Physics e-lab : un laboratoire virtuel de physique
Problèmes de physique nécessitant du calcul numérique

Stephan Fedrigo et Christian Félix

17 novembre 2006

Introduction.

L'enseignement de la physique dans les facultés universitaires de sciences exactes vise à transmettre les connaissances dans ce domaine aux générations futures et à doter les nouveaux ingénieurs d'outils efficaces pour résoudre les problèmes qu'ils devront affronter durant leur carrière professionnelle. Dans ce but, la plupart des hautes écoles techniques dispensent, durant le premier cycle, un cours de physique générales à l'ensemble des étudiants, qu'elle que soit la filière qu'ils suivent (physique, chimie, mécanique, mathématique, etc...)

Ce cours est généralement formé d'une séance durant laquelle le professeur expose les nouvelles notions, le cours proprement dit ; et d'une séance d'exercices durant laquelle les étudiants sont invités à mettre en pratique leurs connaissances par la résolution de problèmes. Les exercices sont d'une importance capitale. Le cours permet de prendre conscience des différents phénomènes physiques et de leur modélisation mathématique. Mais ce sont les exercices qui donnent une certaine facilité à un étudiant à utiliser le bon modèle, de la bonne manière, pour résoudre un problème donné. En musique, Il est possible de connaître et de comprendre l'ensemble de l'harmonie et des instruments sans être capable de jouer le moindre petit air, faute de manque de pratique d'un instrument.

Jusqu'à la fin des années 1980, les moyens de calcul numérique d'un étudiant se résumaient à la règle à calcul, puis à la calculatrice de poche. C'est pourquoi l'ensemble des exercices qui leur étaient proposés étaient, pour la plupart, solubles littéralement. Toutefois, les étudiants recevaient aussi une formation en informatique qui devait leur permettre de développer, le cas échéant, les programmes nécessaires à la résolution de problèmes plus complexes, tels qu'ils pourraient être rencontrer lors de leurs parcours professionnel. Néanmoins, ils n'avaient, en général, pas l'occasion d'appliquer ces connaissances à la résolution de problèmes réels durant leurs études, excepté lors de certain projets de semestre pour lesquels un accès à un ordinateur commun leur était fourni. Actuellement, les ordinateurs personnels sont devenus suffisamment performants pour appréhender des problèmes très complexes. A tel point que ce n'est plus tant la puissance de calcul des machines qui représente une barrière, mais plutôt la capacité des ingénieurs à utiliser les programmes évolués de calcul qui se sont développés en parallèle. Ces programmes (comme Matlab, Mathematica ou Ansys) sont de plus en plus performants. Ils sont capables, par exemple, de choisir l'algorithme le mieux adapté au problème et d'opérer un contrôle constant sur la précision des calculs. Il apparaît donc qu'à l'avenir, les ingénieurs utiliseront de plus en plus de tels outils plutôt que de développer des programmes en langage de base (comme le fortran, le C++ ou autres).

C'est pourquoi il nous a semblé nécessaire d'offrir aux étudiants la possibilité de se familiariser à ces nouveaux outils. Pour cela, nous avons développé un jeu d'exercices de physique générale répondant à cette demande. Les objectifs que nous nous étions fixés étaient que ces exercices couvrent si possible tous les domaines de la physique générale, qu'ils soient intéressants parce que le reflet de situations concrètes, voir de situations existant dans la nature, et qu'ils requièrent de l'étudiant qu'il comprenne le problème physique et qu'il pose correctement les bonnes équations. Enfin, répondre aux questions posées demande nécessairement l'utilisation de l'un de ces outils de calcul performant. L'étudiant devra aussi trouver par lui-même les différentes grandeurs physiques parfois nécessaires, comme la masse de la Terre. Nous sommes aussi parti de l'idée que l'utilisation du programme de calcul ne doit pas représenter la difficulté principale. Ainsi, toutes les solutions à ces exercices peuvent s'obtenir en connaissant un minimum d'instructions.

La donnée de chaque exercice comprend une liste des domaines de la physique auquel il est rattaché ; le degré de difficulté sur les plans conceptuel, calculatoire et numérique ; en général, une figure ; la donnée du problème et les questions demandées ; parfois quelques indications et finalement une liste des instructions Mathematica que nous avons nous-même utilisées pour résoudre le problème.

Certain problèmes sont relativement simples et devraient demander au plus un jour de travail, alors que d'autres requièrent plus de réflexion et posent aussi quelques difficultés numériques.

1 Plaque sur un cylindre.

Domaine : Mécanique, statique, point d'équilibre, dynamique du solide...
Difficulté : conceptuelle ● ● ○ ○ ○ calculatoire ● ● ○ ○ ○ numérique ● ○ ○ ○ ○

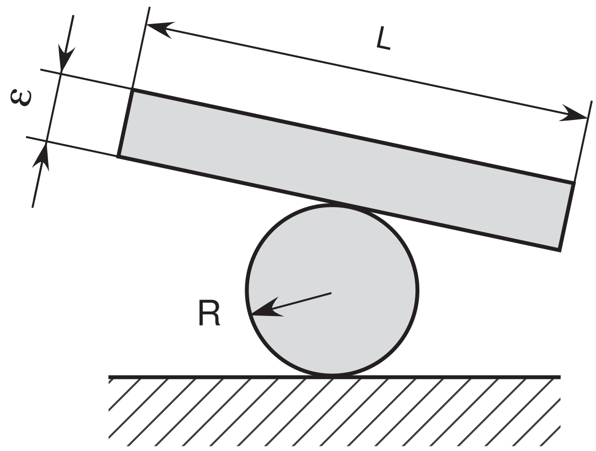

Fig. 1 – Plaque sur un cylindre.

