Mathématiques I

Giordano Favi*

Janvier 2018

*Ces notes de cours sont quasi intégralement dues à Gavin J. Seal.

Table des matières

Ce cours est en grande partie basé sur l'ouvrage suivant:

E. Hairer et G. Wanner, *L'Analyse au Fil de l'Histoire*, éditions Springer.

1 Fonctions élémentaires

1.1 Fonctions polynomiales.

Dans ses *Œuvres* (vol.7, p.271), Joseph-Louis Lagrange (mathématicien italo-français, 1736–1813) écrivait en 1795:

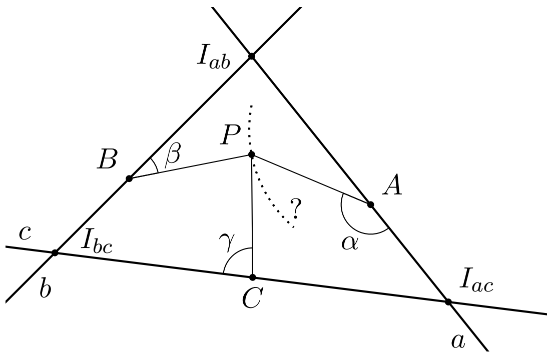
> Tant que l'Algèbre et la Géométrie ont été séparées, leurs progrès ont été lents et leurs usages bornés; mais lorsque ces deux sciences se sont réunies, elles se sont prêtées des forces mutuelles et ont marché ensemble d'un pas rapide vers la perfection. C'est à Descartes qu'on doit l'application de l'Algèbre à la Géométrie, application qui est devenue la clef des plus grandes découvertes dans toutes les branches des Mathématiques.

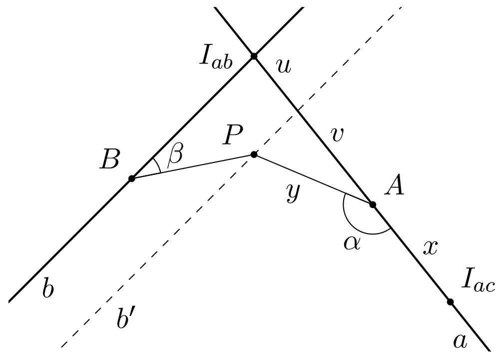
L'algèbre au secours de la géométrie.

En l'an 350, Pappus d'Alexandrie (l'un des derniers grands mathématiciens de la Grèce antique, *c*.290–*c*.350) posait le problème suivant—traduit ici en notations modernes:

> Soient trois droites a, b, c et trois angles α, β, γ donnés. Pour un point P arbitraire, soient A, B, C les points sur a, b, c tels que les lignes PA, PB, PC forment respectivement avec a, b, c les angles α, β, γ. On veut connaître le lieu des points P pour lesquels
>
> $$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = (\overline{PC})^2 \ . \qquad (*)$$

La première des figures ci-dessous illustre cette situation dans le cas où les trois droites forment un triangle de sommets I_{ab}, I_{bc}, I_{ac}:





Ce n'est qu'en 1637 que René Descartes (philosophe, mathématicien, et physicien français, 1596–1650) publia la solution dans *La Géométrie*, un ouvrage qui révolutionna la géométrie en y introduisant des méthodes algébriques. Voyons la solution que Descartes propose.

Dans la seconde figure ci-dessus, ignorons la droite c et traçons la parallèle b' à b par le point P; l'intersection de b' et a détermine deux longueurs v et u sur a. Grâce au Théorème de Thalès, nous voyons que même si le point P bouge, il existe deux constantes K_1 et K_2 avec

$$u = K_1 \cdot \overline{PB} \quad \text{et} \quad v = K_2 \cdot y$$

(où $y := \overline{PA}$ et $x := \overline{AI_{ac}}$). En remplaçant ces valeurs dans l'égalité $\overline{I_{ab}I_{ac}} = u + v + x$ et résolvant pour $\overline{PB}$, nous trouvons que $\overline{PB}$ est de la forme (voir Série 1, Exercice 1):

$$\overline{PB} = l + mx + ny \quad \text{avec } l,\ m, \text{ et } n \text{ des constantes.}$$

En procédant de la même manière pour b remplacé par c, nous trouvons

$$\overline{PC} = o + px + qy \quad \text{avec } o,\ p, \text{ et } q \text{ des constantes.}$$

L'équation $(*)$ devient donc

$$y \cdot (l + mx + ny) = (o + px + qy)^2 \ ,$$

et donne une expression de la forme

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \ .$$

Cette équation est la formule générale d'une conique, mais nous n'entrerons pas dans plus de détails pour l'instant. Notons seulement que pour chaque y fixé, cette équation est une équation quadratique dont la solution est fournie par la formule quadratique

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \ ,$$

(où $a = A$, $b = By + D$, $c = Cy^2 + Ey + F$) et que nous sommes donc en mesure—avec beaucoup de patience ou un ordinateur—de dessiner les points de la courbe solution du problème posé par Pappus.

La géométrie au secours de l'algèbre.

La formule quadratique rappelée ci-dessus donne la solution générale d'une équation de la forme

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{avec } a,\ b, \text{ et } c \text{ des constantes.}$$

Les Babyloniens, en 2000 av. J.-C., savaient déjà résoudre certaines de ces équations, mais la première publication de la solution générale semble apparaître dans l'œuvre du mathématicien judéo-espagnol Abraham bar Hiyya (1070–1136). Il en est de même pour les équations cubiques, dont la solution générale a été découverte indépendemment par Scipione del Ferro (mathématicien italien, 1465–1526) et Niccolò Fontana Tartaglia (mathématicien italien, 1499–1557), et publiée en 1545 par Gerolamo Cardano (mathématicien italien, 1501–1576). Ce volume—qui présentait également la solution générale des équations du *quatrième degré*, découverte en 1540 par un étudiant de Cardano, Lodovico Ferrari (1522–1565)—fut la source d'une violente dispute entre Tartaglia et Cardano qui mena à la ruine du premier[1]. Les équations de degrés supérieurs

[1] En 1539, Tartaglia révélait à Cardano sa solution pour la résolution des équations du troisième degré—sous la condition que Cardano ne la publie jamais, ou seulement après en avoir laissé l'occasion à Tartaglia. En 1543, Cardano prit connaissance de la solution de del Ferro, et en profita pour contourner la promesse faite à Tartaglia: Cardano pouvait publier la solution de *del Ferro* (ce faisant, il n'oublia pas pour autant de créditer Tartaglia pour sa solution). Convaincu que Cardano n'avait pas tenu sa promesse, Tartaglia lui lança un défi—qui fut finalement relevé par Ferrari. Dans la joute mathématique qui suivit, Ferrari obtint le meilleur résultat, et Tartaglia y perdit son prestige et sa fortune.

résistèrent encore plus de deux siècles jusqu'en 1799, quand Paolo Ruffini (mathématicien, docteur, et philosophe italien, 1765–1822) prouva qu'une solution générale, utilisant des fractions, des racines, *etc.*, *n'existe pas*! En vérité, sa preuve se révéla être incomplète, mais l'idée était lancée—et la preuve corrigée en 1824 par les travaux d'un jeune mathématicien norvégien, Niels Enrik Abel (1802–1829).

Nous ne nous attarderons pas ici sur le détail de ces résultats, mais retiendrons seulement qu'une des solutions de l'équation

$$x^3 + px + q = 0 \tag{$\dagger$}$$

est donnée par:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}\ .$$

Par exemple, pour

$$x^3 + 6x - 20 = 0$$

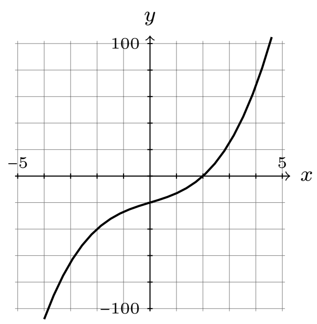
nous obtenons

$$x = \sqrt[3]{10 + \sqrt{108}} + \sqrt[3]{10 - \sqrt{108}}\ .$$

Ici, c'est au tour de la géométrie de venire en aide à l'algèbre. En effet, les solutions réelles de (†) sont aussi données par l'intersection de la courbe définie par

$$y = x^3 + px + q$$

avec l'axe des abscisses $y = 0$. Ci-dessous, est représentée la courbe des points (x, y) tels que $y = x^3 + 6x - 20$:



Nous observons qu'il n'y a qu'une solution, qui semble être $x = 2\ldots$ ce qui est bien le cas: $2^3 + 6 \cdot 2 - 20 = 0$. Aidés par la géométrie, nous concluons que $\sqrt[3]{10 + \sqrt{108}} + \sqrt[3]{10 - \sqrt{108}}$ est juste une manière savante d'écrire 2!

Définition. Un **polynôme** est une expression algébrique de la forme

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

où $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1, a_0$ sont des constantes arbitraires. Si $a_n \neq 0$, le polynôme est de **degré** n.

Polynômes d'interpolation.

En présence d'une table de valeurs partielles d'une certaine fonction f, par exemple les valeurs suivantes:

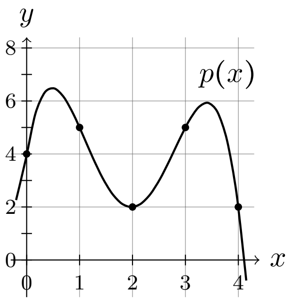
x	0	1	2	3	4
$f(x)$	4	5	2	5	2

il est fréquent de vouloir obtenir "la meilleure approximation" d'une valeur intermédiaire; par exemple, que vaut $f(x)$ si $x = 2.5$? Ce genre de problème apparut avec les premières "tables de logarithmes" utilisés par les scientifiques et les ingénieurs dès le début du XVII$^{\text{e}}$ siècle. Des solution apparaissent déjà dans les travaux de Henry Briggs (mathématicien anglais, 1561–1630) et de Thomas Harriot (astronome, mathématicien, ethnographe, et traducteur anglais, 1560–1621), mais c'est la présentation d'Isaac Newton (mathématicien, astronome, philosophe, alchimiste, et théologien anglais, 1643–1727) que l'Histoire semble retenir.

Problème. Donnés $n+1$ points (x_i, y_i), appelés **points d'interpolation**, trouver un polynôme de degré n qui passe par tous ces points. Nous nous intéresserons au cas où les x_i sont équidistants, et même où

$$x_0 = 0 \ , \quad x_1 = 1 \ , \quad x_2 = 2 \ , \quad x_3 = 3 \ , \quad \ldots$$

Une solution $p(x)$ pour les valeurs données dans la table ci-dessus serait de la forme



Voyons comment Newton propose de trouver un tel polynôme pour quatre points d'interpolation

$$(0, y_0) \ , \quad (1, y_1) \ , \quad (2, y_2) \ , \quad (3, y_3) \ .$$

Nous voulons un polynôme de degré 3:

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 = y$$

qui passe par ces 4 points; en les subsituant dans le polynôme, nous obtenons

Abscisse	Ordonnée	
$x = 0$	A	$= y_0$
$x = 1$	$A + B + C + D$	$= y_1$
$x = 2$	$A + 2B + 4C + 8D$	$= y_2$
$x = 3$	$A + 3B + 9C + 27D$	$= y_3$

Faisons disparaître les A en soustrayant chacune des lignes de la ligne qui la suit (de la colonne des ordonnées):

$$\begin{aligned} B + C + D &= y_1 - y_0 =: \Delta y_0 \\ B + 3C + 7D &= y_2 - y_1 =: \Delta y_1 \\ B + 5C + 19D &= y_3 - y_2 =: \Delta y_2 \ . \end{aligned}$$

Chance: les B ont maintenant tous le même coefficient! Recommençons donc l'opération:

$$\begin{aligned} 2C + 6D &= \Delta y_1 - \Delta y_0 =: \Delta^2 y_0 \\ 2C + 12D &= \Delta y_2 - \Delta y_1 =: \Delta^2 y_1 \ , \end{aligned}$$

et une dernière fois:

$$6D = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0 =: \Delta^3 y_0 \ ,$$

ce qui nous donne $D = \frac{\Delta^3 y_0}{6}$. Remplaçons ceci dans le système précédent pour obtenir $C = \frac{\Delta^2 y_0}{2} - 3\frac{\Delta^3 y_0}{6}$, et de même, $B = \Delta y_0 - \frac{\Delta^2 y_0}{2} + 3\frac{\Delta^3 y_0}{6} - \frac{\Delta^3 y_0}{6}$. En réordonnant les termes du polynôme cherché, nous obtenons:

$$y = y_0 + \Delta y_0 \cdot x + \frac{\Delta^2 y_0}{2} \cdot (x^2 - x) + \frac{\Delta^3 y_0}{6} \cdot (x^3 - 3x^2 + 2x) \ ,$$

ou encore

$$y = y_0 + \frac{x}{1}\Delta y_0 + \frac{x(x-1)}{1 \cdot 2}\Delta^2 y_0 + \frac{x(x-1)(x-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\Delta^3 y_0 \ .$$

Nous verrons plus loin (grâce au triangle de Pascal) que cette formule se généralise à tous les degrés.

Théorème (polynôme d'interpolation)**.** *Le polynôme de degré n passant par les points*

$$(0, y_0) \ , \quad (1, y_1) \ , \quad (2, y_2) \ , \quad \ldots \ , \quad (n, y_n)$$

est donné par

$$p(x) = y_0 + \frac{x}{1}\Delta y_0 + \frac{x(x-1)}{1 \cdot 2}\Delta^2 y_0 + \ldots + \frac{x(x-1)\ldots(x-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n}\Delta^n y_0 \ .$$

Pour faciliter les calculs, Newton réunissait les données du problème dans un **schéma des différences** comme suit:

$$\begin{array}{ccccc} y_0 & & & & \\ & \Delta y_0 & & & \\ y_1 & & \Delta^2 y_0 & & \\ & \Delta y_1 & & \Delta^3 y_0 & \\ y_2 & & \Delta^2 y_1 & & \Delta^4 y_0 \\ & \Delta y_2 & & \Delta^3 y_1 & \\ y_3 & & \Delta^2 y_2 & & \\ & \Delta y_3 & & & \\ y_4 & & & & \end{array}$$

où

$$\begin{aligned} \Delta y_i &= y_{i+1} - y_i \\ \Delta^2 y_i &= \Delta y_{i+1} - \Delta y_i \\ \Delta^3 y_i &= \Delta^2 y_{i+1} - \Delta^2 y_i \\ &\textit{etc.} \end{aligned}$$

Exemple. Pour les données du début du paragraphe, nous obtenons

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{4} & & & & \\ & \mathbf{1} & & & \\ 5 & & \mathbf{-4} & & \\ & -3 & & \mathbf{10} & \\ 2 & & 6 & & \mathbf{-22} \\ & 3 & & -12 & \\ 5 & & -6 & & \\ & -3 & & & \\ 2 & & & & \end{array}$$

et donc

$$\begin{aligned} p(x) &= 4 + 1 \cdot x - \frac{4}{1 \cdot 2}(x^2 - x) + \frac{10}{1 \cdot 2 \cdot 3}(x^3 - 3x^2 + 2x) - \frac{22}{4!}(x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x) \\ &= 4 + \frac{71}{6}x - \frac{205}{12}x^2 + \frac{43}{6}x^3 - \frac{11}{12}x^4 \ . \end{aligned}$$

Exemple. Essayons d'interpoler les valeurs de la fonction $f(x) = 0^2 + 1^2 + 2^2 + \cdots + x^2$ (définie pour tout entier x positif ou nul) en $x = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$:

$$
\begin{array}{llccccc}
x = 0: & \mathbf{0} & & & & & \\
 & & \mathbf{1} & & & & \\
x = 1: & 1^2 & & \mathbf{3} & & & \\
 & & 2^2 & & \mathbf{2} & & \\
x = 2: & 1^2 + 2^2 & & 5 & & \mathbf{0} & \\
 & & 3^2 & & 2 & & \mathbf{0} \\
x = 3: & 1^2 + 2^2 + 3^2 & & 7 & & 0 & \\
 & & 4^2 & & 2 & & \\
x = 4: & 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 & & 9 & & & \\
 & & 5^2 & & & & \\
x = 5: & 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 & & & & &
\end{array}
$$

Nous obtenons $p(x) = x + \frac{3}{2}(x^2 - x) + \frac{1}{3}(x^3 - 3x^2 + 2x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{x}{6}$. Les valeurs nulles qui apparaissent dans le schéma des différences suggèrent que cette formule est valable *pour tous les x entiers positif.* C'est bien le cas; en fait, avec une belle conjecture en main, nous pouvons maintenant *démontrer par récurrence* que

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} \qquad \text{pour tout entier positif } n. \tag{‡}$$

La démonstration par récurrence.

