Exercices — Corrigé 7

Exercice 1. [Suites récurrentes et Suites de Cauchy]
Déterminer si les suites suivantes sont de Cauchy ou non. Calculer leur limite dans l'affirmative.

i) $x_{n+1} = \frac{4}{5}x_n + \frac{1}{5}$ pour tout $n > 0$ et $x_0 = 0$.

ii) $x_{n+1} = x_n^2$ pour tout $n > 0$ et $x_0 = a \in \mathbb{R}$.

iii) $x_{n+1} = \sqrt{2x_n}$ pour tout $n > 0$ et $x_0 = 1$.

iv) $x_{n+1} = x_n^2 + 1$ pour tout $n > 0$ et $x_0 = 0$.

Solution: Pour certains points de cet exercice nous utiliserons le critère suivant qui donne une condition suffisante pour qu'une suite soit de Cauchy:

Soit (x_n) une suite numérique telle qu'il existe $0 < \lambda < 1$ et $c \geq 0$ avec $|x_{n+1} - x_n| \leq c\lambda^n$. Alors (x_n) est une suite de Cauchy (et donc convergente).

i) Pour tout $n \geq 1$ on calcule $|x_{n+1} - x_n|$ et on trouve

$$|x_{n+1} - x_n| = \left|\frac{4}{5}x_n + \frac{1}{5} - (\frac{4}{5}x_{n-1} + \frac{1}{5})\right| = \frac{4}{5}|x_n - x_{n-1}|$$

Ainsi, pour tout $n \geq 1$ on a $|x_{n+1} - x_n| = \left(\frac{4}{5}\right)^n |x_1 - x_0|$. Comme $x_1 - x_0 = x_1 = \frac{1}{5}$ on conclut que $|x_{n+1} - x_n| = \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^n$ pour tout $n \geq 0$. Ainsi la suite est de Cauchy par le critère ci-dessus.

Pour trouver sa limite on résoud l'équation $x = \frac{4}{5}x + \frac{1}{5}$ et on trouve $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x = 1$

ii) On remarque que la suite s'écrit $x_n = a^{2^n}$ (et on le prouve par récurrence). Ainsi, si $|a| > 1$ la suite est non bornée et donc elle ne peut pas être de Cauchy. Si $|a| = 1$ alors la suite est constante à partir de $n = 1$ c'est donc une suite de Cauchy et sa limite vaut 1. Si $|a| < 1$ alors la suite $x_n = a^{2^n}$ converge vers 0, elle est donc de Cauchy.

iii) Observons d'abord que $1 \leq x_n < 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (se démontre par récurrence). Ensuite, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on calcule $|x_{n+1} - x_n|$ et on trouve

$$|x_{n+1} - x_n| = \left|\sqrt{2x_n} - \sqrt{2x_{n-1}}\right| = \left|\frac{2x_n - 2x_{n-1}}{\sqrt{2x_n} + \sqrt{2x_{n-1}}}\right| < \frac{2}{2\sqrt{2}}|x_n - x_{n-1}| = \frac{1}{\sqrt{2}}|x_n - x_{n-1}|$$

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on trouve $|x_{n+1} - x_n| < \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n |x_1 - x_0| = (\sqrt{2} - 1)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$. Donc la suite est de Cauchy d'après le critère ci-dessus. Sa limite se trouve en résolvant l'équation $x = \sqrt{2x}$ et en tenant compte des valeurs de la suite. On trouve $x = 0$ ou $x = 2$ et comme $1 \leq x_n < 2$ pour tout n on en déduit que $x = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 2$.

iv) Ici on observe facilement que la suite est non bornée. Elle n'est donc pas de Cauchy.

Exercice 2. [Vrai ou Faux (Suites)]

	V	F
1) Si (y_n) est sous-suite de (x_n) et (z_n) est sous-suite de (y_n), alors (z_n) est sous-suite de (x_n).	⊠	☐
2) Une suite qui vérifie $\lvert x_{n+1} - x_n\rvert < 10^{-n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ est de Cauchy.	⊠	☐
3) Si $\lim\limits_{n\to+\infty} \lvert x_{n+4} - x_n\rvert = 0$ alors (x_n) est de Cauchy.	☐	⊠
4) Une suite géométrique est toujours de Cauchy.	☐	⊠
5) Si (x_n) est de Cauchy et $x_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $(\frac{1}{x_n})$ est de Cauchy.	☐	⊠
6) Toute suite constante est de Cauchy.	⊠	☐
7) Une suite de Cauchy est toujours bornée.	⊠	☐
8) Une sous-suite d'une suite de Cauchy est de Cauchy.	⊠	☐
9) Si (x_n^2) est de Cauchy alors (x_n) est aussi de Cauchy.	☐	⊠
10) Si (x_n) est de Cauchy alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \lvert x_{n+k} - x_n\rvert = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.	⊠	☐

Solution:

1) Vrai. Cela découle du fait que la composition de deux fonction strictement croissantes $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est encore strictement croissante.

