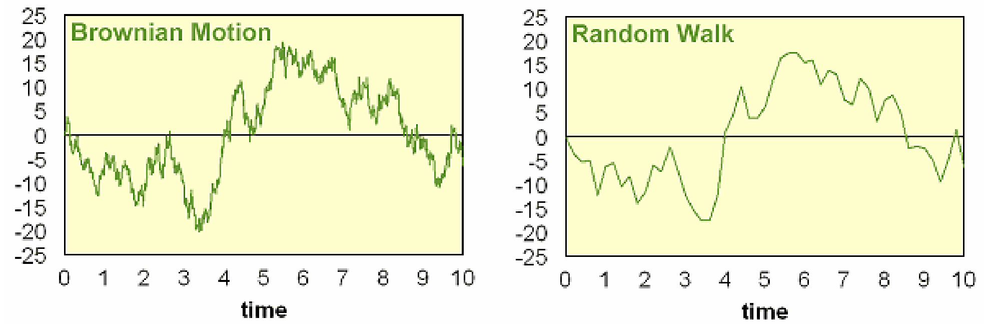
Etude du calcul stochastique : martingales, mouvement brownien et intégration d'Itô



Mathématiques - Projet de semestre (automne 2007)

Professeur : Robert Dalang
Assistante : Violetta Bernyk

Abdelaziz Belqadhi

14 janvier 2008

Table des matières

Introduction

Le calcul stochastique est une branche à la croisée des probabilités et de l'analyse qui s'occupe des phénomènes aléatoires dépendant du temps. Les processus stochastiques X_t sont les outils de base, ce sont des variables aléatoires indexées par des sous ensembles entiers ou réels. On peut donc les voir comme des fonctions de deux variables, et on écrit :

$$X_t = f(t, \omega).$$

où t représente le temps et ω un état (ou événement). L'ensemble des états est l'espace de probabilité Ω. Le but de ce projet est d'étudier les interactions entre les deux branches. De par l'ancienneté de l'Analyse relativement aux Probabilités (sous leur forme mathématisée, par Kolmogorov), de nouveaux apports seront amenés à cette dernière branche par la théorie des équations différentielles et aux dérivées partielles, la théorie de la mesure et l'intégration. De meme, la représentation probabiliste a pu établir des résultats purement analytiques, et celle-ci nous donne une nouvelle facon de comprendre certains aspects de l'Analyse. Un exemple nous suivra tout au long de ce projet, le problème de ruine, qui est un modèle décrivant la richesse d'une personne passant sa vie à jouer en participant à des paris équilibrés. Nous mettrons en relation ce problème avec les théories que nous développerons au fur et à mesure. Les preuves ne seront pas données mais je les ai toutes étudiées, je réfère donc au livre de Michael Steele pour ceux que ca intéresse. J'essaierai d'expliquer le plus possible les théorèmes importants qui interviennent.
Dans un premier temps, nous allons nous intéresser aux marches aléatoire simples (biaisées et non-biaisées) dans $\mathbb{R}^2$, dont l'intuition peut facilement etre fournie par les jeux de paris. Essentiellement pratique et basé sur les probabilités de ruine, ce chapitre permettra de mieux comprendre ce qui se passe pour des phénomènes plus complexes. Une technique sera constamment utilisée, la "First Step Analysis", qui décrit ce qui se passe après une étape (lancer de dé, pari..) en fonction de l'état précédent, tenant compte du changement après une étape du jeu (par exemple après une mise d'un franc,

je perd un franc ou j'en gagne un) : on l'utilisera pour calculer des probabilités et des espérances. Ensuite, la théorie des martingales à temps discret, englobant la marche aléatoire non biaisée, va donner un cadre mathématique rigoureux et renforcer nos intuitions sur l'impossibilité de devenir riche en pariant dans des jeux équilibrés. Une martingale nous dit que l'espérance de la fortune à une date donnée est simplement la valeur de la fortune à cette date. Les calculs pour les probabilités de ruine seront beaucoup plus simples avec l'utilisation des martingales.
Dans un second temps, nous abordons le processus stochastique le plus important, qui est le mouvement brownien, fascinante construction mathématique, qui entretient des relations privilégiées avec la nature et les modèles financiers. Sa construction et ses principales propriétés seront données, et la nature martingale du mouvement brownien sera dérivée. Les martingales à temps continu amèneront de précieuses informations sur certaines fonctions du mouvement brownien, qui bénéficieront de cette puissante théorie. Les aspérités du mouvement brownien seront traitées, à savoir la continuité de Hölder pour $0 \leq \alpha < \frac{1}{2}$ et la différentiabilité nulle part pour tout ω dans un ensemble de mesure non nulle. On fera le lien entre le mouvement brownien et les marches aléatoires, et énoncerons un principe d'invariance entre un brownien et une interpolation linéaire d'une marche aléatoire. On pourra conséquemment plonger n'importe quelle marche aléatoire dans un mouvement brownien.
Dans une dernière partie, nous développerons les outils de l'intégration stochastique, où le but est de construire l'intégrale d'un processus aléatoire sur un courbe non différentiable, en l'ocurrence sur des trajectoires browniennes, ceci généralise donc l'intégrale curviligne. Cette construction permet également de créer systématiquement des martingales, et l'objectif est de fournir une définition acceptable de l'intégrale d'Itô :

$$I(f)(\omega) = \int_0^T f(\omega, t) dB_t.$$

qui ne peut etre interprétée comme une intégrale Riemanienne car les chemins browniens ont des variations non bornées. On va donc définir cette intégrale pour une classe de fonctions relativement faciles à traiter, puis on fera une extension. En fait, on fera une deuxième extension car on se rendra compte que pour certaines fonctions continues de browniens, l'espace fonctionnel sur lequel on a construit notre intégrale d'Itô ne les contient pas. La localisation résoudra ce problème. Nous obtiendrons meme une élégante représentation Riemanienne de l'intégrale d'Itô d'une fonction continue d'un processus brownien. Toutes les intégrales d'Itô dans notre nouvel espace seront des martingales locales, et celles-ci se comporteront presque aussi bien

que des martingales.
Enfin, un long chapitre sera dévoué à la formule d'Itô. Celle-ci représente un analogue au théorème fondamental de l'Analyse, et permet de lier une équation aux dérivées partielles et les fonctions harmoniques aux martingales. Nous verrons plusieurs versions de cette formule, le cas réel, temps-espace, vectoriel et enfin celui des processus standards. Nous finirons par un bref apercu des équations différentielles stochastiques, où nous utiliserons quelques techniques de résolution avec la formule d'Itô, et donnerons des conditions suffisantes pour l'existence et l'unicité d'une solution d'une équation différentielle stochastique.

Chapitre 1

Marches aléatoires et martingales à temps discret

1.1 Marches aléatoires simples

1.1.1 Marche aléatoire simple non biaisée

Notations

Soit $\{X_i : 1 \leq i < \infty\}$ une suite de variables aléatoires indépendante avec la répartition de probabilité :

$$\mathbb{P}(X_i = 1) = \mathbb{P}(X_i = -1) = \frac{1}{2}.$$

S_0 est un entier arbitraire qui est la fortune initiale du parieur, et on dénote par S_n la fortune du parieur au n^e pari :

$$S_n = S_0 + X_1 + X_2 + ... + X_n.$$

On s'intéresse à la probabilité de gagner A francs avant de perdre B francs. Pour cela, on va considérer la première fois que S_n atteint le niveau A ou $-B$:

$$\tau = \min\{n \geq 0 : S_n = A \text{ ou } S_n = -B\}.$$

Au temps τ, $S_\tau = A$ ou $S_\tau = -B$. Avec ces notations, nous voulons déterminer : $\mathbb{P}(S_\tau = A \mid S_0 = 0)$.

Calcul de la probabilité et de l'espérance de ruine

Nous allons utiliser la "First step analysis" pour calculer la probabilité d'atteindre le niveau A avant $-B$, puis utiliser la meme méthode pour calculer l'espérance du temps pour atteindre un de ces 2 niveaux. Cette méthode suggère de considérer la situation du parieur après une partie : sa fortune a soit augmenté d'un franc, soit diminué d'un franc, et ceci avec probabilité $\frac{1}{2}$ pour chaque. On est donc en face d'un nouveau problème similaire, excepté que la fortune initiale a changé. On formalise ce changement avec une relation récursive pour la fonction :

$$\begin{aligned} f(k) &= \mathbb{P}(S_\tau = A \mid S_0 = k) \\ &= \frac{1}{2}\mathbb{P}(S_\tau = A \mid S_0 = k-1) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(S_\tau = A \mid S_0 = k+1) \\ &= \frac{1}{2}f(k-1) + \frac{1}{2}f(k+1), \text{ où } -B \leq k \leq A. \end{aligned}$$

Si la fortune initiale vaut A ou $-B$, nous obtenons respectivement des probabilités de 1 et 0, ce qui nous donne les conditions aux bords suivantes pour notre fonction : $f(A) = 1$ et $f(-B) = 0$. L'idée est d'utiliser ces conditions aux bords en les injectant dans l'expression récursive. Soit $f(-B+1) = \alpha$, on trouve : $f(-B+2) = 2\alpha$, et par itération : $f(-B+k) = k\alpha \ \forall\ 0 \leq k \leq A+B$. On utilise maintenant la condition en A avec $k = A+B$, ce qui nous donne la valeur de l'inconnue α : $\alpha = \frac{1}{A+B}$. Puisqu'on cherche $f(0)$, on a :

$$\begin{aligned} f(0) &= f(-B+B) \\ &= B\alpha \\ &= \frac{B}{A+B}. \end{aligned}$$

Finalement : $\mathbb{P}(S_n \text{ atteigne } A \text{ avant } -B \mid S_0 = k) = \frac{B}{A+B}$.

On peut montrer que l'espérance de τ est finie, mais nous le supposerons ici et continuons notre lancée avec la "First step analysis" pour calculer cette espérance. Après un pari, deux choses se passent : la fortune du parieur a changé, et une unité de temps s'est écoulé, on a alors :

$$\begin{aligned} g(k) &= \mathbb{E}(\tau \mid S_0 = k) \\ &= \frac{1}{2}\mathbb{E}(\tau \mid S_0 = k-1) + \frac{1}{2}\mathbb{E}(\tau \mid S_0 = k+1) + 1 \\ &= \frac{1}{2}g(k-1) + \frac{1}{2}g(k+1) + 1, \text{ où } -B < k < A. \end{aligned}$$

On ne peut pas procéder exactement comme on l'a fait pour la probabilité de ruine, mais en introdusant l'opérateur de différence :

$$\Delta g(k-1) = g(k) - g(k-1),$$

on calcule $\Delta^2 g(k-1)$, et en faisant l'analogie entre la dérivée seconde et Δ^2, les conditions aux bords nous donnent $g(k) = -(k-A)(k+B)$. D'où :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\tau \mid S_0 = 0) &= g(0) \\ &= -(0-A)(0+B) \\ &= AB.\end{aligned}$$

1.1.2 Marche aléatoire simple biaisée

Si la marche aléatoire non biaisée accorde la meme probabilité au gain et à la perte, de facon à ce que le jeu soit équitable, la marche aléatoire non biaisée représente les jeux réels où la probabilité de perte est plus élevée que celle du gain. La différence réside donc dans l'attribution des probabilités :

$$\mathbb{P}(X_i = 1) = p \text{ et } \mathbb{P}(X_i = -1) = 1 - p = q \text{ avec } p \neq q.$$

Nous allons seulement écrire les fonctions $f(k)$ et $g(k)$, la résolution est plus compliquée, mais la philosophie est toujours la meme :

$$\begin{aligned}f(k) &= pf(k+1) + qf(k-1) \\ g(k) &= pg(k+1) + qg(k-1) + 1\end{aligned}$$

On trouve la probabilité de ruine et l'espérance :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S_n \text{ atteigne } A \text{ avant } -B \mid S_0 = k) &= \frac{(\frac{q}{p})^B - 1}{(\frac{q}{p})^{A+B} - 1} \\ \mathbb{E}(\tau \mid S_0 = 0) &= \frac{B}{q-p} - \frac{A+B}{q-p}\frac{(\frac{q}{p})^B - 1}{(\frac{q}{p})^{A+B} - 1}\end{aligned}$$

1.1.3 Comparaison des probabilités de ruine pour le cas biaisé et non biaisé

Quelques calculs

Nous allons effectuer quelques calculs sur la base des résultats qu'on a trouvé pour voir que les changements peuvent etre vraiment significatifs entre le cas biaisé et le cas non-biaisé.
Soit $A = 10$ et $B = 5$, la probabilité $\mathbb{P}$ qu'on gagne 10 francs avant d'en perdre 5 et l'espérance $\mathbb{E}$ du temps correspondante est, dans les cas suivants :
- Non-biaisé : $\mathbb{P} \approx 0,33$ et $\mathbb{E} \approx 50$.
- Avec biais ($p = 0.48$) : $\mathbb{P} \approx 0.21$ et $\mathbb{E} \approx 46$.

– Avec biais ($p = 0.46$) : $\mathbb{P} \approx 0.12$ et $\mathbb{E} \approx 40$.
– Avec biais ($p = 0.42$) : $\mathbb{P} \approx 0.03$ et $\mathbb{E} \approx 28$.
Le parieur peut se montrer moins gourmand et poser $A = 7$ et $B = 5$:
– Non-biaisé : $\mathbb{P} \approx 0,41$ et $\mathbb{E} \approx 35$.
– Avec biais ($p = 0.48$) : $\mathbb{P} \approx 0.3$ et $\mathbb{E} \approx 35$.
– Avec biais ($p = 0.46$) : $\mathbb{P} \approx 0.21$ et $\mathbb{E} \approx 31$.
– Avec biais ($p = 0.42$) : $\mathbb{P} \approx 0.08$ et $\mathbb{E} \approx 25$.

Interprétation

Meme si le biais introduit paraît très petit, l'effet sur les probabilités de ruine n'en est pas moins élevé. Dans le premier exemple (parieur gourmand), lorqu'on augmente le biais de 0.02, la probabilité de gagner 10 francs avec d'en perde 5 est presque divisée par deux. L'espérance du temps de jeu diminue à chaque fois qu'on augmente le biais, et il est clair que le jeu va plutot s'arreter lorsque le niveau négatif a été atteint en premier. Un parieur sceptique pourrait argumenter en disant que si on baisse notre attente du gain, alors l'effet du biais sera peu visible, mais le deuxième exemple montre bien que ce n'est pas le cas, et que c'est encore pire que ce que l'on pensait : la probabilité de remporter 7 francs avant d'en perdre 5 est égale à celle où on en gagne 10 avant d'en perdre 5, mais avec des biais différés. En fait, on constate qu'on peut juste décaler les colonnes du premier exemple pour obtenir approximativement celles de notre deuxième exemple, alors que l'on s'attendait à de bien meilleures performances en revoyant nos exigences à la baisse.

1.1.4 Problèmes

Problème 1 : Récurrence de la marche aléatoire simple

Soit S_n une marche aléatoire simple avec $S_0 = 0$, alors on a que la probabilité d'etre de retour à 0 au temps $2k$ est également la probabilité de gagner 1 niveau k fois parmi les $2k$, donc :

$$\mathbb{P}(S_{2k} = 0 \mid S_0 = 0) = \binom{2k}{k} 2^{-2k}.$$

Rappelons la formule de Stirling qui approxime les factorielles : $k! \sim \sqrt{2\pi k} k^k e^{-k}$. On va appliquer ce résultat à notre coefficient binomial :

$$\binom{2k}{k} = \frac{(2k)!}{k!k!} \sim \frac{\sqrt{4\pi k}(2k)^{2k} e^{-2k}}{2\pi k k^{2k} e^{-2k}} = (\pi k)^{\frac{-1}{2}} 2^{2k}$$

$\Rightarrow \mathbb{P}(S_{2k} = 0 \mid S_0 = 0) \sim (\pi k)^{\frac{-1}{2}}$

Soit maintenant N_n le nombre de visites de S_k à l'origine jusqu'au temps n. Montrons que son espérance est infinie lorsque n tend vers l'infini. On écrit :

$$\begin{aligned} N_n = \sum_{k=1}^{n} 1(S_k = 0) \Rightarrow \mathbb{E}[N_n] = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(S_k = 0) \\ \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[N_n] = \sum_{k=1}^{\infty} (\pi k)^{\frac{-1}{2}} = \infty. \end{aligned}$$

D'après le lemme de Borel-Cantelli :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(S_k = 0) = \infty \Rightarrow \mathbb{P}(\sum_{k=1}^{n} 1(S_k = 0) = \infty) = 1 \\ \Rightarrow \mathbb{P}(S_n = 0 \text{ pour une infinité de } n) = 1. \end{aligned}$$

C'est la propriété de récurrence : cette marche aléatoire retourne à l'origine une infinité de fois avec probabilité 1.
Soit τ_0 =min$\{n \geq 1 : S_n = 0\}$. On suppose admis le résultat suivant : si τ=min$\{n \geq 1 : S_n = 1\}$, alors $\mathbb{P}(\tau = 2k - 1 \mid S_0 = 0) = \frac{1}{2k-1}\binom{2k}{k}2^{-2k}$. Par la "First step analysis", on a que :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\tau_0 = 2k) &= \frac{1}{2}\mathbb{P}(S_{2k-1} = 1) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(S_{2k-1} = -1) \\ &= \frac{1}{2}\mathbb{P}(\tau = 2k - 1) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(\tau = 2k - 1) \text{ par symétrie} \\ &= \mathbb{P}(\tau = 2k - 1) = \frac{1}{2k - 1}\binom{2k}{k}2^{-2k}. \end{aligned}$$

1.2 Martingales à temps discret

1.2.1 Théorie des martingales

Définitions de base

Définition 1 (Martingale)**.** *Une suite de variables aléatoires* $\{M_n :\ 0 \leq n < \infty\}$ *est une martingale respective à la suite de variables aléatoires* $\{X_n :\ 0 \leq n < \infty\}$ *si* M_n *a les deux propriétés suivantes :*
– $\forall n \geq 1$ *il existe une fonction* $f_n : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ *telle que* $M_n = f_n(X_1, X_2 ..., X_n)$
– $\mathbb{E}[M_n \mid X_1, X_2 ..., X_{n-1}] = M_{n-1}, \forall n \geq 1.$

Intuitivement, M_n contient l'information des n variables aléatoires $\{X_i\}$, et son espérance sachant les $n-1$ premières nous donnera M_{n-1}, donc on n'arrive

à extraire aucune information sur la n^e, quelles que soient nos stratégies. Le parieur ne pourra donc pas espérer faire de l'argent, quoiqu'il fasse.
Le conditionnement sur $X_1,\ X_2...,\ X_n$ peut etre exprimé d'une facon plus commode : $\mathbb{E}[Z \mid \mathcal{F}_n]$ au lieu de $\mathbb{E}[Z \mid X_1,\ X_2...,\ X_n]$. On va également dire que M_n est une $\mathcal{F}_n$-martingale, que $Y \in \mathcal{F}_n$ si Y peut etre écrit $Y = f(X_1,\ X_2...,\ X_n)$, et si A est un événement, $A \in \mathcal{F}_n$ si l'indicatrice de A peut etre écrite comme fonction de $\{X_1,\ X_2...,\ X_n\}$.