Donnée :
On étudie la dynamique d'une plaque carrée posée sur un cylindre fixe, sans glissement sur la ligne de contact. L'axe du cylindre est aligné avec un axe principal de la plaque.

1. Trouvez les conditions telles que la position horizontale de la plaque sur le cylindre soit un point d'équilibre stable. Le rayon du cylindre est R, l'épaisseur de la plaque est ε et L est son côté.

2. Écrivez l'équation du mouvement de la plaque lorsque celle-ci évolue autour du point d'équilibre. Approximez cette équation pour des angles θ de balancement faibles (angle entre le plan de la plaque et l'horizontale) et obtenez une expression littérale pour la fréquence de balancement.

3. Si $R = 10\ cm$, $\varepsilon = 5\ cm$ et $L = 40\ cm$, obtenez, numériquement et à partir de l'équation exacte, un graphique montrant l'angle de balancement en fonction du temps dans le cas où l'angle extrême de balancement est 70°. Quelle est la valeur de la fréquence de balancement et comparez là avec celle que l'on obtiendrait à partir de l'équation approchée ?

4. Calculez la force au point de contact dans la situation spécifique donnée sous 3). Quel doit être le coefficient de frottement statique minimum pour garantir un mouvement sans glissement ?

Instructions Mathematica : DSolve, NDsolve, Plot, FindRoot, Evaluate, Table, Flatten...

2 Goutte d'eau sur une surface.

Domaine : Hydrostatique, tension superficielle, mécanique des fluides, équation de Laplace...
Difficulté : conceptuelle ●●○○○ calculatoire ●●●●○ numérique ●●●○○

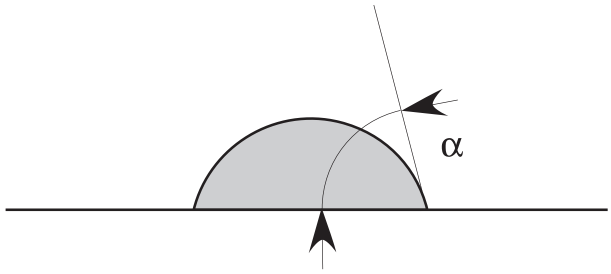

Fig. 2 – Goutte d'eau sur une surface.

Donnée :
On étudie les formes de deux gouttes d'eau posées sur une plaque solide horizontale. La mesure de l'angle α que fait la surface de la goutte avec celle de la plaque nous donne la valeur 80°. La tension superficielle de l'eau est $\gamma = 0.073\ N/m$.

1. La première goutte a un rayon de 2 mm et une hauteur de 1.5 mm. Quelle est la valeur de la pression la plus faible à l'intérieur de la goutte et à quel endroit ?

2. La seconde goutte est plus étendue. Elle a un rayon de 20 mm. Quelle est l'épaisseur maximale qu'elle peut avoir et, dans ce cas, quel est le rayon de courbure de sa surface en $r = 0$?

3. Calculez les volumes de ces deux gouttes.

Indications : l'angle de contact α étant plus faible que $\pi/2$, la courbe qui décrit la génératrice de la goutte peut s'exprimer en coordonnées cylindriques, avec l'axe z correspondant à l'axe de symétrie de la goutte, par une fonction r(z). La difficulté principale réside dans l'obtention des expressions des deux rayons de courbure principaux. Attention à leurs signes. Cherchez les solutions par itérations successives en vous donnant d'abord une pression à l'intérieure.

Instructions Mathematica : NDsolve, Plot, Evaluate, Table, Flatten, NIntegrate...

3 Roue sur une corde.

Domaine : Mécanique, dynamique du solide, mouvement oscillant...

Difficulté : conceptuelle ●○○○○ calculatoire ●●●●● numérique ●●●●○

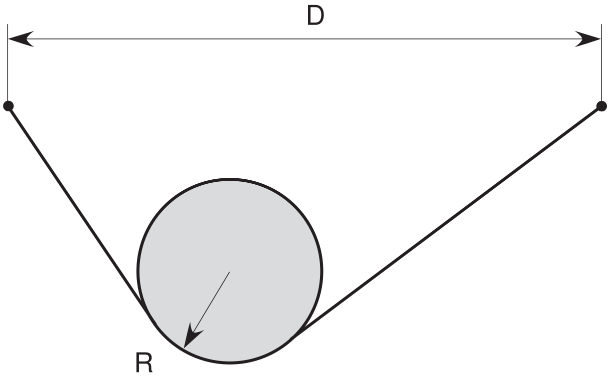

Fig. 3 – Roue sur une corde.

Donnée :
On se propose de décrire le mouvement d'une roue sur une corde, soumise à la force gravifique. Soit une corde non tendue, fixée en deux points de même hauteur. Une roue est posée sur cette corde et est libre de rouler sans glissement le long de cette corde. On suppose que la roue ne peut pas chuter latéralement (tel un monocycle sur une corde, guidé par un bon cycliste). On connaît la longueur L de la corde, la distance D entre les deux points d'attache, le diamètre 2R et la masse M de la roue. Cette dernière est homogène et d'épaisseur constante.

