt .$$

Pour évaluer le **volume engendré** par la surface de révolution, on effectue un découpage en fines lamelles (comme pour le calcul du volume de la sphère vu au cours de Mathématiques I):



La hauteur d'une des lamelles est Δz , et plus cette hauteur sera petite, plus elle s'approchera de la hauteur infinitésimale $dz = z'(t) dt$. En faisant la “somme infinie” des volumes des cylindres “infiniment fins”

$$\pi \cdot x(t)^2 \cdot z'(t) dt$$

on obtient le volume du solide de révolution engendré par la rotation de $\gamma(t)$ autour de Oz (pour t allant de a à b):

$$V = \pi \cdot \int_a^b x(t)^2 \cdot z'(t) dt .$$

Surfaces réglées.

Intuitivement, une surface réglée est une surface balayée par une famille de droites (ou segments de droites). Mathématiquement, on commence par se donner deux courbes paramétrées

$$\alpha(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t)) \quad \text{et} \quad \beta(t) = (y_1(t), y_2(t), y_3(t)) .$$

Pour un t fixé, la droite entre les points $\alpha(t)$ et $\beta(t)$ est donnée par

$$\gamma(s) = (1-s) \cdot \alpha(t) + s \cdot \beta(t)$$

(voir le cours de Géométrie II), ou composante par composante via

$$\gamma(s) = ((1-s) \cdot x_1 + s \cdot y_1, (1-s) \cdot x_2 + s \cdot y_2, (1-s) \cdot x_3 + s \cdot y_3) .$$

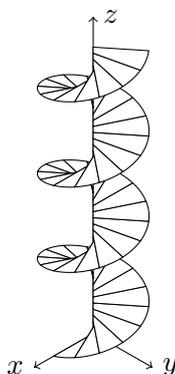
En laissant varier t , on obtient une surface paramétrée par s et t

$$S(s, t) = (1-s) \cdot \alpha(t) + s \cdot \beta(t) \quad \text{ou} \quad \begin{cases} f(s, t) = (1-s) \cdot x_1(t) + s \cdot y_1(t) \\ g(s, t) = (1-s) \cdot x_2(t) + s \cdot y_2(t) \\ h(s, t) = (1-s) \cdot x_3(t) + s \cdot y_3(t) . \end{cases}$$

Exemples.

- En reliant la droite verticale $\alpha(t) = (0, 0, t)$ à l'hélice $\beta(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$, on obtient une paramétrisation de l'**hélicoïde**:

$$(s \cdot \cos(t), s \cdot \sin(t), t) .$$



- L'hyperboloïde à une nappe (voir 6.3) est évidemment une surface réglée. On peut prendre par exemple les deux cercles

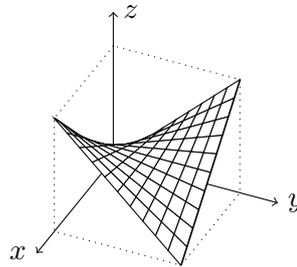
$$\alpha(t) = (\cos(t), \sin(t), 0) \quad \text{et} \quad \beta(t) = (\sqrt{2} \cos(t + \frac{\pi}{4}), \sqrt{2} \sin(t + \frac{\pi}{4}), 1)$$

pour paramétriser cette surface. Après calculs, on obtient

$$(\cos(t) - s \cdot \sin(t), \sin(t) + s \cdot \cos(t), s) .$$

L'hyperboloïde à une nappe est en fait une surface **doublement réglée**, c'est-à-dire qu'elle peut indifféremment être balayée par l'une de deux familles distinctes de droites.

- Le **paraboloïde hyperbolique** est la surface réglée engendrée par deux droites gauches: il s'agit aussi d'une surface doublement réglée (exercice 2, Série 12):



Remarque. En architecture, les surface réglées ont l'avantage de pouvoir être réalisées en béton via un coffrage linéaire (on peut donc utiliser des planches... plates!). Les surface doublement réglées peuvent de plus être armées de tiges droites dans deux directions différentes.

