- Nous avons vu au chapitre précédent qu'une solution simple pour résoudre le problème de l'équation de convolution (filtrage):

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(k)x(n-k)$$

demandant un nombre infini de calculs était de considérer des filtres à réponse impulsionnelle finie.

- Mais ces filtres ont des réponses en amplitude pas terribles si on ne prend pas des filtres longs.
- Il se trouve qu'il existe une solution permettant d'avoir des filtres causaux à réponse impulsionnelle infinie (RII) avec un nombre fini de calculs pour le filtrage. Elle consiste à utiliser une équation aux différences récursive, dans laquelle l'échantillon de sortie $y(n)$ est donné par:

$$y(n) = \sum_{i=1}^{p} a_i y(n-i) + \sum_{j=0}^{q} b_j x(n-j)$$

- Le terme « récursif » vient du fait que, pour calculer $y(n)$, on n'utilise pas seulement les échantillons de l'entrée $x(n)$, $x(n\text{-}1)$, …, $x(n\text{-}q)$, mais aussi des échantillons passés de la sortie $y(n\text{-}1)$, …, $y(n\text{-}p)$.
- Notez que si la partie récursive est nulle dans l'équation aux différences, on retombe sur un filtre RIF.
- On peut montrer qu'en répétant cette équation aux différences pour des indices temporels successifs, on obtient bien un filtrage linéaire.

- Exemple: équation aux différences de la forme:

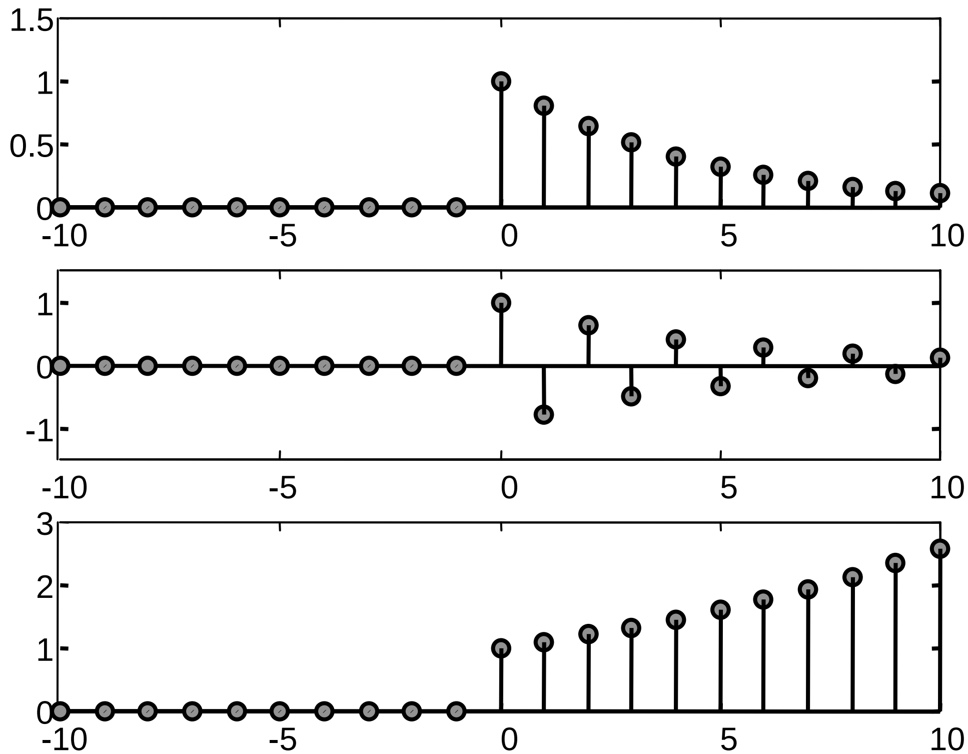
$$y(n) = ay(n-1) + x(n)$$

- Retrouvons la réponse impulsionnelle en mettant à l'entrée du filtre une impulsion x(n) = d(n). On a $x(n) = 0$ et $y(n) = 0$ pour $n < 0$. Ensuite:

$$y(0) = ay(-1) + x(0) = 0 + 1 = 1$$
$$y(1) = ay(0) + x(1) = a.1 + 0 = a$$
$$y(2) = ay(1) + x(2) = a.a + 0 = a^2$$
$$y(3) = ay(2) + x(3) = a.\,a^2 + 0 = a^3$$

…….