1. Trouvez les points par lesquels passe le centre de la roue si $L = 17\ m$, $D = 10\ m$ et $R = 1\ m$.
2. Si initialement la roue a une vitesse nulle et son centre est à $1.5\ m$ à droite du point d'attache gauche de la corde, calculez le temps que met la roue pour atteindre une première fois le point opposé où sa vitesse s'annule à nouveau.

Indications : La géométrie du problème mène à une équation implicite invoquant des fonctions trigonométriques. Pour la résoudre, il n'y a pas d'autre façon que de chercher les racines numériquement pour un bon nombre de points et ensuite de trouver une fonction d'interpolation qui fit bien ces points, ce que sait faire Mathematica. Pour relier l'angle de rotation de la roue à la position de son centre, on peut décrire un vecteur lié à la roue (comme un rayon) en deux positions différentes.

Instructions Mathematica : FindRoot, Table, Flatten, Interpolation, NIntegrate, ListPlot...

4 Lentille atmosphérique.

Domaine : Optique géométrique, réfraction, loi de Descarte...
Difficulté : conceptuelle ●●○○○ calculatoire ●●●○○ numérique ●●○○○

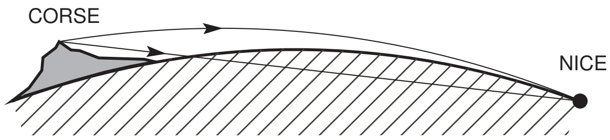

FIG. 4 – Lentille atmosphérique.

Donnée :
La Corse se trouve à 225 km de Nice et son plus haut sommet culmine à 2710 m d'altitude (Monte Cinto).

1. En supposant que les rayons de lumière se propagent en ligne droite, montrez que la Corse n'est pas visible depuis Nice.

2. Qu'en est-t-il lorsqu'on tient compte de la variation de l'indice de réfraction de l'air avec l'altitude ? En première approximation, l'indice de réfraction de l'air η varie linéairement avec la pression. On a : $\eta = \eta_0 + (\eta_0 - 1) * Exp(-z/a)$ où z est l'altitude en km et $a = 8.6\ km$. Lorsque l'air ne contient pas d'humidité, $\eta_0 = 1.00029$. Trouvez la fonction qui donne la trajectoire du faisceau de lumière qui relie le sommet de la Corse à Nice.

Indications : Utilisez la lois de Descarte localement en posant que $\eta(t) * sin[i(t)] = constante = K$ où t est le paramètre permettant de parcourir le faisceau et K est une constante qui détermine un des faisceaux parmi tous ceux qui quittent le sommet de la Corse. Pour trouver le bon faisceau, essayez successivement des valeurs différentes de K.

Instructions Mathematica : Table, Flatten, Plot, ParametricPlot, NDSolve...

5 Couche d'ozone.

Domaine : Couche d'ozone, équation barométrique, loi de Beer, absorption...
Difficulté : conceptuelle ●●●○○ calculatoire ●●○○○ numérique ●●○○○

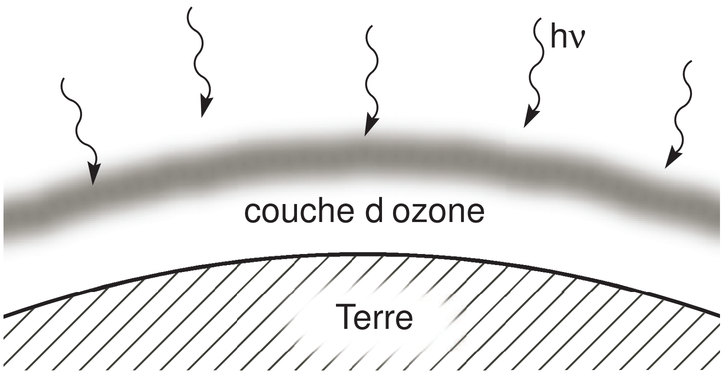

Fig. 5 – Couche d'Ozone.

Donnée :
A l'aide d'un modèle simple, on se propose d'estimer l'altitude à laquelle se développe la couche d'ozone dans l'atmosphère. En gros, la molécule d'ozone O_3 se forme en deux temps par les réactions suivantes : Suite à l'absorption de photons de longueur d'onde proche de 240 nm, la molécule d'oxygène O_2 se dissocie. Puis un certain nombre des atomes d'oxygène se recombinent avec une autre molécule d'oxygène. Connaissant la concentration de l'oxygène en fonction de l'altitude et la section efficace d'absorption des photons, on peut, sous certaines hypothèses, estimer l'altitude à laquelle se trouve la plus forte concentration d'ozone.

1. Déterminez la concentration d'oxygène en fonction de l'altitude en supposant que l'air est un gaz parfait et que sa température est la même partout, égale à 20 $^\circ C$. L'air est composé d'environ 21 % d'oxygène et de 79 % d'azote.

2. En utilisant la loi de Beer, trouvez l'intensité du flux de photons (dans la bande de longueurs d'onde centrée à 240 nm) en fonction de l'altitude, sachant que le flux de photons à l'entrée de l'atmosphère est de $7.61 \cdot 10^{17}$ m^{-2} s^{-1} et que la section efficace d'absorption (dans la même bande de longueurs d'onde) vaut $1 \cdot 10^{-28}$ m^2.
3. A quelle altitude la concentration d'ozone est-elle la plus forte (ce qui défini l'altitude de la couche) ?

Indications : La loi de Beer stipule que le nombre de photons absorbés par les molécules contenues dans une couche fine est proportionnel au nombre de ces molécules et à la section efficace d'absorption.

Instructions Mathematica : DSolve, Flatten, Evaluate, Plot...

