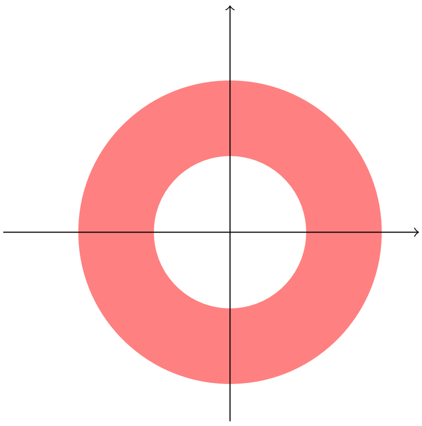
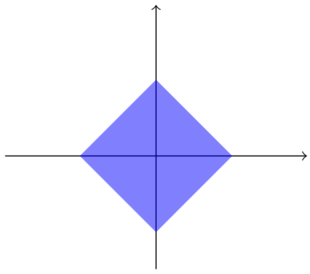
Analyse II — Corrigé 11

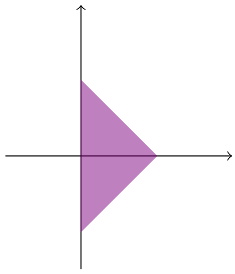
Exercice 1. [Changement de variables]
Pour chaque ensemble Σ_i ci-dessous trouver un changement de variables qui le transforme en un rectangle $R = [a,b] \times [c,d]$ avec a, b, c, d choisis de façon convenable, c'est-à-dire trouver un champs $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ localement inversible tel que $\mathbf{f}(R) = \Sigma_i$.



$\Sigma_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$



$\Sigma_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\}$



$\Sigma_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1,\ x-1 \leq y \leq 1-x\}$

Solution:

a) Le domaine Σ_1 peut être écrit en coordonnées polaires comme

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{f}(\rho, \theta) = \begin{pmatrix} \rho\cos(\theta) \\ \rho\sin(\theta) \end{pmatrix}$$

avec $1 \leq \rho \leq 2$ et $0 \leq \theta \leq 2\pi$. On prend donc $R = [1,2] \times [0, 2\pi]$. Ce champs est inversible lorsqu'il est restreint à $U =]1,2[\times]0,2\pi[$ par exemple.

b) Le domaine peut être écrit comme une transformation linéaire du carré $R = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^2$ dans le plan uv par une rotation de centre $(0,0)$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$ suivie d'une homothétie de rapport $\sqrt{2}$. On peut donc prendre $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ donnée par

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{f}(u,v) = A\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \qquad \text{avec } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ici le champs $\mathbf{f}$ est (globalement) inversible.

c) Le domaine est délimité par les trois droites: $y = 0$, $y = x - 1$ et $y = 1 - x$. On peut poser $u = x$. Concernant y on remarque qu'il se trouve toujours compris entre la droite $y = 1-x$ et la droite $y = x-1$, on peut donc écrire $y = (x-1) + v(1-x)$ avec $0 \leq v \leq 2$ (notez que pour $v = 0$ on trouve la droite du bas et que pour $v = 2$ on trouve celle du haut). En isolant le paramètre v on trouve $v = \frac{y-x+1}{1-x}$. On a ainsi décrit le champs inverse:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \frac{y-x+1}{1-x} \end{pmatrix} = \mathbf{f}^{-1}(x,y)$$

Le champs $\mathbf{f}$ est donné par $\mathbf{f}(u,v) = (u, u-1+v(1-u))$. En laissant varier $0 \leq u \leq 1$ et $0 \leq v \leq 2$ on obtient la figure Σ_3. Donc $R = [0,1] \times [0,2]$ et le champs $\mathbf{f}$ est inversible si on le restreint à l'ouvert $]0,1[\times]0,2[$ par exemple.

Exercice 2. [Coordonnées elliptiques]

Soient $a, b > 0$ deux nombres réels et $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ un point du plan. Considérons le champs $\mathbf{h} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ défini par

$$\mathbf{h}(t,\theta) = \begin{pmatrix} x(t,\theta) \\ y(t,\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + at\cos(\theta) \\ y_0 + bt\sin(\theta) \end{pmatrix}.$$

La fonction $\mathbf{h}$ décrit le changement entre coordonnées elliptiques (ellipse de centre (x_0, y_0) et de rayons at et bt) et coordonnées cartésiennes.

a) Donner les courbes coordonnées pour $t = 0, 1, 2, 3$ et $\theta = 0, \pi/4, \pi/2, ..., 7\pi/4$.

b) Donner l'image des rectangles $[1,2] \times [0, \pi/4]$ et $[0,1] \times [\pi/2, \pi]$ par $\mathbf{h}$.