Définition 2. *Une suite de variables aléatoires* $\{A_n :\ 0 \leq n < \infty\}$ *est* $\mathcal{F}_n$ *non-anticipative si* $A_n \in \mathcal{F}_{n-1}\ \forall\ 1 \leq n <\ \infty$.

Définition 3 (Transformation martingale)**.** *Le processus* $\{\widetilde{M_n} :\ 0 \leq n < \infty\}$ *défini par* $\widetilde{M}_0 = M_0$ *et :*

$$\widetilde{M_n} = M_0 + A_1(M_1 - M_0) + A_2(M_2 - M_1) + ...A_n(M_n - M_{n-1})\ \forall n \geq 1$$

est appelée la transformation martingale de M_n *par* A_n

Théorème 1. *Si* M_n *est une* $\mathcal{F}_n$*-martingale, et* $\{A_n : 0 \leq n <\ \infty\}$ *une séquence* $\mathcal{F}_n$ *non-anticipative de varibles aléatoires bornées, alors la transformation martingale* $\{\widetilde{M_n}\}$ *est une* $\mathcal{F}_n$*-martingale.*

Ceci nous permet donc de créer de nouvelles martingales à partir d'anciennes, si nous connaissons une séquence non-anticipatives.

Définition 4 (Temps d'arret)**.** *Une variable aléatoire* τ *à valeurs dans* $\{0,\ 1,\ 2...,\ \infty\}$ *est un temps d'arret pour* $\mathcal{F}_n$ *si :*

$$\{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n\ \forall\ 0 \leq n < \infty.$$

Un temps d'arret peut nous fournir une règle qu'on pourrait utiliser pour arreter de jouer à un jeu de paris. Si $\tau < \infty$ avec probabilité 1, alors le processus stoppé Y_τ se définit :

$$Y_\tau = \sum_{k=0}^{\infty} 1(\tau = k) Y_k.$$

Soit $n \wedge \tau = \min\{n,\ \tau\}$, $n \wedge \tau$ est un temps d'arret borné, donc $Y_{n\wedge\tau}$ est bien défini.

Théorème 2 (Temps d'arret)**.** *Si* $\{M_n\}$ *est une* $\mathcal{F}_n$*-martingale, alors le processus stoppé* $\{M_{n\wedge\tau}\}$ *est aussi une* $\mathcal{F}_n$*-martingale.*

Définition 5. *Si les variables aléatoires intégrables $M_n \in \mathcal{F}_n$ satisfont l'inégalité :*

$$M_{n-1} \leq \mathbb{E}[M_n \mid \mathcal{F}_{n-1}] \ \forall \ n \geq 1,$$

on dit que $\{M_n\}$ est une $\mathcal{F}_n$ sous-martingale.

Les sous-martingales sont pratiques car plusieurs opérations sur des sous-martingales nous amènenent à de nouvelles sous-martingales. Par exemple $\{|M_n|^p\}$ avec $p \geq 1$ est une sous-martingale si $\mathbb{E}[|M_n|^p] < \infty$. Avec cette définition, notre théorie des martingales subit une extension à une classe de processus beaucoup plus large, avec une meilleure flexibilité.

Rappels d'analyse fonctionnelle sur des espaces de probabilité

Nous arrivons à un stade où pour continuer à développer notre théorie des martingales, nous devons effectuer d'abord quelques rappels sur les espaces L^p, la norme engendrée, les principales inégalités que nous utiliserons. Les théorèmes de l'intégration (convergence dominée, convergence monotone et lemme de Fatou) serviront de socle à plusieurs de nos démonstrations.

Définition 6. *L'espace L^p est l'ensemble des X tels que $\mathbb{E}[|X|^p] < \infty$. C'est un espace vectoriel normé où pour $p \geq 1$ fini, la norme est donnée par :*

$$||X||_p = (\mathbb{E}[|X|^p])^{\frac{1}{p}},$$

et pour p infini,

$$||X||_\infty = inf\,\{t \,:\, P(|X| \leq t) = 1\}.$$

L'espace L^1 est l'ensemble des variables aléatoires à espérance finie, L^2 celui des variables aléatoires à variance finie, et L^∞ celui des variables aléatoires bornées sur un ensemble de probabilité 1. On a l'inclusion $L^\infty \subset L^2 \subset L^1$.

Théorème 3 (Cauchy-Schwarz, Jensen et Holder)**.** *L'inégalité de Cauchy-Schwarz dans notre espace fonctionnel s'énonce :*

$$\mathbb{E}[|XY|] \leq ||X||_2||Y||_2.$$

L'inégalité de Jensen, pour toute fonction convexe ϕ, s'écrit :

$$\phi(\mathbb{E}[|X|]) \leq \mathbb{E}[|\phi(X)|].$$

L'inégalité de Hölder s'écrit :

$$||XY||_1 \leq ||X||_p||Y||_q, \ avec \ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Inégalités de Doob et théorèmes de convergence

Dans la théorie des probabilités, comme en analyse d'ailleurs, on manie plus l'art des inégalités que celui des égalités, et obtenir un controle sur les probabilités est plus fréquent qu'un calcul explicite de probabilités. Nous allons développer les inégalités maximales, qui nous serviront dans le développement du calcul stochastique.

Définition 7. *Si $\{M_n : \ 0 \leq n < \infty\}$ est une suite de variables aléatoires, la suite définie par :*

$$M_n^* = \sup_{0 \leq m \leq n} M_m$$

est appelée suite maximale associée à M_n.

Théorème 4 (Inégalité maximale de Doob)**.** *Si M_n est une sous-martingale positive et $\lambda > 0$, alors :*

$$\lambda \mathbb{P}(M_n^* \geq \lambda) \leq \mathbb{E}[M_n \ 1(M_n^* \geq \lambda)] \leq \mathbb{E}[M_n]$$

Théorème 5 (Inégalité maximale de Doob dans L^p)**.** *Si M_n est une sous-martingale positive, alors :*

$$\forall p > 1, \, \forall n \geq 0, \, ||M_n^*||_p \leq \frac{p}{p-1} ||M_n||_p.$$

Les inégalités maximales servent à établir les résultats de convergence, où il est nécessaire d'avoir un controle sur M_n^*.

Théorème 6 (Théorème de convergence des martingales dans L^2)**.** *Si M_n est une martingale satisfaisant $\mathbb{E}[M_n^2] \leq B < \infty$ pour tout $n \geq 0$, alors il existe une variable aléatoire M_∞ avec $\mathbb{E}[M_\infty^2] \leq B < \infty$ telle que :*

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n \to \infty} M_n = M_\infty\right) = 1 \ \textit{et} \ \lim_{n \to \infty} ||M_n - M_\infty||_2 = 0$$

Toutes les martingales L^2 bornées convergent donc dans L^2 et en probabilité vers une limite dans L^2. Nous allons maintenant présenter un résultat qui utilise la technique de localisation, méthode pouvant etre utilisée pour appliquer des résultats dans L^2 qui au départ n'ont pas de connexions avec cet espace. Ce théorème trouvera une version plus forte juste après.

Théorème 7. *Si M_n est une martingale et qu'il existe une constante B telle que*

$$\mathbb{E}[|M_n|] \leq B \ \textit{et} \ |M_{n+1} - M_n| \leq B < \infty \ \forall n \geq 0,$$

alors il existe une variable aléatoire M_∞ avec $\mathbb{E}[|M_\infty|] \leq B$ telle que :

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} M_n = M_\infty\right) = 1.$$

Nous allons juste illuster où apparait la localisation. On définit $\tau = \inf\{n : \ |M_n \geq \lambda\}$ et on écrit :

$$M_n = M_{n\wedge\tau} + R_n.$$

Par le théorème du temps d'arrêt, $M_{n\wedge\tau}$ est une martingale et :

$$|M_{n\wedge\tau}| \leq \lambda + B \Rightarrow \mathbb{E}[\ |M_{n\wedge\tau}|^2\ ] \text{ bornée.}$$

On applique le théorème de la convergence dans L^2.

Théorème 8 (Théorème de convergence des martingales dans L^1)**.** *Si M_n est une martingale satisfaisant $\mathbb{E}[M_n] \leq B < \infty$ pour tout $n \geq 0$, alors il existe une variable aléatoire M_∞ avec $\mathbb{E}[M_\infty] \leq B < \infty$ telle que :*

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} M_n = M_\infty\right) = 1.$$

1.2.2 Problèmes et martingales

Problème de ruine

Forts de la théorie qu'on vient de développer, nous allons mesurer nos nos nouveaux outils au problème de ruine non biaisé. Force est de constater que le processus S_n est une martingale respectivement à $\{X_n : \ 1 \leq n < \infty\}$; les X_n sont des variables aléatoires indépendantes puisque chaque pari est indépendant du précédent, avec une espérance nulle car la probabilité de gain et de perte est la meme. Le théorème du temps d'arret nous fournit une nouvelle perspective pour calculer la probabilité d'atteindre le niveau A avant le niveau $-B$. Soit donc :

$$\tau = \min\{n \geq 0 : S_n = A \text{ ou } S_n = -B\},$$

alors ce théorème nous dit que $S_{n\wedge\tau}$ est aussi une martingale, donc :

$$\mathbb{E}[S_{n\wedge\tau}] = \mathbb{E}[S_{0\wedge\tau}] = 0 \ \forall n \geq 0.$$

Puisque τ est fini avec probabilité 1, on a que :

$$\lim_{n\to\infty} S_{n\wedge\tau} = S_\tau.$$

Les variables aléatoires $|S_{n\wedge\tau}|$ sont bornées par $\max(A,B)$, donc par le théorème de la convergence dominée :

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}[S_{n\wedge\tau}] = \mathbb{E}[S_\tau] = 0.$$

Or :

$$\begin{aligned} S_\tau &= A1(S_\tau = A) - B1(S_\tau = -B) \\ \Rightarrow \mathbb{E}[S_\tau] &= \mathbb{P}(S_\tau = A)A - (1-\mathbb{P}(S_\tau = A)B \\ \Rightarrow 0 = \mathbb{E}[S_\tau] &= \mathbb{P}(S_\tau = A)A - (1-\mathbb{P}(S_\tau = A)B \\ \Rightarrow \mathbb{P}(S_\tau = A) &= \frac{B}{A+B}. \end{aligned}$$

On va maintenant calculer l'espérance du temps d'arret avec la martingale $M_n = S_n^2 - n$, et puisque l'espérance du temps d'arret est finie, les variables aléatoires $M_{n\wedge\tau}$ sont dominées par une variable aléatoire intégrable. On a, comme auparavant :

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}[M_{n\wedge\tau}] = \mathbb{E}[M_\tau] = 0$$

par le théorème de la convergence dominée et la propriété de martingale de $M_{n\wedge\tau}$. Si $\alpha = \mathbb{P}(S_\tau = A)$ et $1-\alpha = \mathbb{P}(S_\tau = -B)$, alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[M_\tau] = \mathbb{E}[S_\tau^2] - \mathbb{E}[\tau] &= \alpha A^2 + (1-\alpha)B^2 - \mathbb{E}[\tau] \\ &\Rightarrow AB - \mathbb{E}[\tau] = 0 \Rightarrow \mathbb{E}[\tau] = AB. \end{aligned}$$

Problème 1

Montrons que si M_n est une martingale qui satisfatit :

$$\mathbb{E}[|M_n^p|] \leq B < \infty$$

pour $p > 1$ et $\forall n \geq 0$, alors il existe une variable aléatoire M_∞ avec $\mathbb{E}[|M_\infty^p|] \leq B$ telle que :

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} M_n = M_\infty\right) = 1 \text{ et } \lim_{n\to\infty} ||M_n - M_\infty||_p = 0.$$

Par l'inégalité de Jensen appliquée à la fonction $\phi(x) = x^p$, on a :

$$\mathbb{E}[|M_n|]^p \leq B \Rightarrow \mathbb{E}[|M_n|] \leq B^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Par le théorème de convergence des martingales des L^1-martingales bornées, on a :

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} M_n = M_\infty\right) = 1 \text{ et } \mathbb{E}[|M_\infty|] \leq B^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

On a : $\sup \mathbb{E}[|M_n|^p] = \mathbb{E}[|M_\infty|^p]$. D'après l'inégalité maximale de Doob :

$$\mathbb{E}[|M_n^*|^p] \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}[|M_n^*|^p].$$

En prenant la limite croissante on trouve :

$$\mathbb{E}[|M_\infty^*|^p] \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sup \mathbb{E}[|M_n|^p] < \infty.$$

D'où : $M_\infty^* \in L^p$. Par le théorème de convergence dominée :

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[|M_n|^p] = \mathbb{E}[\lim_{n\to\infty} |M_n|^p] = \mathbb{E}[|M_\infty|^p] \leq \mathbb{E}[|M_\infty^*|^p] < \infty.$$

On en conclut que : $M_\infty \in L^p \Rightarrow M_n$ converge dans L^p vers M_∞.

Problème 2

Si $M_n, \mathcal{F}_n$ est une martingale vérifiant $\mathbb{E}[M_n^2] < \infty$ pour tout entier n, montrons qu'on peut écrire :

$$M_n^2 = N_n + A_n,$$

où (1) $N_n, \mathcal{F}_n$ est une martingale ; (2) A_n est montone croissante ; (3) A_n est nonanticipative.
On commence par prendre $A_0 = 0$ et on définit :

$$A_{n+1} = A_n + \mathbb{E}[(M_{n+1} - M_n)^2 \mid \mathcal{F}_n].$$

La condition (2) est vérifiée car $\mathbb{E}[(M_{n+1} - M_n)^2 \mid \mathcal{F}_n] \geq 0$. Ecrivons A_n explicitement :

$$A_n = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E}[(M_{k+1} - M_k)^2 \mid \mathcal{F}_k],$$

on en déduit que $A_n \in \mathcal{F}_{n-1}$. Posons $= N_n = M_n^2 - A_n$ et montrons que N_n est une martingale :

$$\begin{aligned}
M_n^2 - A_n &= M_n^2 - \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E}[(M_{k+1} - M_k)^2 \mid \mathcal{F}_k] \\
&= M_n^2 - \sum_{k=0}^{n-1} (Var(M_{k+1}) + \mathbb{E}[M_{k+1} \mid \mathcal{F}_k]^2 - M_k^2) \\
&= M_n^2 - \sum_{k=1}^{n} Var(M_k)
\end{aligned}$$

Enfin :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[N_n \mid \mathcal{F}_{n-1}] &= \mathbb{E}[M_n^2 - \sum_{k=1}^{n} Var(M_k) \mid \mathcal{F}_{n-1}] \\
&= \mathbb{E}[M_n^2 \mid \mathcal{F}_{n-1}] - Var(M_n) - \sum_{k=1}^{n-1} Var(M_k) \\
&= M_{n-1}^2 - \sum_{k=1}^{n-1} Var(M_k) \\
&= N_{n-1},
\end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer.

Chapitre 2

Mouvement brownien et martingales à temps continu

2.1 Le mouvement brownien

2.1.1 Processus gaussiens

Nous devons fournir quelques rappels concernant la distribution gaussienne multivariée, qui va nous amener au mouvement brownien, et nous permettra de saisir la nature gaussienne de celui-ci. Nous allons montrer dans ce chapitre qu'on peut représenter le mouvement brownien comme somme aléatoire d'intégrales de fonctions orthogonales.

Définition 8. *Un vecteur aléatoire d-dimensionnel V a une distribution normale multivariée d-dimensionnelle avec espérance μ et covariance Σ si la densité de V est donnée par :*

$$(2\pi)^{\frac{-d}{2}}(\det\Sigma)^{\frac{-1}{2}}exp\left(-\frac{1}{2}(x-\mu)^T\Sigma^{-1}(x-\mu)\right)\ \forall x\in\mathbb{R}^d$$

Remarquons que les coordonnées $\{V_i : 1 \leq i \leq d\}$ sont indépendantes si et seulement si la matrice de covariance est diagonale.

Proposition 1. *La fonction caractéristique d'une Gaussienne multivariée est :*

$$\mathbb{E}[exp(i\theta^T V)] = exp\left(i\theta^T\mu - \frac{1}{2}\theta^T\Sigma\theta\right).$$

Proposition 2. *Un vecteur aléatoire d-dimensionnel V suit une loi gaussienne multivariée si et seulement si chacune des combinaisons linéaires :*

$$\theta_1V_1 + \theta_2V_2 + ...\theta_dV_d$$

suit une loi gaussienne univariée.