6 Trajectoire de la Terre.

Domaine : Mécanique, système solaire, force gravifique, stabilité...
Difficulté : conceptuelle ● ● ○ ○ ○ calculatoire ● ○ ○ ○ ○ numérique ● ● ○ ○ ○

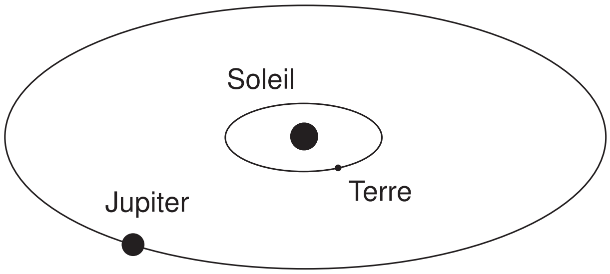

Fig. 6 – Système Terre - Soleil - Jupiter.

Donnée :
On se propose d'étudier la trajectoire de la Terre autour du Soleil en tenant compte de la force exercée par Jupiter. On suppose que la trajectoire de la Terre (sans l'interaction de Jupiter) est un cercle centré sur le Soleil, et de même pour Jupiter (sans la Terre), pour fixer les conditions initiales.

1. Etudiez dans quelle proportion la présence de Jupiter fait varier la distance Terre-Soleil.

2. Qu'en est-t-il si la masse de Jupiter est décuplée ?

Indications : Choisissez des unités judicieuses pour la distance, la masse et le temps. Attention à l'influence des erreurs numériques pour des temps longs.

Instructions Mathematica : NDSolve, Flatten, Plot, ParametricPlot...

7 Marche aléatoire.

Domaine : Mouvement brownien, diffusion, modèle d'Einstein...
Difficulté : conceptuelle ● ○ ○ ○ ○   calculatoire ● ○ ○ ○ ○   numérique ● ● ● ○ ○

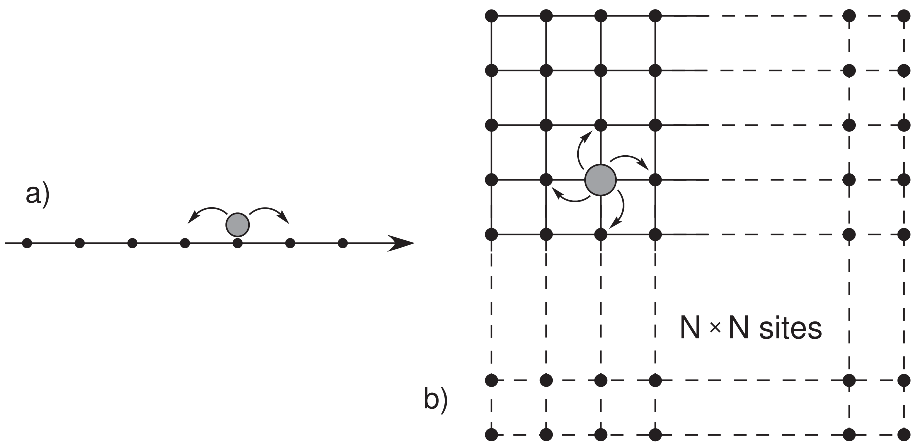

FIG. 7 – Marche aléatoire : a) à une dimension, b) à deux dimensions.

Donnée :
a) Une particule se déplace par sauts de façon aléatoire sur des sîtes alignés sur une droite infinie. Les deux directions sont équiprobables.

1. Connaissant la position initiale de la particule, estimez la distribution de probabilité de trouver la particule sur les sites après 10, 100 et 1000 sauts en opérant une moyenne sur un grand nombre de trajectoires.

2. Que pensez-vous de la forme de cette distribution et comment varie sa largeur à mi-hauteur avec le nombre de sauts ?

b) On considère un réseau carré formé de N*N sites et une particule qui se déplace par sauts d'un site à l'autre, aléatoirement, les différentes directions étant équiprobables.

1. On définit le nombre de sauts de retour n_r par le nombre moyen de sauts que nécessite la particule pour revenir à sa position initiale pour la première fois. Estimez ce nombre pour N=4 à 20 en moyennant aussi sur les positions initiales. Donner une lois approximative pour n_r fonction de N.

2. On définit le nombre de saut de recouvrement n_c, le nombre moyen de sauts minimum nécessaire à la particule pour visiter au moins une fois tous les sites. Estimez ce nombre pour $N = 4$ à 20. Donnez une lois approximative pour n_c fonction de N.

Instructions Mathematica : Table, ListPlot, Do, NDSolve, Show, Fit...

8 Collision entre deux particules.

Domaine : Mécanique, collision élastique, diffusion, mouvement central...

Difficulté : conceptuelle ●●●○○ calculatoire ●●●○○ numérique ●●●○○

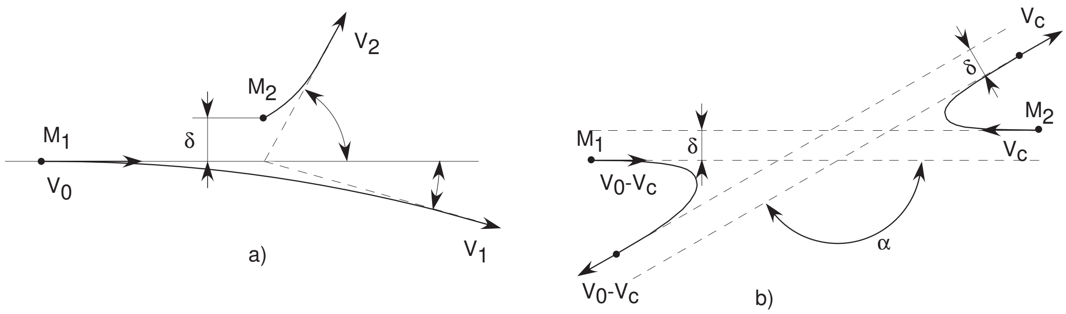

FIG. 8 – Collision élastique. a) dans le laboratoire ; b) dans le centre de masse.

