Analyse II — Corrigé 10

Exercice 1. Soit $D = [0,1] \times [0,\pi/2]$. Calculer

$$\iint_D \frac{x \sin y}{1+x^2}\, dxdy.$$

Solution:

$$\begin{aligned}\iint_D \frac{x \sin y}{1+x^2}\, dxdy &= \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\, dx \cdot \int_0^{\pi/2} \sin y\, dy \\ &= \ln(1+x^2)\Big|_0^1 \cdot (-\cos y)\Big|_0^{\pi/2} \\ &= \frac{\ln 2}{2}.\end{aligned}$$

Exercice 2. Soit $D = [0,1] \times [1,2]$. Calculer

$$\iint_D \frac{x}{x^2+y^2}\, dxdy.$$

Solution:

$$\int_0^1 \frac{x}{x^2+y^2}\, dx = \int_0^1 \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\ln(x^2+y^2)\, dx = \frac{1}{2}(\ln(1+y^2) - \ln y^2).$$

et

$$\frac{1}{2}\int_1^2 \ln(1+y^2)\, dy = \frac{y\ln(1+y^2)}{2}\Big|_{y=1}^{y=2} - \int_1^2 \frac{y^2}{1+y^2}\, dy = \frac{y\ln(1+y^2)}{2} - y + \arctan y\Big|_{y=1}^{y=2},$$

$$-\frac{1}{2}\int_1^2 \ln(y^2)\, dy = y - y\ln y\Big|_{y=1}^{y=2}$$

d'où en utilisant $\arctan 1 = \pi/4$:

$$\iint_D \frac{x}{x^2+y^2}\, dxdy = \arctan 2 + \ln 5 - \frac{5\ln 2}{2} - \frac{\pi}{4}$$

Exercice 3. Soit $D = [0,\pi] \times [0,1]$. Calculer

$$\iint_D x \sin xy\, dxdy.$$

Solution:

$$\begin{aligned}\iint_D x\sin xy\, dxdy &= \int_0^\pi \left(\int_0^1 x \sin xy\, dy\right) dx \\ &= \int_0^\pi (-\cos xy)\Big|_{y=0}^{y=1} dx \\ &= \int_0^\pi (1-\cos x)\, dx \\ &= (x - \sin x)\Big|_0^\pi = \pi\end{aligned}$$

Exercice 4. Soit D l'intérieur du triangle de sommets $A = (0,0)$, $B = (\pi, 0)$ et $C = (\pi, \pi)$. Calculer

$$\iint_D x\cos(x+y)\,dxdy.$$

Solution: On a que $D = \{(x,y) : 0 \le y \le x \le \pi\}$. Donc

$$\begin{aligned}
\iint_D x\cos(x+y)\,dxdy &= \int_0^\pi \left(\int_0^x x\cos(x+y)\,dy\right)dx \\
&= \int_0^\pi (x\sin(x+y))\Big|_{y=0}^{y=x} dx = \int_0^\pi x\sin 2x - x\sin x\,dx \\
&= \int_0^\pi \frac{x}{2}(-\cos 2x)' + x(\cos x)'\,dx = -\frac{3\pi}{2} + \int_0^\pi \frac{\cos 2x}{2} - \cos x\,dx \\
&= -\frac{3\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Exercice 5. Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 1\}$. Calculer le volume de

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in D : \text{ et } 0 \le z \le \sqrt{1-x^2-y^2}\}.$$

En déduire le volume de la boule unité $B_1(\mathbf{0})$ dans $\mathbb{R}^3$.

Solution: En appliquant la formule

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a},\ a > 0,\ |x| < |a|$$

avec $a = \sqrt{1-y^2}$ nous avons

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}(E) &= \int_{-1}^1 \left(\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \sqrt{1-y^2-x^2}\,dx\right)dy \\
&= \int_{-1}^1 \left(\frac{x}{2}\sqrt{1-y^2-x^2} + \frac{1-y^2}{2}\arcsin\frac{x}{\sqrt{1-y^2}}\Big|_{x=-\sqrt{1-y^2}}^{x=\sqrt{1-y^2}}\right)dy \\
&= \int_{-1}^1 \frac{1-y^2}{2}(\arcsin 1 - \arcsin(-1))\,dy \\
&= \frac{\pi}{2}\int_{-1}^1 1-y^2\,dy \\
&= \frac{2\pi}{3}.
\end{aligned}$$

L'ensemble E représente la démi-boule d'unité. Donc

$$\mathrm{Vol}(B_1(\mathbf{0})) = \frac{4\pi}{3}.$$

Exercice 6. Soient $D = [-1,1] \times [-1,1]$ et $f(x,y) = \max(1-|x|, 1-|y|)$. Calculer le volume de

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in D : \text{ et } 0 \leq z \leq f(x,y)\}.$$