2) Vrai. C'est un cas particulier du critère vu dans la solution de l'exercice 1.

3) Faux. On peut prendre $x_n = \sqrt{n}$ qui vérifie la condition mais qui est non bornée, donc pas de Cauchy.

4) Faux. Si la raison r de la suite géométrique vérifie $\lvert r\rvert > 1$ alors la suite n'est pas bornée et ne peut donc pas être de Cauchy.

5) Faux. Prenons $x_n = \frac{1}{n+1}$. Cette suite est convergente donc de Cauchy. De plus $x_n > 0$ pour tout n. Par contre la suite des inverses $\frac{1}{x_n} = n + 1$ n'est pas bornée donc pas de Cauchy.

6) Vrai. Une suite constante est banalement de Cauchy car $\lvert x_m - x_n\rvert = 0$ pour tous $m, n \in \mathbb{N}$.

7) Vrai. On le montre avec la définition ou on utilise le fait qu'une suite de Cauchy est convergente donc bornée.

8) Vrai. Comme une suite est de Cauchy si et seulement si elle est convergente et que tout sous-suite d'une suite convergente est convergente on en déduit le résultat.

9) Faux. La suite $x_n = (-1)^n$ n'est pas de Cauchy (car non convergente) mais son carré l'est car $x_n^2 = 1$ pour tout n.

10) Vrai. On sait que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que si $m, n \geq n_\varepsilon$ alors $\lvert x_m - x_n\rvert < \varepsilon$. En prenant $m = n + k$ on obtient que $\lvert x_{n+k} - x_n\rvert < \varepsilon$ ce qui montre l'assertion.

Exercice 3. [Séries – QCM calculatoire]
Étudier la convergence et/ou donner la valeur de chaque série ci-dessous

1) $\sum_{k=0}^{\infty} \sqrt[5]{k}$ — 1 ☐ $+\infty$ ☒ diverge ☐ 0☐

2) $\sum_{k=1}^{\infty} 8^{-k}$ — $+\infty$ ☐ diverge ☐ $\frac{1}{7}$ ☒ $\frac{8}{7}$☐

3) $\sum_{k=0}^{\infty} \sin(k^3)k$ — 1 ☐ diverge ☒ $+\infty$ ☐ 0☐

4) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)$ — 0 ☐ $+\infty$ ☐ $\frac{1}{2}$ ☐ 1☒

5) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2-1}$ — $\frac{1}{2}$ ☐ $\frac{2}{3}$ ☐ $\frac{3}{4}$ ☒ diverge☐

6) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2+5k+6}$ — $\frac{1}{2}$ ☒ $\frac{2}{3}$ ☐ $\frac{3}{4}$ ☐ $+\infty$☐

7) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+2}{k^3+5k^2+8k+4}$ — diverge 10 ☐ 1 ☒ $+\infty$☐

8) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{k(k+3)}$ — $+\infty$ ☐ $\frac{13}{6}$ ☐ $\frac{11}{6}$ ☒ 2☐

Solution:

1) Comme $x_n = \sqrt[5]{n}$ est une suite strictement positive et strictement croissante on a que la suite des sommes partielles tend vers $+\infty$

2) Il s'agit d'une série géométrique de raison $r = \frac{1}{8}$ mais qui commence avec $k = 1$. On a donc

$$\sum_{k=1}^{\infty} 8^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{8}\right)^k - 1 = \frac{1}{1-\frac{1}{8}} - 1 = \frac{8}{7} - 1 = \frac{1}{7}$$

3) La suite $\sin(k^3)k$ ne converge pas vers 0 (Pour s'en convaincre il suffit de remarquer qu'il existe une infinité d'entiers k pour lesquels $\sin(k^3) > \frac{1}{2}$ par exemple). Donc la série de terme $\sin(k^3)k$ diverge. Par contre il n'est pas évident de savoir si $\sum_{k=0}^{\infty} \sin(k^3)k = +\infty$ ou $-\infty$ ou aucun des deux cas n'est possible. À ce jour je ne connais pas la réponse!