Diverses formes du *raisonnemnent par récurrence* apparaissent dans les sources historiques (déjà Platon, dans ses *Parménides* en 370 av. J.-C., semble utiliser ce raisonnement); c'est à Blaise Pascal (mathématicien, physicien, philosophe, et théologien français, 1623–1662), dans son *Traité du Triangle Arithmétique* en 1654, qui le premier met en valeur de manière tout à fait explicite la forme actuelle du raisonnment par récurrence. Il l'utilise pour démontrer la validité du *triangle de Pascal*—que nous aborderons dans un instant.

Pour prouver une affirmation (qui dépend d'un paramètre entier n) **par récurrence** on procède en deux étapes:

- on vérifie que l'affirmation est vraie pour un certain n, habituellement $n = 0$ (ou $n = 1$);
- *en utilisant l'hypothèse que l'affirmation est vraie pour un certain n*, on démontre que l'affirmation est vraie pour $n + 1$; cette étape s'appelle **le pas de récurrence**.

Un mot d'explication. Supposons que ces étapes ont été complétées pour une certain affirmation. Comme on a vérifié que l'affirmation est vraie pour $n = 0$ (par exemple), le pas de récurrence nous dit que l'affirmation est aussi vraie pour $n + 1 = 0 + 1 = 1$. Grâce à cela, on sait maintenant que l'affirmation est vraie pour $n = 1$; le pas de récurrence nous dit que l'affirmation est donc aussi vraie pour $n + 1 = 1 + 1 = 2$. On recommence: vraie pour $n = 2$, donc vraie pour $n = 2 + 1 = 3$, et ainsi de suite de sorte à parcourir tous les nombres entiers. En peut donc en conclure que l'affirmation est vraie pour tout n entier avec $n \geq 0$ (le 0 ici se réfère au n testé à la première étape).

Exemple. D'après (‡), nous avons

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} \qquad \text{pour tout entier positif } n.$$

Mais ils s'agit seulement pour l'instant d'une *conjecture*. Pour montrer que cette affirmation est bien vraie pour tout entier positif, nous procédons par récurrence:

- **Cas $n = 1$:** la partie de gauche vaut $1^2 = 1$, qui est bien égal à la valeur $\frac{1^3}{3} + \frac{1^2}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2+3+1}{6} = 1$ donnée par la partie de droite.
- **Supposons que, pour un certain n fixé, nous avons: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$.** Pour $n + 1$ au lieu de n, la partie de gauche de (‡) devient

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 + (n+1)^2 \ ,$$

soit *par hypothèse*:

$$\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} + (n+1)^2 = \frac{2n^3 + 9n^2 + 13n + 6}{6} \ ;$$

la partie de droite de (‡), elle, devient

$$\frac{(n+1)^3}{3} + \frac{(n+1)^2}{2} + \frac{(n+1)}{6}$$

ou encore

$$\frac{n^3 + 3n^2 + 3n + 1}{3} + \frac{n^2 + 2n + 1}{2} + \frac{n+1}{6} = \frac{2n^3 + 9n^2 + 13n + 6}{6} \ .$$

Donc les deux côtés de (‡) sont les mêmes si n est remplacé par $n + 1$, et par le principe de récurrence, nous pouvons maintenant affirmer que l'égalité (‡) est vraie pour tout entier positif.

Remarque. Nous avons aussi

$$0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} \qquad \text{pour tout entier } n \text{ positif ou } \textit{nul}.$$

Pour démontrer cette formule-ci par récurrence, nous procéderions de même mais en commençant par le cas $n = 0$ plutôt que le cas $n = 1$. Le pas de récurrence $n \rightsquigarrow n + 1$ se vérifierait ensuite *exactement* comme ci-dessus.

Le théorème du binôme.

En développant l'expression $(a + b)^n$ pour différentes valeurs entières de n, on obtient

$$\begin{aligned}
(a+b)^0 &= 1 \\
(a+b)^1 &= a + b \\
(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\
(a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\
(a+b)^4 &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \\
&\ \vdots
\end{aligned}$$

Comme de nombreux érudits avant nous (citons notamment: Halayudha, mathématicien indien, X$^{\text{e}}$ siècle; Al-Karaji, mathématicien perse, 953–1029; Omar Khayyám, poète, astronome, mathématicien perse, 1048–1131; Yang Hui, mathématicien chinois, 1238–1298; Petrus Apianus, humaniste, astronome, mathématicien, cartographe allemand, 1495–1552) observons la structure des coefficients de a et b dans chaque ligne du **triangle de Pascal**:

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & \\
 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & \\
\iddots & & \iddots & & & & & & & & & & \ddots & & \ddots
\end{array}
$$

Chaque nombre dans ce tableau est la somme des deux coefficients au-dessus. Pour trouver une formule générale, regardons les diagonales: la première est $1, 1, \ldots, 1$; la seconde est $1, 2, \ldots, n$; la troisième est, on le devine, $1, 3, \ldots, \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}$; la quatrième devrait donc être $1, 4, \ldots, \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}$; *etc.* Du coup, on conjecture le résultat suivant:

Théorème (Pascal,1654)**.** *Pour n entier positif, on a*

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1}a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^{n-3}b^3 + \ldots + b^n \ .$$

(La somme s'arrête après $n+1$ termes.)

Preuve. Comme Pascal, divisons chaque nombre par celui qui se trouve à sa gauche, pour obtenir le triangle des quotients suivant:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & \frac{1}{1} & & & & & \\
 & & & & \frac{2}{1} & & \frac{1}{2} & & & & \\
 & & & \frac{3}{1} & & \frac{3}{3} & & \frac{1}{3} & & & \\
 & & \frac{4}{1} & & \frac{6}{4} & & \frac{4}{6} & & \frac{1}{4} & & \\
 & \frac{5}{1} & & \frac{10}{5} & & \frac{10}{10} & & \frac{5}{10} & & \frac{1}{5} & \\
\frac{6}{1} & & \frac{15}{6} & & \frac{20}{15} & & \frac{15}{20} & & \frac{6}{15} & & \frac{1}{6}
\end{array}
\quad \text{soit} \quad
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & \frac{1}{1} & & & & & \\
 & & & & \frac{2}{1} & & \frac{1}{2} & & & & \\
 & & & \frac{3}{1} & & \frac{2}{2} & & \frac{1}{3} & & & \\
 & & \frac{4}{1} & & \frac{3}{2} & & \frac{2}{3} & & \frac{1}{4} & & \\
 & \frac{5}{1} & & \frac{4}{2} & & \frac{3}{3} & & \frac{2}{4} & & \frac{1}{5} & \\
\frac{6}{1} & & \frac{5}{2} & & \frac{4}{3} & & \frac{3}{4} & & \frac{2}{5} & & \frac{1}{6}
\end{array}
$$

Dans ce dernier triangle, nous voyons apparaître un motif très régulier, et pressentons une récurrence. Nous donnons ici simplement l'*idée* de la démonstration, car une formalisation parfaite nous éloignerait du coeur de l'argument. Pour justifier le triangle des quotients, il faut essentiellement montrer que l'on a des "morceaux de triangle" de la forme

$$
\begin{array}{ccc}
\frac{k}{l-1} & & \frac{k-1}{l} \\
 & \frac{k}{l} &
\end{array}
\qquad \text{où } k \text{ et } l \text{ sont des entiers.}
$$

La première ligne vient d'un morceau du triangle de Pascal de la forme

$$
\begin{array}{ccccc}
A & & B & & C \\
 & D & & E &
\end{array}
\qquad \text{avec} \qquad D = A + B \ , \quad E = B + C \ ,
$$

et nous donne les coefficients via

$$\frac{B}{A} = \frac{k}{l-1} \ , \quad \frac{C}{B} = \frac{k-1}{l} \ .$$

Le coefficient de la seconde ligne sera $\frac{E}{D}$, qui peut être écrit (par ce qui précède)

$$\frac{E}{D}=\frac{B+C}{A+B}=\frac{1+\frac{C}{B}}{\frac{A}{B}+1}=\frac{1+\frac{k-1}{l}}{\frac{l-1}{k}+1}=\frac{kl+k^2-k}{l^2+kl-l}=\frac{k}{l}\ ,$$

qui est bien la valeur que l'on cherchait. Cela explique la structure du triangle des quotients, mais pas encore du triangle de Pascal.

Pour récupérer celui-ci, rappelons que la n-ième ligne du triangle des quotients

$$\tfrac{n}{1}\quad \tfrac{n-1}{2}\quad \tfrac{n-2}{3}\quad \tfrac{n-3}{4}\quad \ldots$$

a été obtenue en divisant chaque coefficient du triangle de Pascal par le membre à sa gauche. On peut donc récupérer un coefficient original en multipliant tous les coefficients à gauche d'un membre du *triangle des quotients*. Par exemple, le "20" dans la sixième ligne du triangle de Pascal (en commençant par la ligne 0) peut être obtenu en utilisant le triangle des quotients via

$$20=\frac{20}{15}\cdot\frac{15}{6}\cdot\frac{6}{1}=\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{6}{1}=\frac{4\cdot 5\cdot 6}{3\cdot 2\cdot 1}\ ,$$

et le Théorème est vrai en général. □

Si l'on numérote les lignes et les diagonales du triangle de Pascal en commençant par 0, cette démonstration nous montre comment calculer le terme qui se trouve dans la n-ième ligne et k-ième colonne du triangle; ce nombre est noté $\binom{n}{k}$.

Définition. Pour k, n des entiers positifs ou nuls avec $k \le n$, on a

$$\binom{n}{k}:=\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k}=\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)(n-k)\ldots 1}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k\cdot 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(n-k)}=\frac{n!}{k!(n-k)!}\ ,$$

et $\binom{n}{k}$ est appelé un **coefficient binomial**; rappelons que $n! := 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n$ dénote la **factorielle** de n (par convention, $0! := 1$).

Triangle de Pascal et polynôme d'interpolation.

Dans le schéma des différences de la page 7, on peut utiliser le fait que chaque terme du schéma est la somme du terme au-dessus et de celui en haut à sa droite pour obtenir le schéma des différences suivant:

$$\begin{array}{cccc}
y_0 & & & \\
 & \Delta y_0 & & \\
y_0+\Delta y_0 & & \Delta^2 y_0 & \\
 & \Delta y_0+\Delta^2 y_0 & & \Delta^3 y_0 \\
y_0+2\Delta y_0+\Delta^2 y_0 & & \Delta^2 y_0+\Delta^3 y_0 & \\
 & \Delta y_0+2\Delta^2 y_0+\Delta^3 y_0 & & \\
y_0+3\Delta y_0+3\Delta^2 y_0+\Delta^3 y_0 & & &
\end{array}$$

Dans la première colonne, nous voyons apparaître les coefficients binomiaux. Comme nous savons les obtenir de manière générale, cette première colonne nous donne la formule

$$y_n=y_0+\frac{n}{1}\Delta y_0+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\Delta^2 y_0+\cdots+\frac{n(n-1)\ldots 1}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}\Delta^n y_0\ ;$$

en évaluant en $x = 0, 1, \ldots, n$ le polynôme d'interpolation $p(x)$ (donné au Théorème du binôme de la page 7), on trouve que $p(x)$ passe bien par les points $(0, y_0), (1, y_1), \ldots, (n, y_n)$, et le Théorème du binôme (introduit au paragraphe sur les polynômes d'interpolation) est démontré grâce au triangle de Pascal.

Puissances réelles.

Pour un nombre réel a et un nombre entier positif n, la n-ième puissance de a est donnée comme

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ fois}} \; .$$

Donné un autre entier m, on obtient la formule

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} \tag{§}$$

en comptant simplement le nombre de fois où a apparaît de chaque côté de l'égalité. En vue d'étendre cette formule à tous les entiers m, n positifs *ou nuls*, il est raisonnable de définir $a^0 := 1$. La suite

$$a^0 = 1 \; , \quad a^1 = a \; , \quad a^2 = a \cdot a \; , \quad \ldots$$

appelle ensuite à être prolongée sur la gauche avec des exposants n négatifs. Pour que (§) reste valable, il nous faut en particulier $a^{-n} \cdot a^n = a^0$, c'est-à dire $a^{-n} \cdot a^n = 1$, et nous n'avons plus guère le choix que de poser $a^{-n} := \frac{1}{a^n}$ pour obtenir

$$\ldots \; , \quad a^{-2} = \frac{1}{a^2} \; , \quad a^{-1} = \frac{1}{a} \; , \quad a^0 = 1 \; , \quad a^1 = a \; , \quad a^2 = a \cdot a \; , \quad \ldots$$

En raisonnant de manière similaire, mais avec la formule

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

cette fois, on en vient à définir

$$a^{\frac{p}{q}} := \sqrt[q]{a^p} = (\sqrt[q]{a})^p \; .$$

Il reste pourtant des "trous". En effet, comment définir par exemple a^π? Sachant que

$$\frac{31}{10} < \frac{314}{100} < \frac{3141}{1000} < \cdots < \pi < \cdots < \frac{3142}{1000} < \frac{315}{100} < \frac{32}{10} \; ,$$

on peut approximer cette valeur par des puissances rationnelles:

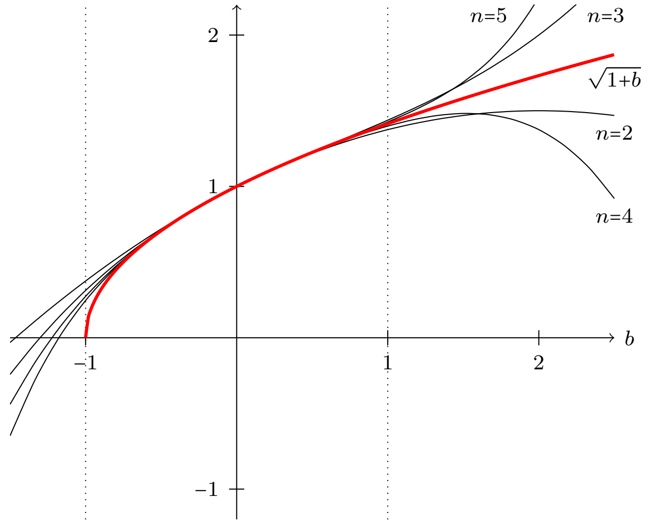
$$a^{\frac{31}{10}} < a^{\frac{314}{100}} < a^{\frac{3141}{1000}} < \cdots < a^\pi < \cdots < a^{\frac{3142}{1000}} < a^{\frac{315}{100}} < a^{\frac{32}{10}} \; .$$

Cette méthode se révèle pourtant peu pratique à manipuler. Une autre idée est d'exploiter le Théorème du binôme: écrivons $(1+b)^x$ au lieu de $(a+b)^n$, et observons que la série

$$(1+b)^x = 1 + \frac{x}{1} b + \frac{x(x-1)}{1 \cdot 2} b^2 + \frac{x(x-1)(x-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} b^3 + \ldots$$

comporte maintenant une infinité de termes non nuls quand x n'est pas entier[2]! Ce procédé de "passage à l'infini" était déjà considéré comme dangereux par Newton. Pour illustrer le problème, dessinons les polynômes de degré n formés des premiers termes de cette série en $x = \frac{1}{2}$:

[2] En vérité, cette série est un "polynôme" interpolant la fonction $(1+b)^x$ en $x = 0, 1, 2, \ldots$



Bien que les polynômes n'approximent plus $(1+b)^{\frac{1}{2}}$ lorsque $|b| > 1$, le résultat général suivant est vrai (donné sans preuve ici):

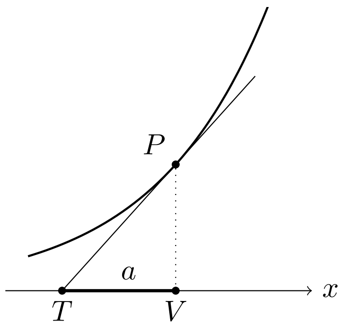
Théorème (série du binôme de Newton)**.** *Pour toute valeur réelle x, nous avons pour $|b| < 1$ l'égalité*

$$(1+b)^x = 1 + \frac{x}{1}b + \frac{x(x-1)}{1\cdot 2}b^2 + \frac{x(x-1)(x-2)}{1\cdot 2\cdot 3}b^3 + \ldots \ .$$

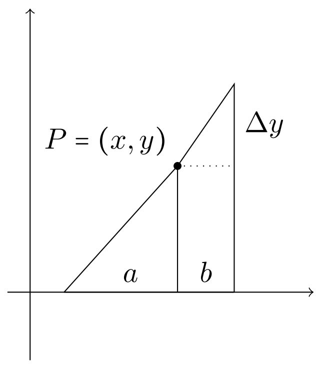
1.2 Fonctions exponentielles.