Donnée :
On se propose d'étudier la collision entre deux particules interagissant par un potentiel central conservatif. La particule (1) incidente vient de l'infini avec une vitesse v_0 pour interagir avec la particule (2) initialement immobile. Le paramètre d'impact δ est la distance la plus faible séparant les deux particules si l'interaction était nulle. Pour un potentiel donné, on s'intéresse au trajectoires des deux particules, fonction de δ et de v_0.

1. Décrivez le système par les équations du mouvement dans le référentiel du laboratoire, puis dans le référentiel du centre de masse.

2. Exprimez l'équation dans le centre de masse en coordonnées polaires (r, θ en lieu et place du vecteur reliant les deux particules) et obtenez deux équations à variables séparées. Puis formulez une équation permettant d'obtenir θ en fonction de r.

3. Dans le centre de masse, les particules ont des trajectoires initialement rectilignes et parallèles, séparées par la distance δ. Suffisamment longtemps après l'interaction, leurs trajectoires sont à nouveau rectilignes et parallèles et font un angle α avec les trajectoires initiales.

   Déterminez cet angle en intégrant la dernière relation le long de la trajectoire si les particules sont des protons, si l'énergie cinétique du proton incident est de 1 eV (dans le laboratoire) et si $\delta = 0.1\ mm$.

4. Quelle est la valeur d'α si les protons sont remplacés par des électrons ?

Indications : pour déterminer la valeur d'α, intégrez $\theta(r)$ en deux fois, de l'infini à r_{min}, et de r_{min} à l'infini.

Instructions Mathematica : NDSolve, Flatten, Plot, ParametricPlot...

9 Sphère flottante.

Domaine : Mécanique, mécanique des fluides, Archimède...
Difficulté : conceptuelle ●○○○○ calculatoire ●○○○○ numérique ●●○○○

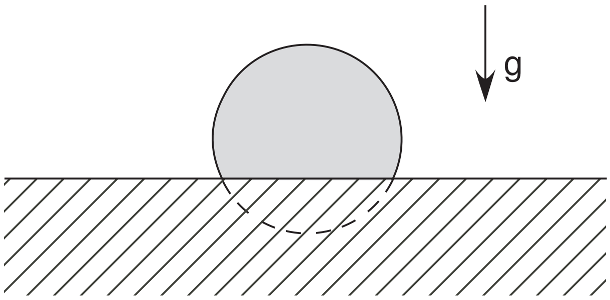

FIG. 9 – Sphère flottant sur un liquide.

Donnée :
Une sphère de rayon R et de masse volumique $\rho < \rho_{eau}$, soumise à la force gravifique, flotte sur l'eau. On étudie les mouvements verticaux de cette sphère autour du point d'équilibre, en supposant qu'il n'y a pas de friction.

1. Trouvez la position d'équilibre de la sphère.

2. Écrivez l'équation du mouvement de la sphère selon la verticale (axe z), puis étudiez cette équation pour des oscillations de faibles amplitudes. Trouvez l'expression littérale de la pulsation de l'oscillation dans cette limite.

3. Résolvez numériquement les équations exactes avec $R = 0.1\ m$, $z'[0] = 0.1\ m/s$ et $z[0] = 0$, pour les deux masses volumiques a) $\rho = 0.7\ kg/l$ et b) $\rho = 0.85\ kg/l$. Visualisez les solutions et comparez les périodes obtenues par le calcul numérique avec leurs valeurs approchées par l'expression obtenue sous 2).

Indications :

Instructions Mathematica : Solve, NDSolve, Flatten, Plot...

10 Pointe chaude.

Domaine : Thermodynamique, Fourier, Stefan-Boltzmann, conduction thermique...
Difficulté : conceptuelle ● ● ○ ○ ○ calculatoire ● ● ○ ○ ○ numérique ● ● ● ○ ○

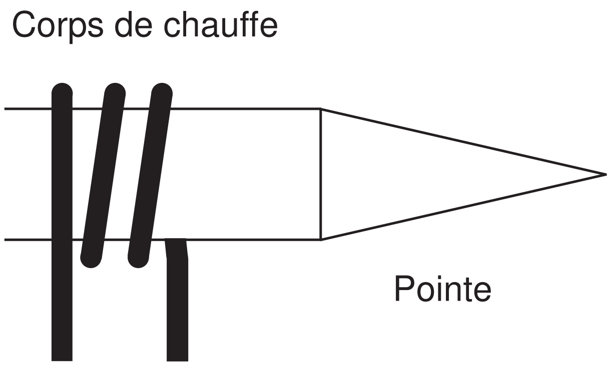

Fig. 10 – Pointe chaude.

Donnée :
Dans une expérience de physique, une pointe de tungstène à l'intérieur d'une chambre à vide est chauffée par un corps de chauffe. On cherche à évaluer la température à l'extrémité de la pointe en régime stationnaire, connaissant la température à l'endroit où le diamètre commence à décroître.

