Analyse II — Corrigé 9

Exercice 1. [Théorique]

1) Soit $U \subseteq \mathbb{R}^2$ un ouvert et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^2(U)$. Montrer que $\mathrm{rot}(\nabla f)(x) = 0$ pour tout $x \in U$.

2) Soit $U \subseteq \mathbb{R}^3$ un ouvert et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^2(U)$. Montrer que le champs gradient $\nabla f : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ vérifie $\mathrm{rot}(\nabla f)(x) = 0$ pour tout $x \in U$.

3) Soit $U \subseteq \mathbb{R}^3$ un ouvert et $v : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un champs de classe $C^2(U)$. Montrer que $\mathrm{div}(\mathrm{rot} v)(x) = 0$ pour tout $x \in U$.

Solution:

1) On rappelle que si $v : U \longrightarrow \mathbb{R}^2$ est un champs on définit son rotationnel (en dimension 2) par $\mathrm{rot} v = \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}$ (ici v_i désigne la i-ème composante du champs v). Dès lors nous avons pour f de classe $C^2(U)$:

$$\mathrm{rot}(\nabla f) = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right) - \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} = 0$$

la dernière égalité provenant du fait que f est $C^2(U)$ (et donc ces dérivées partielles secondes sont symétriques par le Théorème de Schwarz).

2) Pour tout $x \in U$ calculons $\mathrm{rot}(\nabla f)$. On a $\mathrm{rot}(\nabla f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Noter que, ici aussi, la dernière égalité vaut car f est de classe $C^2(U)$ et donc les dérivées partielles secondes sont symétriques.

3) Calculons $\mathrm{div}(\mathrm{rot} v)$. Notons v_i les composantes de v $(i = 1, 2, 3)$. On a que $\mathrm{rot} v = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}$. Ainsi

$$\begin{aligned} \mathrm{div}(\mathrm{rot} v) &= \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right) \\ &= \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2 \partial x_3} - \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_2 \partial x_1} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_3 \partial x_1} - \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_3 \partial x_2} = 0. \end{aligned}$$

Noter que, ici aussi, nous avons utilisé le théorème de Schwarz pour conclure.

Exercice 2. [Vrai ou Faux] **V** **F**

1) Le champs $v(x,y,z) = (x+y, y+z, z+x)$ est le rotationnel d'un champs $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. ☐ ☒
2) La divergence de $v(x,y,z) = (x^2, y^2, z^2)$ est toujours positive. ☐ ☒
3) Le jacobien de $v(x,y,z) = (xy, yz, zx)$ vaut $2xyz$. ☒ ☐
4) Le champs $v(x,y) = (ye^{xy}, xe^{xy})$ est le gradient d'une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. ☒ ☐
5) Le champs $v(x,y) = (e^{xy}, e^{xy})$ est le gradient d'une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. ☐ ☒
6) Le champs $v(x,y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$ est inversible sur tout $\mathbb{R}^2$. ☐ ☒
7) Le champs $v(x,y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$ est localement inversible sur tout $\mathbb{R}^2$. ☒ ☐
8) La divergence du champs $v(x,y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$ n'est jamais nulle. ☐ ☒
9) Le champs $w(s,t) = (\ln(\sqrt{s^2+t^2}), \arctan(\frac{t}{s}))$ est un inverse local du champs v ci-dessus. ☒ ☐
10) La matrice jacobienne de n'importe quel champs inverse w de v est $J_w(s,t) = \frac{1}{s^2+t^2}\begin{pmatrix} s & t \\ -t & s \end{pmatrix}$. ☒ ☐

Solution:

1) Faux. En effet d'après l'exercice 1 ci-dessus, si tel était le cas on aurait que $\operatorname{div} v = 0$. Or un simple calcul montre que la divergence de ce champs n'est pas nulle.
2) Faux. La divergence de ce champs vaut $\operatorname{div} v(x,y,z) = 2(x+y+z)$ qui n'est pas toujours positif.
3) Vrai. Un simple calcul nous donne la matrice jacobienne: $\begin{pmatrix} y & x & 0 \\ 0 & z & y \\ z & 0 & x \end{pmatrix}$. Son déterminant vaut bien $2xyz$.
4) Vrai. Par exemple la fonction $f(x,y) = e^{xy}$ vérifie $\nabla f = v$.
5) Faux. En effet, d'après l'exercice 1 ci-dessus, si tel était le cas, on aurait $\operatorname{rot} v = 0$ or ici nous avons $\operatorname{rot} v = \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} = ye^{xy} - xe^{xy} \neq 0$.
6) Faux. Ce champs n'est pas injectif car $v(x, y+2\pi) = v(x,y)$, il n'est donc pas inversible.
7) Vrai. Sa matrice jacobienne est donnée par $J_v(x,y) = \begin{pmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{pmatrix}$ et donc son jacobien vaut $e^{2x} > 0$ pour tout x.
8) Faux. La divergence est égale à la trace de la matrice jacobienne, ici on a $\operatorname{div} v(x,y) = 2e^x \cos y$ qui s'annule en $y = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
9) Vrai. Si l'on regarde $w : \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ on a bel et bien un inverse de v comme on le vérifie par le calcul.
10) Vrai. Par la formule de composition on a que si w est un inverse local de v alors

