# Exercices — Corrigé 3

**Exercice 1.** [Vrai ou Faux]

| | V | F |
|---|---|---|
| 1) La somme de deux rationnels est rationnelle. | ☒ | ☐ |
| 2) La somme de deux irrationnels est irrationnelle. | ☐ | ☒ |
| 3) La somme d'un rationnel et d'un irrationnel est rationnelle. | ☐ | ☒ |
| 4) Le produit de deux rationnels est rationnel. | ☒ | ☐ |
| 5) Le produit de deux irrationnels est irrationnel. | ☐ | ☒ |
| 6) Le produit d'un rationnel et d'un irrationnel est rationnel. | ☐ | ☒ |

**Solution:**

1) C'est vrai, en effet $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd} \in \mathbb{Q}$. Cela est vrai pour la différence aussi.
2) C'est faux. Par exemple $a = \sqrt{2}$ et $b = -\sqrt{2}$ sont irrationnels mais leur somme est rationnelle.
3) C'est faux. En effet si $a \in \mathbb{Q}$ et $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ alors si $a + b \in \mathbb{Q}$ on aurait $b = (a + b) - a \in \mathbb{Q}$ ce qui est absurde.
4) Vrai car $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \in \mathbb{Q}$
5) C'est faux, par exemple $a = \sqrt{2} = b$ sont irrationnels, mais $ab = 2$ ne l'est pas.
6) Faux. Prendre par exemple $a = 1$ et $b = \sqrt{2}$.

**Exercice 2.** [Intervalles]
Réecrire les sous-ensembles suivants en utilisant la notation des intervalles:

i) $A = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x < 1\}$
ii) $B = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \leq 1\}$
iii) $C = \{x \in \mathbb{R} \,|\, -x \leq 1\}$
iv) $D = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x^2 \leq 2\}$
v) $E = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x^2 \geq 2\}$
vi) $F = \{x \in \mathbb{R} \,|\, -x^3 \geq 3\}$

**Solution:**

i) $A = ]-\infty, 1[$
ii) $B = ]-\infty, 1]$
iii) $C = [-1, \infty[$
iv) $D = \left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\,\right]$
v) $E = \left]-\infty, -\sqrt{2}\,\right] \cup \left[\sqrt{2}, \infty\right[$
vi) $F = \left]-\infty, -\sqrt[3]{3}\,\right]$

**Exercice 3.** [Sous-ensembles de $\mathbb{R}$]
Pour chacun des sous-ensembles de $\mathbb{R}$ ci-dessous, essayer de les exprimer en termes de réunions ou d'intersections d'intervalles (ouverts, fermés ou non)

1) $A = \{x \in \mathbb{R} \,|\, |x| < 1000\}$.
2) $B = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x^2 \geq 100\}$.
3) $C = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x^3 = 27\}$.
4) $D = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \neq 33\}$.
5) $E = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.
6) $F = \{x \in \mathbb{R} \,|\, -1 < [x] \leq 3\}$
7) $G = \{x \in \mathbb{R} \,|\, |x-4| < 7\}$.
8) $H = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x < 1\}$
9) $I = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \leq 1\}$
10) $J = \{x \in \mathbb{R} \,|\, -x \leq 1\}$
11) $K = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x^2 \leq 2\}$
12) $L = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x^2 \geq 2\}$
13) $M = \{x \in \mathbb{R} \,|\, -x^3 \geq 3\}$

**Solution:**

1) $A = ]-1000, 1000[$.
2) $B = ]-\infty, -10] \bigcup [10, +\infty[$.
3) $C = [3, 3] = \{3\}$.
4) $D = ]-\infty, 33[ \bigcup ]33, +\infty[$.
5) $E = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} ]i, i+1[$
6) $F = [0, 4[$
7) $G = ]-3, 11[$.
8) $H = ]-\infty, 1[$
9) $I = ]-\infty, 1]$
10) $J = [-1, \infty[$
11) $K = \left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right]$
12) $L = \left]-\infty, -\sqrt{2}\right] \cup \left[\sqrt{2}, \infty\right[$
13) $M = \left]-\infty, -\sqrt[3]{3}\right]$

**Exercice 4.** [Infimum et Supremum]
Donner le supremum et l'infimum des sous-ensembles de $\mathbb{R}$ suivants:

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x^2 < 2.25\}$.
b) $B = \{x \in \mathbb{R} \,|\, ax < 1\}$ où $a \in \mathbb{R}^*$.
c) $C = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x^2 + 3x \leq 4\}$.
d) $D = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x = (-1)^n + \frac{1}{n+1}, n \in \mathbb{N}\}$.
e) $E = \{(-0.5)^n + \frac{1}{n+1} \,|\, n \in \mathbb{N}\}$.