Si un processus stochastique $\{X_t : 0 \leq t < \infty\}$ a la propriété que le vecteur aléatoire $(X_{t_1}, X_{t_2}, ..., X_{t_n})$ suit une loi normale multivariée pour toute séquence finie $0 \leq t_1 < t_2 < ... < t_n$, alors X_t est appelé processus gaussien. Les fonctions d'espérance et de covariance $\mu(t) = \mathbb{E}[X_t]$ et $f(s,t) = \mathrm{Cov}(X_s, X_t)$ déterminent complétement les distributions conjointes d'un processus gaussien.

2.1.2 Le mouvement brownien

Le mouvement brownien, bien que découvert par le biologiste Brown, recut ses lettres de noblesses mathématiques avec Wiener, qui prouva son existence comme objet mathématique rigoureusement défini. Le mouvement brownien est le processus gaussien par excellence.

Définition 9 (Mouvement brownien standard)**.** *Un processus stochastique à temps continu $\{B_t : 0 \leq t \leq T\}$ est appelé Mouvement Brownien Standard sur $[0, T)$ s'il possède les 4 propriétés suivantes :*
(i) $B_0 = 0$
(ii) Les incréments de B_t sont indépendants : pour toute suite finie de temps $0 \leq t_1 < t_2 < ... < t_n$, les variables aléatoires

$$B_{t_2} - B_{t_1},\ B_{t_2} - B_{t_1},\ ...,\ B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$$

sont indépendantes.
(iii) Pour tout $0 \leq s \leq t \leq T$, l'incrément $B_t - B_s$ suit une loi normale d'espérance nulle et de variance $t - s$.
(iv) Pour tout ω sur un ensemble de probabilité 1, $B_t(\omega)$ est une fonction continue de t.

Lemme 1. *Si un processus gaussien $\{X_t : 0 \leq t < T\}$ a une espérance nulle $\forall\ 0 \leq t < T$ et si :*

$$Cov(X_s, X_t) = \min(s,t)\ \forall\ 0 \leq s,\ t < T,$$

alors le processus X_t a des incréments indépendants. De plus, si le processus a des chemins continus et $X_0 = 0$, alors c'est un mouvement brownien standard sur $[0, T)$.

Calculons la fonction de covariance pour le mouvement brownien en notant que pour tout $s \leq t$, on a :

$$\mathrm{Cov}(B_s, B_t) = \mathbb{E}[(B_t - B_s + B_s)B_s] = \mathbb{E}[B_s^2] = s,$$

donc en général on a : $\mathrm{Cov}(B_s, B_t) = \min(s,\ t)$.

2.1.3 Construction du mouvement brownien

Nous devons commencer par effectuer quelques observations et utiliser de la théorie provenant de l'Analyse. Considérons l'espace $L^2\,[0,\,1]$. Si l'ensemble $\{\phi_n \in L^2\,[0,\,1]\,:\,0 \leq n < \infty\}$ satisfait $< \phi_n,\,\phi_m >= 0\ \forall n \neq m$ et $< \phi_n,\,\phi_n >= 1\ \forall n \geq 0$, alors $\{\phi_n\}$ est appelée séquence orthonormée. Si la combinaison linéaire finie de cette séquence forme un ensemble dense dans $L^2\,[0,\,1]$, on dit qu'elle est complète. On a en fait :

$$\forall f \in L^2\,[0,\,1]\,,\; f = \sum_{n=0}^{\infty} < f,\,\phi_n > \phi_n.$$

En utilisant l'identité de Parseval, on peut calculer le produit scalaire de f et g de deux manières :

$$\int_0^1 f(x)g(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} < f,\,\phi_n >< g,\,\phi_n > .$$

Si on pose $f(x) = 1_{[0,\,s]}(x)$ et $g(x) = 1_{[0,\,t]}(x)$, un calcul simple nous donne : $\int_0^1 f(x)g(x)dx = \min(s,\,t)$. On a aussi :

$$\min(s,\,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^s \phi_n(x)dx \int_0^t \phi_n(x)dx.$$

Faisons le lien maintenant avec le mouvement brownien. Comme $\mathrm{Cov}(B_s, B_t) = \min(s,\,t)$, on a établi une connexion entre le mouvement brownien et les intégrales d'une séquence complète orthonormée :

$$\mathrm{Cov}(B_s, B_t) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^s \phi_n(x)dx \int_0^t \phi_n(x)dx.$$

Considérons $X_t = \sum_{n=0}^{\infty} Z_n \int_0^t \phi_n(x)dx$, où Z_n est une séquence de variables aléatoires normales standard indépendantes. L'éspérance de X_t est nulle, calculons sa covariance :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X_s X_t] &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{E}[Z_n Z_m \int_0^s \phi_n(x)dx \int_0^t \phi_n(x)dx] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^s \phi_n(x)dx \int_0^t \phi_n(x)dx \\
&= \min(s,\,t).
\end{aligned}$$

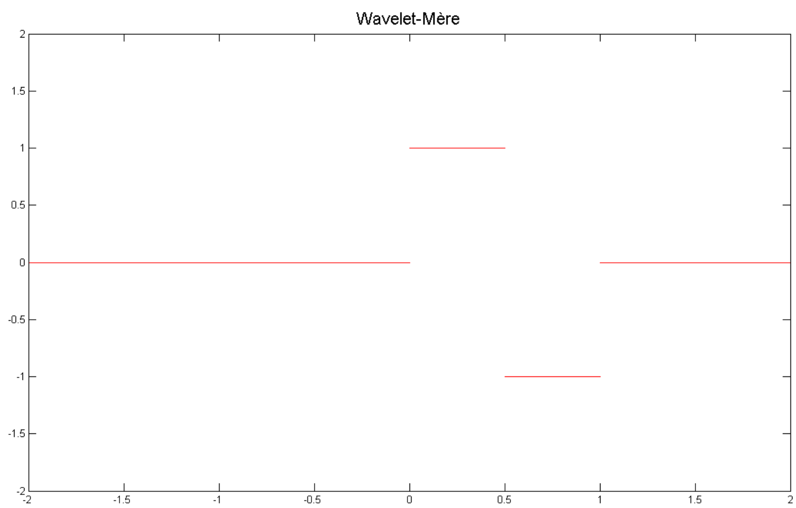
Pour construire notre mouvement brownien, nous allons considérer deux suites de fonctions, qu'on appelle des "wavelets". On définit d'abord la "wavelet"-mère :

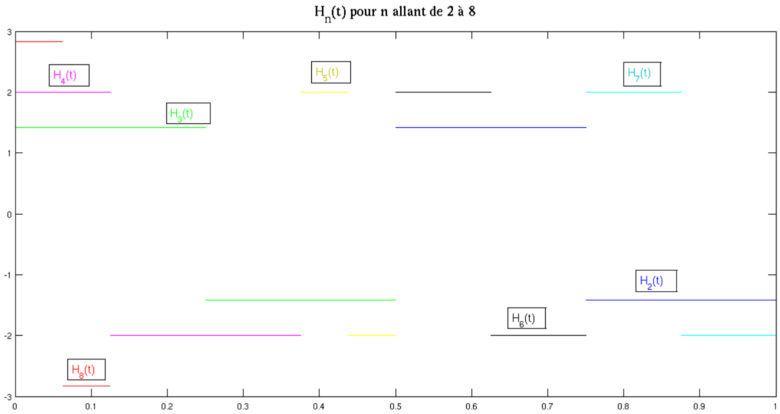
$$H(t) \quad = \quad \begin{cases} 1 & \text{pour } 0 \leq t < \frac{1}{2}, \\ -1 & \text{pour } \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ensuite, pour $n \geq 1$, on définit une suite de fonctions en translatant et dilatant la "wavelet"-mère. Comme tout $n \geq 1$ peut etre écrit de facon unique sous la forme $n = 2^j + k$ où $0 \leq k < 2^j$, on définit $H_n(t)$ par :

$$H_n(t) = 2^{\frac{j}{2}} H(2^j t - k) \text{ pour } n = 2^j + k.$$

$\{H_n : \ 0 \leq n < \infty\}$ est une séquence orthonormale complète. Contruisons quelques graphes pour obtenir une meilleure vision de ces fonctions.





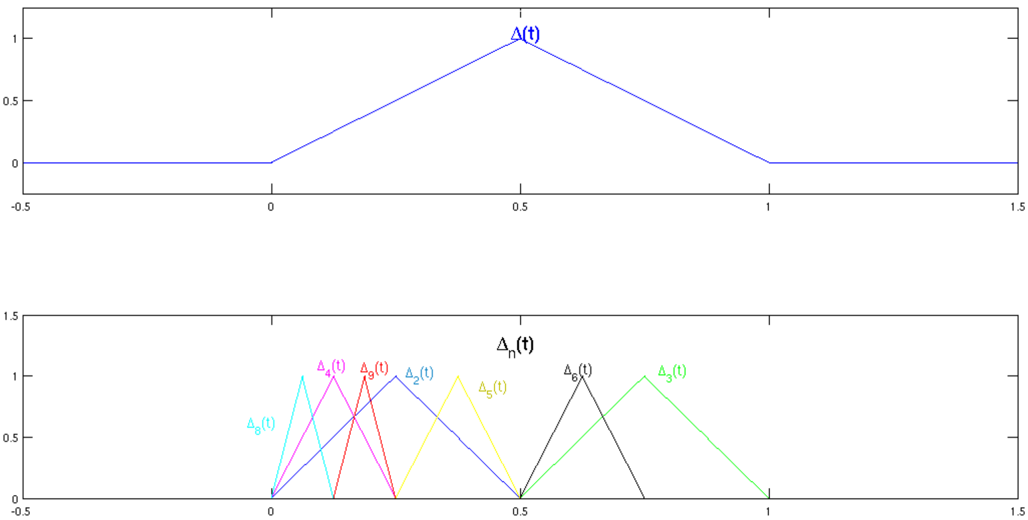
La prochaine étape est d'obtenir les intégrales des $\{H_n\}$. Elles peuvent s'exprimer en fonction d'une autre "wavelet", qui est donnée par :

$$\Delta(t) = \; = \begin{cases} 2t & \text{pour } 0 \leq t < \frac{1}{2}, \\ 2(1-t) & \text{pour } \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

De la meme facon, on définit la suite de fonctions $\{\Delta_n : 0 \leq n < \infty\}$:

$$\Delta_n(t) = \Delta(2^j t - k) \text{ pour } n = 2^j + k.$$

On peut vérifier que : $\int_0^t H_n(u)du = \lambda_n \Delta_n(t)$, où $\lambda_0 = 1$ et pour tout $n = 2^j + k \geq 1$ on a $\lambda_n = \frac{1}{2} 2^{\frac{-j}{2}}$. Quelques figures viennent illustrer ceci.



Théorème 9 (Représentation du mouvement brownien)**.** *Si* $\{Z_n : \ 0 \leq n < \infty\}$ *est une suite de variables aléatoires normales indépendantes d'espérance nulle et de variance 1, alors la série définie par :*

$$X_t = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n Z_n \Delta_n(t)$$

converge uniformément sur $[0,\,1]$ *avec probabilité 1. De plus, le processus défini par la limite est un mouvement brownien standard pour* $0 \leq t \leq 1$.

Un lemme technique permet de montrer la convergence uniforme. Nous allons montrer que la fonction de covariance de cette série est celle d'un mouvement brownien standard.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X_s X_t] &= \mathbb{E}[\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n Z_n \Delta_n(s) \sum_{m=0}^{\infty} \lambda_m Z_m \Delta_m(t)] \\
&= \mathbb{E}[Z_n^2] \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n^2 \Delta_n(s) \Delta_m(t) \text{ par indépendance des } Z_i \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^s H_n(u)du \int_0^t H_n(u)du \\
&= \min(s,\,t) \text{ car } H_n \text{ est orthonormée complète .}
\end{aligned}$$

2.1.4 Extension et transformation du mouvement brownien

Maintenant que l'on a un mouvement brownien standard sur $[0,\,1]$, nous voulons l'étendre à $[0,\,\infty)$. On va effectuer cela en prenant une suite dénombrable de browniens indépendants, et de les attacher ensembles en commencant le nouveau là ou le précédent s'est arreté. On définit donc celui-ci par :

$$B_t = \sum_{k=0}^{n} B_1^{(k)} + B_{t-n}^{(n+1)} \text{ chaque fois que } t \in [n,\,n+1].$$

Par exemple : $B_{4.5} = B_1^{(1)} + B_1^{(2)} + B_1^{(3)} + B_1^{(4)} + B_{0.5}^{(5)}$.
Vérifions que c'est un mouvement brownien. La continuité est évidente. On montre que B_t suit une loi $N(0,\,t)$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[B_t] &= \mathbb{E}[\sum_{k=0}^{n} B_1^{(k)} + B_{t-n}^{(n+1)}] \\
&= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{E}[B_1^{(k)}] + \mathbb{E}[B_{t-n}^{(n+1)}] \\
&= 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[B_t^2] &= \mathbb{E}[(\sum_{k=0}^{n} B_1^{(k)} + B_{t-n}^{(n+1)})^2] \\
&= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{E}[(B_1^{(k)})^2] + \mathbb{E}[(B_{t-n}^{(n+1)})^2] \text{ par indépendance de la suite de browniens} \\
&= \sum_{k=0}^{n} 1 + (t-n) \\
&= n + t - n \\
&= t.
\end{aligned}$$

On va appliquer des transformations basiques au mouvement brownien sur $[0, \infty)$, et il s'avèrera que celles-ci seront à nouveau des mouvements browniens.

Proposition 3 (Lois de Réajustement et d'Inversion). *Pour tout $a > 0$, le processus réajusté défini par*

$$X_t = \frac{1}{\sqrt{a}} B_{at} \textit{ pour } t \geq 0$$

et le processus inversé défini par

$$Y_0 = 0 \textit{ et } Y_t = t B_{\frac{1}{t}} \textit{ pour } t > 0$$

sont tous les deux des mouvements browniens standard sur $[0, \infty)$.

Montrons seulement que leurs espérances sont nulles et que leurs fonctions de covariance sont égales à $\min(s, t)$.

– $\mathbb{E}[X_t] = \mathbb{E}[\frac{1}{\sqrt{a}} B_{at}] = \frac{1}{\sqrt{a}} \mathbb{E}[B_{at}] = 0$.

$$\mathbb{E}[X_t X_s] = \mathbb{E}[\tfrac{1}{a} B_{at} B_{as}] = \tfrac{1}{a}\mathbb{E}[B_{at} B_{as}] = \tfrac{1}{a}\min(as, at) = \min(s, t).$$

– $\mathbb{E}[Y_t] = \mathbb{E}[t B_{\frac{1}{t}}] = t\mathbb{E}[B_{\frac{1}{t}}] = 0$.

$$\mathbb{E}[Y_t Y_s] = st\mathbb{E}[B_{\frac{1}{t}} B_{\frac{1}{s}}] = st \min(\tfrac{1}{t}, \tfrac{1}{s}) = \min(s, t).$$

2.1.5 Application à un problème : le "Brownian bridge"

Dans notre représentation du mouvement brownien $B_t = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n Z_n \Delta_n(t)$, nous avons $\Delta_0(1) = 1$ et $\Delta_n(1) = 0$. Si on définit :

$$U_t = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n Z_n \Delta_n(t), \; .$$

on a que U_t est un processus continu sur $[0, 1]$ tel que $U_0 = 0$ et $U_1 = 0$. On appelle ce processus le "Brownian bridge", qui est utilisé pour modéliser une quantité qui commence à un certain niveau et qui doit retourner à un certain niveau à un temps futur spécifié.
Montrons, dans un premier temps, qu'on peut écrire : $U_t = B_t - tB_1$.

$$B_t = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n Z_n \Delta_n(t) + \lambda_0 Z_0 \Delta_0(t) = U_t + tZ_0 \text{ car } \lambda_0 = 1 \text{ et } \Delta_0(t) = t.$$

D'autre part :

$$B_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n Z_n \Delta_n(1) = Z_0 \Rightarrow B_t = U_t + tB_1 \Leftrightarrow U_t = B_t - tB_1.$$

Déterminons maintenant la fonction de covariance de U_t :

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(U_s,\, U_t) = \mathbb{E}[(U_t - \mathbb{E}[U_t])(U_s - \mathbb{E}[U_s])] = \mathbb{E}[U_t U_s] \\ \text{car } \mathbb{E}[U_t] = \mathbb{E}[B_t - tB_1] = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(U_s,\, U_t) &= \mathbb{E}[(B_t - tB_1)(B_s - sB_1)] \\ &= \mathbb{E}[B_t B_s] - s\mathbb{E}[B_t B_1] - t\mathbb{E}[B_s B_1] + ts\mathbb{E}[B_1^2] \\ &= s - st - ts + ts = s(1-t). \end{aligned}$$

Soit $X_t = g(t)B_{h(t)}$, trouvons des fonctions g et h telles que X_t ait la meme covariance que le "Brownian bridge".