Un an après avoir lu la *Géométrie* de Descartes, Florimond de Beaune (juriste et mathématicien français, 1601–1652) lui pose le problème suivant:

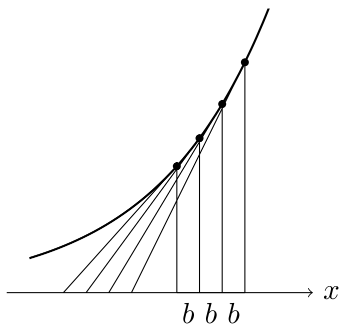
> Trouver une courbe $f(x)$ telle que la distance entre V et T, les points où la verticale et la tangente par un point P de la courbe coupent l'axe des x, ait une valeur constante donnée a.



Ce problème résiste aux tentatives de Descartes, ainsi qu'à celles de Pierre de Fermat (juriste et mathématicien français, 1601 ou 1607–1665), pendant plus de quarante-cinq ans. En 1684, Gottfried Wilhelm Leibniz (philosophe, scientifique, mathématicien, diplomate, bibliothécaire et homme de loi allemand, 1646–1716) a l'idée suivante: pour un point P donné, on augmente x d'une *petite* quantité b de sorte que y augmente d'une quantité d'*environ* $\frac{b}{a}y$ (par Thalès):



$\frac{b}{a} \simeq \frac{\Delta y}{y}$



En recommençant cette opération, on trouve les approximations suivantes pour $f(x)$:

$$y\ ,\quad (1+\tfrac{b}{a})\cdot y\ ,\quad (1+\tfrac{b}{a})^2\cdot y\ ,\quad (1+\tfrac{b}{a})^3\cdot y\ ,\quad \ldots$$

Cette suite de nombre apparaît aussi dans un autre contexte: en 1748, dans son *Introductio in analysin infinitorum*, Leonhard Paul Euler (physicien et mathématicien suisse, 1707–1783), l'un des plus prolifiques mathématicien de tous les temps, présente des problèmes de la forme

> Si le nombre d'habitants d'une province s'accroît tous les ans d'un trentième, et qu'il y a au commencement $100'000$ habitants; on veut savoir combien il y en aura au bout de 100 ans.

ou encore

> Un particulier doit 400′000 florins, dont il est convenu de payer tous les ans l'intérêt à 5 pour cent, …

En résolvant ces problèmes, on voit apparaître les expressions

$$(1+\tfrac{1}{30})^{100}\ ,\quad (1+\tfrac{5}{100})^{n}\ ,\quad \text{soit en général } (1+\omega)^N\ .$$

Le nombre d'Euler.

Développons d'abord $(1+\frac{1}{N})^N$ à l'aide du Théorème du binôme:

$$\begin{aligned}(1+\tfrac{1}{N})^N &= 1+\frac{N}{N}+\frac{N(N-1)}{1\cdot 2}\frac{1}{N^2}+\frac{N(N-1)(N-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{1}{N^3}+\dots\\ &= 1+1+\frac{1(1-\frac{1}{N})}{1\cdot 2}+\frac{1(1-\frac{1}{N})(1-\frac{2}{N})}{1\cdot 2\cdot 3}+\dots\\ &= 1+1+\frac{\frac{N-1}{N}}{1\cdot 2}+\frac{(\frac{N-1}{N})(\frac{N-2}{N})}{1\cdot 2\cdot 3}+\dots\ .\end{aligned}$$

Euler affirme alors sans aucune hésitation:

> si N est un nombre plus grand qu'aucune quantité assignable, la fraction $\frac{N-1}{N}$ égalera l'unité.

En conséquence de quoi, si N tend vers l'infini, $(1+\frac{1}{N})^N$ tend vers le **nombre d'Euler**

$$\mathrm{e} = 1+1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\dots\ .$$

Newton avait déjà remarqué le danger du "passage à l'infini" (voir la remarque à la page 13), mais dans ce cas, "tout marche bien" comme le suggère le tableau suivant:

N	$(1+\frac{1}{N})^N$	$1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\dots+\frac{1}{N!}$
1	2.000	2.0
2	2.250	2.5
3	2.370	2.66
4	2.441	2.708
5	2.488	2.7166
10	2.594	2.718281801
20	2.653	2.7182818284590452 35339
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
∞	e	2.71828182845904523536 02…

Puissances de e**.**

Les formules précédentes peuvent être exploitées pour calculer les valeurs de e^x. En effet, si l'on utilise le Théorème du binôme pour développer $(1+\frac{x}{N})^N$, on obtient

$$(1+\tfrac{x}{N})^N \ \longrightarrow\ 1+x+\frac{x^2}{1\cdot 2}+\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\dots\ .$$

D'un autre côté, si l'on écrit $M = \frac{N}{x}$ et donc $N = Mx$ (pour $x \neq 0$), on a

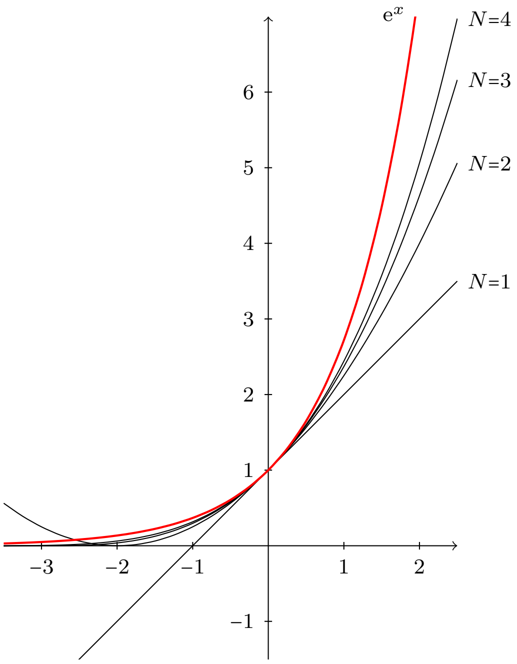
$$(1 + \tfrac{x}{N})^N = (1 + \tfrac{1}{M})^{Mx} = ((1 + \tfrac{1}{M})^M)^x \ .$$

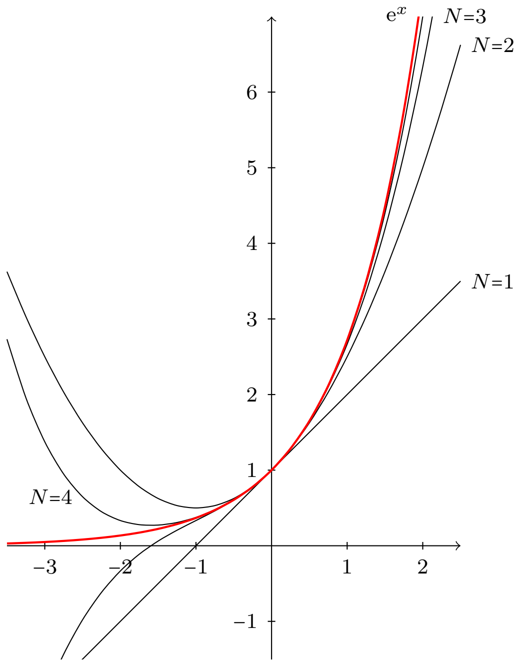
Les deux quantités M et N tendront ensemble vers l'infini, et donc si $N \longrightarrow \infty$, on a $(1 + \frac{x}{N})^N = ((1 + \frac{1}{M})^M)^x \longrightarrow \mathrm{e}^x$. On obtient le résultat suivant.

Théorème (Euler, 1748)**.** *Pour N tendant vers l'infini,*

$$(1 + \tfrac{x}{N})^N \ \longrightarrow \ \mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots \ .$$

La convergence de la suite $(1 + \frac{x}{N})^N$ est illustrée à gauche et celle de $1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^N}{N!}$ à droite ci-dessous. On observe que $(1 + \frac{x}{N})^N$ approxime beaucoup plus vite e^x pour les x négatifs, et $1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^N}{N!}$ est bien meilleure pour les x positifs.





1.3 Fonctions logarithmiques.

En 1544 déjà, Michael Stifel (moine et mathématicien allemand, 1487–1567) mettait en évidence les deux suites de nombres ci-dessous;

...	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	...
...	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	32	64	128	256	...

Le passage de la ligne inférieure à la ligne supérieure *transforme les produits en somme.* Une table plus étendue serait d'une grande utilité, car il est plus facile d'additionner que de multiplier. Par exemple, au lieu de multiplier 8 par 32, on lit les nombres correspondants de la première ligne, les *logarithmes* 3 et 5, on les additionne pour obtenir 8 et la seconde ligne nous donne 256, le produit $8 \cdot 32$ cherché.

Les première tables de logarithmes furent réalisées par John Napier, ou Neper, (mathématicien, physicien, astronome et astrologue écossais, 1550–1617) en 1614, Jost Bürgi (horloger, astronome, astrologue et mathématicien suisse, 1552–1632) en 1620, et Henri Briggs (voir page 6) en 1624.

Définition. Une fonction $\ell(x)$, définie pour les valeurs strictement positives de x est une **fonction logarithmique**, ou simplement un **logarithme**, si pour tout $x, y > 0$, elle satisfait

$$\ell(x \cdot y) = \ell(x) + \ell(y) \ . \tag{$*$}$$

De cette simple propriété, on peut déduire les formules suivantes. En remplaçant y par $\frac{z}{x}$ et en isolant ensuite $\ell(\frac{z}{x})$, on obtient

$$\ell(\tfrac{z}{x}) = \ell(z) - \ell(x) \ .$$

De là, $z = x = 1$ nous donne

$$\ell(1) = 0 \ .$$

L'égalité $(*)$ donne aussi $\ell(x \cdot x \cdot x) = \ell(x \cdot x) + \ell(x) = \ell(x) + \ell(x) + \ell(x) = 3 \cdot \ell(x)$, et de manière plus générale

$$\ell(x^n) = n \cdot \ell(x) \ ,$$

ou encore, en utilisant par exemple que $\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{x} = x$, on trouve la formule

$$\ell(x^{\frac{p}{q}}) = \tfrac{p}{q} \cdot \ell(x) \quad \text{pour toute fraction rationnelle } \tfrac{p}{q}.$$

Bases.

Supposons avoir une fonction logarithmique fixée $\ell(x)$ avec un nombre $a > 0$ satisfaisant $\ell(a) = 1$. La formule $\ell(x^{\frac{p}{q}}) = \frac{p}{q} \cdot \ell(x)$ nous donne alors

$$\ell(a^{\frac{p}{q}}) = \tfrac{p}{q} \ .$$

Plus généralement, en élevant a à la puissance y, puis en prenant le logarithme $\ell(a^y)$, on retombe sur y:

$$y \rightsquigarrow a^y \rightsquigarrow \ell(a^y) = y \ ;$$

en d'autres termes, *la fonction logarithme est la fonction inverse*[3] *de la fonction exponentielle* a^x (le fait que $a^{\ell(x)} = x$ se déduit du fait que tout nombre $x > 0$ peut être écrit comme $x = a^y$). Cette première est le **logarithme de base** a et on écrit

$$y = \log_a(x) \quad \text{pour dire} \quad x = a^y \ .$$

La fonction $\log_a(x)$ nous donne "l'exposant auquel il faut élever a pour obtenir x". Les logarithmes de base 10 (ou **logarithmes de Briggs**), notés simplement $\log(x)$, apparaissent systématiquement en sciences appliquées (car notre système décimal est justement en base 10), mais la base la plus "naturelle" est le nombre d'Euler e, dont le logarithme est noté $\ln(x)$ (**logarithme naturel**, ou **logarithme népérien**), mais aussi parfois $\log(x)$.

La "règle d'or" d'Euler.

Si les logarithmes sont connus pour une seule base, on peut trouver les logarithmes pour toutes les autres bases. En effet, si on connaît le logarithme en base a de $x = b^y$, on obtient grâce aux formules ci-dessus:

$$\log_a(x) = \log_a(b^y) = y \cdot \log_a(b) \ , \quad \text{d'où} \quad y = \log_b(x) = \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)} \ .$$

Calcul des logarithmes.

Une des motivations des polynômes d'interpolations (voir page 6) était—à partir de certaines données de départ—de calculer des valeurs intermédiaires de fonctions en général, et de logarithmes en particulier. Par exemple, connaissant les logarithmes en base 10 de 44, 45, et 46, on trouve les schéma des différences suivant:

$$\begin{array}{lll} \log(44) \simeq 1.64345268 & & \\ & 0.00975983 & \\ \log(45) \simeq 1.65321251 & & -0.00021451 \\ & 0.00954532 & \\ \log(46) \simeq 1.66275783 & & \end{array}$$

Une petite adapatation du théorème d'interpolation (page 7) donne le polynôme

$$p(x) = 1.64345268 + (x-44) \cdot \left(0.00975983 - \frac{(x-45)}{2} \cdot 0.00021451\right) \ .$$

Par exemple, on obtient $p(44.5) \simeq 1.64835940875$, alors que $\log(44.5) \simeq 1.64836001098$, soit une différence de l'ordre de 10^{-7}, ce qui est déjà très satisfaisant (nos données étaient d'une précision de 10^{-8}). Pour une meilleure précision, des points supplémentaires peuvent bien sûr être rajoutés.

La question sur comment *obtenir* les données initiales $\log(44), \log(45), \log(46), \ldots$ de manière efficace subsiste néanmoins, et c'est la géométrie qui vient à notre aide.

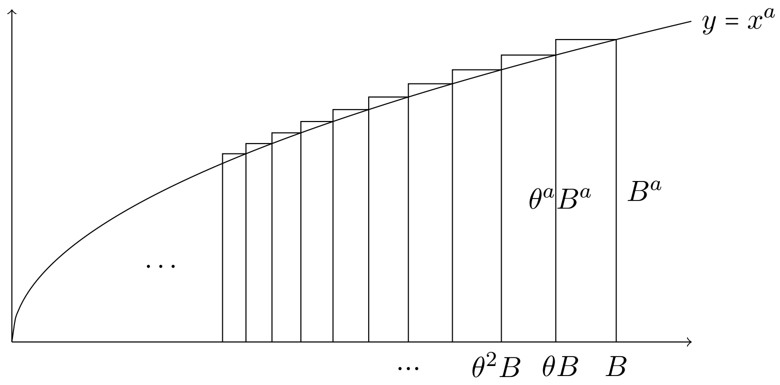
Calculs d'aires.

Au début du XVII$^{\text{e}}$ siècle, plusieurs savants parviennent à calculer l'aire sous la courbe $y = x^a$ avec a entier, ou même quelconque.

[3] On dit qu'une fonction g est la **fonction inverse** (ou **réciproque**) de f si $f(g(y)) = y$ et $g(f(x)) = x$ (pour tout x et y donnant un sens à ces expressions).

Pour un a donné, trouver l'aire sous la courbe $y = x^a$ entre les bornes $x = 0$ et $x = B$.