Solution:

a) On cherche les courbes coordonnées.

- Si $\theta = \theta_0$ est fixé, on a la courbe:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{h}(t,\theta_0) = \begin{pmatrix} x_0 + at\cos(\theta_0) \\ y_0 + bt\sin(\theta_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} a\cos(\theta_0) \\ b\sin(\theta_0) \end{pmatrix}.$$

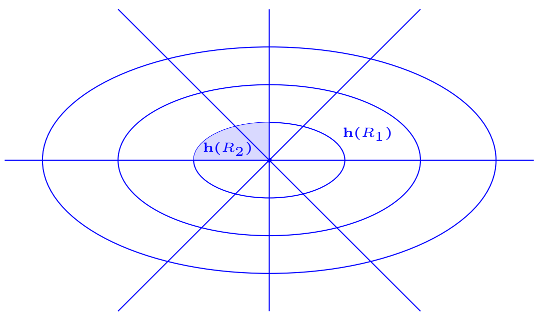
  Ces sont des droites qui passent par (x_0, y_0) avec direction donnée par le vecteur $(a\cos(\theta_0), b\sin(\theta_0))$.

- Si $t = t_0$ est fixé, on a la courbe:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{h}(t_0,\theta) = \begin{pmatrix} x_0 + at_0\cos(\theta) \\ y_0 + bt_0\sin(\theta) \end{pmatrix}.$$

  Ces sont des ellipses de centre (x_0, y_0) et rayons at_0 et bt_0.

b) Notons $R_1 = [1,2] \times [0, \pi/4]$ et $R_2 = [0,1] \times [\pi/2, \pi]$. Ci-dessous les courbes coordonnées avec les rectangles transformés pour $(x_0, y_0) = (0,0)$, $a = 1$, $b = 0.5$.



Exercice 3. [Coordonnées cylindriques]

On considère la transformation en coordonnées cylindriques

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{h}(\rho,\theta,z) = \begin{pmatrix} \rho\cos\theta \\ \rho\sin\theta \\ z \end{pmatrix},$$

où $\rho \geq 0$, $\theta \in [0, 2\pi]$ et $z \in \mathbb{R}$.

a) Transformer les parallélépipèdes rectangles $[0,1]\times[0,2\pi]\times[0,1]$ et $[0,1]\times[-\pi/2,\pi/2]\times[-2,2]$ de l'espace (ρ,θ,z) dans l'espace (x,y,z), c'est-à-dire donner l'image de ces parallélépipèdes par $\mathbf{h}$.

b) Déterminer les points $(\rho,\theta,z)\in\mathbb{R}^3$ où la transformation est localement inversible.

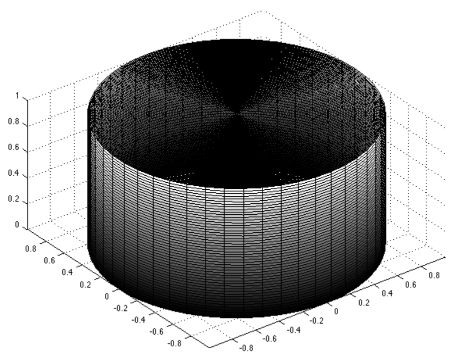
Solution:

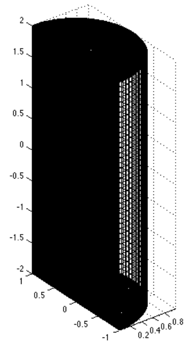
a) Pour trasformer le parallélépipède rectangle $[0,1]\times[0,2\pi]\times[0,1]$ dans l'espace (x,y,z) on peut procédér comme suit:

- Si $\rho=1$, $\theta\in[0,2\pi]$, $z\in[0,1] \Longrightarrow \mathbf{h}(1,\theta,z)=(\cos(\theta),\sin(\theta),z)$, qui est la surface latérale du cylindre représenté plus bas (à gauche).
- Si $\rho\in[0,1]$, $\theta\in[0,2\pi]$, $z=0 \Longrightarrow \mathbf{h}(\rho,\theta,0)=(\rho\cos(\theta),\rho\sin(\theta),0)$, qui est la base inférieure du cylindre représenté plus bas.
- Si $\rho\in[0,1]$, $\theta\in[0,2\pi]$, $z=1 \Longrightarrow \mathbf{h}(\rho,\theta,1)=(\rho\cos(\theta),\rho\sin(\theta),1)$, qui est la base supérieure du cylindre représenté plus bas.