4) Pour étudier ce genre de série on regarde les sommes partielles $s_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)$ et on remarque que cette somme se simplifie:

$$s_n = \frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

Donc $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right) = \lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}} = 1$

5) On procède comme ci-dessus et on calcule la suite des sommes partielles. On trouve

$$s_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-1} = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1})$$

Donc $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2-1} = \lim_{n\to+\infty} s_n = \frac{1}{2}(1+\frac{1}{2}) = \frac{3}{4}$.

6) On a que $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2+5k+6} = \frac{1}{2}$ en effet la somme partielle s_n vaut

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k^2+5k+6} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+2)(k+3)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+3}$$

7) On regarde les sommes partielles encore une fois et on trouve

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{k+2}{k^3+5k^2+8k+4} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)} - \frac{1}{(k+2)} = 1 - \frac{1}{n+2}$$

Donc $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+2}{k^3+5k^2+8k+4} = 1$

8) On calcule la somme partielle s_n et on trouve (si $n \geq 3$)

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{3}{k(k+3)} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+3}\right) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}$$

On obtient donc $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{k(k+3)} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}$

Exercice 4. [Vrai ou Faux (Séries)]

	V	F
1) La série $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{10^k}{11^k}$ converge	☒	☐
2) La série $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{9^{k-1}}{10^k}$ converge	☒	☐
3) La série $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{3^k-1}{2^k} + \frac{1}{2^k}\right)$ converge	☐	☒
4) La série $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k^2}$ converge absolument	☒	☐
5) La série $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{2k+1}{3k-1}\right)$ converge absolument	☐	☒
6) La série $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\cos(k-1)}{k^7-1}$ converge	☒	☐
7) La série $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{5^k+5^{-k}}$ converge	☒	☐

8) La série $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{k+1000}{2k-1000}\right)^k$ converge absolument ☒ ☐

9) La série $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sqrt{k^2+2}-k\right)$ converge ☐ ☒

10) La série $\sum_{k=0}^{\infty} \left(1-\cos(\frac{\pi}{k+1})\right)$ converge ☒ ☐

11) La série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k}}{k}$ converge ☐ ☒

12) La série $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^k+\frac{1}{3^k+\frac{1}{3^k}}}$ converge ☒ ☐

13) La série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k+5}-\sqrt{k}}{k}$ converge ☒ ☐

Solution:

1) Vrai. Il s'agit ici d'une série géométrique de raison $r = \frac{10}{11} < 1$ donc (absolument) convergente.

2) Vrai. Si on multiplie cette série par 9 on trouve la série géométrique de raison $r = \frac{9}{10} < 1$ d'où la convergence (absolue).

3) Faux. La série est géométrique de raison $r = \frac{3}{2} > 1$ donc divergente

4) Vrai. Nous sommes en présence d'une série alternée du type $x_n = (-1)^n u_n$ où $u_n = \frac{1}{n^2}$ (et on pourrait appliquer le critère de Leibniz pour montrer qu'elle est convergente). Or ici nous aimerions vérifier la convergence absolue. Or on a que $|x_n| = \frac{1}{n^2}$ et cette dernière série converge (comme établi en classe).

5) Faux. Le terme $|x_n|$ vaut ici $\frac{2n+1}{3n-1}$ et comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{2n+1}{3n-1} = \frac{2}{3} \neq 0$ on conclut que la série n'est pas absolument convergente (elle n'est même pas convergente par le même argument.

6) Vrai. On a que $0 \leq |x_n| = \left|\frac{\cos(n-1)}{n^7-1}\right| \leq \left|\frac{1}{n^7-1}\right|$ pour tout $n \geq 2$ (Remarquez que la suite n'est pas définie pour $n = 1$, on doit donc commencer la somme à $n = 2$.) Comme la série de terme $\frac{1}{n^6}$ converge (vu en classe) on en déduit que la série de terme $\frac{1}{n^7-1}$ converge aussi. D'où la convergence de la série par le critère de comparaison de séries.

7) Vrai. On applique le critère de d'Alembert pour les séries: on a que $\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = \frac{5^n+\frac{1}{5^n}}{5^{n+1}+\frac{1}{5^{n+1}}} = \frac{5^{2n+1}+5}{5^{2n+2}+1}$. Donc $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = \frac{1}{5} < 1$ ce qui montre que la série est (absolument) convergente.

8) Vrai. On utilise le critère des racines: On a que $\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|x_n|} = \limsup_{n\to+\infty} \left|\frac{n+1000}{2n-1000}\right| = \frac{1}{2} < 1$ d'où la convergence (absolue) de la série.