En 1636, Fermat propose de choisir $\theta < 1$ (mais tout de même proche de 1), et de considérer les rectangles déterminés par la progression géométrique $B, \theta B, \theta^2 B, \theta^3 B, \dots$ de hauteurs respectives $B^a, \theta^a B^a, \theta^{2a} B^a, \theta^{3a} B^a, \dots$:



La surface sous la courbe est approchée par la somme des aires rectangulaires:

$$\begin{aligned}&(1-\theta)B \cdot B^a + (\theta - \theta^2)B \cdot \theta^a B^a + (\theta^2 - \theta^3)B \cdot \theta^{2a} B^a + \dots \\ &= (1-\theta) \cdot \underbrace{(1 + \theta^{a+1} + \theta^{2a+2} + \dots)}_{\text{série géométrique, } c.f. \text{ Série 5}} \cdot B^{a+1} = \frac{1-\theta}{1-\theta^{a+1}} B^{a+1} \ ,\end{aligned}$$

si $a + 1 > 0$, c'est-à-dire si $a > -1$. Pour évaluer cetter dernière fraction, on observe que si θ est proche de 1 (et $\theta < 1$), alors $1 - \theta$ est petit (et positif). Posons donc $1 - \theta = \varepsilon$. On a alors $\theta = 1 - \varepsilon$, et le théorème du binôme de Newton (page 13) donne

$$\theta^{a+1} = (1-\varepsilon)^{a+1} = 1 - (a+1)\varepsilon + \frac{(a+1)a}{2}\varepsilon^2 - \dots$$

Comme ε est supposé *très* petit, ε^2 l'est encore plus, et le terme $\frac{(a+1)a}{2}\varepsilon^2$ *devient négligeable* par rapport à $1-(a+1)\varepsilon$; on le néglige donc, ainsi que tous les termes suivants (pour la même raison), et on trouve

$$\frac{1-\theta}{1-\theta^{a+1}} \simeq \frac{\varepsilon}{(a+1)\varepsilon} = \frac{1}{a+1} \quad \text{lorsque } \varepsilon \longrightarrow 0.$$

La valeur $\frac{1}{a+1}B^{a+1}$ majore donc l'aire cherchée (en fait, si $-1 < a < 0$, le rôle des majorants et des minorants est inversé). On peut recommencer cette opération en remplaçant les rectangles ci-dessus par ceux de hauteur $\theta^a B^a, \theta^{2a} B^a, \theta^{3a} B^a, \dots$; on trouve alors l'expression

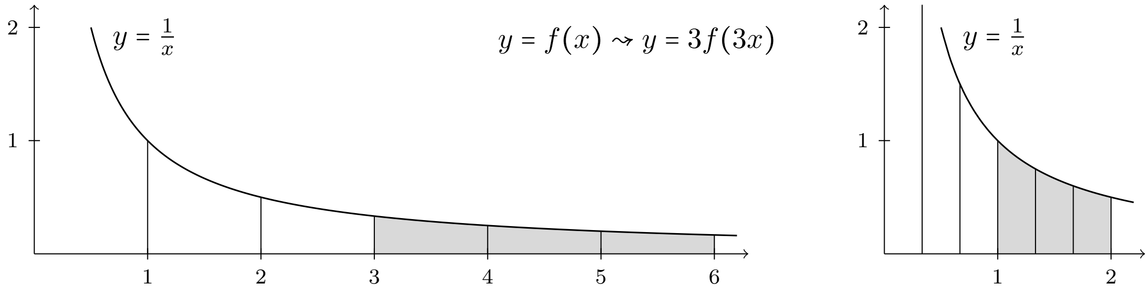
$$\frac{\theta^a(1-\theta)}{1-\theta^{a+1}} \simeq \frac{(1-\varepsilon)^a \varepsilon}{(a+1)\varepsilon} \simeq \frac{1-a\varepsilon}{a+1} \simeq \frac{1}{a+1} \quad \text{lorsque } \varepsilon \longrightarrow 0.$$

Donc $\frac{1}{a+1}B^{a+1}$ est aussi un minorant de l'aire sous la courbe! On en déduit le résultat suivant.

Théorème (Fermat, 1636)**.** *La surface S sous la courbe $y = x^a$ entre les bornes $x = 0$ et $x = B$ est donnée par*

$$S = \frac{B^{a+1}}{a+1} \quad \textit{lorsque } a > -1.$$

L'hypothèse $a > -1$ est cruciale dans le raisonnement ci-dessus, et la méthode ne marche plus si $a = -1$. Un raisonnement sur le graphe de l'hyperbole $y = \frac{1}{x}$ nous permet pourtant de déterminer que l'aire sous cette hyperbole est un logarithme. En effet, si l'on contracte la courbe $y = \frac{1}{x}$ d'un facteur 3 horizontalement ($y = f(x) \rightsquigarrow y = f(3x)$), on obtient le graphe de $y = \frac{1}{3x}$; si l'on étend maintenant cette courbe d'un facteur 3 verticalement ($y = g(x) \rightsquigarrow y = 3g(x)$), on obtient $y = 3\frac{1}{3x}$, c'est-à dire notre courbe de départ:



On en déduit par exemple que $\text{Aire}(3 \longrightarrow 6) = \text{Aire}(1 \longrightarrow 2)$, et donc

$$\text{Aire}(1 \longrightarrow 3) + \text{Aire}(1 \longrightarrow 2) = \text{Aire}(1 \longrightarrow 6) \ .$$

Nous observons que la fonction $\ell(x) = \text{Aire}(1 \longrightarrow x)$ possède la propriété

$$\ell(x) + \ell(y) = \ell(x \cdot y) \ ,$$

et qu'*il s'agit donc d'un logarithme*! Nous allons voir que ce logarithme est précisément le logarithme naturel, c'est-à dire le logarithme de base e. En anticipation de cela, écrivons $\ln(x)$ pour désigner la fonction $\text{Aire}(1 \longrightarrow x)$.

La série de Mercator.

Au lieu de $\ln(a)$, considérons $\ln(1+a)$, la fonction qui donne l'aire de la fonction $\frac{1}{1+x}$ entre 0 et a. Nous pouvons exploiter la série géométrique de François Viète (mathématicien français, 1540–1603)

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots \tag{†}$$

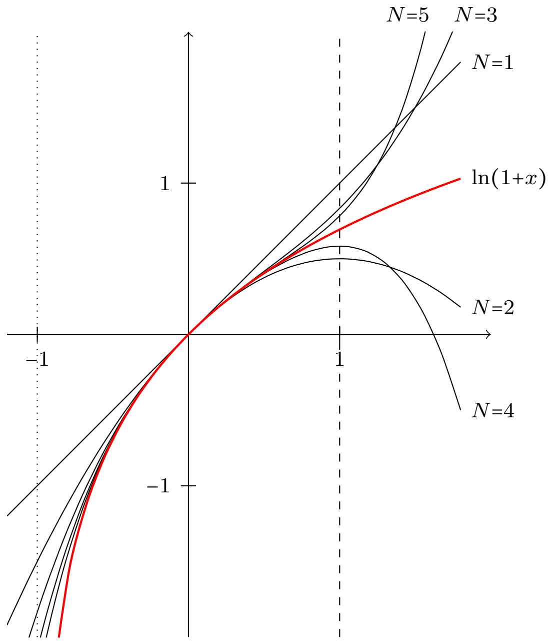
(voir les exercices de la Série 5) car nous savons, grâce au théorème de Fermat ci-dessus, calculer les aires sous $1, x, x^2, x^3$ entre 0 et a:

$$a \ , \quad \frac{a^2}{2} \ , \quad \frac{a^3}{3} \ , \quad \frac{a^4}{4} \ , \quad \dots$$

Comme Nicolas Mercator (mathématicien allemand, 1620–1687) en 1668, ou Grégoire de Saint-Vincent (jésuite et mathématicien flamand, 1584–1667), nous trouvons que l'aire sous la courbe donnée par de chaque côté de l'égalité (†) est

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

Cette série converge pour $|x| < 1$, ce qui est illustré ci-dessous pour les N premiers termes:



Étonnament, pour $x = 1$ l'égalité est aussi vraie, et nous donne la très belle formule

$$\ln(2) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$$

Il faut par contre prendre en compte un grand nombre de termes pour arriver à une valeur de $\ln(2)$ raisonnable (voir les exercices de la Série 6).

Retour au nombre d'Euler.

À la page 18, nous définissions le logarithme naturel comme le logarithme de base e, alors qu'à la page 20 nous l'introduisions comme une fonction d'aire. Le résultat suivant montre que ces deux définitions donnent la même fonction.

Théorème. *Le logarithme donné comme* $\mathrm{Aire}(1 \longrightarrow x)$ *est le logarithme naturel* $\ln(x)$ *de base* e.

Preuve. Grâce aux propriétés des logarithmes et à la série de Mercator, nous pouvons écrire

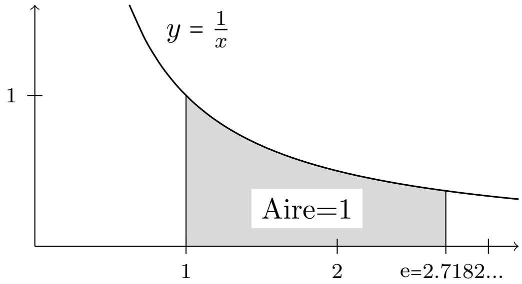
$$\begin{aligned} \ln(1 + \tfrac{x}{N})^N &= N \cdot \ln(1 + \tfrac{x}{N}) = N \cdot (\tfrac{x}{N} - \tfrac{x^2}{2N^2} + \tfrac{x^3}{3N^3} - \ldots) \\ &= x \cdot (1 - \tfrac{x}{2N} + \tfrac{x^2}{3N^2} + \ldots) \ . \end{aligned}$$

Quelle que soit la valeur de x fixée, et pour chaque entier n, les termes $\frac{1}{(n+1)} \cdot \left(\frac{x}{N}\right)^n$ de cette dernière série vont s'approcher inexorablement de 0 lorsque N devient grand, et donc $(1 - \frac{x}{2N} + \frac{x^2}{3N^2} + \ldots)$ se rapprochera de 1. Nous pouvons en conclure

$$\ln(1 + \tfrac{x}{N})^N \longrightarrow x \quad \text{lorsque } N \longrightarrow \infty \ ,$$

c'est-à-dire $\ln(\mathrm{e}^x) = x$. □

Une belle caractérisation géométrique de e découle de ce théorème: le nombre d'Euler est le nombre e pour lequel l'aire sous l'hyperbole $y = \frac{1}{x}$ entre 1 et e vaut 1.



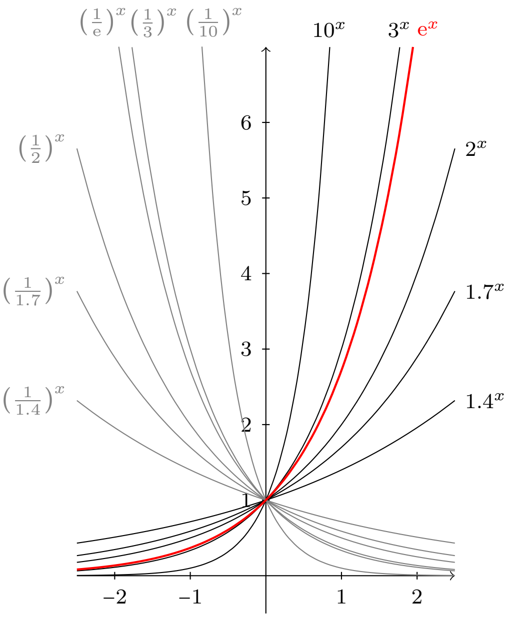
Retour sur les puissances.

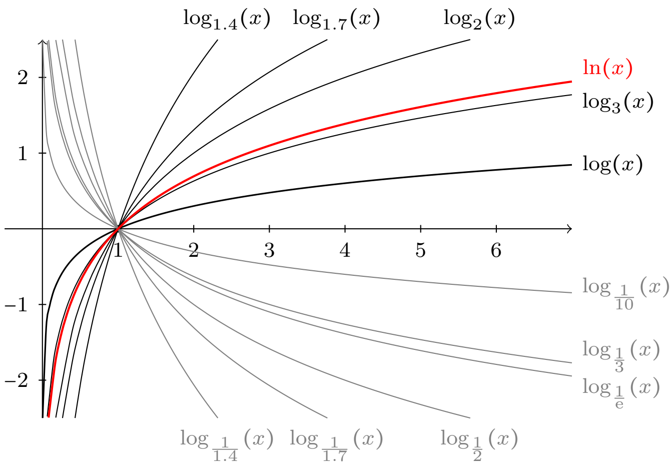
Nous sommes maintenant en mesure de calculer efficacement les puissances arbitraires d'un nombre (voir page 12). En effet, comme $y = \mathrm{e}^{\ln(y)}$, on obtient

$$a^x = \mathrm{e}^{\ln(a^x)} = \mathrm{e}^{x\ln(a)} \quad .$$

Graphes de fonctions exponentielles et logarithmiques.

Concluons par le dessin des graphes de fonctions a^x et $\log_a(x)$ pour $a > 1$ et $1 > a > 0$ (notons que $1^x = 1$ pour tout nombre x, et qu'*il n'existe pas de logarithme de base* 1: si une fonction ℓ transforme les produits en somme, on aura toujours $\ell(1) = 0$, et *non pas* $\ell(1) = 1$ comme il faudrait pour avoir un logarithme de base 1).





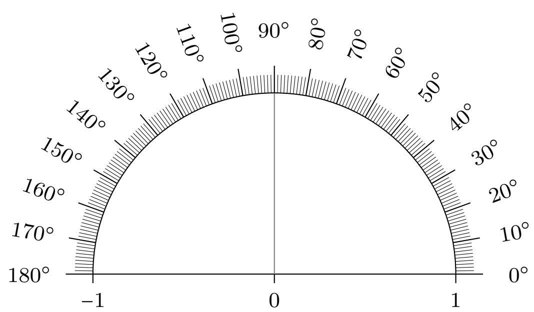
1.4 Fonctions trigonométriques.

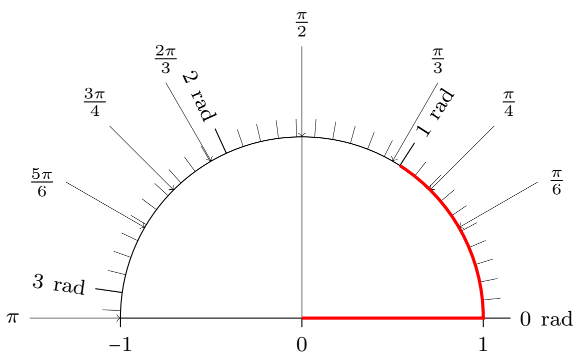
Mesure d'angles. La mesure des angles est une préoccupation très ancienne, motivée entre autres par l'utilité des calculs astronomiques. Les Babyloniens (de 2000–500 *av.J.-C.* très approximativement) avaient divisé le cercle en 360°, très probablement parce que ce nombre représentait aussi le nombre de jour dans une de leur année. Ce nombre—comme 60 qui est la base dans laquelle comptait cette ancienne civilisation—se prête à de nombreuses divisions pratiques: par 2 pour l'angle plat 180°, par 3, par 4 pour l'angle droit 90°, par 5, et 6 pour 60°, la mesure de chacun des trois angles dans un triangle équilatéral. Ptolémée (astronome et astrologue grec, 90–168) affine cette mesure en faisant intervenir les deux décimales suivantes en base soixante, donnant les "degrés-minutes-secondes". D'autres mesures existent, comme le "grad", introduit dans le cadre du système métrique, et qui subdivise l'angle droit en 100 parties.

Comme pour le logarithme, il existe une *mesure naturelle*, basée sur l'arc d'un cercle de rayon 1, le **radian**. Dans cette unité, l'arc du demi-cercle, évalué de plus en plus précisément depuis l'antiquité, est de mesure

$$\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419716939937510582097 49\ldots$$

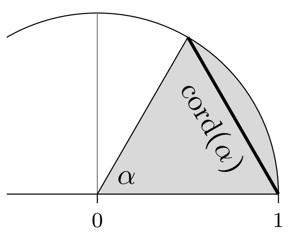
où "π" est utilisée pour signifier "périphérie" ou "périmètre", et dès le début du XVIII^{e} siècle par William Jones (mathématicien gallois, 1675–1749) puis par Euler, pour désigner le rapport de la circonférence au diamètre d'un cercle. On a donc les mesures suivantes, en degrés babyloniens et en radians:





Par exemple, un angle de 27° est un angle de $27 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{3}{20}\pi \simeq 0.4712$ rad.

Fonctions de mesures. Pour mesurer un arc de cercle (ou un angle) avec une règle rigide, il est naturel de considérer sa **corde**:



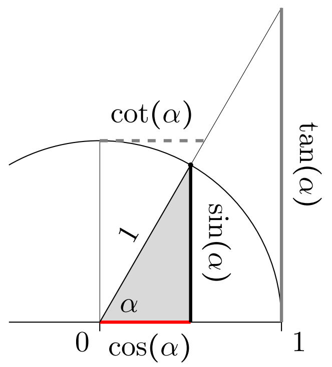
et, à l'aide de tables numériques, de retrouver la mesure d'un angle grâce à la longueur de sa corde, comme le faisaient Hipparque (astronome, géographe, et mathématicien grec, 190–120 *av.J.-C.*) et Ptolémée.