On fait de même pour le parallélépipède rectangle $[0,1]\times[-\pi/2,\pi/2]\times[-2,2]$;

- Si $\rho=1$, $\theta\in[-\pi/2,\pi/2]$, $z\in[-2,2] \Longrightarrow \mathbf{h}(1,\theta,z)=(\cos(\theta),\sin(\theta),z)$, qui est la surface latérale du demi-cylindre sur la figure (à droite).
- Si $\rho\in[0,1]$, $\theta\in[-\pi/2,\pi/2]$, $z=-2 \Longrightarrow \mathbf{h}(\rho,\theta,-2)=(\rho\cos(\theta),\rho\sin(\theta),-2)$, qui est la base inférieure du demi-cylindre sur la figure.
- Si $\rho\in[0,1]$, $\theta\in[-\pi/2,\pi/2]$, $z=2 \Longrightarrow \mathbf{h}(\rho,\theta,2)=(\rho\cos(\theta),\rho\sin(\theta),2)$, qui est la base supérieure du demi-cylindre sur la figure.
- Si $\rho\in[0,1]$, $\theta=\{-\pi/2,\pi/2\}$, $z\in[-2,2] \Longrightarrow \mathbf{h}(\rho,\pm\pi/2,z)=(0,\pm\rho,z)$, qui est l'autre partie de la surface latérale du demi-cylindre sur la figure.





b) Une trasformation est localement inversible si le determinant de la matrice jacobienne de la transformation est différent de 0. On a:

$$\det(J_{\mathbf{h}})=\det\begin{pmatrix}\cos(\theta) & -\rho\sin(\theta) & 0\\ \sin(\theta) & \rho\cos(\theta) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\rho.$$

Donc, la trasformation n'est pas inversible pour $\rho=0$, ce qui correspond à l'axe z en coordonnées cartesiennes.

Exercice 4. Considérons le domaine $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \le 1\,,\ x+y \le 0\}$. Calculer l'intégrale double $\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,dx\,dy$.

Solution:

Le domaine D exprimé en coordonnées polaires $\psi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ s'écrit

$$E = \psi^{-1}(D) = \left\{(r,\varphi) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le r \le 1\,,\ \frac{3\pi}{4} \le \varphi \le \frac{7\pi}{4}\right\}.$$

Comme le jacobien de la transformation est r, nous avons

$$\begin{aligned}\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,dx\,dy &= \iint_E \sqrt{1-r^2}\,r\,dr\,d\varphi \\ &= \left(\int_0^1 \sqrt{1-r^2}\,r\,dr\right)\left(\int_{3\pi/4}^{7\pi/4} d\varphi\right) \\ &= \left[-\frac{1}{3}(1-r^2)^{3/2}\right]_0^1 \left[\varphi\right]_{3\pi/4}^{7\pi/4} = \frac{1}{3}\pi = \frac{\pi}{3}.\end{aligned}$$

Exercice 5.

Esquisser le domaine $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \le x^2+y^2 \le 16\,,\ x \le y\}$ et calculer son barycentre.

Solution:

Le domaine D exprimé en coordonnées polaires s'écrit

$$E = \left\{(r,\varphi) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \le r \le 4\,,\ \frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{5\pi}{4}\right\}.$$

Comme le jacobien de la transformation est r, l'aire du domaine est

$$\mathrm{Aire}(D) = \iint_D dx\,dy = \iint_E r\,dr\,d\varphi = \left(\int_1^4 r\,dr\right)\left(\int_{\pi/4}^{5\pi/4} d\varphi\right) = \frac{15\pi}{2}.$$

D'autre part, le calcul nous donne

$$\begin{aligned}b_x &= \frac{1}{\mathrm{Aire}(D)}\iint_D x\,dx\,dy = \frac{2}{15\pi}\iint_E r^2\cos\varphi\,dr\,d\varphi = \frac{2}{15\pi}\left(\int_1^4 r^2\,dr\right)\left(\int_{\pi/4}^{5\pi/4}\cos\varphi\,d\varphi\right) = -\frac{14\sqrt{2}}{5\pi} \\ b_y &= \frac{1}{\mathrm{Aire}(D)}\iint_D y\,dx\,dy = \frac{2}{15\pi}\iint_E r^2\sin\varphi\,dr\,d\varphi = \frac{2}{15\pi}\left(\int_1^4 r^2\,dr\right)\left(\int_{\pi/4}^{5\pi/4}\sin\varphi\,d\varphi\right) = \frac{14\sqrt{2}}{5\pi}\end{aligned}$$

et le barycentre du domaine D est ainsi

$$(b_x, b_y) = \left(-\frac{14\sqrt{2}}{5\pi}, \frac{14\sqrt{2}}{5\pi}\right).$$

Exercice 6.
Considérons le domaine $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq x\,,\ x^2+y^2 \leq 4\}$.
Utiliser les coordonnées polaires pour calculer les intégrales doubles suivantes

$$\iint_D \frac{1}{1+x^2+y^2}\,dx\,dy \qquad \text{et} \qquad \iint_D xy\,dx\,dy.$$