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(X_s,\, X_t) &= \mathrm{Cov}(g(s)B_{h(s)},\, g(t)B_{h(t)}) \\ &= g(t)g(s)\mathbb{E}[B_{h(s)}B_{h(t)}] = g(t)g(s)\min(h(s),\, h(t)). \end{aligned}$$

En supposant $s \leq t$, on pose $g(x) = x$.

$$-t \leq -s \Rightarrow 1 - t \leq 1 - s \Rightarrow \frac{1-t}{t} \leq \frac{1-s}{s}.$$

On a donc :

$$\mathrm{Cov}(X_s,\, X_t) = ts\frac{1-t}{t} = s(1-t) = \mathrm{Cov}(U_s,\, U_t).$$

Montrons enfin que $Y_t = (1+t)U_{\frac{t}{1+t}}$ est un mouvement brownien sur $[0, \infty)$.

$$Y_t = (1+t)(B_{\frac{t}{1+t}} - \frac{t}{1+t}B_1) = (1+t)B_{\frac{t}{1+t}} - tB_1.$$

Y_t est un processus gaussien

$$\mathbb{E}[Y_t] = \mathbb{E}[(1+t)B_{\frac{t}{1+t}} - tB_1] = 0.$$

Avec $s \leq t$:

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(Y_s, Y_t) &= (1+t)(s+1)\mathrm{Cov}(U_{\frac{t}{1+t}}, U_{\frac{t}{1+t}}) \\ &= (1+t)(1+s)\frac{s}{1+s}(1-\frac{t}{1+t}) \text{ car } \frac{x}{1+x} \text{ est croissante} \\ &= s = \min(s,t). \end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer pour achever la preuve.

2.2 Martingales à temps continu

2.2.1 Notations et rappel succinct sur les espérances conditionnelles

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. Si $(X_1, X_2..., X_n)$ est une collection de variables aléatoires, on considère souvent la plus petite tribu $\mathcal{G}$ telle que chaque X_i est mesurable par rapport à $\mathcal{G}$ Cette sous-tribu de $\mathcal{F}$ est appelée tribu engendrée par $(X_1, X_2..., X_n)$, et on la dénote $\sigma(X_1, X_2..., X_n)$. Rappelons la définition de l'espérance :

$$\mathbb{E}[X] = \int_\Omega X(\omega)d\mathbb{P}(\omega),$$

où l'intégrale est de Lebesgue.

Définition 10 (Espérance conditionnelle). *Si X est une variable aléatoire intégrable dans l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, et si $\mathcal{G}$ est une sous-tribu de $\mathcal{F}$, on dit que Y est une espérance conditionnelle de X respectivement à $\mathcal{G}$si Y est $\mathcal{G}$-mesurable et si :*

$$\mathbb{E}[X1_A] = \mathbb{E}[Y1_A] \ \forall A \in \mathcal{G}.$$

On écrit alors :

$$Y = \mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}]$$

Proposition 4. *L'espérance conditionnelle présente les propriétés suivantes :*
- $\mathbb{E}[X+Y \mid \mathcal{G}] = \mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}] + \mathbb{E}[Y \mid \mathcal{G}]$.
- *Si $\mathcal{H}$ est une sous-tribu de $\mathcal{G}$:* $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}] \mid \mathcal{H}] = \mathbb{E}[X \mid \mathcal{H}]$.
- $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}]] = \mathbb{E}[X]$.
- *Si Y est $\mathcal{G}$-mesurable, $|X|$ et $|XY|$ intégrables, alors :* $\mathbb{E}[XY \mid \mathcal{G}] = Y\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}]$.

2.2.2 Intégrabilité uniforme

On veut développer les analogies en temps continu de notre théorème de temps d'arrêt de Doob et des théorèmes de convergence des martingales. Nous allons utiliser ce que nous savons sur les martingales à temps discret et construire celles à temps continu par un moyen approprié. Pour cela, nous allons d'abord utiliser le concept d'intégrabilité uniforme.

Définition 11. *On dit qu'une collection $\mathcal{C}$ de variables aléatoires est uniformément intégrable si :*

$$\rho(x) = \sup_{Z \in \mathcal{C}} \mathbb{E}[|Z| 1(|Z| > x)] \text{ satisfait } \rho(x) \to 0,\ x \to \infty.$$

Le lemme suivant nous donne une analogie avec la théorème de la convergence dominée pour des séquences qui ne sont pas nécessairement dominées dans L^1.

Lemme 2. *Si Z_n est une suite uniformément intégrable et converge vers Z avec probabilité 1, alors :*

$$\mathbb{E}[|Z_n - Z|] \to 0,\ n \to \infty.$$

Le lemme suivant fait apparaitre le fait que l'espérance conditionnelle est une contraction, c'est à dire que l'application qui envoie toute variable aléatoire intégrable sur son espérance conditionnelle est une L^1-contraction.

Lemme 3.

$$||\mathbb{E}[Z \mid \mathcal{G}]||_1 \leq ||Z||_1.$$

Lemme 4. *Si Z_n converge vers Z avec probabilité 1, et Z_n est uniformément intégrable, alors $\mathbb{E}[Z_n \mid \mathcal{G}]$ converge en probabilité et dans L^1 vers $\mathbb{E}[Z \mid \mathcal{G}]$.*

Notre prochaine tache est de donner des critères pour l'intégrabilité uniforme, car la définition est peu pratique. Un critère utile qui découle de l'inégalité de Holder est que Z_n est uniformément intégrable s'il existe une constante B et $p > 1$ telles que $\mathbb{E}[|Z_n|]^p \leq B$ pour tout $n \geq 1$. Le lemme suivant généralise ce L^p-critère de bornitude.

Lemme 5. *Si $\frac{\phi(x)}{x} \to \infty$ lorsque $x \to \infty$, et $\mathcal{C}$ est une collection de variables aléatoires telles que :*

$$\mathbb{E}[\phi(|Z|)] \leq B < \infty\ \forall Z \in \mathcal{C},$$

alors $\mathcal{C}$ est uniformément intégrable.

Pour obtenir des bornes du type du lemme précédent, on exploite le fait que toute variable aléatoire intégrable peut toujours etre visualisée comme un élément d'un espace semblable à L^p pour un $p > 1$. Le lemme qui suit clarifie cette idée.

Lemme 6. *Si Z est une variable aléatoire avec $\mathbb{E}[|Z|] < \infty$, alors il existe une fonction convexe ϕ avec $\frac{\phi(x)}{x} \to \infty$ lorsque $x \to \infty$ et $\mathbb{E}[\phi(|Z|)] < \infty$.*

Une conséquence de ce lemme est que les familles d'espérances conditionnelles sont uniformément intégrables. Ceci est formalisé dans le dernier lemme, qui nous donne la clé pour prouver le théorème de temps d'arrêt de Doob en temps-continu à partir du temps discret.

Lemme 7. *Si Z est une variable aléatoire $\mathcal{F}$-mesurable avec $\mathbb{E}[|Z|] < \infty$, alors la collection de variables aléatoires donnée par :*

$$\{Y\ : Y = \mathbb{E}[Z\ /\ \mathcal{G}] \text{ pour une tribu } \mathcal{G} \subset \mathcal{F}\}$$

est uniformément intégrable.

2.2.3 Du discret au continu

Si une collection $\{\mathcal{F}_t :\ 0 \leq t < \infty\}$ de sous-tribus de $\mathcal{F}$ a la propriété que : $s \leq t \Rightarrow \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$, alors on appelle celle-ci une filtration ; de plus, si $\{X_t :\ 0 \leq n < \infty\}$ sont telles que chaque X_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable, alors on dit que X_t est adaptée à la filtration. Finalement, si X_t est adaptée à la filtration, on dit que X_t est une martingale si elle a les deux propriétés suivantes :

1. $\mathbb{E}[|X_t|] < \infty$ pour tout $0 \leq t < \infty$.
2. $\mathbb{E}[|X_t| \mid \mathcal{F}_s] = X_s$ pour tout $0 \leq s \leq t < \infty$.

Pour nous, les martingales à temps continu les plus importantes sont les X_t pour lesquels il existe $\Omega_0 \subset \Omega$ de probabilité 1 tel que pour tout $\omega \in \Omega_0$ la fonction définie sur $[0, \infty)$ par $t \mapsto X_t(\omega)$ est continue. Ce sont les martingales continues.

La filtration brownienne standard

La filtration naturelle du mouvement brownien est la filtration donnée par $\sigma\{B_s :\ s \leq t\}$, mais nous allons travailler avec une filtration augmentée. Pour un mouvement brownien sur $[0, T]$, on considère la collection $\mathcal{C}$ de tous les ensembles de probabilité 0 dans la filtration naturelle. Ensuite, on considère $\mathcal{N}$ comme étant tous les A tels que $A \subset B$ pour $B \in \mathcal{C}$. On définit la filtration augmentée du mouvement brownien comme étant la filtration

$\mathcal{F}_t$, où $\mathcal{F}_t$ est la plus petite tribu contenant $\sigma\{B_s : s \le t\}$ et $\mathcal{N}$. On l'appelle la filtration brownienne standard. Elle a deux propriétés basiques :

1. $\mathcal{F}_0$ contient $\mathcal{N}$;
2. $\forall t \ge 0$ on a $\mathcal{F}_t = \bigcap_{s:\ s>t} \mathcal{F}_s$.

Les temps d'arrêt

Si $\mathcal{F}_t$ est une filtration, on dit que $\tau : \Omega \to \mathbb{R} \bigcup \{\infty\}$ est un temps d'arrêt respectivement à $\{\mathcal{F}_t\}$ si :

$$\{\omega : \ \tau(\omega) \le t\} \in \mathcal{F}_t \text{ pour tout } t \ge 0.$$

On définit la variable arrêtée X_τ sur l'ensemble $\{\omega : \ \tau(\omega) < \infty\}$, si $\tau(\omega) = t$. Les idées et méthodes de l'intégration uniforme nous permettent d'énoncer et étendre le théorème de temps d'arrêt de Doob du discret au continu.

Théorème 10 (Théorème de temps d'arrêt de Doob)**.** *Soit $\{M_t\}$ une $\mathcal{F}_t$-martingale continue. Si τ est un $\mathcal{F}_t$ temps d'arrêt, alors le processus défini par :*

$$X_t = M_{t\wedge\tau}$$

est aussi une $\mathcal{F}_t$-martingale continue.

Inégalité maximale de Doob et théorème limite de martingales

Voici les versions continues de nos théorèmes de Doob et de convergence des martingales.

Théorème 11 (Inégalité maximale de Doob)**.** *Si $\{M_t\}$ est une sous-martingale positive et continue et $\lambda > 0$, alors $\forall p \ge 1$ on a :*

$$\lambda^p \mathbb{P}\left(\sup_{t:0\le t\le T} M_t > \lambda\right) \le \mathbb{E}[M_T^p],$$

et, si $M_T \in L^p(d\mathbb{P})$ pour un $p > 1$, alors on a aussi :

$$|| \sup_{t:0\le t\le T} M_t||_p \le \frac{p}{p-1}||M_T||_p.$$

Théorème 12 (Convergence des martingales en temps continu)**.** *Si une martingale continue $\{M_t\}$ satisfait $\mathbb{E}[|M_t|^p] \le B < \infty$ pour un $p > 1$ et pour tout*

$t \geq 0$, alors il existe une variable aléatoire $\{M_\infty\}$ avec $\mathbb{E}[|M_\infty|^p] \leq B$ telle que :

$$\mathbb{P}\left(\lim_{t\to\infty} M_t = M_\infty\right) = 1 \text{ et } \lim_{t\to\infty} ||M_t - M_\infty||_p = 0.$$

Aussi, si $\{M_t\}$ est une martingale continue satisfaisant $\mathbb{E}[|M_t|] \leq B < \infty$ pour tout $t \geq 0$, alors il existe une variable aléatoire $\{M_\infty\}$ avec $\mathbb{E}[|M_\infty|] \leq B$ telle que :

$$\mathbb{P}\left(\lim_{t\to\infty} M_t = M_\infty\right) = 1.$$

2.2.4 Martingales de mouvement brownien et problème de ruine

Nous allons donner 3 processus qui sont des martingales continues respectivement à la filtration brownienne standard :

1. B_t,
2. $B_t^2 - t$,
3. $\exp(\alpha B_t - \frac{\alpha^2 t}{2})$.

Le fait que ce sont des processus adaptés, continus et intégrables est immédiat. Montrons l'identité martingale :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[B_t \mid \mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}[B_t - B_s \mid \mathcal{F}_s] + \mathbb{E}[B_s \mid \mathcal{F}_s] \\ &= B_s. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[B_t^2 - t \mid \mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}[(B_t - B_s)^2 + 2\mathbb{E}[B_t B_s] \mid \mathcal{F}_s] - B_s^2 - t \\ &= t - s + 2B_s^2 - B_s^2 - t \\ &= B_s^2 - t. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\exp(\alpha B_t - \frac{\alpha^2 t}{2} \mid \mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}[\exp(\alpha(B_t - B_s) - \frac{\alpha^2(t-s)}{2}) \mid \mathcal{F}_s] \exp(\alpha B_s - \frac{\alpha^2 s}{2}) \\ &= \exp(\alpha B_s - \frac{\alpha^2 s}{2}). \end{aligned}$$

Ces martingales nous seront très utiles pour les probabilités de ruine pour le mouvement brownien, qui vont s'avérer très semblables à celles de la marche aléatoire. Soit donc $A,B > 0$ et $\tau = \min\{n \geq 0 : B_t = A \text{ ou } B_t = -B\}$. On va montrer que :

$$\mathbb{P}(\tau < \infty) = 1,\, \mathbb{P}(B_\tau = A) = \frac{B}{A+B} \text{ et } \mathbb{E}[\tau] = AB.$$

Puisque $\mathbb{P}(|B_{n+1} - B_n| > A + B) = \epsilon > 0$ et les événements $E_n = \{|B_{n+1} - B_n| > A + B\}$ sont indépendants, on a :

$$\mathbb{P}(\tau > n + 1) \leq (1 - \epsilon)^n,$$

d'où la finitude de τ.

$$\mathbb{E}[B_\tau] = A\mathbb{P}(B_\tau = A) - B\mathbb{P}(B_\tau = -B) = A\mathbb{P}(B_\tau = A) - B(1 - \mathbb{P}(B_\tau = A)).$$

$B_{t\wedge\tau}$ est une martingale, $\mathbb{E}[B_{t\wedge\tau}] = 0\ \forall t$. De plus, on a la borne $|B_{t\wedge\tau}| \leq A + B$, le théorème de la convergence dominée nous donne :

$$\mathbb{E}[B_\tau] = \lim_{t\to\infty} \mathbb{E}[B_{t\wedge\tau}] = 0.$$

On obtient grace à ceci la second formule de ruine.
La troisième requiert l'utilisation de la martingale $M_t = B_t^2 - t$ et l'observation que pour tout $t \geq 0$, on a $M_{t\wedge\tau} \leq A^2 + B^2 + \tau$. La dernière borne a espérance finie, donc par la convergence dominée et le fait que pour tout $t \geq 0$, $\mathbb{E}[M_{t\wedge\tau}] = 0$, on a :

$$\mathbb{E}[B_\tau^2] = \mathbb{E}[\tau].$$

De la seconde formule de ruine, on en déduit : $\mathbb{E}[\tau] = AB$.

Problèmes

Problème 1

Considérons $X_t = \exp(B_t - \frac{t}{2})$. Nous savons que c'est une martingale continue par le travail qu'on a effectué avant. Calculons son espérance :

$$\mathbb{E}[|X_t|] = \mathbb{E}[X_t] = \exp(-\frac{t}{2})\mathbb{E}[\exp(B_t)] = \exp(-\frac{t}{2})\exp(\frac{t}{2}) = 1.$$

Montrons que X_t converge en probabilité vers $X = 0$:

$$\mathbb{P}(X_t > \epsilon) = \mathbb{P}(B_t > \log(\epsilon) + \frac{t}{2}) \leq \frac{t}{(\log(\epsilon) + \frac{t}{2})^2} \overset{t\to\infty}{\to} 0.$$

où on a utilisé l'inégalité de Chebychev. Comme $\mathbb{E}[|X_t|] = 1 \neq \mathbb{E}[0]$, on n'a pas la convergence dans L^1, et comme l'intégrabilité uniforme implique la convergence dans L^1, alors on n'a pas l'intégrabilité uniforme de X_t.

Problème 2

Reprenons le processus défini par :

$$Y_t = \begin{cases} 0 & \text{si } t = 0, \\ tB_{\frac{1}{t}} & \text{si } t > 0. \end{cases}$$

On doit encore montrer la continuité en 0. Montrons d'abord que pour tout $\epsilon > 0$, le processus $X_t = Y_t - Y_\epsilon$ est une martingale. Seule l'identité martingale pose problème :

$$\mathbb{E}[X_t \mid \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[tB_{\frac{1}{t}} \mid \mathcal{F}_s] - \epsilon B_{\frac{1}{\epsilon}} = sB_{\frac{1}{s}} - \epsilon B_{\frac{1}{\epsilon}}.$$

Calculons $\mathbb{E}[(Y_t - Y_s)^2]$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(Y_t - Y_s)^2] &= \mathbb{E}[(tB_{\frac{1}{t}} - sB_{\frac{1}{s}})^2] \\ &= \mathbb{E}[t^2 B_{\frac{1}{t}}^2 + s^2 B_{\frac{1}{s}}^2 - 2ts B_{\frac{1}{t}} B_{\frac{1}{s}}] \\ &= t^2 \frac{1}{t} + s^2 \frac{1}{s} - 2ts \min(\frac{1}{s}, \frac{1}{t}) \\ &= t - s. \end{aligned}$$

Pour conclure sur la continuité, on va montrer que :

$$\mathbb{P}\left(\lim_{t \to 0} Y_t = 0\right) = 1.$$

Par l'inégalité maximale de Doob, on a :

$$\mathbb{P}\left(\sup_{t:0 \le t \le T} Y_t > \lambda\right) \le \frac{\mathbb{E}[Y_T^2]}{\lambda^2} = \frac{T}{\lambda^2}.$$

Or :

$$\left\{\lim_{T \to 0} Y_T > \lambda\right\} \subset \left\{\sup_{t:0 \le t \le T} Y_t > \lambda\right\}.$$

D'où :

$$\mathbb{P}\left(\lim_{T \to 0} Y_T = 0\right) \le \lim_{T \to 0} \frac{T}{\lambda^2} = 0 \Rightarrow \mathbb{P}\left(\lim_{t \to 0} Y_t = 0\right) = 1.$$

2.3 Trajectoires browniennes : régularité, Réflexion et invariance

2.3.1 Régularité

Un fait important concernant la suite de fonctions $\{\Delta_n\}$ est qu'elle forme une base de l'ensemble des fonctions continues sur $[0, 1]$. Pour toute fonction continue $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, il existe une unique suite de constantes $\{c_n\}$ telle que :

$$f(t) = f(0) + \sum_{n=0}^{\infty} c_n \Delta_n(t),$$

où la suite $\{c_n\}$, pour $n = 2^j + k \geq 1$:

$$c_n = f(\frac{k+\frac{1}{2}}{2^j}) - \frac{1}{2}[f(\frac{k}{2^j}) + f(\frac{k+1}{2^j})].$$

Une première mesure de régularité est donnée par la Holder-continuité. Une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est Holder-continue d'ordre $0 < \alpha < 1$ s'il existe une constante c telle que :

$$|f(s) - f(t)| \leq c|s - t|^{\alpha}.$$

Le lemme suivant nous permettra de donner la Holder-continuité pour les chemins browniens.