Le **sinus**, lié à la corde via $\sin(\alpha) = \frac{1}{2}\text{cord}(2\alpha)$, trouve ses origines dans les travaux de Aryabhata (astronome et mathématicien indien, 476–550). Ce dernier travaillait avec l'*ardha-jya*, la *demi-corde*, un terme qui fut abrégé, traduit puis confondu avec la *jaib*, la *poche*, ou *sinus* en latin!

Le sinus est mieux adapté que la corde pour le calcul dans un repère cartésien.

Définition. Pour un angle α dessiné dans un cercle de rayon 1 centré en $(0,0)$, comme ci-dessous, l'ordonnée du point sur le cercle déterminé par α est le **sinus** de α, noté $\sin(\alpha)$, est l'abscisse du même point est le **cosinus** de α, noté $\cos(\alpha)$. Leurs quotients, qui se lisent sur les tangentes verticales et horizontales en $(1,0)$ et $(0,1)$ sont la **tangente** et la **cotangente** de α, respectivement:

$$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} \ , \quad \cot(\alpha) = \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} \ .$$



Le théorème de Thalès nous donne immédiatement pour un triangle rectangle arbitraire d'hypoténuse c et de cathètes a, b (avec a opposé à α) les formules

$$a = c \cdot \sin(\alpha) \ , \quad b = c \cdot \cos(\alpha) \ , \quad a = b \cdot \tan(\alpha) \ .$$

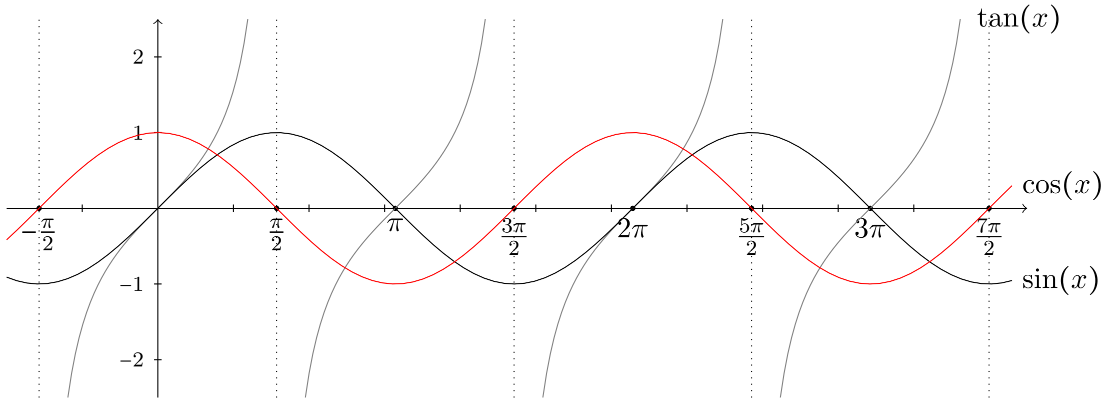
Ces formules restent bien sûr valables (avec des signes $\pm$) si l'on considère l'angle α formé par la droite OP et l'axe Ox, où $P = (b, a)$, et $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. On en déduit de nombreuses autres formules, comme:

$$\sin(0) = (0) \ , \quad \cos(0) = 1 \ , \quad \sin(\tfrac{\pi}{2}) = 1 \ , \quad \cos(\tfrac{\pi}{2}) = 0 \ , \quad \sin(\pi) = 0 \ , \quad \cos(\pi) = -1 \ , \quad \dots$$

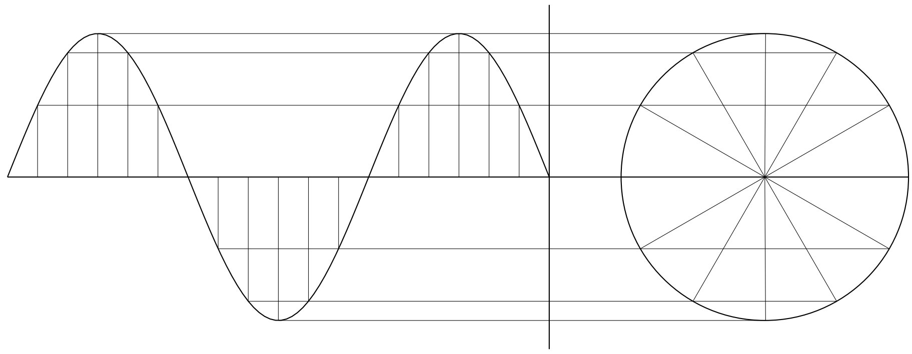
et plus généralement,

$$\begin{aligned} \sin(-x) &= -\sin(x) \ , & \cos(-x) &= \cos(x) \ , \\ \sin(x+\pi) &= -\sin(x) \ , & \cos(x+\pi) &= -\cos(x) \ , \\ \sin(x+\tfrac{\pi}{2}) &= \cos(x) \ , & \cos(x+\tfrac{\pi}{2}) &= -\sin(x) \ , \end{aligned}$$

ou encore $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$. En tant que fonctions de x, les fonctions $\sin(x)$ et $\cos(x)$ sont périodiques de période 2π, et $\tan(x)$ périodique de période π, leurs graphes sont données comme suit:



(les droites en pointillés sont des asymptotes verticales pour $\tan(x)$). Albrecht Dürer (peintre, graveur et mathématicien allemand, 1471–1528) avait déjà remarqué dans son livre *Underweysung der Messung* en 1525 que ces courbes apparaissaient dans le dessin d'escaliers en spirale:



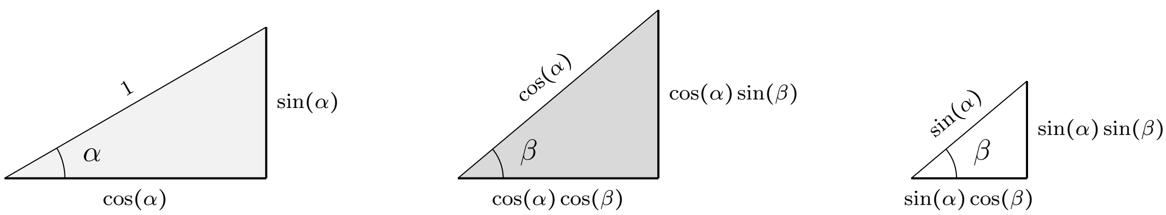
Formules de la somme des angles.

Les sinus et cosinus de la somme de deux angles peuvent être obtenus via les sinus et cosinus de chacun des angles.

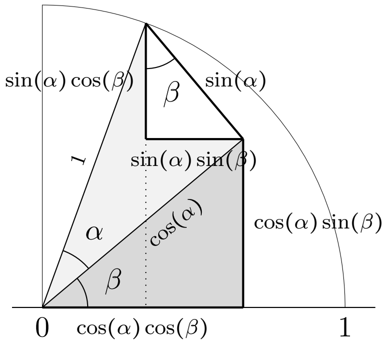
Théorème (Ptolémée, 150—version pour $\mathrm{cord}(x)$)**.** *Pour deux angles x et y, on a*

$$\begin{aligned} \sin(x+y) &= \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y) \\ \cos(x+y) &= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) \ . \end{aligned}$$

Preuve. On montre ces relations pour x, y compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ (pour d'autres angles, on utilise les formules pour $\sin(-x)$, $\sin(x+\pi)$, *etc.*). En assemblant les trois triangles



le long des arêtes de longueur $\cos(\alpha)$ et $\sin(\alpha)$, on obtient la figure suivante:



Les deux égalités du théorème apparaissent alors dans les mesures de $\sin(\alpha+\beta)$ et $\cos(\alpha+\beta)$ le long des axes Oy et Ox respectivement. □

En divisant la première formule par la seconde, on obtient:

$$\tan(x+y) = \frac{\sin(x)\cos(y)+\cos(x)\sin(y)}{\cos(x)\cos(y)-\sin(x)\sin(y)} = \frac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)} \ .$$

Conséquences des formules de la somme d'angles.

Si $x = y$ dans le théorème, on obtient les **formules d'angle double**:

$$\begin{aligned} \sin(2x) &= 2\sin(x)\cos(x) \\ \cos(2x) &= \cos^2(x) - \sin^2(x) = 1 - 2\sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1 \ . \end{aligned}$$

En remplaçant x par $\frac{x}{2}$ dans les deux formules $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x)$ et $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$, puis en isolant une fois $\sin(x)$ et une fois $\cos(x)$, on obtient les **formules de demi-angle**:

$$\sin(\tfrac{x}{2}) = \pm\sqrt{\tfrac{1-\cos(x)}{2}} \ , \qquad \cos(\tfrac{x}{2}) = \pm\sqrt{\tfrac{1+\cos(x)}{2}} \ ;$$

les signes $\pm$ de $\sin(\frac{x}{2})$ et $\cos(\frac{x}{2})$ seront à déterminer selon le quadrant dans lequel se trouve le point $(\cos(\frac{x}{2}), \sin(\frac{x}{2}))$.

En remplaçant y par $-y$ dans les formules pour la somme de deux angles, on obtient les formules pour la différence de deux angles:

$$\begin{aligned} \sin(x-y) &= \sin(x)\cos(y) - \cos(x)\sin(y) \\ \cos(x-y) &= \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y) \ . \end{aligned}$$

On en déduit par exemple que $\sin(x+y) + \sin(x-y) = 2\sin(x)\cos(y)$, c'est-à-dire la première des trois **formules de transformation de produit en somme**:

$$\begin{aligned} \sin(x)\cos(y) &= \tfrac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y)) \ , \\ \sin(x)\sin(y) &= \tfrac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y)) \ , \\ \cos(x)\cos(y) &= \tfrac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y)) \ , \end{aligned}$$

les deux autres s'obtenant de manière similaire. Le changement de paramètres

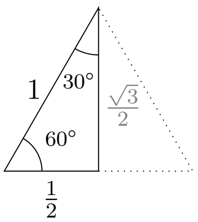
$$\begin{aligned} u &= x + y \\ v &= x - y \end{aligned} \qquad \text{donne} \qquad \begin{aligned} x &= \tfrac{u+v}{2} \\ y &= \tfrac{u-v}{2} \ , \end{aligned}$$

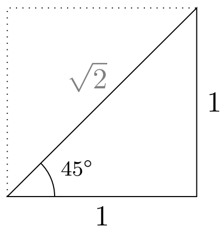
et on en déduit les trois **formules de transformation de somme en produit**:

$$\begin{aligned}
\sin(u) + \sin(v) &= 2\sin(\tfrac{u+v}{2})\cos(\tfrac{u-v}{2}) \\
\cos(u) + \cos(v) &= 2\cos(\tfrac{u+v}{2})\cos(\tfrac{u-v}{2}) \\
\cos(u) - \cos(v) &= -2\sin(\tfrac{u+v}{2})\sin(\tfrac{u-v}{2}) \ .
\end{aligned}$$

Quelques valeurs de fonctions trigonométriques.

En utilisant Pythagore pour trouver les côtés manquant dans les triangles formés par un demi-triangle équilatéral, et un demi-carré:





on trouve les valeurs des fonctions trigonométriques pour les angles de 30°, 45°, 60° connues (avec d'autres, comme celles de 15° ou 18°, dès l'Antiquité):

α	radians	$\sin(\alpha)$	$\cos(\alpha)$	$\tan(\alpha)$
0°	0	0	1	0
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	indét.

Les valeurs des fonctions trigonométriques pour ces angles plus n'importe quel multiple entier de 90° se déduisent graphiquement ou en utilisant les formules pour $\sin(x+\frac{\pi}{2})$, $\sin(x+\pi)$, *etc.* De même, les valeurs pour de nombreuses valeurs intermédiaires s'obtiennent en exploitant les formules de demi-angle, somme, *etc.*

Formules de de Moivre.

En posant $y = nx$ dans les formules pour les sinus et cosinus des sommes des angles, on trouve

$$\begin{aligned}
\sin((n+1)x) &= \sin(x)\cos(nx) + \cos(x)\sin(nx) \\
\cos((n+1)x) &= \cos(x)\cos(nx) - \sin(x)\sin(nx) \ .
\end{aligned}$$

En remplaçant chaque fois la formule obtenue pour $\sin(nx)$ et $\cos(nx)$ dans celles pour

$\sin((n+1)x)$ et $\cos((n+1)x)$ $(n=1,2,\ldots)$, on obtient les égalités

$$\begin{aligned}
\sin(2x) &= \qquad 2\sin(x)\cos(x) \\
\cos(2x) &= \cos^2(x) \qquad - \sin^2(x) \\
\sin(3x) &= \qquad 3\sin(x)\cos^2(x) \qquad - \sin^3(x) \\
\cos(3x) &= \cos^3(x) \qquad - 3\sin^2(x)\cos(x) \\
\sin(4x) &= \qquad 4\sin(x)\cos^3(x) \qquad - 4\sin^3(x)\cos(x) \\
\cos(4x) &= \cos^4(x) \qquad - 6\sin^2(x)\cos^2(x) \qquad + \sin^4(x) \\
&\vdots \qquad\qquad \vdots
\end{aligned}$$

dans lesquelles on voit apparaître les coefficients binomiaux: en effet, les calculs sont comparables à ceux effectués dans le triangle de Pascal. Abraham de Moivre (mathématicien français, 1667–1754) trouvait les formules générales suivantes en 1730:

$$\begin{aligned}
\sin(nx) &= \binom{n}{1}\sin(x)\cos^{n-1}(x) - \binom{n}{3}\sin^3(x)\cos^{n-3}(x) + \binom{n}{5}\sin^5(x)\cos^{n-5}(x) - \ldots \\
\cos(nx) &= \cos^n(x) - \binom{n}{2}\sin^2(x)\cos^{n-2}(x) + \binom{n}{4}\sin^4(x)\cos^{n-4}(x) - \ldots
\end{aligned}$$

(où les $\binom{n}{k}$ sont les coefficients binomiaux définis en page 11).

Séries infinies.

Malgré les belles formules développées pour les fonctions trigonométriques et les valeurs de la table à la page 27, une méthode pour le calcul précis des valeurs telles que $\sin(1°)$ nous élude encore. Bien que des tables de valeurs de fonctions trigonométriques apparaissent en 1464 sous la plume de Regiomontanus (Johannes Müller von Königsberg—mathématicien, astronome and astrologue allemand, 1436–1476), il faut attendre la fin du XVII$^{\text{e}}$ siècle pour que les techniques calculatoires deviennent plus efficaces. Newton obtient les séries infinies pour le sinus et le cosinus en 1669, Leibniz en 1691, mais c'est la méthode de Jacob Bernoulli (mathématicien et physicien suisse, 1654–1705) et Euler que nous allons suivre.