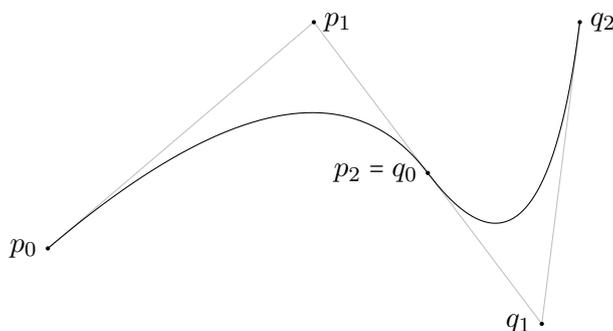
7 Courbes de Bézier

Les *courbes de Bézier* sont à la base de nombreux logiciels graphiques pour le dessin de courbes, et elles doivent leur nom à Pierre Bézier (ingénieur français chez Renault, 1910–1999) et Paul De Casteljau (mathématicien et physicien français chez Citroën, né en 1930) qui ont largement contribué à les faire connaître. Ce sont pourtant Charles Hermite (mathématicien français, 1822–1901) et Sergei Bernstein (mathématicien russe, 1880–1968) qui sont à l'origine des mathématiques développées pour l'étude de ces courbes.

Principe. On se donne un certain nombre de points du plan ou de l'espace via n vecteurs (usuellement $n = 2$ ou $n = 3$)

$$p_0, p_1, \dots, p_n$$

qui engendrent ensuite une portion de courbe. Cette opération peut être répétée à l'envi pour générer une courbe d'aspect complexe:



Dans ce qui suit, les illustrations données seront des courbes du plan, mais la théorie s'applique aussi bien au plan qu'à l'espace: les vecteurs p_0, p_1, \dots, p_n peuvent être choisis indifféremment à deux ou trois composantes.

7.1 Courbes de Bézier linéaires.

Le segment reliant les points représentés par deux vecteurs p_0 et p_1 est

$$\gamma(t) = (1-t) \cdot p_0 + t \cdot p_1 \quad \text{avec } 0 \leq t \leq 1.$$

Cette courbe est la **courbe de Bézier linéaire** (ou **courbe de Bézier de degré 1**) avec **points de contrôle** p_0 et p_1 :



Même si la courbe obtenue n'est pas très impressionnante, on observe déjà que

$$\gamma(0) = p_0, \quad \gamma(1) = p_1 \quad \text{et} \quad \gamma'(t) = p_1 - p_0.$$

Remarque. Pour le calcul de la dérivée de γ , on peut traiter les vecteurs comme des constantes. En effet, si

$$p_0 = (x_0, y_0) \quad \text{et} \quad p_1 = (x_1, y_1) ,$$

on a

$$\gamma(t) = ((1-t) \cdot x_0 + t \cdot x_1, (1-t) \cdot y_0 + t \cdot y_1)$$

— et on constate déjà l'avantage de la notation vectorielle $\gamma(t) = (1-t) \cdot p_0 + t \cdot p_1$. La dérivée s'obtient ensuite composante par composante (voir 6.2):

$$\gamma'(t) = (x_1 - x_0, y_1 - y_0) .$$

On se rend compte que chaque composante est traitée de la même manière: l'écriture $\gamma'(t) = p_1 - p_0$ est donc bien plus économique et efficace pour les calculs.

7.2 Courbes de Bézier quadratiques.

Avec trois vecteurs p_0, p_1, p_2 , on peut paramétriser deux segments

$$\alpha(t) = (1-t) \cdot p_0 + t \cdot p_1 \quad \text{et} \quad \beta(t) = (1-t) \cdot p_1 + t \cdot p_2$$