Lemme 8. *Si les coefficients $\{c_n\}$ satisfont :*

$$|c_n| \leq 2^{-\alpha j} \; \forall n, \; n = 2 = 2^j + k,$$

alors $f \in C^{\alpha}[0, 1]$.

La représentation en série du mouvement brownien nous donne la suite $\{c_n\}$, et la borne est valide lorsque $0 \leq \alpha < \frac{1}{2}$.

Théorème 13. *Pour tout $0 \leq \alpha < \frac{1}{2}$, les trajectoires du mouvement brownien sont dans $C^{\alpha}[0, 1]$ avec probabilité 1.*

Théorème 14. *Pour tout ω excepté un ensemble de probabilité nulle, le chemin brownien $B_t(\omega)$ n'est pas différentiable pour tout $0 \leq t \leq 1$.*

2.3.2 Réflexion

Nous revenons maintenant à notre marche aléatoire simple non biaisée, et on considère $\tau = \min\{n : S_n = x\}$. On définit :

$$\tilde{S_n} = \begin{cases} S_n & \text{si } n < \tau, \\ S_\tau - (S_n - S_\tau & \text{si } n \geq \tau. \end{cases}$$

Ce processus représente la fortune du parieur lorsque celui-ci décide de changer son pari après avoir atteint le niveau x. Si $n \geq \tau$ et $S_n > x + y$ pour un $y \geq 0$, alors on a $\tilde{S_n} < x - y$. Puisque les processus $\{S_n\}$ et $\left\{\tilde{S_n}\right\}$ sont équivalents :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\tau \leq n,\, S_n > x + y) &= \mathbb{P}(\tau \leq n,\, \tilde{S_n} < x - y) \\ &= \mathbb{P}(\tau \leq n,\, S_n < x - y). \end{aligned}$$

En introduisant le processus maximal, et puisque $S_n > x+y$ implique $S_n^* \geq x$, on a :

$$\mathbb{P}(S_n > x + y) = \mathbb{P}(S_n^* \geq x,\, S_n < x - y).$$

Cette formule est appelée le principe de Réflexion pour la marche aléatoire simple. On pourra obtenir la distribution conjointe de $(S_n,\, \tilde{S_n})$ en fonction de la distribution de S_n. Prenons le cas simple $y = 0$. Puisque :

$$\mathbb{P}(S_n^* \geq x,\, S_n \geq x) = \mathbb{P}(S_n \geq x).$$

en combinant cela avec la formule de Réflexion, on arrive à :

$$2\mathbb{P}(S_n > x) + \mathbb{P}(S_n = x) = \mathbb{P}(S_n^* \geq x).$$

L'analogie avec le mouvement brownien donne la proposition suivante :

Proposition 5. *Si τ est un temps d'arrêt respectivement à la filtration brownienne standard, alors le processus $\{\tilde{B_t} : 0 \leq n < \infty\}$ défini par :*

$$\tilde{B_t} = \begin{cases} B_t & \text{si } t < \tau, \\ B_\tau - (B_t - B_\tau & \text{si } t \geq \tau \end{cases}$$

est un mouvement brownien standard.

Le principe de Réflexion appliqué au mouvement brownien donne :

$$\mathbb{P}(B_t > x + y) = \mathbb{P}(B_t^* \geq x,\, B_t < x - y).$$

Puisque $\frac{B_t}{\sqrt{t}}$ est une normale standard, en substituant $u = x - y$ et $v = y$ dans la formule de Réflexion dans l'ensemble $D = \{(u, v) : u \in \mathbb{R}, v \geq \max(0, u)\}$, on obtient :

$$\mathbb{P}(B_t < u, B_t^* \geq v) = 1 - \phi(\frac{2v - u}{\sqrt{t}}) = \phi(\frac{u - 2v}{\sqrt{t}}).$$

D'où :

$$\mathbb{P}(B_t < u, B_t^* \leq v) = \phi(\frac{u}{\sqrt{t}}) - \phi(\frac{u - 2v}{\sqrt{t}}).$$

En dérivant deux fois, on obtient la densité conjointe de (B_t, B_t^*) :

$$f_{(B_t,\ B_t^*)}(u, v) = \frac{2(2v - u)}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp(-\frac{(2v - u)^2}{2t}).$$

On prend $y = 0$, et on trouve :

$$\mathbb{P}(B_t^* \geq x) = 2\mathbb{P}(B_t > x) = \mathbb{P}(|B_t| > x).$$

La distribution de B_t^* est la meme que celle de $|B_t|$, mais les processus ont des comportements très différents. On peut maintenant calculer la densité du processus maximal :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|B_t| > x) = 2(1 - \phi(\frac{x}{\sqrt{t}})) \quad &\Rightarrow \quad \mathbb{P}(B_t^* \leq x) = 2(\phi(\frac{x}{\sqrt{t}}) - 1) \\ &\Rightarrow \quad f_{B_t^*}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \exp(\frac{-x^2}{2t}). \end{aligned}$$

Pour finir, nous allons calculer la densité de $\tau_a = \inf\{t : B_t = a\}$. Comme on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B_t^* < a) = \mathbb{P}(\tau_a > t) \quad &\Rightarrow \quad \mathbb{P}(\tau_a > t) = 2(\phi(\frac{a}{\sqrt{t}}) - 1) \\ &\Rightarrow \quad f_{\tau_a}(t) = \frac{a}{\sqrt{t^3}}\phi(\frac{a}{\sqrt{t}}). \end{aligned}$$

2.3.3 Invariance

Cette analogie entre le mouvement brownien et les marches aléatoires simples nous amène à nous demander s'il n'existe pas un principe plus général qui convertit des identités pour les marches aléatoires en identités pour le mouvement brownien, et vice-versa. Commencons d'abord par construire l'approximation du mouvement brownien par une interpolation linéaire de marche aléatoire simple non biaisée.

$$S(n, t) = S_n + (t - n)X_{n+1} \text{ où } n < t \leq n + 1.$$

L'approximation du mouvement brownien est définie par : $B_t^{(n)} = \frac{S(n,\ nt)}{\sqrt{n}}$. On vérifie cela en utilisant le théorème central limite :

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(B_t^{(n)} \leq x) = \mathbb{P}(B_t \leq x).$$

En réalité, le principe d'invariance de Donsker nous dit meme plus.

Théorème 15 (Principe d'invariance de Donsker)**.** *Pour toute fonction continue $H : C\,[0,\ 1] \to \mathbb{R}$, la marche aléatoire interpolée et ajustée $\left\{B_t^{(n)}\right\}$ satisfait :*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(H(B_{(.)}^{(n)})) \leq x) = \mathbb{P}(H(B_{(.)}) \leq x).$$

Souvenons nous également que les résultats pour les probabilités de ruine étaient les memes pour la marche aléatoire simple non biaisée et le mouvement brownien. Au fait, toute marche aléatoire non biaisée à variance finie peut etre plongée dans un mouvement brownien.

Théorème 16 (Plongement de Skohorod)**.** *Si X est une variable aléatoire d'espérance nulle de variance σ^2, alors il existe un temps d'arrêt τ tel que :*

$$\mathbb{P}(B_\tau \leq x) = \mathbb{P}(X \leq x)$$

et $\mathbb{E}[\tau] = \sigma^2$.

Proposition 6 (Plongement des marches aléatoires)**.** *Pour toute séquence de variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées $\{X_i : 1 \leq i < \infty\}$ telles que $\mathbb{E}[X_i] = 0$ et $\mathbb{E}[X_i^2] = \sigma^2$, il existe une séquence $\{\tau_i : 1 \leq i < \infty\}$ de variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées positives avec $\mathbb{E}[X_i] = \sigma^2$, telle que la marche aléatoire*

$$S_n = X_1 + X_2 + ...X_n$$

et le processus défini par

$$\tilde{S}_n = B_{\tau_1+\tau_2+\ldots\tau_n}$$

sont équivalents, leurs distributions conjointes sont égales.

Chapitre 3

Calcul stochastique : Intégrale et formules d'Itô, équations différentielles stochastiques

3.1 L'Intégrale d'Itô

3.1.1 Intégration dans $\mathcal{H}^2[0, T]$

L'intégrale d'Itô étend la notion de transformée martingale du temps discret au temps continu. Avant de définir l'intégrale, il faut définir les prérequis pour l'intégrant. Soit $\mathcal{B}$ la tribu de Borel sur $[0, T]$. On prend $\mathcal{F}_t$ la filtration brownienne standard, et $\mathcal{F}_t \times \mathcal{B}$ la tribu engendrée par tous les couples $(A, B) \in \mathcal{F}_t \times \mathcal{B}$. On dit que $f(\cdot, t)$ est mesurable si $f(\cdot, \cdot) \in \mathcal{F}_t \times \mathcal{B}$ et que f est adaptée si $f(\cdot, t) \in \mathcal{F}_t$ pour tout $t \in [0, T]$. L'espace sur lequel on définira notre intégrale est l'espace $\mathcal{H}^2[0, T]$ qui consiste des fonctions mesurables et adaptées f satisfaisant la contrainte d'intégrabilité :

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T f^2(\omega, t)dt\right] < \infty.$$

Pour anticiper la définition de l'intégrale, on va considérer sa valeur dans des cas simples :

$$\int_a^b dB_t = B_b - B_a.$$

Puisqu'on attend que l'intégrale soit linéaire, considérons l'espace $\mathcal{H}_0^2$ le sous-ensemble de $\mathcal{H}^2$ qui consiste des des fonctions de la forme

$$f(\omega, t) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(\omega) 1(t_i < t \leq t_{i+1}).$$

où $a_i \in \mathcal{F}_i$, $\mathbb{E}[a_i^2] < \infty$ et $0 = t_0 < t_1 < ... < t_{n-1} < t_n = T$. Sur $\mathcal{H}_0^2$:

$$I(f)(\omega) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(\omega)(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}).$$

On veut maintenant faire une extension à l'espace $\mathcal{H}^2$, pour cela nous devons savoir que $I : \mathcal{H}_0^2 \to \mathcal{H}^2$ est une fonction continue. Le lemme suivant nous le donne.

Lemme 9 (Isométrie d'Itô)**.** *Pour $f \in \mathcal{H}_0^2$ on a :*

$$||I(f)||_{L^2(dP)} = ||f||_{L^2(dP \times dt)}.$$

L'isométrie d'Ito établit la continuité de I et préserve les distance de $\mathcal{H}_0^2$ vers $L^2(dP)$, de plus toute suite de Cauchy dans $\mathcal{H}_0^2$ est une suite de Cauchy dans $L^2(dP)$.

Lemme 10 (Densité de $\mathcal{H}_0^2$ dans $\mathcal{H}^2$)**.** *Pour tout $f \in \mathcal{H}^2$, il existe une suite $\{f_n\}$ avec $f_n \in \mathcal{H}_0^2$ telle que :*

$$||f - f_n||_{L^2(dP \times dt)} \to 0$$

lorsque $n \to \infty$.

On définit :

$$I(f) = \lim_{n \to \infty} I(f_n)$$

pour une suite $\{f_n\} \subset \mathcal{H}_0^2$ qui converge vers $f \in L^2(dP \times dt)$.

Théorème 17 (Isomètrie d'Itô dans $\mathcal{H}^2$)**.** *Pour $f \in \mathcal{H}^2$, on a*

$$||I(f)||_{L^2(dP)} = ||f||_{L^2(dP \times dt)}.$$

Proposition 7. *Pour tout $b \in \mathcal{H}^2$ et tout $0 \leq s \leq t$:*

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_s^t b(\omega, u) dB_u\right)^2 \mid \mathcal{F}_s\right] = \mathbb{E}\left[\int_s^t b^2(\omega, u) du \mid \mathcal{F}_s\right].$$

L'intégrale d'Itô va nous doter d'une martingale continue. L'idée est d'introduire une variable de temps. On introduit dans ce but la fonction tronquée $m_t \in \mathcal{H}^2$ défini par :

$$m_t(\omega, s) = \begin{cases} 1 & \text{si } s \in [0, t], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On peut maintenant définir le processus stochastique de l'intégrale d'Itô :

$$X_t(\omega) = I(m_t f)(\omega).$$

Théorème 18. *Pour tout $f \in \mathcal{H}^2[0,\, T]$, il existe un processus $\{X_t :\ t \in [0,\, T]\}$ qui est une martingale continue par rapport à la filtration brownienne tel que :*

$$\mathbb{P}(X_t = I(m_t f)) = 1$$

pour tout $t \in [0,\, T]$.

Théorème 19. *Si $f \in \mathcal{H}^2$ est bornée et si ν est un temps d'arret tel que $f(\omega,\, s) = 0$ pour presque tout $\omega \in \{\omega :\ s \leq \nu\}$, alors*

$$X_t(\omega) = \int_0^t f(\omega,\, s)dB_s = 0$$

pour presque tout $\omega \in \{\omega :\ t \leq \nu\}$.

Théorème 20. *Si f et g sont des éléments de $\mathcal{H}^2$ et si ν est un temps d'arret tel que $f(\omega,\, s) = g(\omega,\, s)$ pour presque tout $\omega \in \{\omega :\ s \leq \nu\}$, alors*

$$\int_0^t f(\omega,\, s)dB_s = \int_0^t g(\omega,\, s)dB_s$$

pour presque tout $\omega \in \{\omega :\ t \leq \nu\}$.

3.1.2 Calculs d'intégrales

Problème 1 Nous allons montrer que : $X_t = \int_0^t B_s dB_s = \frac{1}{2}B_t^2 - \frac{1}{2}t$. Calculons d'abord les espérances à droite et à gauche de l'expression pour voir si elles coincident. Par la propriété de martingale de l'intégrale, on a $\mathbb{E}[\int_0^t B_s dB_s] = 0$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\frac{1}{2}B_t^2 - \frac{1}{2}t] &= -\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\mathbb{E}[B_t^2] \\
&= -\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}t = 0.
\end{aligned}$$

Pour la variance, nous allons utiliser l'isométrie d'Itô.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\Big(\int_0^t B_s dB_s\Big)^2] &= \mathbb{E}[\int_0^t B_s^2 s ds] \\
&= \int_0^t \mathbb{E}[B_s^2]ds \\
&= \int_0^t s ds = \frac{1}{2}t^2.
\end{aligned}$$

Si on évalue la variance du coté droit de l'expression :

$$\mathbb{E}[\Big(\frac{1}{2}B_t^2 - \frac{1}{2}t\Big)^2] = \frac{1}{2}t^2.$$

en utilisant $\mathbb{E}[B_t^4] = 3t^2$. Notre vérification de la variance confirme que $f(\omega, s) = B_s(\omega)$ est dans $\mathcal{H}^2$. Notre premier pas dans la construction est de définir $t_i = \frac{iT}{n}$ pour $0 \leq i \leq n$ et :

$$f_n(\omega, t) = \sum_{i=0}^{n-1} B_{t_i} 1(t_i < t \leq t_{i+1}),$$

donc $f_n \in \mathcal{H}_0^2$ nous donne un bon candidat pour une approximation de la fonction f. Montrons la convergence :

$$\begin{aligned} ||f - f_n||^2_{L^2(dP\times dt)} &= \mathbb{E}\left[\int_0^T \sum_{i=0}^{n-1} (B_t - B_{t_i})^2 1(t_i < t \leq t_{i+1} dt\right] \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} (t - t_i) dt \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i)^2 = \frac{1}{2}\frac{T^2}{n} \to 0 \text{ lorsque } n \to \infty. \end{aligned}$$

Une conséquence est que la troncation en temps de la fonction converge également, ce qu'on explicite :

$$||m_t(f - f_n)||_{L^2(dP\times dt)} \to 0.$$

Soit donc $k(t) = \max\{i : \ t_{i+1} \leq t\}$, par la définition de l'intégrale d'Itô dans $\mathcal{H}^2$ on a

$$\begin{aligned} \int_0^T B_s dB_s = I(m_t f) &= \lim_{n\to\infty} I(m_t f_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} \left\{ \sum_{i\leq k(t)} B_{t_i}(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) + B_{t_{k(t)+1}}(B_t - B_{t_{k(t)+1}}) \right\}. \end{aligned}$$

On observe d'abord que :

$$0 \leq \mathbb{E}[B^2_{t_{k(t)+1}}(B_t - B_{t_{k(t)+1}})^2] = t_{k(t)+1}(t - t_{k(t)}) \leq \frac{tT}{n}$$

est asymptotiquement négligeable. On peut écrire le sommant de la facon suivante :

$$B_{t_i}(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) = \frac{1}{2}(B^2_{t_{i+1}} - B^2_{t_i}) - \frac{1}{2}(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2.$$