Solution:
Le domaine D exprimé en coordonnées polaires s'écrit

$$E = \left\{(r,\varphi) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq r \leq 2\,,\ 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}\right\}.$$

Comme le jacobien de la transformation est r, nous avons

$$\iint_D \frac{1}{1+x^2+y^2}\,dx\,dy = \iint_E \frac{1}{1+r^2}\,r\,dr\,d\varphi = \left(\int_0^2 \frac{r}{1+r^2}dr\right)\left(\int_0^{\pi/4} d\varphi\right)$$

$$= \left[\frac{1}{2}\ln(1+r^2)\right]_0^2 \Big[\varphi\Big]_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{8}\ln 5\,.$$

$$\iint_D xy\,dx\,dy = \iint_E (r\cos\varphi)(r\sin\varphi)r\,dr\,d\varphi = \left(\int_0^2 r^3\,dr\right)\left(\int_0^{\pi/4}\cos\varphi\sin\varphi\,d\varphi\right)$$

$$= \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^2 \left[\frac{\sin^2\varphi}{2}\right]_0^{\pi/4} = 1\,.$$

Exercice 7.
Calculer

$$\iiint_{[0,1]\times[2,3]\times[4,5]} x+y+z+xyz\,dxdydz.$$

Solution:

$$\begin{aligned}\iiint_{[0,1]\times[2,3]\times[4,5]} x\,dxdydz &= \iint_{[2,3]\times[4,5]} \frac{x^2}{2}\bigg|_0^1 dydz\\ &= \iint_{[2,3]\times[4,5]} \frac{1}{2}\,dydz = \frac{1}{2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\iiint_{[0,1]\times[2,3]\times[4,5]} y\,dxdydz &= \iint_{[2,3]\times[4,5]} y\,dydz\\ &= \int_{[4,5]} \frac{y^2}{2}\bigg|_2^3 dz = \int_{[4,5]} \frac{5}{2}\,dz = \frac{5}{2},\end{aligned}$$

et de la même manière

$$\iiint_{[0,1]\times[2,3]\times[4,5]} z\,dxdydz = \frac{9}{2}.$$

Finalement,

$$\iiint_{[0,1]\times[2,3]\times[4,5]} xyz\, dxdydz = \iint_{[2,3]\times[4,5]} \frac{yz}{2}\, dydz$$
$$= \int_{[4,5]} \frac{5z}{4}\, dz = \frac{45}{8}.$$

Alors,

$$\iiint_{[0,1]\times[2,3]\times[4,5]} x+y+z+xyz\, dxdydz = \frac{105}{8}.$$

Exercice 8.

Soit $R > 0$ et $B_R(\mathbf{0}) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \le R^2\}$. Calculer

$$\iiint_{B_R(\mathbf{0})} xy\, dxdydz, \quad \text{et} \quad \iiint_{B_R(\mathbf{0})} z^2\, dxdydz.$$

Solution:

Par un changement des variables en coordonnés sphériques

$$\iiint_{B_R(\mathbf{0})} xy\, dxdydz = \iiint_{[0,R]\times[0,\pi]\times[0,2\pi]} r^4 \sin^3\theta \cos\phi \sin\phi\, drd\theta d\phi = 0$$

car $\int_0^{2\pi} \cos\phi \sin\phi\, d\phi = 0$. On aurait aussi pu trouver la réponse tout de suite en remarquant que la fonction à intégrer est impaire par rapport à x et que le domaine est symétrique par rapport à x (i.e. $(x,y,z) \in B_R(\mathbf{0}) \iff (-x,y,z) \in B_R(\mathbf{0})$).

Pour l'autre intégrale on trouve

$$\iiint_{B_R(\mathbf{0})} z^2\, dxdydz = \iiint_{[0,R]\times[0,\pi]\times[0,2\pi]} z^2\, r^2 \sin\theta\, drd\theta d\phi$$
$$= \iiint_{[0,R]\times[0,\pi]\times[0,2\pi]} r^4 \cos^2\theta \sin\theta\, drd\theta d\phi$$
$$= 2\pi \iint_{[0,R]\times[0,\pi]} r^4 \cos^2\theta \sin\theta\, drd\theta$$
$$= 2\pi \int_0^R r^4 \Big(-\frac{\cos^3\theta}{3}\Big)\Big|_0^\pi\, dr$$
$$= \frac{4\pi}{3} \int_0^R r^4\, dr = \frac{4\pi R^5}{15}$$

Exercice 9.

