Analyse II — Corrigé 4

Exercice 1.

On considère la fonction:

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Laquelle parmi les assertions suivantes est vraie:

- ☐ $f(x,y)$ est continue en $(0,0)$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ est continue en (0,0);
- ☐ $f(x,y)$ n'est pas continue en $(0,0)$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ est continue en $(0,0)$);
- ☐ $f(x,y)$ n'est pas continue en $(0,0)$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ n'est pas continue en $(0,0)$;
- ☒ $f(x,y)$ est continue et différentiable en $(0,0)$;
- ☐ $f(x,y)$ est continue mais pas différentiable en $(0,0)$.

Solution:

La fonction $f(x,y)$ est continue en $(0,0)$ car, en faisant le changement $x = \rho\cos(\theta)$ et $y = \rho\sin(\theta)$, on a:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{\rho\to 0} \rho^2 \sin\left(\frac{1}{\rho}\right) = 0.$$

En utilisant la définition des dérivées partielles on a que:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2\sin(1/h)-0}{h} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2\sin(1/h)-0}{h} = 0.$$

Ainsi f est partiellement différentiable en $(0,0)$ et $\nabla f(0,0) = (0,0)$. En remplaçant dans la définition de différentiabilité et en faisant le changement $x = \rho\cos(\theta)$ et $y = \rho\sin(\theta)$ on a:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)-\nabla f(0,0)\cdot(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^2\sin(1/\rho)-0-0}{\rho} = 0,$$

donc la fonction f est différentiable en $(0,0)$. La réponse correcte est donc la 4. Notez que f est différentiable en tout point de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2. On considère la fonction suivante:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3xy^2 - y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

a) Étudier la continuité de la fonction sur $\mathbb{R}^2$.

b) Calculer les dérivées partielles de f. Que peut-on dire à propos de la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$?

c) Calculer les dérivées directionnelles en $(0,0)$ et $(1,1)$.

d) Calculer la limite suivante en $(x_0,y_0) = (0,0)$ et $(x_0,y_0) = (1,1)$:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - \nabla f(x_0,y_0)\cdot(x-x_0, y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}}.$$

Solution:

a) Pour tout $(x,y) \neq (0,0)$, le dénominateur est différente de 0 et la fonction f est combination de fonctions continues, donc $f(x,y)$ est continue $\forall\ (x,y) \neq (0,0)$. Vérifions la continuité en (0,0):

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{\rho\to 0} f(\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta)) = \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^3(3\cos(\theta)\sin^2(\theta) - \sin^3(\theta))}{\rho^2} = 0 \quad \forall\theta,$$

donc la fonction f est continue sur tout $\mathbb{R}^2$.

b) Les dérivées partielles sont:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{3y^2(x^2+y^2) - 2x(3xy^2 - y^3)}{(x^2+y^2)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{(6xy - 3y^2)(x^2+y^2) - 2y(3xy^2 - y^3)}{(x^2+y^2)^2}.$$

Elles sont continues pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, donc pour tout $(x,y) \neq (0,0)$ la fonction est dérivable. Il ne reste qu'à étudier la dérivabilité en $(0,0)$ (voir point suivant).

c) Soit $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ un vecteur unitaire ($v \in S^1$ représente une direction); on a:

$$D_{\mathbf{v}} f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0+tv_1, 0+tv_2) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{t^3(3v_1v_2^2 - v_2^3)}{t^2(v_1^2+v_2^2)} - 0}{t} = 3v_1v_2^2 - v_2^3;$$

$$D_{\mathbf{v}} f(1,1) = \lim_{t\to 0} \frac{f(1+tv_1, 1+tv_2) - f(1,1)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{3(1+tv_1)(1+2tv_2+t^2v_2^2) - (1+3tv_2+3t^2v_2^2+t^3v_2^3)}{1+2tv_1+t^2v_1^2+1+2tv_2+t^2v_2^2} - 1}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{3 - 1 + t(3v_1 + 6v_2 - 3v_2) + o(t) - (2 + t(2v_1 + 2v_2) + o(t))}{2t + o(t)} = \frac{v_1}{2} + \frac{v_2}{2}.$$

Dans le premier cas on a que $D_{\mathbf{v}} f(0,0)$ n'est pas linéaire en v_1 et v_2. Donc, on en déduit que f n'est pas dérivable en (0,0). Dans le deuxième cas, nous avons déjà vu que f est dérivable en tout point $(x,y) \neq (0,0)$, donc en particulier en $(x,y) = (1,1)$. Nous avons ainsi que $D_{\mathbf{v}} f(1,1)$ est une fonction linéaire de v_1 et v_2. On remarque que $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = 1/2$ (en remplaçant respectivement $(v_1,v_2) = (1,0)$ et $(v_1,v_2) = (0,1)$ dans l'expression calculée plus haut).