**Solution:**

a) Notons que $A = \{x \in \mathbb{R} \,|\, -1.5 < x < 1.5\}$ et par conséquent $\inf(A) = -1,5$ et $\sup(A) = 1,5$.

b) Pour $B = \{x \in \mathbb{R} \,|\, ax < 1\}$ où $a \in \mathbb{R}^*$ on traite deux cas selon que $a < 0$ ou $a > 0$.
Si $a < 0$ alors $B = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x > \frac{1}{a}\}$ et donc $\inf(B) = \frac{1}{a}$ tandis que $\sup(B)$ n'existe pas car $B$ n'est pas une partie majorée de $\mathbb{R}$.
Si $a > 0$ alors $B = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x < \frac{1}{a}\}$ et donc $\sup(B) = \frac{1}{a}$ tandis que $\inf(B)$ n'existe pas car $B$ n'est pas minorée dans ce cas.

c) Pour $C = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x^2+3x \leq 4\}$ on remarque que $x^2+3x-4 = (x-1)(x+4)$ et donc $C = \{x \in \mathbb{R} \,|\, (x-1)(x+4) \leq 0\}$ on en déduit que $\inf(C) = -4$ et $\sup(C) = 1$.

d) $D = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x = (-1)^n + \frac{1}{n+1}, n \in \mathbb{N}\}$. Ici nous avons que $\inf(E) = -1$ puisque $-1$ est un minorant et il n'y a pas un minorant $m > -1$. En effet, par le lemme d'Archimède, il existe un entier positif $n$ (et on prend un entier impair) tel que $(n+1)(m+1) > 1$ d'où $(-1)^n + \frac{1}{n+1} = -1 + \frac{1}{n+1} < -1 + (m+1) = m$. On a donc trouvé un élément plus petit que le minorant $m$ d'où une contradiction. D'autre part on a $\sup(E) = 2$ (prendre $n = 0$ et noter que $\frac{1}{n+1}$ est décroissante).

e) $E = \{(-0.5)^n + \frac{1}{n+1} \,|\, n \in \mathbb{N}\}$. Ici on a $\inf(E) = 0$ (valeur pour $n = 1$) et $\sup(E) = 2$ (valeur pour $n = 0$) les autres éléments sont positifs et tous inférieurs à 2.

**Exercice 5.** [Inégalités]

Résoudre les inégalités suivantes:

i) $x^2 - 2x - 2 < 0$

ii) $x^2 + 4x + 1 \le 0$

iii) $|x-2| \le |x+3|$

iv) $x^4 - x^2 - 6x + 10 > 0$

v) $\dfrac{1}{x} > \dfrac{x}{x+1}$

vi) $\dfrac{x}{x-2} > \dfrac{x}{2x+1}$

**Solution:**

i) Comme $x^2 - 2x - 2 = (x-1)^2 - 3$, l'inégalité à résoudre devient $(x-1)^2 < 3$, qui est satisfaite si $-\sqrt{3} < x - 1 < \sqrt{3}$ . En ajoutant 1, on trouve $1 - \sqrt{3} < x < 1 + \sqrt{3}$ et la solution du problème est

$$x \in \left]1 - \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3}\right[ \ .$$

ii) On a $x^2 + 4x + 1 = (x+2)^2 - 3$, si bien que l'inégalité à résoudre est $(x+2)^2 \le 3$. Cette inégalité est satisfaite si $-\sqrt{3} \le x + 2 \le \sqrt{3}$. En soustrayant 2 on trouve $-2 - \sqrt{3} \le x + 2 \le -2 + \sqrt{3}$, et la solution du problème est

$$x \in \left[-2 - \sqrt{3}, -2 + \sqrt{3}\right] \ .$$

iii) L'inégalité $|x-2| \le |x+3|$ est équivalente à $(x-2)^2 \le (x+3)^2$. On trouve $x^2 - 4x + 4 \le x^2 + 6x + 9$, et donc $10x \ge -5$. La solution du problème est

$$x \in \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[ \ .$$

iv) Comme $x^4 - x^2 - 6x + 10 = (x^2-1)^2 + (x-3)^2 > 0$. La solution du problème est

$$x \in \mathbb{R} \ .$$

v) Il faut considérer quatre cas:

a) $x > 0$ et $x + 1 > 0$: L'inégalité est équivalente à $x + 1 > x^2$ ou à $x^2 - x - 1 < 0$. Avec les techniques algébriques on trouve successivement