Solution: Par symétrie du problème on a

$$\text{Vol}(E) = 4 \iint_{[0,1]\times[0,1]} f(x,y)\,dxdy,$$

donc

$$\begin{aligned}\text{Vol}(E) &= 4\int_0^1 \left(\int_0^y 1 - x\,dx + \int_y^1 1 - y\,dx \right) dy \\ &= 4\int_0^1 y - \frac{y^2}{2} + (1-y)^2\,dy \\ &= 4\int_0^1 y + \frac{y^2}{2}\,dy \\ &= \frac{8}{3}.\end{aligned}$$

Exercice 7. Calculer $\iint_D ye^x dx\,dy$ où $D \subset \mathbb{R}^2$ est le domaine délimité par les courbes $y^2 = x$, $y = 1$ et l'axe Oy,

a) en intégrant d'abord par rapport à x et ensuite par rapport à y,

b) en intégrant d'abord par rapport à y et ensuite par rapport à x.

Solution:

a) Pour $0 \leq y \leq 1$ fixé, x varie entre 0 et y^2 et nous avons

$$\begin{aligned}\iint_D ye^x dxdy &= \int_0^1 \left(\int_0^{y^2} e^x dx \right) ydy = \int_0^1 [e^x]_0^{y^2}\, ydy \\ &= \int_0^1 (e^{y^2} - 1) ydy = \frac{1}{2}\left[e^{y^2} - y^2\right]_0^1 = \frac{e}{2} - 1\,.\end{aligned}$$

b) Pour $0 \leq x \leq 1$ fixé, y varie entre $\sqrt{x}$ et 1 et nous avons

$$\begin{aligned}\iint_D ye^x dxdy &= \int_0^1 \left(\int_{\sqrt{x}}^1 ydy \right) e^x dx = \int_0^1 \left[\frac{y^2}{2}\right]_{\sqrt{x}}^1 e^x dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 (1-x)e^x dx \\ &= \frac{1}{2}\left[(1-x)e^x + e^x\right]_0^1 = \frac{e}{2} - 1\,.\end{aligned}$$

Exercice 8.
Calculer $\iint_D (\sqrt{x} - y^2)dxdy$ où $D \subset \mathbb{R}^2$ est le domaine délimité par les courbes $y = x^2$ et $x = y^4$,

a) en intégrant d'abord par rapport à x et ensuite par rapport à y,

b) en intégrant d'abord par rapport à y et ensuite par rapport à x.

Solution:

a) Pour $0 \le y \le 1$ fixé, x varie entre y^4 et $y^{1/2}$ et nous avons

$$\begin{aligned}
\iint_D (\sqrt{x} - y^2)dxdy &= \int_0^1 \left(\int_{y^4}^{y^{1/2}} (\sqrt{x} - y^2)dx \right) dy \\
&= \int_0^1 \left[\frac{2}{3} x^{3/2} - y^2 x \right]_{y^4}^{y^{1/2}} dy \\
&= \int_0^1 \left(\frac{2}{3} y^{3/4} - y^{5/2} + \frac{1}{3} y^6 \right) dy \\
&= \left[\frac{8}{21} y^{7/4} - \frac{2}{7} y^{7/2} + \frac{1}{21} y^7 \right]_0^1 \\
&= \frac{1}{7}\,.
\end{aligned}$$

b) Pour $0 \le x \le 1$ fixé, y varie entre x^2 et $x^{1/4}$ et nous avons

$$\begin{aligned}
\iint_D (\sqrt{x} - y^2)dxdy &= \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{x^{1/4}} (\sqrt{x} - y^2)dy \right) dx \\
&= \int_0^1 \left[x^{1/2} y - \frac{y^3}{3} \right]_{x^2}^{x^{1/4}} dx \\
&= \int_0^1 \left(\frac{2}{3} x^{3/4} - x^{5/2} + \frac{1}{3} x^6 \right) dx \\
&= \frac{1}{7}\,.
\end{aligned}$$

Exercice 9.
Esquisser le domaine d'intégration et calculer l'intégrale double en inversant l'ordre d'intégration

$$\int_0^2 \left(\int_x^2 2y^2 \sin(xy) dy \right) dx\,.$$

Solution:
Pour $0 \le x \le 2$ fixé, y varie entre $y = x$ et $y = 2$. Par conséquent, pour $0 \le y \le 2$ fixé, x varie entre 0 et y. L'échange des bornes d'intégration nous donne alors

$$\begin{aligned}
\int_0^2 \left(\int_x^2 2y^2 \sin(xy) dy \right) dx &= \int_0^2 \left(\int_0^y 2y^2 \sin(xy) dx \right) dy \\
&= \int_0^2 2y \left(\int_0^y y \sin(xy) dx \right) dy \\
&= \int_0^2 2y \left[-\cos(xy) \right]_0^y dy = \int_0^2 2y(1 - \cos(y^2)) dy \\
&= \left[y^2 - \sin(y^2) \right]_0^2 = 4 - \sin 4\,.
\end{aligned}$$