Notons que, *si les angles sont mesurés en radians*, plus un angle x devient petit, plus $\sin(x)$ vient se confondre avec la valeur de x elle-même:

$$\sin(x) \simeq x \quad \text{lorsque} \quad x \longrightarrow 0 \ .$$

Dans les formules de Moivre, posons $x = \frac{y}{N}$ et $n = N$, où y est fixe et N devient "plus grand qu'aucune quantité assignable"—auquel cas x tend vers 0. Comme mentionné ci-dessus, $\sin(x)$ se rapproche de x et $\cos(x)$ de 1. Chaque terme de la somme subit ensuite son "traitement habituel", *i.e.* est de de la forme

$$\binom{N}{k}\sin^k(x)\cos^{N-k}(x) \simeq \frac{N(N-1)\ldots(N-k+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k}\frac{y^k}{N^k}\cdot 1^{N-k} = \frac{N^k}{N^k}\cdot\frac{1\cdot(1-\frac{1}{N})\ldots(1-\frac{k-1}{N})}{k!}y^k \ ;$$

les termes $(1-\frac{l}{N})$ deviennent arbitrairement proches de 1 lorsque N grandit, et on en déduit les séries infinies pour les fonctions sinus et cosinus:

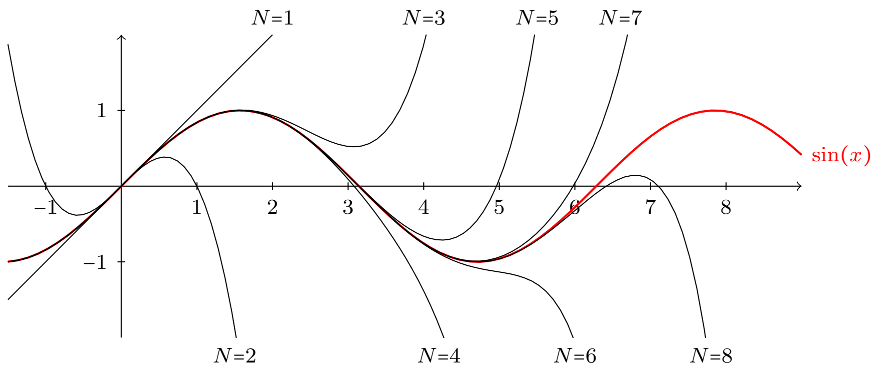
$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \dots$$
$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \dots$$

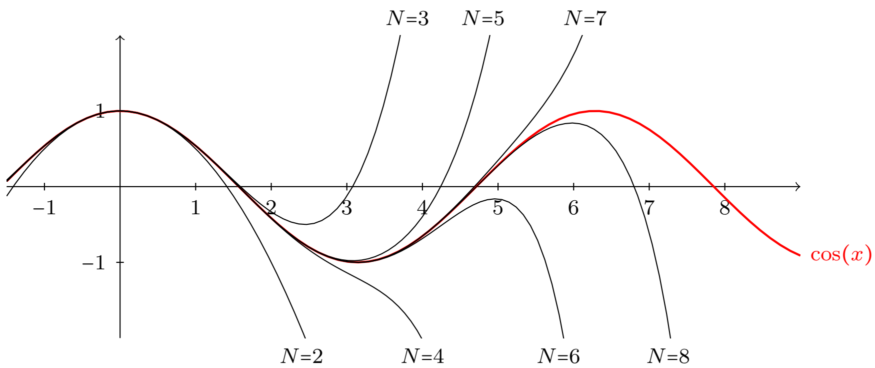
Remarque. En reprenant le raisonnement ci-dessus avec un regard plus critique, nous voyons que nous avons identifié $\cos(\frac{y}{N})$ avec 1 pour des grandes valeurs de N. Le problème est que dans les formules de Moivre, cette quantité $\cos(\frac{y}{N})$ est élevée à des puissances proches de, et même égales à, N; ces puissances s'approchent-elles aussi de 1? Par exemple, $(1 + \frac{y}{N})^N$ s'approche de e^y et non de 1 lorsque N grandit. La situation est sauvée parce que $\cos(\frac{y}{N})$ tend plus vite vers 1 que $1 + \frac{y}{N}$; plus précisément, on a

$$\cos^N(\tfrac{y}{N}) = (1 - \sin^2(\tfrac{y}{N}))^{\frac{N}{2}} \simeq 1 - \tfrac{1}{2}\tfrac{y^2}{N} \longrightarrow 1$$

(par le théorème de la série du binôme de Newton et le fait que $\sin(x) \simeq x$ si x est petit).

Les séries du sinus et du cosinus ressemblent chacune à une partie de la série infinie de l'exponentielle, et il n'est pas surprenant qu'elles semblent converger pour tout x (ci-dessous, le N se rapporte au nombre de termes de la série que l'on prend en compte):



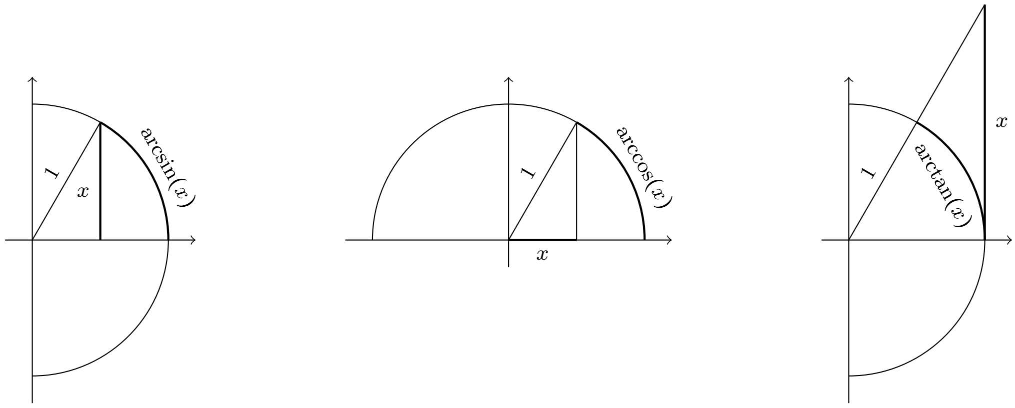


Rappelons que grâce à la périodicité des fonctions trigonométriques, il suffit de restreindre notre attention aux approximations de $\sin(x)$ et $\cos(x)$ pour des valeurs de x comprises entre $-\pi$ et π.

Fonctions trigonométriques inverses.

Si l'on considère le cercle de rayon 1 centré en $(0,0)$, les fonctions trigonométriques fournissent les valeurs de $\sin(x)$, $\cos(x)$, ou $\tan(x)$ pour un arc x donné en radians. Les fonctions trigonométriques *inverses* donnent l'arc x en fonction de $\sin(x)$, $\cos(x)$, ou $\tan(x)$.

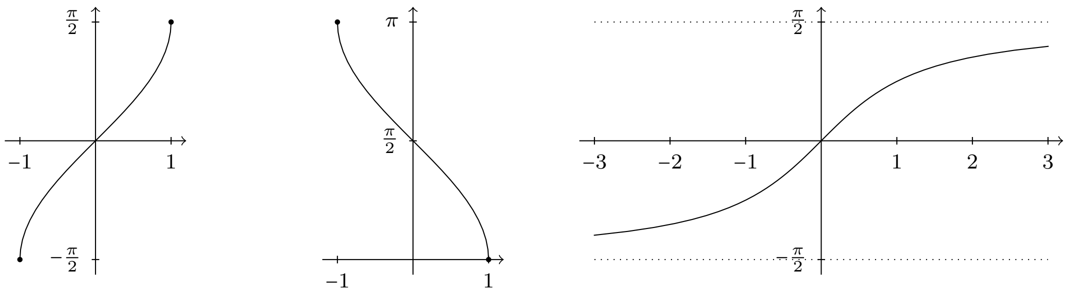
Définition. Pour une longueur x avec $-1 \le x \le 1$, l'**arc dont le sinus est** x est donné par $\arcsin(x)$ (voir la première figure ci-dessous). Les fonctions $\arccos(x)$ et $\arctan(x)$ sont définies de manière analogue:



Dans la définition précédente des fonctions trigonométriques inverses, l'arc est seulement défini de manière unique si on décide à l'avance dans quel demi-cercle il va se trouver. Les **branches principales** de ces fonctions donnent des fonctions inverses sur les intervalles définis comme suit:

$$
\begin{array}{llll}
y = \arcsin(x) \iff \sin(y) = x & \text{pour} & -1 \le x \le 1\ , & -\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}\ , \\
y = \arccos(x) \iff \cos(y) = x & \text{pour} & -1 \le x \le 1\ , & 0 \le y \le \pi\ , \\
y = \arctan(x) \iff \tan(y) = x & \text{pour} & -\infty < x < \infty\ , & -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\ .
\end{array}
$$

Les graphes de ces fonctions trigonométriques sont donc donnés comme suit:



$\arcsin(x)$ $\arccos(x)$ $\arctan(x)$

Il existe aussi des séries infinies pour ces fonctions inverses, mais nous n'allons pas développer cet aspect ici.

2 Calcul différentiel et intégral

Des notions de calcul différentiel apparaissent déjà dans les calculs de tangentes à certaines courbes par Archimède de Syracuse (mathématicien, physicien, ingénieur, inventeur et astronome grec, 287–212 *av.J.-C.*), dans la résolution d'équations différentielles liées à des problèmes astronomiques par Aryabhata, et dans l'évaluation de maxima et minima de courbes par Sharaf al-Dīn al-Tūsī (mathématicien et astronome perse, 1135–1213). Mais c'est au XVII^{e} siècle que le sujet prend véritablement son essor avec l'introduction explicite de la notion de dérivée.

2.1 Dérivées.

Problème. Soit $y = f(x)$ une courbe donnée. En chaque point x, on veut connaître sa *pente*, l'équation de sa *tangente*, ou celle de sa *normale*.

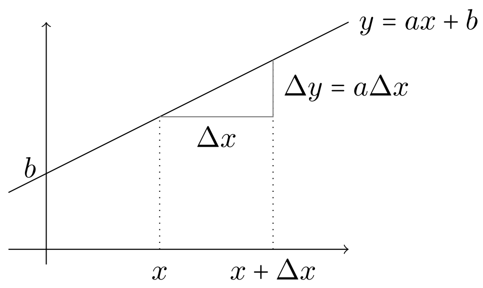
Motivations. Calcul de l'angle d'intersection de deux courbes (Descartes), construction de lunettes astronomiques (Galilée) et d'horloges (Huyghens), recherche de maxima et minima d'une fonction (Fermat), calcul de la vitesse et de l'accélération d'un mouvement (Galilée, Newton), lois de la gravitation en astronomie (Kepler, Newton).

Pente d'une droite.

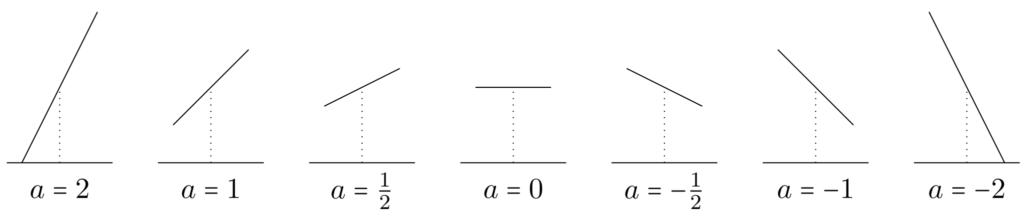
Pour une **droite** $y = ax + b$ (avec a et b des constantes fixées), considérons un point x et un de ses points voisins $x + \Delta x$; les ordonnées correspondantes sont y et $y + \Delta y$, où $y + \Delta y = a(x + \Delta x) + b$, soit $y + \Delta y = ax + a\Delta x + b$; et comme $y = ax + b$, on déduit

$$\Delta y = a\Delta x \ , \quad \text{ou encore} \quad a = \frac{\Delta y}{\Delta x} \ .$$

Le nombre a est la **pente** de la droite $y = ax + b$.



Exemples. Pour un système d'axes dans lequel l'unité selon Ox est la même que selon Oy:



Tangente à une parabole.

Pour la parabole $y = x^2$, considérons comme avant un point x et son voisin $x + \Delta x$; les ordonnées correspondantes sont y et $y + \Delta y$, où cette fois

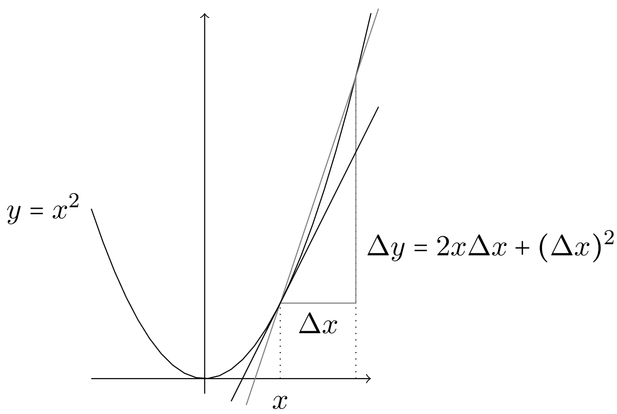
$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^2 = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 \ .$$

Puisque $y = x^2$, on en déduit que

$$\Delta y = 2x\Delta x + (\Delta x)^2 = \Delta x(2x + \Delta x) \ ,$$

et donc $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x$ est la pente de la droite par les points (x, y) et $(x + \Delta x, y + \Delta y)$. Si Δx devient très petit, cette droite *vient se confondre avec la tangente* à la parabole $y = x^2$; la tangente à l'abscisse x sera donc de pente

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \simeq 2x \qquad \text{si} \qquad \Delta x \longrightarrow 0 \ .$$



La pente de la tangente à une courbe $y = f(x)$ en un certain point mesure le *taux de changement* de la variable y par rapport à la variable x. La fonction qui décrit ce taux en chaque abscisse x s'appelle la **dérivée** de f et est exprimée par l'une des notations suivantes:

$$y' \ , \quad f'(x) \ , \quad \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \ , \quad \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x) \ ,$$

ou encore $\dot{y}$ ou $\dot{f}(t)$—surtout lorsque la variable t de la fonction représente le temps.

Notations.

Lorsqu'il introduit ces notions en 1684, Leibniz identifie les quantités Δx et Δy avec des quantités "infiniments petites", et les note alors dx et dy respectivement. Newton, en 1671, considère plutôt que la variable y "varie infiniment" par rapport à x, et utilise une notation de la forme $\dot{y}$ (dans laquelle la variable de référence disparaît!). Lagrange en 1797 rejette la notion d'infiniment petit et introduit une notation similaire à celle de Newton, bien que plus pratique: celle des y' ou des $f'(x)$.

L'idée de réellement *travailler* avec des quantités "infinements petites" était révolutionnaire, et fut au cœur de débats houleux dans les milieux scientifiques de l'époque. L'approche du concept par l'angle des limites fut initiée par Bernhard Bolzano (mathématicien, théologien, philosophe, et antimilitariste allemand, 1781–1848) en 1817 et Augustin-Louis Cauchy (mathématicien français, 1789–1857) en 1823, puis perfectionnée par Karl Weierstrass (mathématicien allemand, 1815–1897). L'approche par les infinitésimaux de Leibniz, elle, ne fut véritablement formalisée qu'en 1961 par Abraham Robinson (mathématicien allemand, 1918–1974)!

2.2 Règles de différentiation.

Les méthode pour trouver la dérivée d'une droite ou d'une parabole peuvent être appliquées à un grand nombre d'autres fonctions usuelles. Mais voyons tout d'abord quelques règles générales.

Combinaison linéaire de fonctions. Soient $f(x)$ et $g(x)$ des fonctions, et a, b des constantes avec

$$y(x) = a \cdot f(x) + b \cdot g(x) \ .$$

En posant $y(x + \Delta x) = y + \Delta y$, $f(x + \Delta x) = f + \Delta f$, $g(x + \Delta x) = g + \Delta g$ dans la définition de y, on déduit

$$\Delta y = a \cdot \Delta f + b \cdot \Delta g \ .$$

La pente de la tangente à $y(x)$ se rapproche donc de $\frac{\Delta y}{\Delta x} = a \cdot \frac{\Delta f}{\Delta x} + b \cdot \frac{\Delta g}{\Delta x}$ si Δx se rapproche de 0, et on obtient la règle

$$y = a \cdot f + b \cdot g \implies \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = a \cdot \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} + b \cdot \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x} \qquad \text{ou} \qquad y' = a \cdot f' + b \cdot g' \ .$$

Produit de fonctions. En procédant comme ci-dessus avec

$$y(x) = f(x) \cdot g(x) \ ,$$

on obtient

$$y + \Delta y = (f + \Delta f) \cdot (g + \Delta g) = f \cdot g + \Delta f \cdot g + f \cdot \Delta g + \Delta f \cdot \Delta g \ .$$

Comme le remarquait Guillaume Antoine, Marquis de l'Hôpital (mathématicien français, 1661–1704):

> $\Delta f \cdot \Delta g$ est une quantité infiniment petite par rapport aux termes $\Delta f \cdot g$ & $f \cdot \Delta g$

et l'on conclut que $\Delta y = \Delta f \cdot g + f \cdot \Delta g$:

$$y = f \cdot g \implies \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \cdot g + f \cdot \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x} \qquad \text{ou} \qquad y' = f' \cdot g + f \cdot g' \ .$$

Exemples. Écrivons x^3 comme un produit $y = x^3 = x^2 \cdot x$; la formule de dérivation d'un produit donne

$$y' = 2x \cdot x + x^2 \cdot 1 = 3x^2 \ .$$

De même, pour $y = x^4 = x^3 \cdot x$, nous obtenons $y = 3x^2 \cdot x + x^3 \cdot 1 = 4x^3$. Avec des arguments similaires, une démonstration par récurrence nous donne (pour tout entier $n \geq 1$)

$$y = x^n \implies y' = n \cdot x^{n-1} \ . \tag{$*$}$$

Ce résultat avec la règle pour les combinaisons linéaires de fonctions nous permet de déterminer la dérivée de n'importe quel polynôme:

$$y = a_n \cdot x^n + \ldots + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0 \implies y' = a_n \cdot n \cdot x^{n-1} + \ldots + a_2 \cdot 2 \cdot x + a_1 \ .$$