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} < 0 \ , \qquad \text{ou} \qquad -\frac{\sqrt{5}}{2} < x - \frac{1}{2} < \frac{\sqrt{5}}{2} \ .$$

L'inégalité est satisfaite pour

$$x \in \left]0, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right[ \ .$$

b) $x > 0$ et $x + 1 < 0$: Aucun $x$ ne satisfait ces deux conditions.

c) $x<0$ et $x+1>0$: L'inégalité est équivalente à $x+1<x^2$ ou à $x^2-x-1>0$. Avec les techniques algébriques on trouve successivement

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}>0\,, \qquad \text{ou} \qquad x\in\left]-\infty,\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right[\ \cup\ \left]\frac{1+\sqrt{5}}{2},\infty\right[\ .$$

L'inégalité est satisfaite pour

$$x\in\left]-1,\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right[\ .$$

d) $x<0$ et $x+1<0$: L'inégalité est équivalente à $x+1>x^2$ ou à $x^2-x-1<0$. Avec les techniques algébriques on trouve successivement

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}<0\,, \qquad \text{ou} \qquad -\frac{\sqrt{5}}{2}<x-\frac{1}{2}<\frac{\sqrt{5}}{2}\ .$$

Puisque $(1-\sqrt{5})/2=-0.618\cdots>-1$, aucun $x$ ne satisfait cette inégalité.

La solution finale du problème est donc

$$x\in\left]-1,\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right[\ \cup\ \left]0,\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right[\ .$$

vi) Il faut considérer cinq cas:

a) $x>2$: L'inégalité est équivalente à $2x+1>x-2$ ou $x>-3$. Donc $x\in\,]2,+\infty[$ satisfait l'inégalité.

b) $0<x<2$: L'inégalité est équivalente à $2x+1<x-2$ ou $x<-3$, ce qui n'est pas possible.

c) $x=0$: L'inégalité n'est pas satisfaite.

d) $-\frac{1}{2}<x<0$: L'inégalité est équivalente à $2x+1>x-2$ ou $x>-3$. Donc $x\in\left]-\frac{1}{2},0\right[$ satisfait l'inégalité.

e) $x<-\frac{1}{2}$: L'inégalité est équivalente à $2x+1<x-2$ ou $x<-3$. Donc $x\in]-\infty,-3[$ satisfait l'inégalité.

La solution finale du problème est

$$x\in\,]-\infty,-3[\ \cup\ \left]-\frac{1}{2},0\right[\ \cup\ ]2,+\infty[\ .$$

**Exercice 6.** [Valeur Absolue]

Montrer que pour tout $x,y\in\mathbb{R}$ on a l'égalité suivante:

$$|x+y|+|x-y|=|x|+|y|+\big||x|-|y|\big|\,.$$

*Indication :* Utiliser les propriétés de la valeur absolue pour se ramener au cas où $y=0$ ou $y=1$.

**Solution:** Noter que l'identité en question est invariante sous les changements $y\mapsto -y$ et/ou $x\mapsto -x$. Donc on peut supposer sans perte de généralité que $x,y\geq 0$. Si $y=0$, l'identité devient $2|x|=2|x|$ et elle est donc vraie. Si $y>0$, on divise tout par $y$ et on écrit $x':=x/y$. L'identité s'écrit alors comme

$$|x'+1|+|x'-1|=|x'|+1+\big||x'|-1\big|,$$

ce qui revient à l'identité initiale avec $y=1$. Pour la vérifier on analyse séparément les intervalles $0\leq x'<1$ et $1\leq x'$ (choisis pour éviter un changement de signe dans les valeurs absolues).

i) Pour $x' \in [0,1[$ , on a $|x'-1| = -(x'-1)$ et $\big||x'|-1\big| = -(x'-1)$ si bien que l'identité s'écrit

$$(x'+1)-(x'-1) = x'+1-(x'-1),$$

ce qui est bien vrai.

ii) Pour $x' \geq 1$, toutes les quantités dans les valeurs absolues sont positives, et donc l'identité devient

$$(x'+1)+(x'-1) = x'+1+(x'-1),$$

qui est aussi vraie.