Soit

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \in [0,1], y^2+z^2 \le x^2\}$$

Décrire E et donner $\mathrm{Vol}(E)$.

Solution:

L'ensemble E représente un cône de révolution autour l'axe de x. Son sommet est $(0,0,0)$. Par la formule vue en classe nous avons

$$\mathrm{Vol}(E) = \pi \int_0^1 x^2\, dx = \frac{\pi}{3}.$$

Exercice 10.
Calculer le volume du parallélépipède engendré par les vecteurs

$$a_1 = (1,1,4)\,, \quad a_2 = (-1,2,-1) \quad \text{et} \quad a_3 = (2,1,1)\,.$$

Solution: Nous avons vu en classe que si P est le parallélépipède engendré par 3 vecteurs, alors $\mathrm{Vol}(P) = |\det(A)|$ où A désigne la matrice 3×3 dont les colonnes sont les vecteurs en question. Ici nous avons donc

$$\mathrm{Vol}(P) = \left|\det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}\right| = 18.$$

Exercice 11.
Soit D le tétraèdre dont les sommets sont les points $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$. Calculer

$$\iiint_D (x^2+z)dx\,dydz\,.$$

Indication: Utiliser la formule d'intégration sur le tétraèdre vue au cours.

Solution:

Pour $x \in [0,1]$ fixé, y varie entre 0 et $1-x$. Pour (x,y) fixé, z varie entre 0 et $1-x-y$. Ainsi, le domaine peut s'écrire $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le x \le 1\,,\ 0 \le y \le 1-x\,,\ 0 \le z \le 1-x-y\}$ et nous avons

$$\begin{aligned}
\iiint_D (x^2+z)dx\,dydz &= \int_0^1\left(\int_0^{1-x}\left\{\int_0^{1-x-y}(x^2+z)dz\right\}dy\right)dx \\
&= \int_0^1\left(\int_0^{1-x}\left[x^2z + \frac{z^2}{2}\right]_{z=0}^{1-x-y} dy\right)dx \\
&= \int_0^1\left(\int_0^{1-x}\left[x^2(1-x-y) + \frac{1}{2}(1-x-y)^2\right]dy\right)dx \\
&= \int_0^1\left[-x^2\frac{(1-x-y)^2}{2} - \frac{1}{2}\frac{(1-x-y)^3}{3}\right]_{y=0}^{1-x} dx \\
&= \int_0^1\left(x^2\frac{(1-x)^2}{2} + \frac{(1-x)^3}{6}\right)dx = \int_0^1\left(\frac{x^2}{2} - x^3 + \frac{x^4}{2} + \frac{(1-x)^3}{6}\right)dx \\
&= \left[\frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{10} - \frac{(1-x)^4}{24}\right]_0^1 = \frac{1}{6} - \frac{1}{4} + \frac{1}{10} + \frac{1}{24} = \frac{7}{120}\,.
\end{aligned}$$

Exercice 12.
Soit D le quart de boule de rayon 2 centrée à l'origine avec $y \le 0$ et $z \ge 0$. Calculer l'intégrale

$$\iiint_D yz\,dxdy\,dz\,.$$

Solution:

Comme le quart de boule $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \le 4,\ y \le 0,\ z \ge 0\}$ a une symétrie sphérique, nous allons utiliser les coordonnées sphériques (r,θ,φ). Dans les nouvelles variables, le domaine s'écrit

$$E = \left\{(r,\theta,\varphi) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le r \le 2\,,\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}\,,\ \pi \le \varphi \le 2\pi\right\}$$

et nous avons

$$\begin{aligned}\iiint_D yz\,dxdy\,dz &= \iiint_E (r\sin\theta\sin\varphi)(r\cos\theta)r^2\sin\theta\,dr\,d\varphi d\theta \\ &= \left(\int_0^2 r^4 dr\right)\left(\int_\pi^{2\pi}\sin\varphi\,d\varphi\right)\left(\int_0^{\pi/2}\sin^2\theta\cos\theta\,d\theta\right) \\ &= \left[\frac{r^5}{5}\right]_0^2 [-\cos\varphi]_\pi^{2\pi}\left[\frac{\sin^3\theta}{3}\right]_0^{\pi/2} = -\frac{64}{15}.\end{aligned}$$