Ceci implique :

$$\lim_{n\to\infty} I(m_t f_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} B^2_{t_{k(t)+1}} - \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty} \sum_{i\leq k(t)} (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2$$

et puisque $B^2_{t_{k(t)+1}} \to B^2_t$, on obtient :

$$\int_0^T B_s dB_s = \frac{1}{2}B_t^2 - \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{i\leq k(t)} (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2.$$

Pour terminer notre démonstration, il faut montrer que la limite vaut t. Soit :

$$Y_n = \sum_{i\leq k(t)} (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2,$$

alors on a $\mathbb{E}[Y_n] = \frac{k(t)T}{n}$ et par conséquent $\mathbb{E}[|Y_n - t|] \leq \frac{2T}{n}$. De plus :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(B_t - B_s)^4] = 3(t-s)^2 \quad &\Rightarrow \quad Var((B_t - B_s)^2) = 2(t-s)^2 \\ &\Rightarrow \quad Var(Y_n) = 2k(t)(\frac{T}{n})^2 \leq \frac{2tT}{n} \end{aligned}$$

par l'indépendance des sommants.

$$\Rightarrow \quad Y_n \to t \text{ dans } L^2(dP).$$

Problème 2 Dans ce problème, nous allons calculer la variance des intégrale suivantes en faisant usage de l'isométrie d'Itô :

$$\int_0^t |B_s|^{\frac{1}{2}} dB_s \text{ et } \int_0^t (B_s + s)^2 dB_s.$$

Nous montrons d'abord qu'ils sont dans $\mathcal{H}^2$:

$$\mathbb{E}[\int_0^t |B_s| ds] = \int_0^t \mathbb{E}[|B_s|]ds \text{ par Fubini-Tonelli}$$

Comme B_s suit une loi $\mathcal{N}(0,\, s)$, l'espérance de de la valeur absolue est finie, donc :

$$\int_0^t \mathbb{E}[|B_s|]ds \leq \int_0^t C ds \leq Ct < \infty.$$

Par la propriété de martingale, on a : $\mathbb{E}[\int_0^t |B_s|^{\frac{1}{2}} dB_s] = 0$.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\int_0^t (B_s + s)^4 ds] &= \int_0^t \mathbb{E}[B_s^4 + s^4 + 4B_s^3 s + 6B_s^2 s^2 - 4B_s s^3] ds \\ &= \int_0^t \left(\mathbb{E}[B_s^4] + 6s^2\mathbb{E}[B_s^2] + s^4\right) ds \\ &= t^3 + \frac{3}{2}s^4 + \frac{t^5}{5} < \infty. \end{aligned}$$

De meme, l'espérance du processus est nulle. Calculons maintenant leurs variances :

$$\mathbb{E}[\Big(\int_0^t |B_s|^{\frac{1}{2}}\Big)^2 dB_s] = \mathbb{E}[\int_0^t |B_s| ds].$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\Big(\int_0^t (B_s+s)^2\Big)^2 dB_s] &= \mathbb{E}[\int_0^t (B_s+s)^4 ds] \\ &= t^3 + \frac{3}{2}s^4 + \frac{t^5}{5}.\end{aligned}$$

Problème 3 On va calculer les espérances et variances de ces variables aléatoires :

$$\int_0^t B_s ds \text{ et } \int_0^t B_s^2 ds.$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\int_0^t B_s ds] = \int_0^t \mathbb{E}[B_s] ds = 0\mathbb{E}[\Big(\int_0^t B_s ds\Big)^]] &= \mathbb{E}[\int_0^t B_s ds \int_0^t B_u du] \\ &= \int_0^t \int_0^t \mathbb{E}[B_s B_u] dsdu \\ &= \int_0^t \int_0^t \min(s,\, u) dsdu \\ &= \frac{t^3}{2}.\end{aligned}$$

$$\mathbb{E}[\int_0^t B_s^2 ds] = \int_0^t \mathbb{E}[B_s^2] ds = \frac{t^2}{2} Var(\int_0^t B_s^2 ds) = \mathbb{E}[(\int_0^t B_s^2 ds)^2] - \frac{t^4}{4}.$$

$$\mathbb{E}[(\int_0^t B_s^2 ds)^2] = \int_0^t \int_0^t \mathbb{E}[B_s^2 B_u^2] duds.$$

3.2 Extension de l'intégrale d'Itô : localisation

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, notre théorie de l'intégration stochastique ne devrait pas avoir de problèmes avec

$$\int_0^T f(B_t) dB_t.$$

Or la contrainte de l'espace $\mathcal{H}^2$ n'est pas vérifiée pour des fonctions très régulières comme $f(x) = \exp(x^4)$. Il faut donc trouver une contrainte moins restrictive. La méthode de localisation fera l'affaire, et étendra l'intégrale d'Itô à une classe de fonctions englobant les fonctions continues.

3.2.1 Intégrale d'Itô dans $\mathcal{L}^2_{LOC}$

On considère la classe $\mathcal{L}^2_{LOC}$ des fonctions adaptées et mesurables $f : \Omega \times [0,\, T] \longmapsto \mathbb{R}$ telles que :

$$\mathbb{P}\left(\int_0^T f^2(\omega,\, t)dt < \infty\right) = 1.$$

Cette classe de fonctions contient $\mathcal{H}^2$.

Définition 12. *Une suite croissante de temps d'arrêts est appelée une $\mathcal{H}^2[0,\, T]$ suite localisante pour f si*

$$f_n(\omega,\, t) = f(\omega,\, t)1(t \leq \nu_n) \in \mathcal{H}^2[0,\, T] \text{ pour tout } n$$

et que

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{\omega :\ \nu_n = T\}\right) = 1.$$

Le résultat suivant nous indique que toute fonction $f \in \mathcal{L}^2_{LOC}$ possède une suite localisante.

Proposition 8. *Pour toute fonction $f \in \mathcal{L}^2_{LOC}[0,\, T]$, la suite définie par :*

$$\tau_n = \inf\left\{s :\ \int_0^s f^2(\omega,\, t)dt \geq n \text{ ou } s \geq T\right\}$$

est une $\mathcal{H}^2[0,\, T]$ suite localisante pour f.

Pour la construction de l'intégrale, on prend $f \in \mathcal{L}^2_{LOC}[0,\, T]$ et soit $\{\nu_n\}$ une suite localisante pour f. Ensuite, pour tout n, on définit $\left\{X_{t,\, n}\right\}$ comme l'unique martingale sur $[0,\, T]$ qui est la version intégrale de $I(m_t g)$ où $g(\omega,\, s) = f(\omega,\, s)1(s \leq \nu_n(\omega))$. L'intégrale d'Itô sera le processus donné par la limite des processus $\left\{X_{t,\, n}\right\}$ quand $n \to \infty$. Plus précisément, on montre qu'il existe un unique procesus continu $\{X_t :\ 0 \leq t \leq T\}$ tel que

$$\mathbb{P}\left(X_t = \lim_{n\to\infty} X_{t,\, n}\right) = 1 \text{ pour tout } t \in [0,\, T]$$

et on définit notre intégrale d'Itô de f en posant :

$$\int_0^T f(\omega,\, s)dB_s = X_t(\omega) \text{ pour } t \in [0,\, T].$$

Nous devrons bien entendu montrer la convergence des processus, ce qui sera réalisé par la consistence séquentielle, et nous montrerons que l'intégrale d'Itô est indépendante du choix de la suite localisante, et pour lever la derniére ambiguité, si 2 fonctions dans $\mathcal{L}^2_{LOC}$ sont égales alors leurs intégrales d'Itô le sont aussi. Les propositions qui suivront règlent ces questions là.

Proposition 9. *Pour tout $f \in \mathcal{L}^2_{LOC}$ et toute suite localisante $\{\nu_n\}$, si $\left\{X_{t,\ n}\right\}$ est la version martingale continue des intégrales d'Itô $I(m_t g)$, alors pour tout $t \in [0,\ T]$ et $n \geq m$ on a :*

$$X_{t,\ n} = X_{t,\ m} \text{ pour presque tout } \omega \in \{\omega :\ t \leq \nu_m\}\,.$$

Proposition 10. *Il existe un processus continu $\{X_t :\ 0 \leq t \leq T\}$ tel que*

$$\mathbb{P}\left(X_t = \lim_{n\to\infty} X_{t,\ n}\right) = 1 \text{ pour tout } t \in [0,\ T].$$

Proposition 11. *Si ν_n et $\hat{\nu_n}$ sont localisantes pour $f \in \mathcal{L}^2_{LOC}$, alors les martingales continues correspondant aux intégrales d'Itô $I(m_t f(\omega,\ s)1(s \leq \nu_n))$ et $I(m_t f(\omega,\ s)1(s \leq \hat{\nu_n}))$ satisfont*

$$\lim_{n\to\infty} X_{t,n} = \lim_{n\to\infty} \hat{X_{t,n}}$$

avec probabilité 1 pour tout $t \in [0,\ T]$.

Proposition 12. *Si f et g sont des éléments de $\mathcal{L}^2_{LOC}$ et si ν est un temps d'arrêt tel que $f(\omega,\ s) = g(\omega,\ s)$ pour tout $0 \leq s \leq \nu$, alors les intégrales*

$$X_t(\omega) = \int_0^t f(\omega,\ s)dB_s \text{ et } Y_t(\omega) = \int_0^t g(\omega,\ s)dB_s$$

sont égales pour presque tout $\omega \in \{\omega :\ t \leq \nu\}$.

Nous allons maintenant écrire toute fonction continue d'un mouvement brownien comme limite d'une somme de Riemann.

Théorème 21 (Représentation riemanienne)**.** *Pour toute fonction continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, si on prend la partition de $[0,\ T]$ donnée par $t_i = \frac{iT}{n}$ pour $0 \leq i \leq n$, alors on a*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(B_{t_{i-1}})(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) = \int_0^T f(B_s)dB_s$$

où la convergence est en probabilité.

La proposition suivante donne une autre représentation riemanienne et montre que l'intégrale d'Itô nous donne des processus gaussiens si l'intégrant est déterministe.

Proposition 13. *Si $f \in C[0, T]$, alors le processus défini par*

$$X_t = \int_0^t f(s) dB_s \; t \in [0, T]$$

est un processus gaussien à incréments indépendants, d'espérance nulle et de fonction de covariance

$$Cov(X_s, X_t) = \int_0^{s \wedge t} f^2(u) du.$$

De plus, si on prend la partition de $[0, T]$ donnée par $t_i = \frac{iT}{n}$ pour $0 \leq i \leq n$ et on choisit t_i^* tel que $t_{i-1} \leq t_i^* \leq t_i$ pour $0 \leq i \leq n$, alors on a :

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(t_i^*)(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) = \int_0^T f(s) dB_s$$

où de nouveau la convergence est en probabilité.

Un corollaire qui en découle est :

Proposition 14. *Si une fonction continue $f : [0, \infty] \to \mathbb{R}$ satisfait $f(s) > 0$ pour tout $s > 0$ et que*

$$\int_0^t f^2(s) ds \to \infty \text{ lorsque } t \to \infty.$$

Soit

$$\tau_t = \inf \left\{ u : \int_0^t f^2(s) ds \geq t \right\} \text{ et } Y_t = \int_0^{\tau_t} f(s) dB_s$$

alors le processus $\{Y_t : 0 \leq t < \infty\}$ est un mouvement brownien standard.

Si dans $\mathcal{H}^2$, les fonctions sont des martingales, dans $\mathcal{L}^2_{LOC}$ ce n'est plus le cas, mais ce sont des martingales locales, terme dont on donnera la définition ci-après.

3.2.2 Martingales locales et lien avec $\mathcal{L}^2_{LOC}$

Définition 13. *Si un processus $\{M_t\}$ est adapté à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}$ pour $0 \leq t < \infty$, alors $\{M_t : \ 0 \leq t < \infty\}$ est une martingale locale s'il existe une suite croissante $\{\tau_k\}$ de temps d'arrêt avec la propriété que $\tau_k \to \infty$ avec probabilité 1 lorsque $k \to \infty$ et telle que pour tout k le processus défini par*

$$M_t(k) = M_{t\wedge\tau_k} - M_0 \text{ pour } t \in [0, \infty)$$

est une $\mathcal{F}_t$-martingale.

Théorème 22 (Intégrales d'Itô comme martingales locales)**.** *Pour toute fonction $f \in \mathcal{L}^2_{LOC}$, il existe une martingale locale continue X_t telle que*

$$\mathbb{P}\left(X_t(\omega) = \int_0^t f(\omega, s)dB_s\right) = 1.$$

De plus, on peut prendre la suite localisante requise :

$$\tau_n(\omega) = \inf\left\{t : \ \int_0^t f^2(\omega, s) \geq n \text{ ou } t \geq T\right\}.$$

Nous allons donner quelques propriétés des martingales locales et des conditions suffisantes pour qu'elles soient des martingales.

Proposition 15. *Si X_t est une martingale locale continue et τ est un temps d'arrêt, alors $Y_t = X_{t\wedge\tau}$ est aussi une martingale locale.*

Proposition 16. *Si X_t est une martingale locale continue et B est une constante telle que $|X_t| \leq B$ pour tout $t \geq 0$, alors X_t est une martingale.*

Proposition 17. *Toute martingale locale positive $\{X_t : \ 0 \leq t \leq T\}$ avec $\mathbb{E}[|X_0|] < \infty$ est aussi une surmartingale, et si*

$$\mathbb{E}[X_T] = \mathbb{E}[X_0]$$

alors $\{X_t : \ 0 \leq t \leq T\}$ est une martingale.

Le théorème de Doob nous donne la préservation d'une martingale avec l'introduction d'un temps d'arrêt. Nous allons voir que c'est le cas avec une filtration plus petite, qui a des avantages techniques et conceptuels plus avantageux. Elle va jouer un rôle pour représenter une martingale continue comme un changement de temps du mouvement brownien.

3.2.3 Changements de temps

Définition 14. *Si τ est un temps d'arrêt adapté à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}$, on définit la tribu de temps d'arrêt $\{\mathcal{F}_\tau\}$ en posant*

$$\mathcal{F}_\tau = A \in \bigcup_{t=0}^{\infty} \mathcal{F}_t : \ \{A \cap \tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t \text{ pour tout } t \geq 0.$$

Proposition 18 (Identité du temps d'arrêt)**.** *Si $\{X_t,\mathcal{F}_t\}$ est une martingale continue bornée, et ν et τ des $\mathcal{F}_t$-temps d'arrêts, alors*

$$\nu \leq \tau \Rightarrow X_\nu = \mathbb{E}[X_\tau|\mathcal{F}_\nu].$$

La prochaine proposition découle de l'identité précédente, elle nous permet entre autres de calculer la densité du temps requis pour le mouvement brownien de taper une ligne oblique.

Proposition 19. *Pour toute martingale continue bornée $\{X_t,\mathcal{F}_t\}$ et tout $\mathcal{F}_t$-temps d'arrêt τ, le processus stoppé $\{X_{t\wedge\tau},\mathcal{F}_{t\wedge\tau}\}$ est aussi une martingale.*

Si $\{\tau_t : \ 0 \leq t < \infty\}$ est un processus tel que chaque τ_t est un $\mathcal{F}_t$-temps d'arrêt continu à droite, croissant, alors on dit que c'est un $\mathcal{F}_t$-changement de temps. La proposition suivante nous donne la préservation d'une martingale locale si on change t par τ_t.

Proposition 20. *Supposons que $\{M_t,\mathcal{F}_t\}$ est une martingale locale continue et supposons que τ_t est un $\mathcal{F}_t$-changement de temps. Si $M_t(\omega)$ est constant sur l'intervalle $[\tau_{u-}(\omega), \tau_u(\omega)]$ pour tout $u \geq 0$ et $\omega \in \Omega$, alors le processus $\{M_{\tau_t}, \mathcal{F}_{\tau_t}\}$ est de nouveau une martingale locale.*

3.3 Formules d'Itô

3.3.1 Premiers lemmes d'Itô

Dans le calcul intégral de Leibniz et Newton, nous avons souvent recours au théorème fondamental de l'analyse. Dans le calcul d'Itô, nous allons développer un théorème analogue, qui nous fournira diverses interprétations probabilistes.

Théorème 23 (Formule d'Itô - Cas le plus simple)**.** *Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a une dérivée seconde continue, alors*

$$f(B_t) = f(0) + \int_0^t f'(B_s)dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(B_s)ds.$$

La différence avec le théorème fondamental usuel est la présence de la seconde intégrale. Les deux intégrales capturent des aspects différents du processus $f(B_t)$. La première intégrale a une espérance nulle, donc c'est la seconde intégrale qui rend compte du 'drift' (ou dérive) du processus, tandis que la première va nous informer sur la variabilité locale. La formule d'Itô a également une interprétation comme décomposition de $f(B_t)$ en bruit et signal. Cette première formule n'est que le commencement d'une longue chaîne de formules d'Itô. Si on prend une fonction $F \in C^2(\mathbb{R})$ pour laquelle $F' = f$ et $F(0) = 0$, la formule d'Itô donne :

$$\int_0^t f(B_s)dB_s = F(B_t) - \frac{1}{2}\int_0^t f'(B_s)ds.$$

Le coté droit de l'expression peut être évalué pour chaque chemin $\{B_s(\omega)\}$, ce qui nous donne une nouvelle interprétation de l'intégrale d'Itô. Ceci peut être très intéressant lorsqu'il faut simuler des processus définis par des intégrales stochastiques, car sinon on devrait prendre une approximation riemanienne en espérant que celle-ci décrive correctement le comportement de l'intégrale. Appliquons tout de suite ceci à la fonction $f(B_s) = B_s$, ce qui nous donne :

$$\int_0^t B_s dB_s = \frac{1}{2}B_t^2 - \frac{1}{2}t$$

ce qu'on avait déja prouvé auparavant, mais avec bien plus de difficulté. Nous allons maintenant énoncer la formule d'Itô spatio-temporelle et en donner une démonstration personnelle.