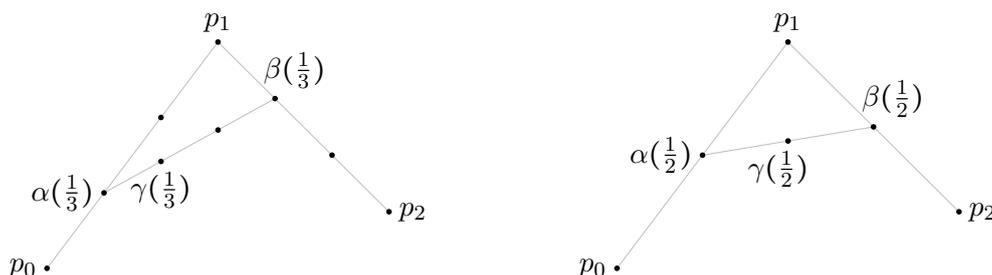
avec $0 \leq t \leq 1$. Pour un t fixé, on considère le segment de $\alpha(t)$ à $\beta(t)$

$$c(s) = (1-s) \cdot \alpha(t) + s \cdot \beta(t)$$

avec $0 \leq s \leq 1$. En posant $s = t$, on obtient un point

$$\gamma(t) = (1-t) \cdot \alpha(t) + t \cdot \beta(t)$$

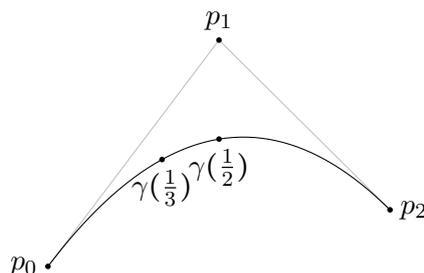
sur le segment reliant $\alpha(t)$ à $\beta(t)$ qui le subdivise dans la même proportion que $\alpha(t)$ subdivise le segment p_0p_1 et $\beta(t)$ subdivise le segment p_1p_2 :



En laissant le paramètre t varier, la courbe

$$\gamma(t) = (1-t) \cdot \alpha(t) + t \cdot \beta(t) \quad \text{avec } 0 \leq t \leq 1$$

donne la **courbe de Bézier quadratique** (ou **courbe de Bézier de degré 2**) avec **points de contrôle** p_0, p_1, p_2 :



En remplaçant $\alpha(t)$ et $\beta(t)$ par leurs expressions explicites dans $\gamma(t)$, on trouve

$$\gamma(t) = (1-t) \cdot ((1-t) \cdot p_0 + t \cdot p_1) + t \cdot ((1-t) \cdot p_1 + t \cdot p_2)$$

c'est-à-dire

$$\gamma(t) = (1-t)^2 \cdot p_0 + 2t(1-t) \cdot p_1 + t^2 \cdot p_2 . \quad (*)$$

On a bien sûr

$$\gamma(0) = p_0 \quad \text{et} \quad \gamma(1) = p_2 .$$

Pour la dérivée (et donc les vecteurs tangents) de γ , on rappelle que

$$\alpha'(t) = p_1 - p_0 \quad \text{et} \quad \beta'(t) = p_2 - p_1 ,$$

puis on calcule

$$\begin{aligned} \gamma'(t) &= -\alpha(t) + (1-t) \cdot \alpha'(t) + \beta(t) + t \cdot \beta'(t) \\ &= \beta(t) - \alpha(t) + (1-t) \cdot (p_1 - p_0) + t \cdot (p_2 - p_1) \\ &= \beta(t) - \alpha(t) + (1-t) \cdot p_1 + t \cdot p_2 - (1-t) \cdot p_0 - t \cdot p_1 \\ &= \beta(t) - \alpha(t) + \beta(t) - \alpha(t) = 2(\beta(t) - \alpha(t)) , \end{aligned}$$

d'où en particulier $\gamma'(0) = 2(p_1 - p_0)$ et $\gamma'(1) = 2(p_2 - p_1)$.

Conclusion. Les conditions

$$\gamma(0) = p_0 \quad \text{et} \quad \gamma(1) = p_2$$

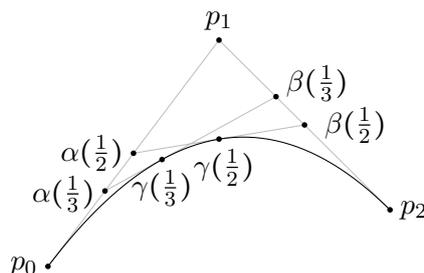
indiquent que $\gamma(t)$ passe bien par p_0 et p_2 . Comme de plus

$$\gamma'(t) = 2(\beta(t) - \alpha(t)) ,$$

le segment de $\alpha(t)$ à $\beta(t)$ utilisé pour construire $\gamma(t)$ est tangent à la courbe γ en ce point. En particulier, les conditions

$$\gamma'(0) = 2(p_1 - p_0) \quad \text{et} \quad \gamma'(1) = 2(p_2 - p_1)$$

impliquent que les vecteurs $p_1 - p_0$ et $p_2 - p_1$ sont tangents à γ en p_0 et p_2 respectivement. Par définition, γ reste aussi confinée au triangle $p_0p_1p_2$, mais ne passe en général *pas* par p_1 :