La source de chaleur se trouve le long de la tige où le diamètre est constant. La pointe prend naissance en dehors de la source. On modélise la pointe par un cône régulier (la génératrice est une droite). Les parois de la chambre à vide sont supposées rester à la température ambiante de 300 K et on considère la pointe comme un corps noir. Finalement, on suppose que tous les points à l'intérieur d'une tranche fine coupée perpendiculairement à la tige sont à la même température.

1. Estimez la température au sommet de la pointe si la température mesurée au début de la pointe vaut 3500 K. Le diamètre de la tige est 2 mm et l'angle de la pointe est 40°.

2. Que devient la température à l'extrémité de la pointe si l'angle se réduit à 20° ? Dans ce cas, quelle est la puissance totale rayonnée par la pointe ?

Indications : l'équation différentielle concernant la température se résout en donnant la température au début de la pointe comme première condition au bord, et en se donnant un flux de chaleur au même point comme seconde condition au bord. On résout l'équation numériquement et on calcule le flux de chaleur pour un point proche du point extrême de la pointe (qui lui est pathologique pour la solution numérique). On fait plusieurs fois ce calcul jusqu'à obtenir un flux à la pointe proche à zéro.

Instructions Mathematica : Solve, NDSolve, Flatten, Plot, Evaluate, Table...

11 Epidémie de grippe.

Domaine : Modèle biologique, équation différentielles...
Difficulté : conceptuelle ●●○○○ calculatoire ●●○○○ numérique ●●○○○

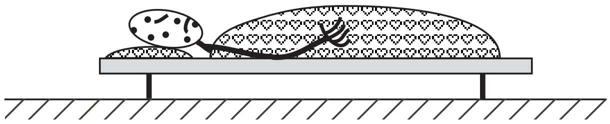

FIG. 11 – Épidémie de grippe.

Donnée :
On se propose d'étudier l'évolution du nombre de cas de grippe parmi une population à l'aide d'un modèle simple. On divise un groupe isolé de P personnes en trois catégories. Les personnes non infectées et susceptibles de l'être, groupe X formé de x(t) personnes ; le groupe Y comprenant y(t) personnes infectées ; et z(t) individus du groupe Z qui sont guéris et qui sont immunisés. On suppose en premier lieu qu'il n'y a pas de décès.

Les deux facteurs qui caractérisent le modèle sont : La probabilité b qu'une personne de X en contact pendant un jour avec que des individus infectés, soit ensuite infectée. La constante de temps de guérison h (d'unité 1/temps), qui exprime le taux du nombre de personnes qui guérissent pendant un jour. 1/h est aussi proportionnel au temps moyen q'un individu reste contagieux.

1. Écrivez les équations différentielles qui décrivent le modèle. Résolvez les pour la situation suivante : Ville de Mexico de 20 millions d'habitants, $b = 1/2$, $h = 1/3\ jours^{-1}$. On suppose qu'initialement seulement 20 personnes sont infectées et toutes les autres ne sont pas immunisées.

2. Supposons que 5 % des personnes infectées décédent après 1/h jours en moyenne. Estimez le nombre de personnes décédées après 200 jours. Diminuez le paramètre b et appréciez son impact sur le nombre de décès.

3. Même question si avant l'arrivée de la maladie toute la population est vaccinée à l'aide d'un vaccin connu pour avoir une efficacité de 80 %.

Indications :

Instructions Mathematica : FindRoot, DSolve, NDSolve, Maximize, Flatten, ParametricPlot, Evaluate...

12 Haut-parleur.

Domaine : Ondes, principe de Huygens, diffraction, acoustique...
Difficulté : conceptuelle ● ● ○ ○ ○ calculatoire ● ● ○ ○ ○ numérique ● ● ○ ○ ○

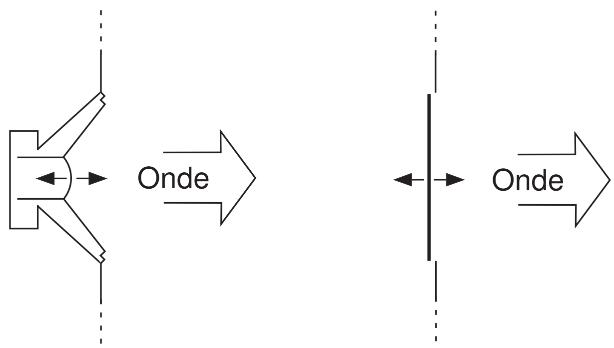

FIG. 12 – Haut-parleur et son modèle.

Donnée :
Pour simuler le fonctionnement d'un haut-parleur, on étudie les ondes acoustiques générées par une membrane vibrante, circulaire et plane. On suppose que cette membrane est placée au centre d'un plan rigide infini. Si z est l'axe perpendiculaire à la membrane passant par son centre (qui fixe l'origine O) on cherche à calculer l'intensité de l'onde en fonction de r, la distance à l'origine, et θ, l'angle avec l'axe z.

1. **Haut-parleur basse** : Le diamètre du haut-parleur est 0.3 m et le déplacement de la membrane est sinusoïdal, d'amplitude 3 mm et de fréquence 100 Hz. Calculez la puissance sonore délivrée par le haut-parleur. Comparez les intensités de l'onde pour $r = 4\ m$ et θ variant de 0 à $\pi/2$.

2. **Haut-parleur aiguë** : mêmes questions, pour un diamètre de 4 cm, une amplitude de 0.2 mm et une fréquence de 5000 Hz.