Quotient de fonctions. Pour un quotient de fonctions ,

$$y(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

nous avons $y + \Delta y = \frac{f+\Delta f}{g+\Delta g}$. Pour obtenir une règle de dérivation, il faut soustraire $\frac{f}{g}$ de chaque côté de cette égalité, puis utiliser la série géométrique (voir la Série 5) pour $\frac{1}{1+\frac{\Delta g}{g}}$:

$$\begin{aligned}\Delta y &= \frac{f+\Delta f}{g+\Delta g} - \frac{f}{g} = \frac{(fg+g\cdot\Delta f)-(fg+f\cdot\Delta g)}{g\cdot(g+\Delta g)} = \frac{(fg+g\cdot\Delta f)-(fg+f\cdot\Delta g)}{g^2\cdot(1+\frac{\Delta g}{g})}\\ &= \frac{g\cdot\Delta f - f\cdot\Delta g}{g^2}\cdot(1-\tfrac{\Delta g}{g}+\tfrac{(\Delta g)^2}{g^2}-\dots)\ .\end{aligned}$$

Pour paraphraser le Marquis de l'Hôpital, tous les termes $\frac{\Delta g}{g}$, $\frac{(\Delta g)^2}{g^2}$, *etc.* sont des quantités infiniment petites par rapport au terme 1 de la suite géométrique (lorsque les Δx deviennent infiniment petits), et on obtient:

$$y = \frac{f}{g} \implies \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\cdot g - f\cdot\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}}{g^2} \qquad \text{ou} \qquad y' = \frac{f'\cdot g - f\cdot g'}{g^2}\ .$$

Exemple. La fonction $y = \frac{1}{x^n}$ (pour un entier positif n), est le quotient de la fonction constante $f(x) = 1$ par $g(x) = x^n$. Par $(*)$, nous connaissons la dérivée de g et la règle du quotient donne

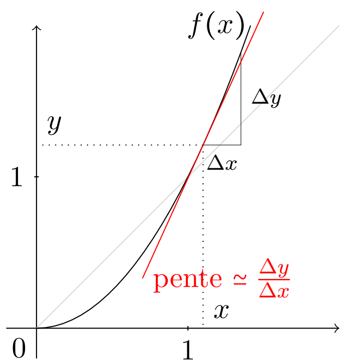
$$y'(x) = \frac{0\cdot x^n - 1\cdot n\cdot x^{n-1}}{(x^n)^2} = \frac{-n\cdot x^{n-1}}{x^{n-1}\cdot x^{n+1}} = \frac{-n}{x^{n+1}}\ .$$

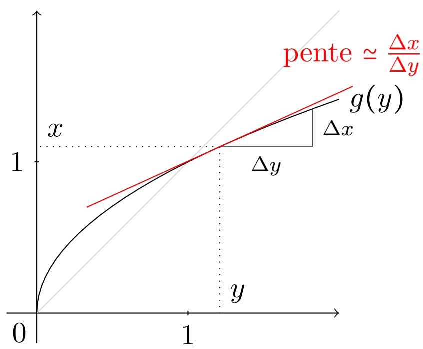
Nous pouvons résumer notre raisonnement par la règle

$$y = x^{-n} \implies y' = -n\cdot x^{-n-1}\ ,$$

c'est-à dire que la formule $(*)$ est vraie pour tout entier n, positif ou négatif!

Fonctions réciproques. Rappelons que si une fonction $y = f(x)$ possède une fonction inverse $x = g(y)$ (ou **réciproque**), les graphes de ces fonctions sont symétriques par rapport à la diagonale $y = x$:





(comparez par exemple les graphes de e^x et $\ln(x)$, ou des fonctions trigonométriques et de leurs inverses). Les pentes des tangentes aux courbes sont donc inverses l'une de l'autre, et l'égalité triviale

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}}$$

nous dit que la dérivée de f est l'inverse de la dérivée de g:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}} \qquad \text{lorsque} \qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} \neq 0 \ .$$

Exemple. La fonction $y = \sqrt{x}$ est l'inverse de la fonction $x = y^2$ (lorsque x et y sont positifs ou nuls), et l'on a donc

$$y = \sqrt{x} \implies \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}} = \frac{1}{2y} = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \ ,$$

ou plus succintement,

$$y = x^{\frac{1}{2}} \implies y' = \tfrac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} \ .$$

Ceci suggère que la règle de dérivation $(*)$ est aussi vraie pour les puissances rationnelles... En fait, elle est vraie pour toute puissance *réelle*, mais pour s'en assurer, il nous faut encore travailler un peu.

La fonction exponentielle. Pour la fonction exponentielle $y = e^x$, nous avons $y + \Delta y = e^{x+\Delta x} = e^x \cdot e^{\Delta x}$, et donc

$$\Delta y = e^x \cdot (e^{\Delta x} - 1) \ .$$

Dans la série de l'exponentielle $e^{\Delta x} = 1 + \Delta x + \frac{(\Delta x)^2}{2!} + \ldots$ (voir page 16) si $\Delta x \longrightarrow 0$, on a $e^{\Delta x} \simeq 1 + \Delta x$, et donc $\Delta y \simeq e^x \cdot \Delta x$:

$$y = e^x \implies y' = e^x \ ,$$

la fonction exponentielle est sa propre dérivée.

Le logarithme naturel. Nous pouvons obtenir la dérivée du logarithme naturel par deux moyens:

- **Par les Δ.** Si $y + \Delta y = \ln(x + \Delta x)$, on a

$$\Delta y = \ln(x + \Delta x) - \ln(x) = \ln\left(\tfrac{x+\Delta x}{x}\right) = \ln(1 + \tfrac{\Delta x}{x}) \ .$$

  On peut utiliser la série de la page 20 pour estimer $\ln(1 + \frac{\Delta x}{x}) = \frac{\Delta x}{x} - \frac{(\Delta x)^2}{2x^2} + \ldots$ lorsque $\Delta x \longrightarrow 0$. On a alors $\Delta y \simeq \frac{\Delta x}{x}$, et donc

$$y = \ln(x) \implies y' = \frac{1}{x} \ .$$

- **Par la règle des dérivées inverses.** En posant $y = \ln(x)$ et $x = e^y$ dans la règle en question, on obtient

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x} \ ,$$

  précisément le résultat obtenu par les Δ.

Les fonctions trigonométriques. Considérons d'abord la fonction $y = \sin(x)$. On utilise la formule de la somme pour obtenir

$$y + \Delta y = \sin(x + \Delta x) = \sin(x) \cdot \cos(\Delta x) + \cos(x) \cdot \sin(\Delta x) \ ,$$

puis les séries pour le cosinus et le sinus nous donnent

$$y + \Delta y = \sin(x) \cdot (1 - \tfrac{(\Delta x)^2}{2!} + \ldots) + \cos(x) \cdot (\Delta x - \tfrac{(\Delta x)^3}{3!} + \ldots) \ .$$

En soustrayant $y = \sin(x)$ à cette égalié, et en négligeant les termes $\frac{(\Delta x)^n}{n!}$ pour $n \geq 2$, on obtient $\Delta y \simeq \cos(x) \cdot \Delta x$, soit

$$y = \sin(x) \implies y' = \cos(x) \ .$$

En procédant de la même manière avec $y = \cos(x)$, on obtient

$$y = \cos(x) \implies y' = -\sin(x) \ .$$

(Les dérivées des sinus et cosinus se lisent sur les axes après avoir "opéré une rotation du cercle trigonométrique" de $-90°$). Pour la tangente $y = \tan(x)$, on peut utiliser la règle des quotients de fonctions:

$$y' = \frac{\sin'(x)\cos(x) - \cos'(x)\sin(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x) \ .$$

Les fonctions trigonométriques inverses. En insérant les règles pour les fonctions trigonométriques dans la règle pour les fonctions inverses, on trouve:

$$\begin{aligned}
y = \arcsin(x) &\implies \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}} = \frac{1}{\sin'(y)} = \frac{1}{\cos(y)} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(y)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \ ,\\
y = \arccos(x) &\implies \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}} = \frac{1}{\cos'(y)} = \frac{1}{-\sin(y)} = \frac{-1}{\sqrt{1-\cos^2(y)}} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \ ,\\
y = \arctan(x) &\implies \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}} = \frac{1}{\tan'(y)} = \frac{1}{1+\tan^2(y)} = \frac{1}{1+x^2} \ .
\end{aligned}$$

Dans la première règle, nous devons choisir le signe de $\cos(y) = \pm\sqrt{1-\sin^2(y)}$, mais un coup d'œil sur le graphe de l'arcsinus nous informe que la pente de la tangente est toujours positive, et nous prenons la racine positive. Le même raisonnement peut être fait pour la seconde règle.

Fonctions composées. Supposons avoir une fonction $y = h(x)$ qui est une *composition* de fonctions $h(x) = f(g(x))$. Si l'on pose $z = g(x)$, notre fonction y devient une fonction de z: $y = f(z)$. Pour les incréments, nous avons $y + \Delta y = h(x + \Delta x)$, $y + \Delta y = f(z + \Delta z)$ et $z + \Delta z = g(x + \Delta x)$. En se basant sur la relation qu'entretiennent les tangentes à ces courbes (une simple égalité de fractions):

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta z} \cdot \frac{\Delta z}{\Delta x} \ ,$$

nous obtenons la **règle de dérivation en chaîne**

$$y = f(g(x)) \implies \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z} \cdot \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} \qquad \text{ou} \qquad y' = f'(g(x)) \cdot g'(x) \ .$$

Pour dériver une fonction composée, il faut donc *multiplier les dérivées des composantes.*

Exemples.

- La fonction $y = \sin(2x)$ est composée de la fonction $y = \sin(z)$ et $z = 2x$. Sa dérivée est conséquemment $y' = \cos(z) \cdot 2 = 2\cos(2x)$.
- Pour calculer la dérivée de $y = a^x$, pour $1 \neq a > 0$, on utilise que $a^x = \mathrm{e}^{\ln(a^x)} = \mathrm{e}^{x \cdot \ln(a)}$. Avec $y = \mathrm{e}^z$ et $z = x \cdot \ln(a)$, on obtient
$$y' = \mathrm{e}^z \cdot \ln(a) = \mathrm{e}^{x \cdot \ln(a)} \cdot \ln(a) = \ln(a) \cdot a^x \ .$$
- Pour calculer la dérivée de $y = x^a$, où a est une constante, on procède comme ci-dessus: on a $x^a = \mathrm{e}^{a \cdot \ln(x)}$. Avec $y = \mathrm{e}^z$ mais cette fois $z = a \cdot \ln(x)$, on obtient
$$y' = \mathrm{e}^z \cdot \frac{a}{x} = \mathrm{e}^{a \cdot \ln(x)} \cdot \frac{a}{x} = x^a \cdot \frac{a}{x} = a \cdot x^{a-1} \ .$$
En d'autres termes, *la formule* $(*)$ *est vraie pour tout nombre réel* a.

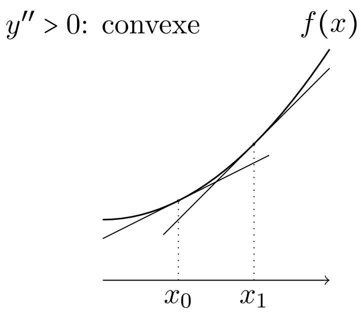
2.3 Dérivées d'ordre supérieur.

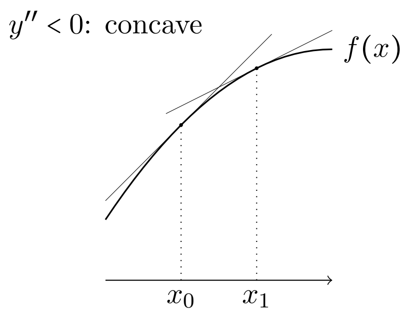
Pour une courbe $y = f(x)$, la dérivée $f'(x)$ donne la pente de la tangente en chaque point x. Donnés deux nombres a et b avec $a < b$,

- si $f'(x) > 0$ pour tout $a < x < b$, la fonction f est **croissante** sur l'intervalle (a, b),
- si $f'(x) < 0$ pour tout $a < x < b$, la fonction f est **décroissante** sur l'intervalle (a, b),
- les x pour lesquels $f'(x) = 0$ sont des **points stationnaires**.

Puisque $y' = f'(x)$ est elle-même une fonction, on peut en reprendre la dérivée pour obtenir la **deuxième dérivée** $f''(x)$ de $f(x)$. Si $f''(x) > 0$ pour $a < x < b$, alors d'après ce qui précède, la fonction $f'(x)$ est croissante sur l'intervalle de a à b: si x_0 et x_1 sont deux points dans cet intervalle, avec $x_0 < x_1$, alors on aura $f'(x_0) < f'(x_1)$, c'est-à-dire que la pente de la tangente à f en x_1 sera plus grande que celle en x_0. De même si $f''(x) > 0$ pour $a < x < b$, alors la pente diminuera lorsque x augmente:

- si $f''(x) > 0$ pour tout $a < x < b$, la fonction f est **convexe** (ou **convexe vers le haut**) sur l'intervalle (a, b),
- si $f''(x) < 0$ pour tout $a < x < b$, la fonction f est **concave** (ou **convexe vers le bas**) sur l'intervalle (a, b),
- les x pour lesquels $f''(x) = 0$ et où la *seconde dérivée change de signe* sont des **points d'inflexions**.





Maxima et minima locaux.

En un point $x = x_0$ où une fonction $f(x)$ atteint un maximum ou un minimum local, la fonction ne peut ni croître, ni décroître, et par conséquent $f'(x_0) = 0$, c'est-à dire que x_0 est un point stationnaire. On a un maximum local si la pente de la tangent est positive, puis négative (une condition qui sera remplie si $f''(x_0) < 0$), et un minimum local si la pente de la tangente est d'abord négative, puis positive (cette fois, on veut $f''(x_0) > 0$):

- $f'(x_0) = 0$ et $f''(x_0) < 0 \implies$ le point x_0 est un maximum local;
- $f'(x_0) = 0$ et $f''(x_0) > 0 \implies$ le point x_0 est un minimum local.

Exemple. Pour $y = x^3 - x^2 - 3x$, on calcule

$$y' = 3x^2 - 2x - 3 \qquad \text{et} \qquad y'' = 6x - 2\ .$$

Cette fonction coupe l'axe horizontal lorsque $y = 0$, soit lorsque $x \cdot (x^2 - x - 3) = 0$, c'est-à-dire si

$$x = 0\ , \quad x = \tfrac{1+\sqrt{13}}{2}\ , \quad \text{ou} \quad x = \tfrac{1-\sqrt{13}}{2}\ .$$

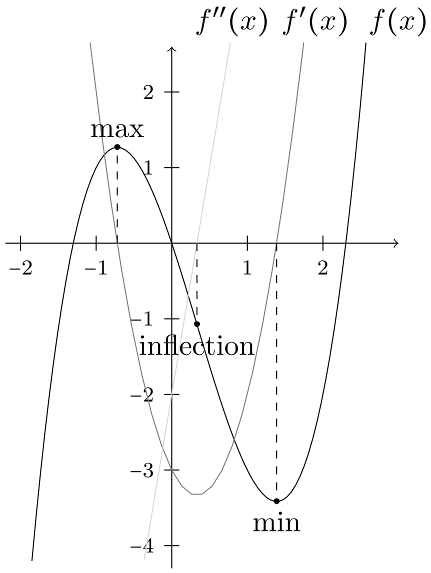
La dérivée, elle, s'annule lorsque

$$x = \tfrac{1+\sqrt{10}}{3} \quad \text{ou} \quad x = \tfrac{1-\sqrt{10}}{3}\ .$$

Finalement, $f''(x) = 0$ pour $x = \frac{1}{3}$. Un **tableau des variations** résume la situation:

x	$\frac{1-\sqrt{13}}{2}$	$\frac{1-\sqrt{10}}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1+\sqrt{10}}{3}$	$\frac{1+\sqrt{13}}{2}$
y''	$-$	$-$	$-$	$-$ 0 $+$	$+$	$+$
y'	$+$	$+$ 0 $-$	$-$	$-$	$-$ 0 $+$	$+$
y	$\nearrow$ 0 $\nearrow$	$\nearrow$ max $\searrow$	$\searrow$ 0 $\searrow$	$\searrow$	$\searrow$ min $\nearrow$	$\nearrow$ 0 $\nearrow$
	$\cap$	$\cap$	$\cap$	$\cap$ infl. $\cup$	$\cup$	$\cup$

La fonction est concave pour $x < \frac{1}{3}$ et convexe pour $x > \frac{1}{3}$, et $x = \frac{1}{3}$ est un point d'inflection. La fonction est aussi croissante si $x < \frac{1-\sqrt{10}}{3}$ ou $x > \frac{1+\sqrt{10}}{3}$, et décroissante entre ces valeurs. On a donc un maximum local en $x = \frac{1-\sqrt{10}}{3}$ et un minimum local en $x = \frac{1+\sqrt{10}}{3}$, mais aucun de ces extrema n'est global:



La série de Taylor.