Exemple. Calculons la courbe de Bézier quadratique associée aux points de contrôle $p_0 = (1, 2)$, $p_1 = (3, -4)$ et $p_2 = (-1, 3)$ avec la formule $(*)$:

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= (1 - t)^2 \cdot p_0 + 2t(1 - t) \cdot p_1 + t^2 \cdot p_2 \\ &= (t^2 - 2t + 1, 2t^2 - 4t + 2) + (-6t^2 + 6t, 8t^2 - 8t) + (-t^2, 3t^2) \\ &= (-6t^2 + 4t + 1, 13t^2 - 12t + 2) . \end{aligned}$$

Ce résultat confirme qu'une courbe de Bézier quadratique est une courbe paramétrée par des polynômes de degré 2, mais elle ne donne aucune information explicite sur le dessin de la courbe.

7.3 Courbes de Bézier cubiques.

Avec quatre points de contrôle p_0, p_1, p_2, p_3 , on peut décrire les courbes de Bézier quadratiques

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= (1 - t)^2 \cdot p_0 + 2(1 - t)t \cdot p_1 + t^2 \cdot p_2 \\ \beta(t) &= (1 - t)^2 \cdot p_1 + 2(1 - t)t \cdot p_2 + t^2 \cdot p_3 \end{aligned}$$

Pour t fixé, la droite entre $\alpha(t)$ et $\beta(t)$ est donnée par $c(s) = (1 - s)\alpha(t) + s\beta(t)$. Avec $t = s$ dans ce paramétrage, on obtient la courbe

$$\gamma(t) = (1 - t) \cdot \alpha(t) + t \cdot \beta(t) ;$$

en y insérant les expressions explicites de $\alpha(t)$ et $\beta(t)$, on décrit la **courbe de Bézier cubique** (ou **courbe de Bézier de degré 3**) avec **points de contrôle** p_0, p_1, p_2, p_3 :

$$\gamma(t) = (1 - t)^3 \cdot p_0 + 3(1 - t)^2t \cdot p_1 + 3(1 - t)t^2 \cdot p_2 + t^3 \cdot p_3 \quad \text{avec } 0 \leq t \leq 1.$$

Remarquons en passant l'apparition des termes 1, 3, 3, 1 de la 3^e ligne du triangle de Pascal.

Théorème. Si $\gamma(t) = (1 - t) \cdot \alpha(t) + t \cdot \beta(t)$ est la courbe de Bézier cubique construite comme ci-dessus, alors on a

$$\gamma'(t) = 3(\beta(t) - \alpha(t)) .$$

En particulier,

$$\gamma(0) = p_0 , \quad \gamma(1) = p_3 , \quad \gamma'(0) = 3(p_1 - p_0) , \quad \gamma'(1) = 3(p_3 - p_2) .$$

Proof. Définissons les polynômes

$$B_0(t) = (1 - t)^3 , \quad B_1(t) = 3(1 - t)^2t , \quad B_2(t) = 3(1 - t)t^2 , \quad B_3(t) = t^3 ,$$

souvent appelés **polynômes de Bernstein**. Ces polynômes apparaissent bien sûr dans l'expression de la courbe de Bézier cubique

$$\gamma(t) = B_0(t) \cdot p_0 + B_1(t) \cdot p_1 + B_2(t) \cdot p_2 + B_3(t) \cdot p_3 .$$