d) Dans le cas $(x_0,y_0) = (0,0)$ on a $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = -1$ (calculées à partir de la définition). Donc

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - \nabla f(0,0)\cdot(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\frac{3xy^2 - y^3}{x^2+y^2} + y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3xy^2 + yx^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} =$$

$$= \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^3(3\cos(\theta)\sin(\theta)^2+\sin(\theta)\cos(\theta)^2)}{\rho^3} = 3\cos(\theta)\sin(\theta)^2+\sin(\theta)\cos(\theta)^2.$$

La valeur de cette limite dépend de θ: cela veut dire que la condition de dérivabilité n'est pas verifiée. Dans le deuxième cas $(x_0,y_0)=(1,1)$, on a $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)=1/2$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(1,1)=1/2$.

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{f(x,y)-f(1,1)-\nabla f(1,1)\cdot(x-1,y-1)}{\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}} = \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{\frac{3xy^2-y^3}{x^2+y^2}-1-\frac{1}{2}(x-1)-\frac{1}{2}(y-1)}{\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}}.$$

En posant $x=1+\rho\cos(\theta)$ et $y=1+\rho\sin(\theta)$, calculons la limite pour $\rho\to 0$:

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{\frac{3(1+\rho\cos(\theta))(1+\rho\sin(\theta))^2-(1+\rho\sin(\theta))^3}{(1+\rho\cos(\theta))^2+(1+\rho\sin(\theta))^2}-1-\frac{1}{2}\rho\cos(\theta)-\frac{1}{2}\rho\sin(\theta)}{\rho} =$$

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{\frac{3+6\rho\sin(\theta)+3\rho\cos(\theta)-1-3\rho\sin(\theta)+o(\rho)-2-2\rho\cos(\theta)-2\rho\sin(\theta)+o(\rho)}{2+o(\rho)}-\frac{1}{2}\rho\cos(\theta)-\frac{1}{2}\rho\sin(\theta)}{\rho} = 0.$$

La valeur de cette limite est 0 donc la fonction est différentiable en $(1,1)$: on a confirmé le résultat obtenu au point b.

Exercice 3. On considère la fonction paramétrique

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{(x^2+y^2)^\alpha} & (x,y)\neq(0,0), \\ 0 & (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

où $\alpha > 0$.

a) Trouver les valeurs du paramètre α pour lesquelles la fonction f est continue en $(0,0)$.

b) En utilisant la définition, calculer la dérivée directionnelle en $(0,0)$ en fonction de α.

c) En utilisant l'expression de la dérivée directionnelle, calculer le gradient de $f(x,y)$ en $(0,0)$ en fonction de α.

d) En utilisant la définition, chercher les valeurs du paramètre α pour lesquelles la fonction est différentiable en $(0,0)$.

Solution:

a) On calcule la limite suivante, en utilisant une transformation en coordonnées polaires:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{\rho\to 0} \rho^{3-2\alpha}\cos^2(\theta)\sin(\theta)$$
$$= \begin{cases} \cos^2(\theta)\sin(\theta), & \alpha=\frac{3}{2}, \\ \begin{cases} +\infty, & 0<\theta<\pi, \\ 0, & \theta=0,\pi/2,\pi,3\pi/2, \\ -\infty, & \pi<\theta<2\pi, \end{cases} & \alpha>\frac{3}{2} \\ 0, & 0<\alpha<\frac{3}{2}. \end{cases}$$

Donc, on peut conclure que la fonction est continue en $(0,0)$ pour $0<\alpha<3/2$ car la limite ne dépend pas de θ et $|\cos^2(\theta)\sin(\theta)|\leq 1$.

b) On calcule la dérivée directionnelle en $(0,0)$ suivant le vecteur unitaire $v = (v_1, v_2)$ (tel que $v_1^2 + v_2^2 = 1$):

$$\begin{aligned} D_v f(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{h^3 v_1^2 v_2}{h\left(h^2(v_1^2+v_2^2)\right)^\alpha} \\ &= \lim_{h\to 0} h^{2-2\alpha} v_1^2 v_2 \\ &= \begin{cases} v_1 v_2, & \alpha = 1 \\ \begin{cases} +\infty, & v_2 > 0, \\ 0, & v_1 v_2 = 0, \\ -\infty, & v_2 < 0, \end{cases} & \alpha > 1 \\ 0, & 0 < \alpha < 1. \end{cases} \end{aligned}$$

c) On a:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = D_{(1,0)} f(0,0) = 0 \quad \forall \alpha > 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = D_{(0,1)} f(0,0) = 0 \quad \forall \alpha > 0.$$

d) En utilisant la définition de fonction différentiable on a:

$$\begin{aligned} &\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - \nabla f(0,0)\cdot(x,y)}{\|(x,y)\|} \\ &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{(x^2+y^2)^{\alpha+1/2}} \\ &= \lim_{\rho\to 0} \rho^{2-2\alpha} \cos^2(\theta)\sin(\theta) \\ &= \begin{cases} \cos^2(\theta)\sin(\theta), & \alpha = 1, \\ \begin{cases} +\infty, & 0 < \theta < \pi, \\ 0, & \theta = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2, \\ -\infty, & \pi/ < \theta < 2\pi, \end{cases} & \alpha > 1 \\ 0, & 0 < \alpha < 1. \end{cases} \end{aligned}$$

On peut conclure que la fonction est différentiable pour $0 < \alpha < 1$.