9) Faux. On regarde $x_n = \sqrt{n^2+2}-n = \frac{2}{\sqrt{n^2+2}+n}$ et on constate que, pour $n \geq 2$ on a $n^2+2 < (n+1)^2$. Par conséquent $x_n > \frac{2}{2n+1} > \frac{2}{3n}$. Comme la série harmonique diverge, par le critère de comparaison la série en question diverge aussi.

10) Vrai. On a

$$\left|1-\cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right)\right| \overset{(1)}{=} 2\sin^2\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right) \overset{(2)}{\leq} 2\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right)^2 = \frac{\pi^2}{2(n+1)^2} < \frac{\pi^2}{2}\frac{1}{n^2},$$

où on a utilisé la trigonométrie en (1) et l'inégalité $\sin x \leq x$ pour $x \geq 0$ en (2).

Comme la série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ converge, la série $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right)\right)$ converge (absolument) par le critère de comparaison.

11) Faux. On a que $x_n = \frac{\sqrt{n}}{n} \geq \frac{1}{n}$ pour tout $n \geq 1$ et donc cette série diverge par le critère de comparaison (vu que la série harmonique diverge).

12) Vrai. On écrit $x_k = \frac{1}{3^k+\frac{1}{3^k+\frac{1}{3^k}}} = \frac{3^{2k}+1}{3^k(3^{2k}+2)}$ et on utilise le critère du quotient pour trouver

$$\frac{x_{k+1}}{x_k} = \frac{3^k(3^{2k}+2)}{3^{2k}+1}\,\frac{3^{2k+2}+1}{3^{k+1}(3^{2k+2}+2)} = \frac{1}{3}\frac{(3^{2k}+2)(3^{2k+2}+1)}{(3^{2k}+1)(3^{2k+2}+2)}$$

En prenant la limite lorsque $k \to \infty$ on trouve $\lim_{k\to+\infty}\left|\frac{x_{k+1}}{x_k}\right| = \frac{1}{3} < 1$ ce qui montre que la série est (absolument) convergente.

13) Vrai. Ici aussi il faut commencer la série par $k = 1$. On procède comme suit. On a pour tout $k \geq 1$

$$0 < \frac{\sqrt{k+5}-\sqrt{k}}{k} = \frac{5}{k(\sqrt{k+5}+\sqrt{k})} < \frac{5}{k(\sqrt{k}+\sqrt{k})} = \frac{5}{2}\frac{1}{k^{3/2}}.$$

Par le critère de comparaison, la série $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sqrt{k+5}-\sqrt{k}}{k}$ converge (absolument) car $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{3/2}}$ converge. Ceci se démontre comme pour le cas de la série $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$: la suite des sommes partielles $s_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{3/2}}$ est croissante et bornée car

$$\begin{aligned} s_n &= 1 + \left(\tfrac{1}{2^{3/2}} + \tfrac{1}{3^{3/2}}\right) + \left(\tfrac{1}{4^{3/2}} + \tfrac{1}{5^{3/2}}\right) + \ldots \\ &\leq 1 + 2\left(\tfrac{1}{2^{3/2}} + \tfrac{1}{4^{3/2}} + \ldots\right) \\ &\leq 1 + \tfrac{2}{2^{3/2}}\left(1 + \tfrac{1}{2^{3/2}} + \ldots\right) = 1 + \tfrac{1}{\sqrt{2}}s_n \end{aligned}$$

et donc $s_n \leq \frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$.

Exercice 5. [QCM théorique]

a) La suite $x_n = \cos(\frac{2\pi n}{7})$ possède

- ☐ aucune sous-suite convergente
- ☐ exactement 7 sous-suites convergentes.
- ☐ un nombre fini de sous-suites convergentes.
- ☒ une infinité de sous-suites convergentes.

b) Soit (x_n) une suite numérique positive telle que $\sum_{k=0}^{\infty} x_k \leq 2$. Alors

- ☐ Pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a $x_k \leq \frac{1}{2^k}$.
- ☐ On a que $\lim_{n\to+\infty} x_n = 2$.
- ☒ On a que $\sum_{k=0}^{\infty} x_k^7 \leq 128$.
- ☐ La série $\sum_{k=0}^{\infty} x_k^2$ diverge.

c) Soient $(x_n), (y_n)$ deux suites numériques telles que $\sum_{k=0}^{\infty} x_k$ et $\sum_{k=0}^{\infty} y_k$ divergent. Alors

- ☐ La série $\sum_{k=0}^{\infty} x_k y_k$ diverge.
- ☐ La série $\sum_{k=0}^{\infty} x_k + y_k$ diverge.
- ☒ Les séries $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha x_k$ et $\sum_{k=0}^{\infty} \beta y_k$ divergent pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$.
- ☐ La série $\sum_{k=0}^{\infty} (\alpha x_k + \beta y_k)$ diverge pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$.