$$J_w(v(x,y)) = (J_v(x,y))^{-1} = \frac{1}{e^{2x}}\begin{pmatrix} e^x \cos y & e^x \sin y \\ -e^x \sin y & e^x \cos y \end{pmatrix}$$

et en posant $s = e^x \cos y$ et $t = e^x \sin y$ on trouve (puisque $s^2 + t^2 = e^{2x}$)

$$J_w(s,t) = \frac{1}{s^2+t^2}\begin{pmatrix} s & t \\ -t & s \end{pmatrix}$$

Exercice 3. [QCM]

a) On considère le champs $f(x,y) = (x+xy, y+xy)$. Laquelle parmi les assertions suivantes est vraie?

- ☐ Ce champs est constant,
- ☐ La divergence de ce champs est nulle en tout point,
- ☐ Le jacobien de f est toujours non nul,
- ☒ Le jacobien et la divergence de f diffèrent d'une constante.

b) Soit le champs $v(x,y,z) = (z,x,y)$. Laquelle parmi les assertions suivantes est vraie?

- ☐ La divergence de v vaut -2,
- ☐ Le rotationnel de v vaut (x,y,z),
- ☒ Le rotationnel de v est constant,
- ☐ Il existe une fonction $f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $v = \nabla f$.

Solution:

a) La matrice jacobienne de f est $J_f(x,y) = \begin{pmatrix} 1+y & x \\ y & 1+x \end{pmatrix}$. Ainsi la divergence vaut $2+x+y$ et le jacobien $(1+x)(1+y) - xy = 1+x+y$. Ces deux quantités diffèrent d'une constante.

b) On calcule et on trouve $\operatorname{rot} v = (1,1,1)$

Exercice 4. [Différentiation implicite]

Soit $f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^1(\mathbb{R}^n)$ et soient $g_i:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, pour $i=1,\dots,n$ des fonctions de classe $C^1(\mathbb{R})$. On considère la fonction $F:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ définie par $F(x) = f(g_1(x), g_2(x), \dots, g_n(x))$.

a) Montrer que F est de classe $C^1(\mathbb{R})$ et que sa dérivée est donnée par la formule

$$F'(x) = \sum_{i=1}^{n} g_i'(x)\cdot\frac{\partial f}{\partial x_i}(g_1(x), g_2(x), \dots, g_n(x)).$$

b) Montrer que si $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ et $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ (de classe C^1) sont telles que la fonction $x\mapsto f(x,g(x))$ est constante, alors

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,g(x)) + g'(x)\frac{\partial f}{\partial y}(x,g(x)) = 0.$$

Solution:

a) Il s'agit ici d'une application de la formule de composition. En effet, posons $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^n$ donnée par $g(x) = (g_1(x), g_2(x), \dots, g_n(x))$ pour tout $x\in\mathbb{R}$. Clairement g est de classe $C^1(\mathbb{R})$ et $F = f\circ g$. On a donc, par la formule de composition,

$$F'(x) = J_F(x) = J_{f\circ g}(x) = J_f(g(x))\cdot J_g(x)$$

ce qui donne la formule cherchée puisque $J_f(g(x)) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(g(x)), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(g(x))\right)$ (matrice-ligne $1\times n$) et $J_g(x) = \begin{pmatrix} g_1'(x) \\ \vdots \\ g_n'(x)\end{pmatrix}$ (matrice-colonne $n\times 1$.)

b) C'est une conséquence immédiate de la formule ci-dessus, en prenant $g_1(x) = x$ et $g_2(x) = g(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

Exercice 5. [Théorème de fonctions implicites]
Montrer que l'équation

$$\ln x + e^{\frac{y}{x}} = 1$$

définit au voisinage du point $(1,0)$ une fonction implicite $y = g(x)$ telle que $g(1) = 0$. Donner l'équation de la tangente à la courbe $y = g(x)$ en 1.