Exercice 4. Soient $\mathbf{x} = (x, y, z)$, $g(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|$, $f(\mathbf{x}) = xyz$ et $l(t) = e^t$.
En utilisant les règles de dérivation calculer:

$$\nabla(f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})), \quad \nabla(f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})), \quad \nabla\left(\frac{f(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})}\right), \quad \nabla(l(g(\mathbf{x}))).$$

Solution:

$$\nabla(f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})) = (yz, xz, xy) + \tfrac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} = \left(yz + \tfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, xz + \tfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, xy + \tfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right),$$

$$\nabla(f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})) = (yz, xz, xy)\|\mathbf{x}\| + xyz\tfrac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} = \sqrt{x^2+y^2+z^2}\left(yz + \tfrac{x^2yz}{x^2+y^2+z^2}, xz + \tfrac{xy^2z}{x^2+y^2+z^2}, xy + \tfrac{xyz^2}{x^2+y^2+z^2}\right),$$

$$\nabla\left(\tfrac{f(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})}\right) = \frac{(yz, xz, xy)\|\mathbf{x}\| - xyz\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}}{\|\mathbf{x}\|^2} = \left(yz - \tfrac{x^2yz}{x^2+y^2+z^2}, xz - \tfrac{xy^2z}{x^2+y^2+z^2}, xy - \tfrac{xyz^2}{x^2+y^2+z^2}\right)\tfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

$$\nabla(l(g(\mathbf{x}))) = e^{\|\mathbf{x}\|}\tfrac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} = e^{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\left(\tfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \tfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \tfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right).$$

Exercice 5. Soit $f(x,y) = x^2 + y^2$. On considère la courbe suivante:

$$\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t)) = (e^{-t}\cos(2\pi t), e^{-t}\sin(2\pi t)), \quad t \geqslant 0.$$

a) Calculer la dérivée totale de la fonction $f(x(t), y(t))$: par un calcul direct et par la formule

$$\frac{df(\mathbf{x}(t))}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx(t)}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy(t)}{dt}$$

b) Répéter le point précedent en utilisant la courbe:

$$\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t)) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)), \quad t \geqslant 0.$$

Pourquoi la valeur de la dérivée est-elle 0?

Solution:

a) Le calcul direct donne:

$$f(x(t), y(t)) = (e^{-t}\cos(2\pi t))^2 + (e^{-t}\sin(2\pi t))^2 = e^{-2t}; \quad \frac{df(\mathbf{x}(t))}{dt} = -2e^{-2t}.$$

Comme $\nabla f = (2x, 2y)$, le calcul par la formule de composition donne:

$$\frac{df(\mathbf{x}(t))}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx(t)}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy(t)}{dt} =$$

$$2e^{-t}\cos(2\pi t)(-e^{-t}\cos(2\pi t) - e^{-t}2\pi\sin(2\pi t)) + 2e^{-t}\sin(2\pi t)(-e^{-t}\sin(2\pi t) + e^{-t}2\pi\cos(2\pi t)) = -2e^{-2t};$$

b) Le graphe de la courbe $(x(t), y(t)) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$ en fonction de $t \geqslant 0$ est un cercle de rayon unitaire. Le calcul direct donne:

$$f(x(t), y(t)) = \cos(2\pi t)^2 + \sin(2\pi t)^2 = 1,$$

donc la dérivée totale est 0. En utilisant la formule de composition on obtient:

$$\frac{df(\mathbf{x}(t))}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx(t)}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy(t)}{dt} = 2\cos(2\pi t)(-2\pi\sin(2\pi t)) + 2\sin(2\pi t)(2\pi\cos(2\pi t)) = 0.$$

Dans ce cas la valeur de la dérivée totale est 0 parce que nous avons calculé la dérivée le long de la courbe de niveau $x^2 + y^2 = 1$, où la fonction est constante.