Comme

$$B'_0(t) = -3(1-t)^2 , \quad B'_1(t) = -6(1-t)t + 3(1-t)^2 , \quad B'_2(t) = -3t^2 + 6(1-t)t , \quad B'_3(t) = 3t^2 ,$$

on peut facilement calculer la dérivée de γ :

$$\begin{aligned} \gamma'(t) &= B'_0(t) \cdot p_0 + B'_1(t) \cdot p_1 + B'_2(t) \cdot p_2 + B'_3(t) \cdot p_3 \\ &= -3(1-t)^2 \cdot p_0 - 6(1-t)t \cdot p_1 - 3t^2 \cdot p_2 + 3(1-t)^2 \cdot p_1 + 6(1-t)t \cdot p_2 + 3t^2 \cdot p_3 \\ &= 3(\beta(t) - \alpha(t)) , \end{aligned}$$

Ceci démontre le résultat voulu (les autres affirmations découlent facilement en remplaçant $t = 0$ ou $t = 1$ dans les expressions correspondantes). □

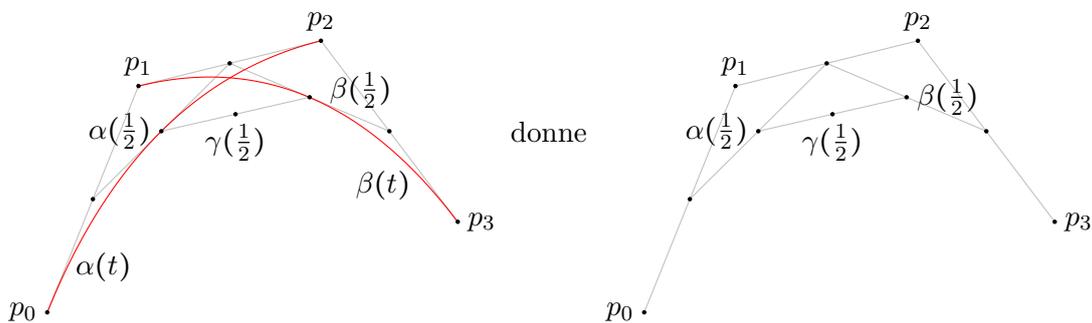
Conclusion. Le théorème montre qu'en augmentant le degré de la courbe de Bézier de 1, les propriétés de la courbe sont conservées: la courbe passe par le premier et dernier point de contrôle p_0 et p_3 respectivement, elle est tangente en p_0 à la droite p_0p_1 et en p_3 à la droite p_2p_3 , et elle est tangente en $\gamma(t)$ au segment allant de $\alpha(t)$ et $\beta(t)$.

7.4 L'algorithme de Casteljau.

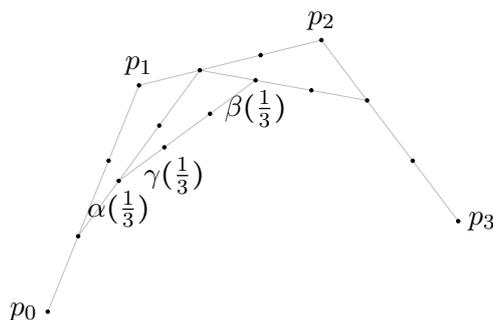
L'**algorithme de Casteljau** est une suite d'instructions facilement programmables qui permettent de dessiner rapidement une courbe de Bézier. Il suffira pour nous de relire nos définitions.

Considérons une courbe de Bézier quadratique γ avec points de contrôle p_0, p_1, p_2 . Pour construire $\gamma(\frac{1}{2})$ par exemple, on avait trouvé $\alpha(\frac{1}{2})$ et $\beta(\frac{1}{2})$ au milieu des segments p_0p_1 et p_1p_2 respectivement, puis $\gamma(\frac{1}{2})$ au milieu du segment de $\alpha(\frac{1}{2})$ à $\beta(\frac{1}{2})$ (voir 7.2).