Solution: On définit la fonction $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ avec $U = \mathbb{R}_+ \setminus \{0\} \times \mathbb{R}$ par

$$f(x,y) = \ln x + e^{\frac{y}{x}} - 1$$

La fonction f est de classe $C^1(U)$ (elle est même de classe $C^\infty(U)$) et pour tout $(x,y) \in U$ on a

$$D_2 f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{e^{\frac{y}{x}}}{x}.$$

De plus, $f(1,0) = 0$ et $D_2 f(1,0) = 1 \neq 0$. Ainsi, par le théorème des fonctions implicites, il existe un intervalle $I =]1-\varepsilon, 1+\varepsilon[$ et une unique fonction $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $C^1(I)$ telle que $g(1) = 0$ et $f(x, g(x)) = 0$. La dérivée de g est donnée par

$$g'(x) = -\frac{D_1 f(x,g(x))}{D_2 f(x,g(x))} = \frac{g(x)}{x} - e^{\frac{-g(x)}{x}}$$

Donc $g'(1) = -1$. Par conséquent, l'équation de la tangente à la courbe $y = g(x)$ en $x = 1$ est

$$y = g(1) + g'(1)(x-1) = 1 - x.$$

Exercice 6.
Montrer que l'équation

$$\cos(x^2 + y) + \sin(x+y) + e^{x^3 y} = 2$$

définit au voisinage du point $(0, \frac{\pi}{2})$ une fonction implicite $y = g(x)$ telle que $g(0) = \frac{\pi}{2}$. Montrer que la fonction g admet un maximum local en 0.

Solution: On définit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ par

$$f(x,y) = \cos(x^2 + y) + \sin(x+y) + e^{x^3 y} - 2$$

Alors, la fonction f est de classe $C^k(\mathbb{R}^2)$, pour tout $k \geq 1$, et pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$D_2 f(x,y) = -\sin(x^2 + y) + \cos(x+y) + x^3 e^{x^3 y}.$$

De plus, $f(0, \frac{\pi}{2}) = 0$ et $D_2 f(0, \frac{\pi}{2}) = -1 \neq 0$. Ainsi, par le théorème des fonctions implicites il existe un intervalle $I =]-\varepsilon, \varepsilon[$ et une unique fonction $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $C^1(I)$ telle que $g(0) = \frac{\pi}{2}$ et $f(x, g(x)) = 0$. La dérivée de g est donnée par

$$g'(x) = -\frac{D_1 f(x,g(x))}{D_2 f(x,g(x))}$$

et $D_1 f(x,y) = -2x \sin(x^2 + y) + \cos(x+y) + 3x^2 y e^{x^3 y}$ Donc $g'(0) = 0$. La dérivée seconde en $x = 0$ est elle donnée par

$$g''(0) = -\frac{D_{11} f(0, \frac{\pi}{2})}{D_2 f(0, \frac{\pi}{2})} = -3$$

selon la formule obtenue en classe, ce qui montre que 0 est un maximum local de g.

Exercice 7.
Montrer que l'équation

$$x^5 + xyz + y^3 + 3xz^4 = 2$$

définit au voisinage du point $(1,-1,1)$ une fonction implicite $z = g(x,y)$ telle que $g(1,-1) = 1$. Donner l'équation du plan tangent à la surface $z = g(x,y)$ en $(1,-1)$.

Solution:
On définit la fonction $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ par

$$f(x,y,z) = x^5 + xyz + y^3 + 3xz^4 - 2$$

Alors, la fonction f est de classe C^k, pour tout $k \geq 1$, et pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ on a

$$D_3 f(x,y,z) = xy + 12xz^3.$$

De plus, $f(1,-1,1) = 0$ et $D_3 f(1,-1,1) = 11 \neq 0$. Alors, par le théorème des fonctions implicites il existe un voisinage $B_\varepsilon(1,-1) \subset \mathbb{R}^2$ et une unique fonction $g : B_\varepsilon(1,-1) \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $C^k(B_\varepsilon(1,-1))$ telle que $g(1,-1) = 1$ et $f(x,y,g(x,y)) = 0$.
Comme vu en classe, l'équation du plan tangent à la surface $z = g(x,y)$ en $(1,-1)$ est donnée par

$$\langle \nabla f(1,-1,1), \begin{pmatrix} x-1 \\ y+1 \\ z-1 \end{pmatrix} \rangle = 0$$

et donc, en utilisant

$$\nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 5x^4 + yz + 3z^4 \\ xz + 3y^2 \\ xy + 12xz^3 \end{pmatrix}$$

on trouve

$$7x + 4y + 11z = 14.$$