Exercice 6. Trouver l'équation du plan tangent à la surface $z = f(x,y) = 2x^2+4y^2$ au point $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, où $(x_0, y_0) = (2, 1)$. Donner la direction normale $\mathbf{n}$ au graphe de f en $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

Solution: L'équation du plan tangent en $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ est donnée par

$$z = f(x_0, y_0) + \nabla f(x_0, y_0) \cdot (x - x_0, y - y_0) = 12 + (8, 8) \cdot (x - 2, y - 1)$$

c'est-à-dire $z = 8x + 8y - 12$. La normale au graphe est donnée par

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + \|\nabla f(x_0, y_0)\|^2}}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), -1\right) = \frac{1}{\sqrt{129}}(8, 8, -1).$$

Exercice 7. On considère la fonction

$$f(x,y) = \frac{4}{3}x^3 - xy^2 + y^3 - y^2 + 9$$

comme l'altitude d'une région.

a) On se trouve au point $P(1,3)$. Dans quelle direction faut-il se diriger pour avoir la pente maximale? Que vaut alors cette pente?

b) Si l'on se trouve au point $S(2,-2)$, dans quelle direction faut-il aller pour suivre une courbe de niveau? Et si l'on se dirige, à partir de S, dans la direction donnée par $v = (4,-3)/5$, que vaut la pente?

Solution: On a $\nabla f = (4x^2 - y^2, -2xy + 3y^2 - 2y)$.

a) Il faut se diriger dans la direction $\nabla f|_P = (-5,15)$, et la pente vaut alors

$$\|\nabla f|_P\| = \sqrt{15^2 + 5^2} = 15.81...$$

b) On a $\nabla f|_S = (12,24)$. Comme les courbes de niveau sont perpendiculaires au gradient, il faut suivre la direction $(2,-1)/\sqrt{5}$ ou $(-2,1)/\sqrt{5}$. Si l'on se dirige dans la direction $v = (4,-3)/5$ alors la pente est donnée par la dérivée directionnelle. Puisque la fonction est bien dérivable en S on calcule la dérivée directionnelle avec la regle du gradient:

$$D_v f|_S = \nabla f|_S \cdot v = (12,24) \cdot (4/5,-3/5) = -\frac{24}{5}.$$

En suivant la direction donnée par v, on descend avec une pente de $-\frac{24}{5}$.

Exercice 8. On considère la surface S d'équation $z = f(x,y) = x^2 + 2y^2$.

a) Vérifier que $P(1,1,3)$ appartient à la surface.

b) Écrire l'équation du plan tangent à S au point P.

c) Écrire l'équation du plan parallèle au plan tangent passant par l'origine.

d) Lesquels de ces points appartiennent au plan tangent à S en P: (0,0,0), (0,-2,1), (1,1,3)?

e) Calculer la direction de pente maximale au point $(2,-1)$. Que vaut cette pente?

Solution:

(1) Puisque $3 = 1^2 + 2 \cdot 1^2$, $P \in S$.

(2) L'équation du plan tangent en P est:

$$z = f(1,1) + \nabla f(1,1) \cdot (x-1, y-1) = 2x + 4y - 3.$$

(3) L'équation générale du plan π est $z = \pi(x,y) = ax + by + c$. Puisque π passe par l'origine, on a $c = 0$. On observe que le vecteur normal au plan tangent est $(2,4,-1)$. Donc, l'équation du plan π est: $z = 2x + 4y$.

(4) Le seul point qui appartient au plan tangent est (1,1,3).

(5) La direction de pente maximale est donnée par $\nabla f(2,-1) = (4,-4)$. La pente vaut $\|\nabla f(2,-1)\| = 4\sqrt{2}$.

Exercice 9. [Vrai ou Faux] **V F**

1) Si une fonction est partiellement différentiable alors elle est continue. ☐ ☒
2) Une fonction continue est partiellement différentiable. ☐ ☒
3) Si toutes les dérivées directionnelles de f existent, alors toutes les dérivées partielles aussi. ☒ ☐
4) Si toutes les dérivées partielles de f existent alors toutes les dérivées directionnelles aussi. ☒ ☐
5) Si toutes les dérivées partielles de f existent et sont lipschitziennes, alors f est continue. ☒ ☐
6) Si une fonction est bornée alors elle est partiellement différentiable. ☐ ☒

Solution:

1) Faux. Prendre par exemple la fonction $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$ (vue en classe).
2) Faux. Prendre par exemple la fonction $x \longrightarrow \|x\|_2$ qui n'est pas différentiable en $0 \in \mathbb{R}^n$, mais qui est pourtant continue.
3) Vrai. Il suffit de prendre $v = e_k$.
4) Vrai. Il suffit d'exprimer n'importe quel vecteur non-nul v comme combinaison lináire des vecteurs de la base canonique.
5) Vrai. En effet, si les dérivées partielles de f sont lipschitziennes alors en particulier elles sont continues. Par un théorème du cours, f est différentiable et donc continue.
6) Faux. Prendre par exemple la fonction $f(x,y) = |\sin(x)|$. Cette fonction est bornée mais n'admet pas de dérivée partielle par rapport à x.