Pour une courbe de Bézier cubique, on procède de même en gardant en tête que $\alpha(t)$ et $\beta(t)$ sont maintenant des courbes de Bézier quadratiques et que $\alpha(\frac{1}{2})$ et $\beta(\frac{1}{2})$ doivent être construits comme au paragraphe précédent:



On remarque que l'on n'a pas besoin de *tracer* les courbes $\alpha(t)$ et $\beta(t)$, mais seulement les points et les segments utiles pour construire $\alpha(\frac{1}{2})$ et $\beta(\frac{1}{2})$ (dessin à droite ci-dessus). Cette construction peut bien sûr être répétée pour n'importe quelle autre valeur de t entre 0 et 1; par exemple pour $t = \frac{1}{3}$ on obtient:

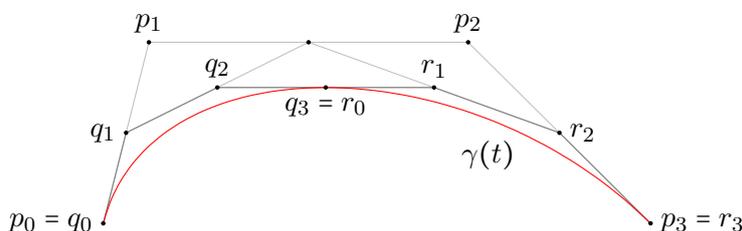


7.5 Subdivision d’une courbe de Bézier.

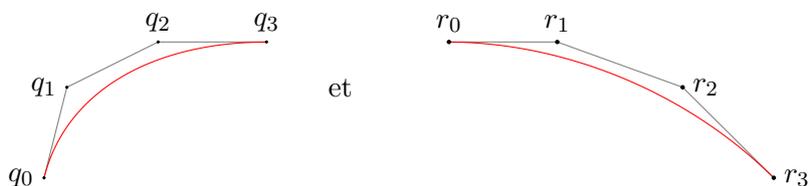
Le dessin d’une courbe de Bézier est encore facilité grâce au résultat suivant (livré sans preuve).

Théorème. Soit $\gamma(t)$ une courbe de Bézier de degré $n + 1$ avec points de contrôle p_0, p_1, \dots, p_n . Pour un t donné, les $n + 1$ “premiers” et $n + 1$ “derniers” points utilisés pour construire $\gamma(t)$ dans l’algorithme de Casteljau sont les points de contrôle de deux courbes de Bézières consécutives dont le dessin se confond avec $\gamma(t)$.

Les termes “premiers” et “derniers” ne sont pas définis ici de manière formelle, mais une illustration du théorème suffit pour nous éclairer sur ces termes. Par exemple, la courbe de Bézier cubique $\gamma(t)$ avec points de contrôle p_0, p_1, p_2, p_3

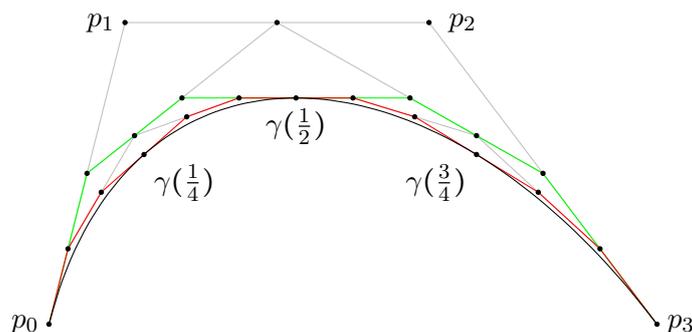


est constituée des deux courbes de Bézières cubiques avec points de contrôle q_0, q_1, q_2, q_3 et r_0, r_1, r_2, r_3 respectivement:



En particulier, le point de contrôle $q_3 = r_0$ partagé par ces deux courbes de Bézières est un point de la courbe originale $\gamma(t)$ (dans le cas présent, on a utilisé $q_3 = r_0 = \gamma(\frac{1}{2})$).