3. Supposons qu'un seul haut-parleur de 10 cm de diamètre soit utilisé pour produire toutes les fréquences (audibles). Discutez la différence de directivité de l'onde émise lorsque la fréquence passe de 100 Hz et à 5000 Hz.

Indications : Appliquez le principe de Huygens. Chaque élément de surface du disque émet une onde sphérique dans le demi-espace et on somme sur toutes ces ondes.

Instructions Mathematica : FindRoot, DSolve, NDSolve, Maximize, Flatten, ParametricPlot, Evaluate, Table ...

13 Champ électrique dans un condensateur.

Domaine : Equations différentielles, électrostatique, équation de Laplace, méthodes numériques...
Difficulté : conceptuelle ●●○○○ calculatoire ●○○○○ numérique ●●●○○

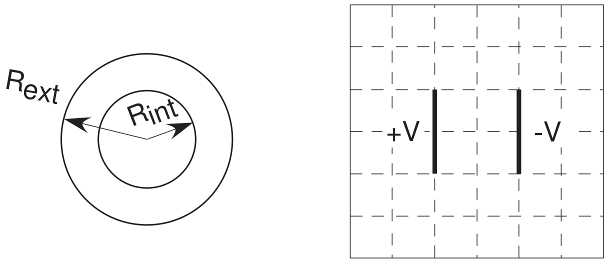

FIG. 13 – Champ électrique dans un câble coaxial et dans un condensateur plan.

Donnée :
Le but de cet exercice est de donner un exemple de technique numérique pour résoudre une équation différentielle. On étudie le cas de l'équation de Laplace appliquée à des problèmes d'électrostatique en une et deux dimensions.

1. Trouvez l'expression exacte du champ électrique dans l'isolant d'un câble coaxial, c'est-à-dire entre les deux cylindres concentriques conducteurs de rayons r_{int} et r_{ext} et de potentiels respectifs 0 et V.

2. Discrétisez l'intervalle $[r_{int}, r_{ext}]$ en N points séparés par dr et trouvez un système de N équations linéaires à N inconnues (les valeurs de U en ces points U(i)) permettant d'approximer l'équation de Laplace. L'approximation consiste à poser $U'(r_i) \cong [U(i+1) - U(i-1)]/(2dr)$. Résolvez ce système dans le cas où $r_{int} = 1$, $r_{ext} = 10$, $U(r_{int}) = 0$ et $U(r_{ext}) = 1$.

3. Appliquez la même technique pour résoudre le problème du condensateur en deux dimensions. Les plaques sont larges de 2b selon y et sont infinies selon z. Elles sont séparées selon x par la distance 2b. On "place" le condensateur dans un carré (dans le plan xy) assez grand. Les bords du carré sont au potentiel 0, alors que les plaques du condensateur sont au potentiel +V et -V.
Étudiez l'influence de la finesse du maillage et celle de la grandeur du carré par rapport aux dimensions du condensateur sur la précision du calcul. Le champ électrique au centre du condensateur est-il très différent de celui calculé par l'approximation des charges réparties uniformément sur les plaques ?

Indications : Travaillez en coordonnées cylindriques pour les points 1 et 2. Pour le condensateur, ne dépassez pas un maillage de 100×100. Dans ce cas le calcul prend environ 2 *mn* !

Instructions Mathematica : DSolve, Do, Solve, NDSolve, Maximize, Flatten, Plot, ListPlot, Table, Partition ...

14 Trajectoire d'une balle de golf.

Domaine : Mécanique, effet Magnus, mécanique des fluides, friction...
Difficulté : conceptuelle ● ● ○ ○ ○ calculatoire ● ○ ○ ○ ○ numérique ● ● ● ○ ○

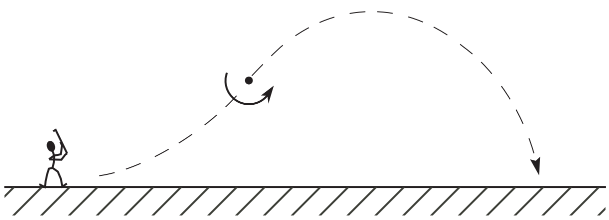

Fig. 14 – Trajectoire d'une balle de golf.

Donnée :
On se propose d'étudier la trajectoire d'une balle de golf en considérant les différents effets de l'air. Lors d'un swing (première frappe de la balle pour qu'elle atteigne la surface de gazon), la balle part à une vitesse d'environ 70 m/s. Lors de l'impact, la tête du club donne généralement aussi une rotation à la balle, le spin, de vecteur ω parallèle à la surface du sol et perpendiculaire à la vitesse de la balle. Le sens de rotation est tel que la vitesse des points inférieurs de la balle par rapport à l'air est supérieur en module à celle du centre de gravité. Dans le cas du tennis, on parle d'une balle coupée (liftée si la rotation est dans le sens opposé).

1. Écrivez les équations du mouvement en négligeant d'abord les effets de l'air, et déterminez la distance maximale que la balle peut atteindre.

2. **Avec friction, sans rotation :** La force de frottement de l'air sur la balle pour une balle cannelée est à peu près proportionnelle à la vitesse. On a $F_{frot} \cong -c\rho A v^2$, où ρ est la masse volumique de l'air, A est la section de la balle perpendiculaire à la vitesse et c vaut environ $7/v$ dans le système d'unité MKSA. Dans ces conditions, trouvez la distance maximale que la balle peut atteindre pour un angle initial de 45°. Tracez les trajectoires et trouvez approximativement pour quelle valeur de l'angle initial la distance est maximale.