Solution:

a) La suite $x_n = \cos(\frac{2\pi n}{7})$ possède une infinité de sous-suites qui sont constantes à partir d'un certain moment (et donc convergentes). Pour le voir on considère un entier $p > 0$ et on construit une sous-suite x_{n_k} de x_n de la façon suivante. On pose $n_k = k$ si $k \leq 7p$ et $n_k = 7p + 7(k - 7p)$ si $k > 7p$. Dans ce cas, on voit que la sous-suite ainsi construite possède les mêmes termes que x_n jusqu'au $7p$-ème terme et elle est constante (égale à 1) à partir de ce moment. Pour chaque valeur de p la sous-suite ainsi construite est différente de la sous-suite construite avec $p' \neq p$.

b) Comme $\sum_{k=0}^{\infty} x_k \leq 2$ par l'inégalité triangulaire et le fait que $x_k > 0$ on voit que la somme partielle s_n vérifie $s_n = \sum_{k=0}^{n} x_k^7 \leq \left(\sum_{k=0}^{n} x_k\right)^7 \leq 2^7 = 128$

c) La bonne réponse est la troisième puisque, si $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha x_k$ converge, alors $\sum_{k=0}^{\infty} x_k$ converge aussi. Pour les 3 autres options on peut trouver des contre-exemples.

Exercice 6. [Séries à paramètre]
Étudier la convergence des séries suivantes en fonction de $c \in \mathbb{R}$:

1) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \left(\frac{c}{1-c}\right)^k$ où $c \neq 1$.

2) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} kc^k$

3) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \left(\sin(\frac{\pi c}{2})\right)^k$

4) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{c^k k!}{k^k}$

Solution:

1) La série géométrique $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \left(\frac{c}{1-c}\right)^k$ converge (absolument) $\Leftrightarrow$ $\left|\frac{c}{1-c}\right| < 1$ $\Leftrightarrow$ $c < \frac{1}{2}$.
Remarque: On pourrait aussi utiliser le critère de la racine et puis traiter le cas où le critère de la racine ne permet pas de conclure (limite = 1) séparément. En effet, quand $\left|\frac{c}{1-c}\right| = 1$ $\Leftrightarrow$ $c = \frac{1}{2}$, on a la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1^n$ qui diverge.

2) Pour $c = 0$ la convergence est évidente et on peut supposer que $c \neq 0$. Alors

$$\lim_{k\to\infty} \left|\frac{x_{k+1}}{x_k}\right| = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{k+1}{k}|c|\right) = |c|,$$

ce qui nous permet de conclure, grâce au critère de d'Alembert, que la série converge (absolument) si $|c| < 1$ et qu'elle diverge si $|c| > 1$. Si $c = \pm 1$, la série diverge.

3) Pour $c = 2k+1$ avec $k \in \mathbb{N}$, on a $\left|\left(\sin(\frac{\pi c}{2})\right)^n\right| = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et donc la série diverge.
Pour $c \neq 2k+1$ avec $k \in \mathbb{N}$, on a par le critère de la racine

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \left|\sin\left(\frac{\pi c}{2}\right)\right| < 1,$$

et donc la série converge (absolument) et sa somme vaut (c'est une série géométrique de raison $r = \sin(\frac{\pi c}{2})$)

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sin\left(\frac{\pi c}{2}\right)\right)^k = \frac{1}{1-\sin(\frac{\pi c}{2})} .$$

4) Pour $c = 0$, la série converge et est égale à zéro. Soit $c \neq 0$. En utilisant le critère de d'Alembert, on a

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{c^n n!}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|c \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|c|}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{|c|}{e} .$$

Ainsi la série converge (absolument) si $|c| < e$ et elle diverge si $|c| > e$ (et on obtient aucune information si $|c| = e$).
Si $c = \pm e$, la suite des valeurs absolues $(|x_n|)$ est croissante:

$$|x_{n+1}| = |x_n| \cdot \frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} > |x_n|$$

car la suite $b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ croît vers e.
Comme $|x_1| = |c| = e$, il s'en suit que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \neq 0$. Le critère nécessaire pour la convergence d'une série n'est donc pas satisfait et la série diverge.