Théorème 24 (Formule d'Itô avec variable de temps et d'espace)**.** *Pour toute fonction $f \in C^{1,2}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$, on a la représentation*

$$f(t,\, B_t) = f(0,\, 0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s,\, B_s)dB_s + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s,\, B_s)ds + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s,\, B_s)ds.$$

Preuve. *On suppose sans perte de généralité que f est à support compact dans $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$. Soit la subdivision $t_i = \frac{it}{n}$ pour $0 \le i \le n$. On commence par écrire une somme télescopique :*

$$f(t,\, B_t) - f(0,\, 0) = \sum_{i=1}^{n} \left(f(t_i,\, B_{t_i}) - f(t_{i-1},\, B_{t_{i-1}}) \right).$$

Rappelons le développement limité de Taylor de $f(t,\, y)$ autour du point $(s,\, x)$, qui s'écrit :

$$f(s,\, x) + (t-s)\frac{\partial f}{\partial t}(s,\, x) + (y-x)\frac{\partial f}{\partial x}(s,\, x) + \frac{1}{2}(y-x)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s,\, x) + r(s,\, t,\, x,\, y).$$

Le reste satisfait

$$|r(s,\, t,\, x,\, y)| \leq (y-x)^2 h(s,\, t,\, x,\, y) + (t-s)k(s,\, t,\, x,\, y)$$

avec h *et* k *bornées, uniformément continues et égales à 0 lorsque* $x = y$ *et* $s = t$*. On peut donc écrire notre somme télescopique comme somme de 3 termes* A_n*,* B_n *et* C_n*, qui vérifient :*

$$A_n = \sum_{i=1}^{n} \left((t_i - t_{i-1}) \frac{\partial f}{\partial t}(t_{i-1},\, B_{t_{i-1}}) + (B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) \frac{\partial f}{\partial x}(t_{i-1},\, B_{t_{i-1}}) \right),$$

$$B_n = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t_{i-1},\, B_{t_{i-1}}),$$

$$|C_n| \leq (B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2 h(t_i,\, t_{i-1},\, B_{t_i},\, B_{t_{i-1}}) + (t_{i-1} - t_i) k(t_i,\, t_{i-1},\, B_{t_i},\, B_{t_{i-1}}).$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1}) \frac{\partial f}{\partial t}(t_{i-1},\, B_{t_{i-1}}) = \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s,\, B_s) ds$$

par la représentation riemanienne ordinaire.

$$\sum_{i=1}^{n} (B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) \frac{\partial f}{\partial x}(t_{i-1},\, B_{t_{i-1}}) \xrightarrow{\mathbb{P}} \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s,\, B_s) dB_s$$

par la représentation riemanienne de l'intégrale stochastique.
D'où : $A \xrightarrow{\mathbb{P}} \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s,\, B_s) ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s,\, B_s) dB_s$.

$$B_n = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1}) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t_{i-1},\, B_{t_{i-1}}) + \widetilde{B_n}$$

où :

$$\widetilde{B_n} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \left((B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2 - (t_i - t_{i-1}) \right) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t_{i-1},\, B_{t_{i-1}}).$$

On a la convergence vers une intégrale ordinaire :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1}) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t_{i-1},\, B_{t_{i-1}}) = \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s,\, B_s) ds.$$

$$\mathbb{E}[\widetilde{B_n}^2] = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}\left((B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2 - (t_i - t_{i-1})\right)^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t_{i-1},\, B_{t_{i-1}})\right)^2$$

par l'orthogonalité des sommants. On a la majoration suivante :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\widetilde{B_n}^2] &\leq \frac{1}{4}||\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t_{i-1},\, B_{t_{i-1}})||_\infty^2 \sum_{i=1}^{n} 2\frac{t^2}{n^2}\\ &= \frac{t^2}{2n}||\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t_{i-1},\, B_{t_{i-1}})||_\infty^2\end{aligned}$$

où on a utilisé le fait que $B_{t_i} - B_{t_{i-1}}$ suit une loi $\mathcal{N}(0,\, \frac{t}{n})$ implique que $Var((B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2) = 2\frac{t^2}{n^2}$. Pour montrer la convergence en probabilité vers 0, nous utilisons l'inégalité de Markov :

$$\mathbb{P}(\widetilde{B_n}^2 \geq \epsilon) \leq \frac{\mathbb{E}[\widetilde{B_n}^2]}{\epsilon}.$$

Il ne nous reste plus qu'à estimer C_n. Nous commencons par utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[|C_n|] &\leq \sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}[(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^4]^{\frac{1}{2}}\mathbb{E}[h^2(t_i,\, t_{i-1},\, B_{t_i},\, B_{t_{i-1}})]\\ &+ \mathbb{E}[(t_{i-1} - t_i)k(t_i,\, t_{i-1},\, B_{t_i},\, B_{t_{i-1}})]\end{aligned}$$

La deuxième terme converge vers 0 car la fonction k est bornée.

$$\mathbb{E}[(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^4] = 3\frac{t^2}{n^2} \Rightarrow \mathbb{E}[(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^4]^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{1}{2}}\frac{t}{n}.$$

On va utiliser la continuité uniforme de h maintenant :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[h^2(t_i,\, t_{i-1},\, B_{t_i},\, B_{t_{i-1}})] &\leq \epsilon^2 + ||h||_\infty^2\mathbb{P}(|B_{t_i} - B_{t_{i-1}}| \geq \delta)\\ &\leq \epsilon^2 + ||h||_\infty^2\frac{\mathbb{E}[|B_{t_i} - B_{t_{i-1}}|^2]}{\delta^2} = \epsilon^2 + ||h||_\infty^2\delta^{-2}\frac{t}{n}\end{aligned}$$

par l'inégalité de Chebyshev. En réunissant le tout, on obtient :

$$\mathbb{E}[|C_n|] \leq n3^{\frac{1}{2}}\frac{t}{n}(\epsilon^2 + ||h||_\infty^2\delta^{-2}\frac{t}{n})^{\frac{1}{2}} \to 0.$$

En appliquant de nouveau l'inégalité de Markov, on obtient la convergence en probabilité de C_n vers 0. On a donc finalement démontré que :

$$\begin{aligned}f(t,\, B_t) - f(0,\, 0) &= \lim_{n\to\infty}(A_n + B_n + C_n)\\ &= \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s,\, B_s)dB_s + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s,\, B_s)ds + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s,\, B_s)ds.\end{aligned}$$

La proposition suivante donne la connexion entre la théorie des martingales et la théorie des équations aux dérivées partielles, et rend compte de la puissance de la formule d'Itô, qui nous a crée ce pont entre ces deux branches.

Proposition 21. *Si $f \in C^{1,2}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ et*

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2},$$

alors $X_t = f(t,\, B_t)$ est une martingale locale. De plus, si

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T \frac{\partial f}{\partial x}^2 (t,\, B_t)dt\right] < \infty,$$

alors X_t est une martingale sur $0 \leq t \leq T$.

Nous allons pratiquer un peu cette proposition et voir que ces applications sont nombreuses et riches en conséquences. Considérons d'abord une martingale bien connue :

$$M_t = \exp(\alpha B_t - \alpha^2 \frac{t}{2}).$$

Puisqu'on peut écrire $M_t = f(t,\, B_t)$, où $f(t,\, x) = \exp(\alpha x - \alpha^2 \frac{t}{2})$. Par un calcul direct :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} &= -\frac{1}{2}\alpha^2 f \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \alpha^2 f \\ &\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}. \end{aligned}$$

La condition de la proposition étant satisfaite, on a que M_t est une martingale locale. La condition de $\mathcal{H}^2$ est également vérifiée, donc on retrouve la propriété de martingale de notre processus.
La proposition se révèle particulièrement utile lorsqu'on doit créer de nouvelles martingales pour résoudre des problèmes. Supposons qu'on veuille calculer $Cov(\tau,\, B_\tau)$ où comme d'habitude $\tau = \inf\{t :\; B_t = A \text{ ou } B_t = -B\}$ pour $A > 0$ et $B > 0$. On sait déjà que $\mathbb{E}[B_\tau] = 0$, on a juste besoin de calculer $\mathbb{E}[\tau B_\tau]$. L'idée est de trouver une martingale M_t de la forme $f(t,\, B_t)$ où $f(t,\, x) = tx + g(t,\, x)$ et pour lequel on saurait calculer $\mathbb{E}[g(\tau,\, B_\tau)]$. Considérons alors :

$$g(t,\, x) = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

Nous en déduisons les valeurs a, b, c et d en posant la condition d'EDP - martingale :

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial t} &= x \text{ et } -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -3ax - b \\ &\Rightarrow a = -\frac{1}{3} \text{ et } b = 0.\end{aligned}$$

On peut choisir arbitrairement $c = d = 0$, aucune contrainte n'étant imposée sur eux. Comme $M_{t\wedge\tau}$ est bornée et $\mathbb{E}[M_\tau] = 0$, on a finalement :

$$Cov(\tau,\, B_\tau) = \mathbb{E}[\tau B_\tau] = \frac{1}{3}\mathbb{E}[B_\tau^3]$$

et en utilisant notre vieille formule $\mathbb{P}(B_\tau = A) = \frac{B}{A+B}$, on trouve enfin

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[B_\tau^3] &= \frac{A^3B}{A+B} - \frac{B^3A}{A+B} = AB(A-B) \\ &\Rightarrow Cov(\tau,\, B_\tau) = \frac{1}{3}AB(A-B).\end{aligned}$$

Enfin, comme dernier exemple, nous allons revenir à notre problème de ruine relié à un mouvement brownien, on définit le processus suivant :

$$X_t = \mu t + \sigma B_t.$$

On appelle ce processus mouvement browien avec drift constant μ et variance σ^2. Nous voulons déterminer $\mathbb{P}(X_\tau = A)$ où de nouveau

$$\tau = \inf\{t :\ B_t = A \text{ ou } B_t = -B\} \text{ avec } A > 0 \text{ et } B > 0.$$

On veut trouver une fonction $h(\cdot)$ sur l'intervalle $[-B,\, A]$ telle que le processus $M_t = h(X_t)$ soit une martingale bornée. On veut aussi que $h(A) = 1$ et $h(-B) = 0$. L'identité du temps d'arrêt nous dit :

$$\mathbb{E}[M_0] = \mathbb{E}[M_\tau] \text{ et } \mathbb{P}(X_\tau = A) = h(0),$$

puisque $\mathbb{E}[M_0] = h(0)$ et $\mathbb{P}(X_\tau = A) = \mathbb{E}[M_\tau]$. On procède de la même manière en imposant la condition d'EDP-martingale à la fonction
$f(t,\, x) = h(\mu t + \sigma x)$.

$$f_t(t,\, x) = \mu h'(\mu t + \sigma x) \text{ et } f_{xx}(t,\, x) = \sigma^2 h''(\mu t + \sigma x).$$

On obtient une équation différentielle ordinaire pour h, qui est la suivante :

$$h''(x) = -\left(\frac{2\mu}{\sigma^2}\right) h'(x) \text{ avec } h(A) = 1 \text{ et } h(-B) = 0.$$

La solution est :

$$h(x) = \frac{\exp(\frac{-2\mu x}{\sigma^2}) - \exp(\frac{2\mu B}{\sigma^2})}{\exp(\frac{-2\mu A}{\sigma^2}) - \exp(\frac{2\mu B}{\sigma^2})}.$$

D'où :

$$\mathbb{P}(X_\tau = A) = \frac{\exp(\frac{2\mu B}{\sigma^2}) - 1}{\exp(\frac{-2\mu(A+B)}{\sigma^2}) - 1}.$$

3.3.2 Formule d'Itô : extension vectorielle et fonctions de processus

Nous allons utiliser une notation qui est totalement justifiée. Si

$$X_t = X_0 + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s,\, B_s)dB_s + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s,\, B_s)ds + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s,\, B_s)ds,$$

nous écrirons

$$dX_t = \frac{\partial f}{\partial x}(t,\, B_t)dB_t + \frac{\partial f}{\partial t}(t,\, B_t)dt + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,\, B_t)dt.$$

Le mouvement brownien dans $\mathbb{R}^d$ est défini par :

$$\vec{B}_t = (B_t^1,\, B_t^2 ... B_t^d),$$

où les processus uni-dimensionnels $\left\{B_t^k :\ 0 \leq t < \infty\right\}$ sont des mouvement browniens standards indépendants.
Voici la formule d'Itô dans le cas vectoriel.

Théorème 25 (Formule d'Itô - Version vectorielle)**.** *Si $f \in C^{1,2}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d)$ et $\vec{B}_t$ est un mouvement brownien standard dans $\mathbb{R}^d$, alors*

$$df(t,\, \vec{B}_t) = f_t(t,\, \vec{B}_t)dt + \nabla f(t,\, \vec{B}_t) \cdot d\vec{B}_t + \frac{1}{2}\Delta f(t,\, \vec{B}_t)dt.$$

On a également la condition d'EDP-martingale dans ce cadre d'étude.

Proposition 22. *Si $f \in C^{1,2}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d)$ et $\vec{B}_t$ est un mouvement brownien standard dans $\mathbb{R}^d$, alors $M_t = f(t,\, \vec{B}_t)$ est une martingale locale si :*

$$f_t(t,\, \vec{x}) = -\frac{1}{2}\Delta f(t,\, \vec{x}).$$

Si un processus nous est donné comme intégrale stochastique qu'on réecrit avec notre notation

$$dX_t = a(\omega,\, t)dt + b(\omega,\, t)dB_t,$$

il est naturel de définir :

$$\int_0^t f(\omega,\, s)a(\omega,\, s)ds + \int_0^t f(\omega,\, s)b(\omega,\, s)dB_s,$$

à la condition que $f(\omega,\, s)$ est adaptée et vérifie les contraintes d'intégrabilité

- $f(\omega,\, s)a(\omega,\, s) \in L^1(dt)$ pour tout ω dans un ensemble de probabilité 1.
- $f(\omega,\, s)b(\omega,\, s) \in \mathcal{L}^2_{LOC}$.

Si $g(t,\, y)$ est une fonction régulière, nous voulons trouver une écriture pour $Y_t = g(t,\, X_t)$.

Considérons dans un premier temps le mouvement brownien avec drift et variance :

$$dX_t = \mu dt + \sigma dB_t,\; X_0 = 0.$$

On peut récrire $Y_t = f(t,\, X_t) = g(t,\, B_t)$ avec $g(t,\, x) = f(t,\, \mu t + \sigma x)$. Appliquons la formule d'Itô à cette dernière représentation.

$$dY_t = g_t(t,\, B_t)dt + g_x(t,\, B_t)dB_t + \frac{1}{2}g_{xx}(t,\, B_t)dt,$$

et la règle de la chaine donne

$$\begin{aligned} g_t(t,\, x) = f_t(t,\, \mu t + \sigma x) + \mu f_x(t,\, \mu t + \sigma x), \\ g_x(t,\, x) = \sigma f_x(t,\, \mu t + \sigma x) \text{ et} \\ g_{xx}(t,\, x) = \sigma^2 f_{xx}(t,\, \mu t + \sigma x). \end{aligned}$$

Donc, en fonction de f :

$$\begin{aligned} dY_t &= f_t(t,\, X_t) + \mu f_x(t,\, X_t)dt + \sigma f_x(t,\, X_t)dB_t + \frac{1}{2}\sigma^2 f_{xx}(t,\, X_t)dt \\ &= f_t(t,\, X_t)dt + f_x(t,\, X_t)dX_t + \frac{1}{2}\sigma^2 f_{xx}(t,\, X_t)dt. \end{aligned}$$

$\cdot$	dt	dB_t
dt	0	0
dB_t	0	dt

TAB. 3.1 – Table de multiplication pour la Box algèbre

3.3.3 Formule d'Itô générale et variation quadratique

On va expliciter une règle, qu'on appelle la 'Box algebra', qui nous permettra d'écrire la dernière équation sans les calculs qu'on a effectué. C'est une algèbre de l'ensemble des combinaisons linéaires des symboles dt et dB_t. Dans cette algèbre, les fonctions adaptées sont vues comme des scalaires et l'addition est usuelle. Le produit, quant à lui, est calculé avec la table de multiplication suivante.

Calculons le produit de deux éléments dans l'algèbre :

$$\begin{aligned}(a\ dt + b\ dB_t)\cdot(\alpha dt + \beta\ dB_t) &= a\alpha dt\cdot dt + a\beta dt\cdot dB_t\\ &+ b\alpha dB_t\cdot dt + b\beta dB_t\cdot dB_t\\ &= b\beta dt.\end{aligned}$$

En revenant au mouvement brownien avec drift, on a : $dX_t \cdot dX_t = \sigma^2 dt$, notre formule d'Itô s'écrit finalement

$$df(t,\,X_t) = f_t(t,\,X_t)dt + f_x(t,\,X_t)dX_t + \frac{1}{2}f_{xx}(t,\,X_t)dX_t\cdot dX_t,$$

qui est sans doute plus facile à retenir et plus intuitive. Nous allons voir que ces identités sont valables pour des processus standards, notion qu'on définit maintenant.