3. **Avec friction, avec rotation :** La rotation de la balle engendre une force sur elle, la force de Magnus, qui dans notre cas, fait remonter la balle. Dans la situation qui nous concerne cette force est bien modélisée par $F_{Mag} = S_0\ \omega \wedge v$, avec $S_0 \cong 10^{-3}kg$ pour une balle standard. Etudiez les trajectoires pour $\omega = 10\ s^{-1}$ et cherchez la distance maximale que la balle peut atteindre. On suppose qu' ω reste constant durant la trajectoire. Pour une balle lisse, c s'approxime par une constante égale à 0.5. Sans modifier la force de Magnus, cherchez la distance maximale que peut atteindre la balle lisse.

Indications :

Instructions Mathematica : DSolve, Do, Solve, NDSolve, Maximize, Flatten, Plot, ListPlot, Table, Partition...

15 Coefficients de viriel.

Domaine : Thermodynamique, gaz, équation d'état...
Difficulté : conceptuelle ●●●○○ calculatoire ●●●○○ numérique ●●●○○

Donnée :
En 1949, M. Michels et ses collègues ont mesuré la pression à équilibre d'une cellule d'argon fixée à différentes densités et températures (Physica 15, p. 627, 1949). La température varie entre 0˚C et 150˚C et la pression entre 1 et 100 Atm. Ces mesures permettent donc d'obtenir la fonction d'état $f(P, V, T) = 0$. A cette époque, la lois des gaz parfaits était connue. Ainsi, ces mesures permettent de vérifier cette loi et de quantifier son exactitude. C'est pourquoi on écrit plutôt l'équation d'état sous la forme $PV = A(T)+B(T)\rho+C(T)\rho^2+...$ où ρ est la densité du gaz. Cette façon d'écrire l'équation d'état se base sur le fait que la loi des gaz parfaits devient exacte lorsque la densité du gaz tend vers zéro. A basses densités, on devrait retrouver $PV = A(T) = \alpha T$.

Table $PV = f(\rho, T)$:

density	0˚C	25˚C	50˚C	75˚C	100˚C	125˚C	150˚C
19.0031	0.98362	1.07887	1.17391	1.26895	1.36386	1.45871	1.55357
23.7525	0.97963	1.0758	1.17159	1.26752	1.36316	1.45883	1.55452
28.5150	0.97568	1.0727	1.16942	1.26617	1.36269	1.4591	1.55557
33.0974	0.97203	1.06992	1.16744	1.26503	1.36232	1.45952	1.55677
35.4444	0.97018	1.06862	1.16656	1.26457	1.36219	1.45981	1.55742
37.9121	0.96831	1.06705	1.16548	1.26393	1.36205	1.46012	1.55817
42.6572	0.96468	1.06435	1.16348	1.26297	1.36192	1.46082	1.55962
42.8210	0.96455	1.06439	1.16368	1.26304	1.36189	1.46085	1.55975
47.2275	0.96134	1.06192	1.16207	1.26222	1.36201	1.46169	1.56125
51.9511	0.95799	1.05947	1.16056	1.26152	1.36218	1.4627	1.5631
52.1534	0.95776	1.05937	1.16047	1.26137	1.36208	1.46259	1.56316
63.7689	0.94982	1.05369	1.15696	1.26008	1.36279	1.46534	1.56797
77.5503	0.94134	1.0479	1.1538	1.25949	1.3648	1.46978	1.57491

1. La table ci-dessus donne les valeurs des densités en unité de densité standard, et les produits PV correspondant à ces densités (en $atm \cdot m^3$), mesurés pour les températures 0˚C, 25, 50,...150˚C. L'unité standard de densité est telle que la densité du gaz au conditions standards (0˚C et 1 atm) vaut 1. On demande de trouver les valeurs de A, B et C qui ajustent le mieux les mesures pour chaque température. Vérifiez que $A(T) = \alpha T$ et trouver α. Sa valeur est-t-elle correcte ? La valeur de α change-t-elle beaucoup si on ajuste une droite $A(T) = \beta + \alpha T$ ne passant pas forcément par l'origine (à $T = 0$ K) ?

2. Le second intérêt dans la forme ci-dessus de l'équation d'état est que si, en toute généralité, on exprime l'interaction entre les atomes du gaz par une somme de potentiels à 2, 3 etc. corps, B(T) est le reflet du potentiel à deux corps et peut être calculé si l'on connaît la fonction $U(|r_2 - r_1|)$ exprimant ce potentiel. On a, lorsque ρ est exprimé en unités MKSA,

que $Q = -2\pi\rho \int f(r) r^2 dr$ doit se rapprocher de B(T)/A(T) si le potentiel décrit bien l'interaction à deux corps, avec $f(r) = exp[-U(|r_2 - r_1|)] - 1$ et $r = |r_2 - r_1|$. On demande de trouver les valeurs des paramètres du potentiel Lenhard-Jones, ε et σ, tel que Q se rapproche le mieux possible de B(T)/A(T) obtenu par les fits du point a). Le potentiel L-J a la forme $U(r) = 4\varepsilon[(\sigma/r)^{12} - (\sigma/r)^6]$.

Indications : On partira de l'idée que U est toujours suffisamment petit par rapport à kT pour pouvoir user de l'approximation $exp(x) = 1 + x + ...$

Instructions Mathematica : DSolve, Do, Solve, NDSolve, Maximize, Flatten, Plot, ListPlot, Table, Partition...