En 1715, Brook Taylor (mathématicien anglais, 1685–1731) décrit une méthode systématique pour obtenir une série infinie associée à une fonction $y = f(x)$. Pour cela, il considère le polynôme d'interpolation passant par $y_0 = f(x_0)$, $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$, ..., où

$$x_0 \ , \quad x_1 = x_0 + \Delta x \ , \quad x_2 = x_0 + 2\Delta x \ , \quad \ldots$$

Rappelons que théorème 1.1 nous dit que le polynôme qui passe par les points $(0, y_0)$, $(1, y_1)$, et $(2, y_2)$ est donné par

$$p(t) = y_0 + \tfrac{t}{1!}\Delta y_0 + \tfrac{t\cdot(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0 \ .$$

Le changement de variables

$$t = \tfrac{x-x_0}{\Delta x}$$

(une "translation vers la droite de x_0" suivi d'une "contraction horizontale de rapport $\frac{1}{\Delta x}$") donne alors le polynôme

$$\tilde{p}(x) = y_0 + \tfrac{(x-x_0)}{1!}\tfrac{\Delta y_0}{\Delta x} + \tfrac{(x-x_0)(x-x_1)}{2!}\tfrac{\Delta^2 y_0}{\Delta x^2}$$

qui, lui, passe par (x_0, y_0), (x_1, y_1), et (x_2, y_2). Si Δx devient petit, alors x_1 se rapproche de x_0, x_2 se rapproche de x_1 et donc de x_0:

$$\Delta x \longrightarrow 0 \implies x_1 \longrightarrow x_0 \ , \quad x_2 \longrightarrow x_0 \ .$$

Le quotient $\frac{\Delta y_0}{\Delta x}$ se rapproche quant à lui de $f'(x_0)$, et on se convainc avec Taylor que $\frac{\Delta^2 y_0}{\Delta x^2}$ se rapproche de la *seconde dérivée* de f:

$$\frac{\Delta^2 y_0}{\Delta x^2} = \frac{\Delta y_1 - \Delta y_0}{\Delta x \cdot \Delta x} = \frac{\frac{\Delta y_1}{\Delta x} - \frac{\Delta y_0}{\Delta x}}{\Delta x} \simeq \frac{f'(x_1) - f'(x_0)}{\Delta x} = \frac{\Delta y_0'}{\Delta x} \simeq f''(x_0) \ .$$

Plus généralement, lorsque $\Delta x \longrightarrow 0$, la k-ième différence divisée $\frac{\Delta^k y_0}{\Delta x^k}$ se rapproche de la k-ième dérivée de f:

$$\frac{\Delta^k y_0}{\Delta x^k} \quad \longrightarrow \quad \left.\frac{\mathrm{d}^k y_0}{\mathrm{d}x^k}\right|_0 = f^{(k)}(x_0) \ .$$

En résumé, lorsque $\Delta x \longrightarrow 0$, on a

$$\tilde{p}(x) \simeq f(x_0) + \tfrac{(x-x_0)}{1!} f'(x_0) + \tfrac{(x-x_0)^2}{2!} f''(x_0) \ .$$

En considérant de plus en plus de termes dans le polynôme d'interpolation, on obtient la **série de Taylor** en x_0 de la fonction f:

$$\tilde{f}(x) = f(x_0) + \tfrac{(x-x_0)}{1!} f'(x_0) + \tfrac{(x-x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \tfrac{(x-x_0)^3}{3!} f'''(x_0) + \ldots$$

Exemples. Toutes les séries infinies du premier chapitre peuvent être obtenues avec cette formule en $x_0 = 0$. Par exemples, si $f(x) = \ln(1+x)$, on a les dérivées:

$$f'(x) = (1+x)^{-1} \ , \quad f''(x) = -(1+x)^{-2} \ , \quad f'''(x) = 2(1+x)^{-3} \ , \quad f^{(k)} = (-1)^{k-1}\cdot(k-1)!\cdot(1+x)^{-k}$$

et donc

$$f(0) = 0 \ , \quad f'(0) = 1 \ , \quad f''(0) = -1 \ , \quad f'''(x) = 2 \ , \quad f^{(k)} = (-1)^{k-1}\cdot(k-1)!$$

qui donne la série que nous connaissons:

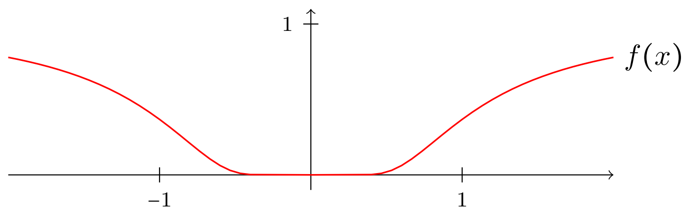
$$\ln(1+x) = x - \tfrac{x^2}{2} + \tfrac{x^3}{3} - \ldots$$

pour $|x| < 1$.

Remarque. La série de Taylor ne fournit pas nécessairement une approximation de $\tilde{f}(x) \simeq f(x)$ pour tout x. Par exemple, nous savons que la série de $\ln(1+x)$ n'est plus valable pour les $|x| > 1$. Il faut donc seulement considérer les x *près de* x_0. Même là, certaines précautions sont nécessaires: il existe des fonctions pour lesquelles la série n'est valable qu'en $x = x_0$; par exemple la série de Taylor en $x_0 = 0$ de la fonction

$$f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

est complètement inutile pour $x \neq 0$ car $f^{(k)}(0) = 0$ pour tout entier $k > 0$:

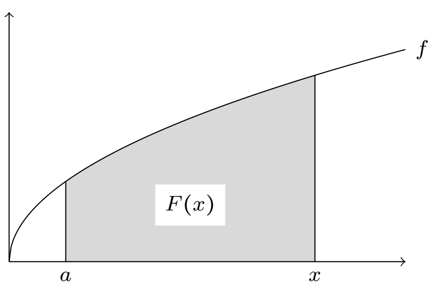


2.4 Calcul intégral.

Le calcul intégral trouve ses source plus tôt encore que le calcul différentiel, via le calcul de certains volumes par les Egyptiens en 1820 *av.J.-C.*; les techniques utilisées allaient trouver leur apogée dans le théorème de Fermat (voir page 19)... juste avant de devenir obsolètes suite aux travaux de Newton, Leibniz et Johann Bernoulli (mathématicien suisse—et frère cadet de Jacob Bernoulli, 1667–1748)! En effet, ces trois mathématiciens découvrent indépendamment que l'intégration est une opération *inverse* de la différentiation.

Primitives.

Donnée une fonction $y = f(x)$, nous voulons connaître l'aire contenue entre l'axe Ox et le graphe de la fonction: fixons une abscisse a et notons $z = F(x)$ l'aire sous f entre a et x:

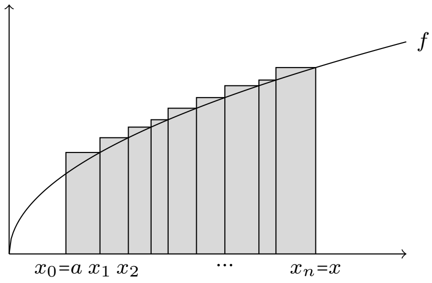


Le point crucial est que

> la fonction $f(x)$ est la *dérivée* de la fonction $F(x)$.

Cette fonction $F(x)$ est appelée une **primitive** de $f(x)$ (ou encore une **intégrale indéfinie** de $f(x)$).

Justification. Pour Leibniz, l'aire $z = F(x)$ est la somme des aires de rectangles "infiniment fins":



Pour un partage de l'intervalle de a à x en n parties, on a l'approximation

$$z_n = f(x_1) \cdot \Delta x_1 + f(x_2) \cdot \Delta x_2 + \ldots + f(x_n) \cdot \Delta x_n$$

(où $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ lorsque $i = 1, \ldots, n$). La différence d'aire pour deux n consécutifs $\Delta z_n = z_n - z_{n-1}$ est donnée par

$$\Delta z_n = f(x_n) \cdot \Delta x_n \quad \text{et donc} \quad \frac{\Delta z_n}{\Delta x_n} = f(x_n)$$

Quand $\Delta x_n \longrightarrow 0$ (c'est-à-dire n devient infiniment grand sans que $x = x_n$ ne bouge), on observe bien que la *dérivée de la fonction d'aire F est la fonction de la courbe f*:

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = f(x) \quad \text{c'est-à-dire} \quad F'(x) = f(x) \ .$$

Comme l'aire est donnée par une "somme infinie", Leibniz finit par choisir la lettre "s" pour symboliser une primitive de f:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x \ .$$

Pour désigner l'aire *entre les bornes a et b*, Jean Baptiste Joseph Fourier (mathématicien et physicien français, 1768–1830) introduit la notation de l'**intégrale** de f entre a et b (aussi appelée l'**intégrale définie** pour marquer la différence avec l'intégrale indéfinie):

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \ .$$

Notons la différence conceptuelle entre une primitive, qui est une fonction, et une intégrale, qui est essentiellement un nombre.

Intégrales.

L'opération qui consiste à trouver une primitive d'une fonction s'appelle l'**intégration**, une opération inverse de la *différentiation*. Une primitive $F(x)$ n'est en fait déterminée *qu'à une constante près*. En effet, si $F(x)$ est une primitive de $f(x)$ (c'est-à-dire $F'(x) = f(x)$), alors pour n'importe quelle constante C, la fonction

$$F(x) + C$$

possède aussi $f(x)$ comme dérivée: $(F(x) + C)' = f(x)$. Si nous choisissons la constante comme $C = -F(a)$, la fonction d'aire

$$F(x) - F(a)$$

va s'annuler lorsque $x = a$, et donnera bien en général l'aire de la fonction $F'(x)$ entre a et x. Nous obtenons donc l'identité fondamentale

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) \quad \text{où} \quad F'(x) = f(x)\ . \tag{$*$}$$

Une notation pratique dans le calcul d'intégrales pour désigner la différence $F(b) - F(a)$ est

$$[F(x)]_a^b \quad \text{ou encore} \quad F(x)\big|_a^b\ .$$

Chaque formule de différentiation donne en retour une formule d'intégration. Par exemple, de la règle

$$f(x) = x^{n+1} \implies f'(x) = (n+1)\cdot x^n \quad (\text{si } n \neq -1)\ ,$$

nous déduisons que si $g(x) = x^n$, alors ses primitives seront données par $G(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ (pour s'en convaincre, calculer $G'(x)$):

$$\int x^n\,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (\text{si } n \neq -1)\ .$$

En utilisant les autres règles de dérivation de la section 2.1, on obtient par exemple les primitives suivantes:

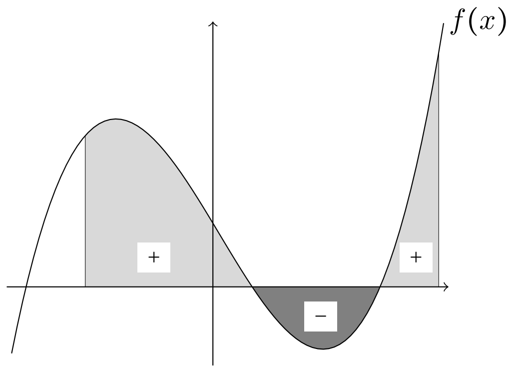
$$\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C\ , \qquad \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln(x) + C\ ,$$

$$\int \sin(x)\,\mathrm{d}x = -\cos(x) + C\ , \qquad \int \cos(x)\,\mathrm{d}x = \sin(x) + C\ ,$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} = \arctan(x) + C\ , \qquad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin(x) + C\ .$$

Aire avec signe.

Lorsqu'une intégrale est interprétée comme une aire, notons que celle-ci peut être négative (la "justification" de Leibniz montre que l'"aire entre la courbe et l'axe Ox" dépend du signe de la fonction $f(x)$):



Exemples.

Aire sous $y = x^n$. Une primitive pour la fonction $f(x) = x^n$ (pour $n \neq 1$) est donnée par $F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$. Par $(*)$, l'aire sous $y = x^n$ entre a et b est donée par

$$\int_a^b x^n \,\mathrm{d}x = \frac{b^{n+1}}{n+1} - \frac{a^{n+1}}{n+1} = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1} \ .$$

Lorsque $a = 0$, on retombe sur le théorème de Fermat de la page 19.

On obtient par exemple,

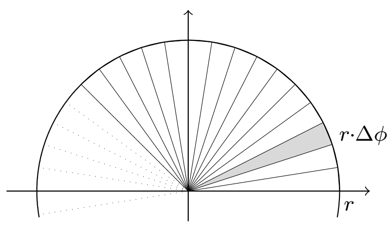
$$\int_0^2 x^3 \,\mathrm{d}x = \frac{2^4 - 0^4}{4} = 4 \quad \text{et} \quad \int_{-2}^0 x^3 \mathrm{d}x = \frac{0^4 - (-2)^4}{4} = -4 \ ,$$

alors que $\int_{-2}^2 x^3 \,\mathrm{d}x = \frac{2^4 - (-2)^4}{4} = 0$, ce qui illustre bien les précautions à prendre lorsqu'on interprète une intégrale comme une aire: celle-ci vient avec un signe.

Aire du disque. Le cercle de rayon r centré en 0 est l'ensemble des points (x, y) tels que $x^2 + y^2 = r^2$. Le quart du cercle dans le premier quadrant est donc donné par la courbe $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, mais l'intégrale

$$\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} \,\mathrm{d}x$$

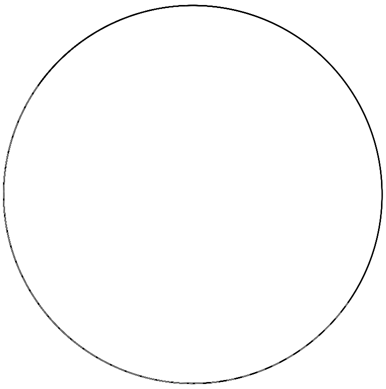
n'est pas complètement triviale à calculer (voir cependant l'exercice 2 de la Série 12). Sachant qu'une intégrale est une "somme infine" de quantités "infiniment petites", il est possible de trouver l'aire d'une manière plus élégante. En effet, découpons le disque en triangles isocèles centrés à l'origine et de base $r \cdot \Delta\phi$:

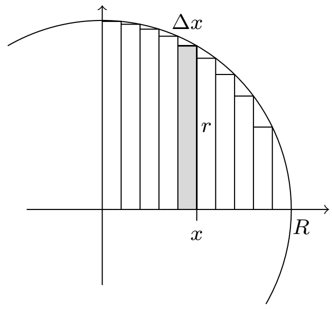


L'aire d'un tel triangle est $\frac{r^2 \cdot \Delta\phi}{2}$. La somme de ces triangles doit se faire pour ϕ variant de 0 à 2π (en radians, car la quantité $\Delta\phi$ correspond à une longueur d'arc), et lorsque $\Delta\phi \longrightarrow 0$, la somme devient infinie et l'aire du demi-disque est donnée par

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \cdot r^2 \,\mathrm{d}\phi = \left[\frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \phi\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2} r^2 \cdot (2\pi - 0) = \pi \cdot r^2 \ .$$

Volume de la boule. Le *volume* d'une boule de rayon R peut être calculé en la découpant en tranches verticales d'épaisseur Δx, et de rayon $r = \sqrt{R^2 - x^2}$ (à droite, la vue en coupe):





Le volume d'une telle tranche est $\pi \cdot r^2 \cdot \Delta x$, soit $\pi \cdot (R^2 - x^2) \cdot \Delta x$. Pour x variant de $-R$ à R, on obtient un volume total pour la boule de rayon R de

$$\int_{-R}^{R} \pi \cdot (R^2 - x^2)\,\mathrm{d}x = \left[\pi \cdot (R^2 \cdot x - \tfrac{1}{3} \cdot x^3)\right]_{-R}^{R} = \pi \cdot (\tfrac{2}{3}R^3 + \tfrac{2}{3}R^3) = \tfrac{4}{3}\pi R^3 \ .$$