Définition 15. *On dit qu'un processus $\{X_t :\ 0 \le t \le T\}$ est un processus standard si X_t a la représentation intégrale :*

$$X_t = x_0 + \int_0^t a(\omega,s)ds + \int_0^t b(\omega,s)dB_s \text{ pour } 0 \le t \le T$$

où $a(\cdot,\cdot)$ et $b(\cdot,\cdot)$ sont des processus mesurables, adaptés qui satisfont les conditions d'intégrabilité :

$$\mathbb{P}\left(\int_0^t |a(\omega,s)|ds < \infty\right) = 1 \text{ et } \mathbb{P}\left(\int_0^t b^2(\omega,s)ds < \infty\right) = 1.$$

Théorème 26 (Formule d'Itô pour les processus standards)**.** *Si $f \in C^{1,2}(\mathbb{R}^+\times \mathbb{R}$ et $\{X_t :\ 0 \leq t \leq T\}$ est un processus standard avec la représentation intégrale*

$$X_t = \int_0^t a(\omega,s)ds + \int_0^t b(\omega,s)dB_s,\ 0 \leq t \leq T,$$

alors on a

$$\begin{aligned} f(t,\ X_t) &= f(0,\ 0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s,\ X_s)dX_s \\ &+ \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s,\ X_s)ds + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s,\ X_s)b^2(\omega,s)ds, \end{aligned}$$

ou, de facon équivalente,

$$df(t,\ X_t) = f_t(t,\ X_t)dt + f_x(t,\ X_t)dX_t + \frac{1}{2}f_{xx}(t,\ X_t)dX_t \cdot dX_t.$$

C'est la même formule qu'on avait trouvé pour le mouvement brownien avec drift. Nous allons voir bientot que le second terme en ds a un lien avec la variation quadratique et nous permettra une meilleure compréhension de cette intégrale. La formule d'Itô pour une fonction de deux processus est similaire avec des dérivées croisées qui apparaissent, et nous permet d'obtenir la règle du produit pour l'intégration stochastique, en prenant $f(x,\ y) = xy$. Dans ce cas, $f_{xx} = 0$, $f_{yy} = 0$ et $f_{xy} = 1$. On trouve :

$$X_tY_t - X_0Y_0 = \int_0^t Y_s ds + \int_0^t X_s ds + \int_0^t b(\omega,s)\beta(\omega,s)ds$$

On avait déjà rencontre la notion de variation quadratique informellement lors du calcul de $\int B_s dB_s$, on avait

$$\sum_{i=1}^{n}(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2 \xrightarrow{\mathbb{P}} t$$

Il nous faut quelques définitions préalables. Un ensemble ordonné fini de temps $\{t_0 = 0 \leq t_1 ... \leq t_n = t\}$ est une partition de $[0,\ t]$. Si π est une partition, $\mu(\pi)$ est la longueur du plus grand écart entre toute paire de temps successifs formant la partition π. La π-variation quadratique d'un processus $\{X_t\}$ est la variable aléatoire

$$\mathcal{Q}_\pi(X_t) = \sum_{i=1}^{n}(X_{t_i} - X_{t_{i-1}})^2.$$

S'il existe un processus $\{V_t\}$ tel que $\mathcal{Q}_{\pi_n}(X_t)$ converge en probabilité vers V_t pour toute suite de partitions $\{\pi\}$ telles que $\mu(\pi) \overset{n\to\infty}{\rightarrow} 0$, alors on dit que $\{V_t\}$ est la variation quadratique de $\{X_t\}$. Quand la variation quadratique existe, elle est dénotée $\langle X \rangle_t$.

Théorème 27 (Variation quadratique d'un processus standard)**.** *Si* $\{X_t :\ 0 \leq t \leq T\}$ *est un processus standard avec la représentation intégrale*

$$X_t = \int_0^t a(\omega,s)ds + \int_0^t b(\omega,s)dB_s,\ 0 \leq t \leq T,$$

alors sa variation quadratique existe et est donnée par

$$\langle X \rangle_t = \int_0^t b^2(\omega,s)ds,\ 0 \leq t \leq T.$$

3.3.4 L'intégration par parties

Comme application de la formule d'Itô spatio-temporelle, nous allons démontrer la formule d'intégration par parties pour l'intégrale stochastique, qui est :

$$\int_0^t h(s)dB_s = h(t)B_t - \int_0^t h'(s)B_s ds.$$

Nous allons donc considérer la fonction $f(t,\, B_t) = h(t)B_t$, où $f(t,\, x) = h(t)x$. Calculons d'abord les dérivées partielles :

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t,\, x) = xh'(t),$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}(t,\, x) = h(t),$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,\, x) = 0.$$

La formule d'Itô pour f donne :

$$\begin{aligned}
h(t)B_t &= f(t,\, B_t) \\
&= f(0,\, 0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s,\, B_s)dB_s \\
&+ \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s,\, B_s)ds + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s,\, B_s)ds \\
&= 0 + \int_0^t h(s)dB_s + \int_0^t h'(s)B_s dB_s + 0 \\
&= \int_0^t h(s)dB_s + \int_0^t h'(s)B_s dB_s \\
&\Rightarrow \int_0^t h(s)dB_s = h(t)B_t - \int_0^t h'(s)B_s dB_s.
\end{aligned}$$

3.4 Equations différentielles stochastiques

Tous les processus stochastiques continus importants satisfont une équation de la forme

$$dX_t = \mu(t,X_t)dt + \sigma(t,X_t)dB_t \text{ avec } X_0 = x_0.$$

Les équations différentielles stochastiques procurent un lien entre les probabilités et la théorie bien plus développée des équations différentielles ordinaires, où les conséquences affluent dans les deux directions. Nous allons d'abord introduire trois équations différentielles stochastiques et montrer comment leurs solutions peuvent être trouvées par des méthodes systématiques.

3.4.1 Mouvement brownien géomètrique

On considère

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dB_t \text{ avec } X_0 = x_0 > 0,$$

où les coefficients $-\infty < \mu < \infty$ et $\sigma > 0$ sont constants. Nous allons utiliser la formule d'Itô pour résoudre cette EDS et rechercher une solution de la forme $X_t = f(t,\, B_t)$. On obtient :

$$dX_t = f_t(t,\, B_t) + \frac{1}{2} f_{xx}(t,\, B_t)dt + f_x(t,\, B_t)dB_t.$$

Par identification des coefficients, on a :

$$\mu f(t,\, x) = f_t(t,\, x) + \frac{1}{2} f_{xx}(t,\, x) \text{ et } \sigma f(t,\, x) = f_x(t,\, x).$$

La solution de la seconde équation est $f(t,\, x) = \exp(\sigma x + g(t))$. Introduisons cette solution dans la première équation, on trouve :

$$\mu f(t,\, x) = g'(t) f(t,\, x) + \frac{1}{2}\sigma^2 f(t,\, x) \Rightarrow g'(t) = \mu - \frac{1}{2}\sigma^2$$

Une solution de l'équation différentielle stochastique est donc :

$$X_t = x_0 \exp((\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma B_t).$$

C'est le mouvement brownien géomètrique, c'est le processus le plus utilisé en finance et en économie.

3.4.2 Processsus d'Ornstein-Uhlenbeck

La méthode d'identification que nous avons utilisé est souvent efficace, mais elle peut aussi très bien se révéler inutile pour des cas très simples. Cet exemple est un de ces cas. L'équation que l'on va étudier est la suivante :

$$dX_t = -\alpha X_t dt + \sigma dB_t \text{ avec } X_0 = x_0,$$

où α et σ sont des constantes positives. Ce modèle était connu après 1931, quand les physiciens Ornstein et Uhlenbeck ont étudié le comportement cinétique d'une molécule de gaz individuelle. En finance, c'était un des premiers modèles pour les taux d'intérêt. X_t devait modéliser la déviation du taux d'intérêt autour d'un taux d'intérêt fixé. La solution de cette EDS est simple, mais elle n'est pas de la forme $f(t, B_t)$, mais il y a une facon d'appliquer notre méthode d'identification, il faut juste trouver une classe plus large de processus dans laquelle nous allons l'appliquer. Le produit d'un processus gaussien et d'un processus déterministe est de nouveau un processus gaussien, donc on va chercher une solution de l'équation d'Ornstein-Uhlenbeck dans la classe

$$X_t = a(t)x_0 + \int_0^t b(s)dB_s,$$

où $a(\cdot)$ et $b(\cdot)$ sont des fonctions différentiables. Si on applique la règle du produit :

$$dX_t = a'(t)x_0 + \int_0^t b(s)dB_s dt + a(t)b(t)dB_t.$$

Si on suppose $a(0) = 1$ et $a(t) > 0$ pour tout $t \geq 0$, alors le processus défini précédemment est solution de

$$dX_t = \frac{a'(t)}{a(t)} X_t dt + a(t)b(t)dB_t \text{ avec } X_0 = x_0.$$

On peut maintenant résoudre presque toute EDS linéaire en X_t et un coefficient de volatilité dépendant seulement de t. On va maintenant identifier les coefficients :

$$\frac{a'(t)}{a(t)} = -\alpha \text{ et } a(t)b(t) = \sigma.$$

L'unique solution avec $a(0) = 1$ est $a(t) = \exp(-\alpha t)$, donc la seconde équation nous donne $b(t) = \sigma \exp(\alpha t)$. La solution de l'équation d'Ornstein-Uhlenbeck est par conséquent :

$$\begin{aligned} X_t &= \exp(-\alpha t)x_0 + \sigma \int_0^t \exp(\alpha s)dB_s \\ &= x_0 \exp(-\alpha t) + \sigma \int_0^t \exp(-\alpha(t-s))dB_s \end{aligned}$$

3.4.3 Brownian Bridge

Nous avons vu dans la partie sur le mouvement brownien qu'il existait un processus $\{X_t\}$ défini sur $[0,\, 1]$ tel que $Cov(X_s,\, X_t) = s(1-t)$ pour $0 \leq s \leq t$. Le Brownian bridge peut être pensé comme un mouvement brownien contraint de retourner à 0 au temps 1. Prenons $t \in [0,\, 1]$ et considérons la valeur de X_t au temps t. Puisqu'on doit aller de X_t à 0 dans le temps restant $1-t$, la suggestion la plus naturelle est de considérer un taux de drift $\frac{-X_t}{1-t}$. Si on écrit l'EDS la plus simple avec un tel drift, on a

$$dX_t = \frac{-X_t}{1-t} + dB_t \text{ avec } X_0 = x_0.$$

Nous allons voir que cette EDS admet une unique solution avec la fonction de covariance désirée, que la solution est un processus gaussien, donc que l'EDS caractérise bien le Brownian bridge. Nous utilisons la même méthode d'identification que pour Ornstein-Uhlenbeck.

$$\frac{a'(t)}{a(t)} = \frac{-1}{1-t} \text{ et } a(t)b(t) = 1,$$

on trouve alors :

$$a(t) = 1-t \text{ et } b(t) = \frac{1}{1-t}$$

La solution de l'EDS est donc :

$$X_t = (1-t)\int_0^t \frac{1}{1-s} dB_s \text{ pour } t \in [0,\, 1].$$

Puisque X_t est le produit d'un multiple non-aléatoire d'une dB_t-intégrale et d'un multiple déterministe, X_t est alors un processus gaussien. Notons d'abord que :

$$\sigma(\omega,\, s) = \frac{1}{1-s} \in \mathcal{H}^2[0,\, t] \text{ pour tout } t \in [0,\, 1),$$

donc $\mathbb{E}[X_t] = 0$. Pour le calcul de la fonction de covariance, nous n'avons donc qu'à calculer

$$\mathbb{E}[X_s X_t] = (1-s)(1-t)\mathbb{E}\left[\int_0^s \frac{1}{1-u} dB_u \int_0^t \frac{1}{1-v} dB_v\right].$$

Mais comme :

$$\mathbb{E}\left[\int_0^s \frac{1}{1-u}dB_u \int_s^t \frac{1}{1-v}dB_v\right] = 0$$

par l'indépendance des deux intégrales, par l'isométrie d'Itô nous avons

$$\mathbb{E}\left[(\int_0^s \frac{1}{1-u}dB_u)^2\right] = \int_0^s \frac{1}{(1-u)^2}du = \frac{s}{1-s}.$$

Finalement, en assemblant le tout :

$$Cov(X_s,\, X_t) = s(1-t).$$

3.4.4 Existence et unicité

Voici un théorème d'existence et unicité d'une solution d'une équation différentielle stochastique.

Théorème 28. *Si les coefficients de l'équation différentielle stochastique*

$$dX_t = \mu(t,X_t)dt + \sigma(t,X_t)dB_t \text{ avec } X_0 = x_0 \text{ et } 0 \le t \le T,$$

satisfont les deux conditions

$$|\mu(t,x) - \mu(t,y)|^2 + |\sigma(t,x) - \sigma(t,y)|^2 \le K|x-y|^2$$

et

$$|\mu(t,x)|^2 + |\sigma(t,x)|^2 \le K(1+|x|^2),$$

alors il existe une solution continue et adaptée X_t uniformément bornée dans $L^2(d\mathbb{P})$:

$$\sup_{0\le t\le T} \mathbb{E}[X_t^2] < \infty.$$

De plus, si X_t et Y_t sont deux solutions continues, uniformément bornées dans $L^2(d\mathbb{P})$, alors :

$$\mathbb{P}(X_t = Y_t \text{ pour tout } t \in [0,\, T]) = 1$$

3.4.5 Un dernier problème

Nous allons résoudre, pour finir, l'EDS suivante :

$$dX_t = (-\alpha X_t + \beta)dt + \sigma dB_t \text{ avec } X_0 = x_0 \text{ et } \alpha > 0.$$

Faisons le changement de variable : $Y_t = \exp(\alpha t)X_t$. On a donc :

$$\begin{aligned} dY_t &= \alpha \exp(\alpha t)X_t dt + \exp(\alpha t)dX_t \\ &= \alpha \exp(\alpha t)X_t dt + \exp(\alpha t)((-\alpha X_t + \beta)dt + \sigma dB_t) \\ &= \beta \exp(\alpha t)dt + \sigma \exp(\alpha t)dB_t \\ &\Rightarrow \ Y_t = x_0 + \int_0^t \beta \exp(\alpha s)ds + \sigma \int_0^t \exp(\alpha s)dBs. \end{aligned}$$

En refaisant le changement pour obtenir la solution pour X_t, on arrive à :

$$\begin{aligned} X_t &= \exp(-\alpha t)\left(x_0 + \int_0^t \beta \exp(\alpha s)ds + \sigma \int_0^t \exp(\alpha s)dBs\right) \\ &= \exp(-\alpha t)\left(x_0 + \frac{\beta}{\alpha}(\exp(\alpha t) - 1) + \sigma \int_0^t \exp(\alpha s)dBs\right). \end{aligned}$$

Conclusion

Résumons le parcours stochastique qu'on a effectué durant ce projet. Nous avons commencé par les marches aléatoires, qui sont des processus à interprétation concrète et intuitive nous permettant de mieux appréhender le mouvement brownien, qui est en quelque sorte la version continue de la marche aléatoire non biaisée. Plus encore, nous avons vu qu'il y a convergence en distribution entre un mouvement brownien et une interpolation de marches aléatoires, de plus nous arrivons toujours sous certaines conditions à avoir l'équivalence entre une marche aléatoire et un mouvement brownien avec une horloge bien choisie (avec une somme de temps d'arrêts). La théorie des martingales, en temps discret d'abord, puis par extension avec la notion d'intégrabilité uniforme au cas continu, est un fondement nécessaire pour comprendre la nature du mouvement brownien, martingale par excellence. Celui-ci bénéficie des propriétés sur les temps d'arrêts que nous offrent les martingales, sans compter les convergences dans L^1 et L^2 qui peuvent s'avérer utiles lors de l'étude de processus browniens. Mais ce n'est pas tout : la théorie de l'intégration stochastique nous offre des martingales dans l'espace $\mathcal{H}^2$, et des martingales locales dans l'espace total d'intégration $\mathcal{L}^2_{LOC}$. L'intégrale stochastique n'est non seulement un outil d'analyse, mais on lui a donné également un revêtement de processus stochastique. D'ailleurs, pour un analyste borné, une martingale n'est rien d'autre qu'une fonction intégrable dans l'espace produit satisfaisant une équation aux dérivées partielles. Mais le calcul intégral est quelque peu différent chez les probabilistes, comme en témoigne la formule d'Itô. La variation quadratique n'y est sans doute pas pour rien, le produit de deux différentielles browniennes donne une différentielle scalaire, et non 0. On a terminé par quelques équations différentielles stochastiques simples mais importantes, qui à la lumière de la formule d'Itô (avec une extension de processus) ont pu être résolues. Et comme Picard avait établi un théorème d'existence et d'unicité de solutions d'EDO, il était naturel de poser des conditions similaires pour nos EDS pour obtenir un théorème d'existence et d'unicité de solutions pour les EDS dont la preuve repose sur la même méthode que Picard. Ce qui révèle la force de cette théorie est le pont crée entre les deux branches, et les avancées dans l'une auront forcément des retombées dans l'autre. Le but de ce projet était d'obtenir une vision globale du calcul stochastique et de quelques processus stochastiques qui y jouent un rôle déterminant, mais également de se familiariser avec les preuves probabilistes (où l'on utilise par exemple en masse les temps d'arrêts pour ensuite faire appel aux théorèmes de convergence de la mesure), saisir l'importance des modes de convergence, qui ont par ailleurs servi dans nos contraintes pour les intégrales stochastiques. Des approfondissements possibles, et qui éveillent mon intêret, sont les résolutions d'équations différentielles stochastiques où les méthodes analytiques ne suffisent plus et où il faudrait avoir recours à de l'analyse numérique pour les résoudre, ou bien sous l'angle statistique en construisant un intervalle de confiance pour une éventuelle solution, ou encore effectuer une régresion à partir d'une simulation de cette équation différentielle pour essayer de reconstruire une solution à partir des données obtenues.

Bibliographie

[1] J. Michael Steele : *Stochastic calculus and financial applications.*