Application. Le dessin d'une courbe de Bézier peut être obtenu par subdivision. Cela permet de raffiner la technique de dessin précédente: au lieu de subdiviser les segments p_0p_1 , p_1p_2 , etc., on peut subdiviser les segments utilisés lors de la construction du point $\gamma(t)$ de la courbe. Ci-dessous, on construit d'abord le point $\gamma(\frac{1}{2})$ de la courbe de Bézier cubique avec points de contrôle p_0, p_1, p_2, p_3 , puis on utilise les traits de constructions (en vert) pour construire $\gamma(\frac{1}{4})$ et $\gamma(\frac{3}{4})$ de la même manière:



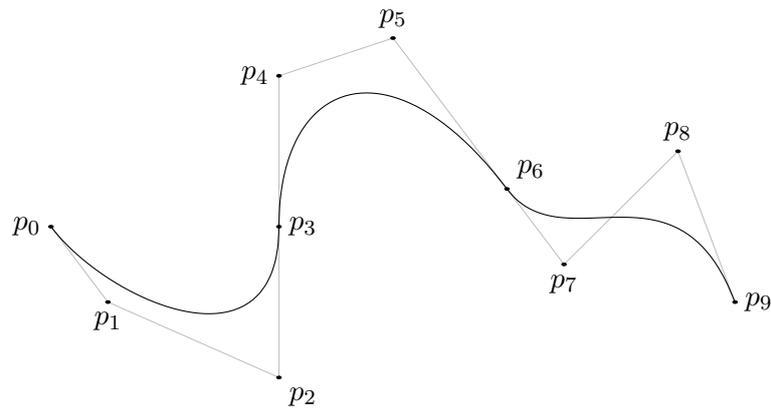
L'avantage non négligeable pour un ordinateur (qui calcule en base 2) est que la division par 2 est une opération extrêmement rapide. De plus, on observe que les traits de constructions s'approchent de plus en plus de la courbe de Bézier $\gamma(t)$. En fait, ces traits fournissent des approximations successives qui permettent aux ordinateurs de remplacer le dessin de la courbe γ par un dessin d'une courbe polygonale (c'est-à-dire constituée de segments de droites); à une certaine précision, l'œil humain ne fait plus la différence. Ci-dessus, la courbe en vert est la première approximation de la courbe $\gamma(t)$, et la courbe en rouge la seconde — dessinée avec seulement trois vrais points de la courbe.

7.6 Recollements de courbes de Bézier. Comme indiqué dans l'introduction, les courbes de Béziens sont conçues pour être collées les unes aux autres. Par exemple, si on veut recoller n courbes de Bézier cubiques, on aura $3n + 1$ points de contrôle

$$p_0, p_1, \dots, p_{3n} .$$

Les points $p_0, p_3, p_6, \dots, p_{3n}$ par lesquels passent effectivement la courbe sont aussi appelés les **points d'ancrage** de la courbe, les autres points $p_1, p_2, p_4, p_5, \dots, p_{3n-2}, p_{3n-1}$ seront alors les **points de direction**.

Comme les courbes sont consécutives, les points d'ancrage $p_3, p_6, \dots, p_{3(n-1)}$ seront des points de contrôle de deux courbes de Bézier (l'une arrivant, l'autre partant). Pour que la courbe ait un aspect lisse, les points de direction directement avant et après un point d'ancrage doivent être alignés: p_2, p_3, p_4 sont sur une même droite (qui sera la tangente à la courbe), de même pour p_5, p_6, p_7 , etc. Finalement, en choisissant chaque point d'ancrage comme le milieu du segment du point de direction qui le précède et de celui qui le suit, la *courbure* de la courbe finale ne fera pas de "sauts". Comme ces sauts dans la courbure ne sont pas nécessairement faciles à repérer à l'œil nu, cette dernière condition peut être ignorée:

**Le mot de la fin.**

Bien que très simples conceptuellement, les courbes de Bézier possèdent un certain nombre de défauts. Par exemple, si on bouge un point de contrôle, *toute* la courbe en sera modifiée. On aura aussi remarqué que la courbe ne passe pas nécessairement par tous les points de contrôle ce qui peut rendre son contrôle (justement!) délicat. Plus formellement, des coniques aussi simples que le cercle ne peuvent pas être reproduites *exactement* en recollant des morceaux de courbes de Bézier. Pour toutes ces raisons, ces courbes ont subi de nombreuses généralisations (courbes de Bézier rationnelles, B-splines, NURBS) en vue de faciliter leur utilisation en informatique pour la représentation de courbes ou de surfaces.