- La sortie $y(n)$ du filtre, qui dans ce cas est égale à la réponse impulsionnelle, est donc: $y(n) = g(n) = a^n \varepsilon(n)$



$a = 0.8$ stable

$a = -0.8$ stable

$a = 1.1$ instable

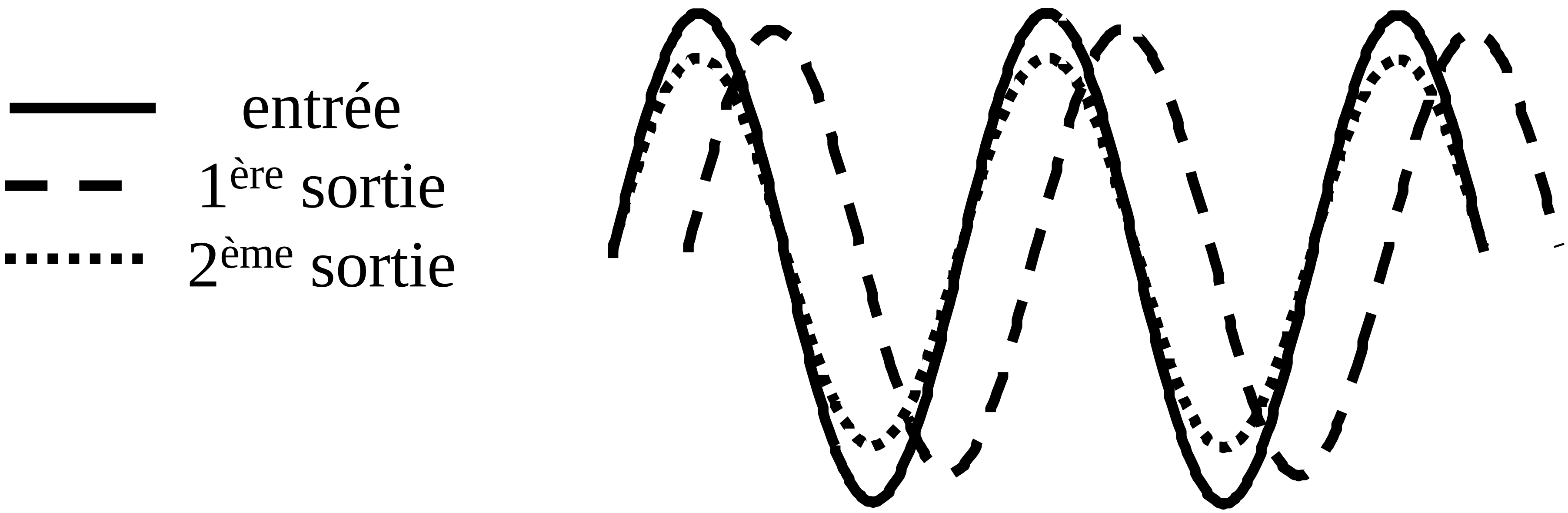
- Dans les exemples précédents, on voit que la réponse impulsionnelle $g(k)$ peut devenir petite quand k croît, mais elle ne devient pas exactement nulle. Elle est donc bien de longueur infinie.
- Les termes *stable* et *instable* indiquent pour un filtre si la sortie peut “exploser” pour une entrée quelconque. Ceci est dû à la récursion. Bien sûr, en pratique, on n’utilise que des filtres stables.

REMARQUES SUR LES FILTRES RII (1)

- En général, pour une réponse en amplitude semblable, un filtre RII a un transitoire plus court qu’un filtre RIF. Ceci est dû au fait qu’on aura beaucoup moins de termes dans l’équation au différences récursive du filtre RII que dans l’équation aux différences non récursive du filtre RIF.
- Par contre, un filtre RII ne peut jamais retarder toutes les sinusoides du même nombre d’échantillons.

- Cela veut dire qu'on ne peut pas appliquer la même combine de décalage de L échantillons que pour les filtres RIF.
- De plus, la sortie peut déformer le signal car les composantes aux différentes fréquences ne sont pas retardées de la même manière.
- Mais il y a une autre combine, qui fonctionne quand on travaille sur un signal enregistré.

- L’idée consiste à filtrer le signal une première fois dans le sens normal du temps (de gauche à droite), puis à re-filtrer la sortie dans le sens inverse du temps (de droite à gauche).

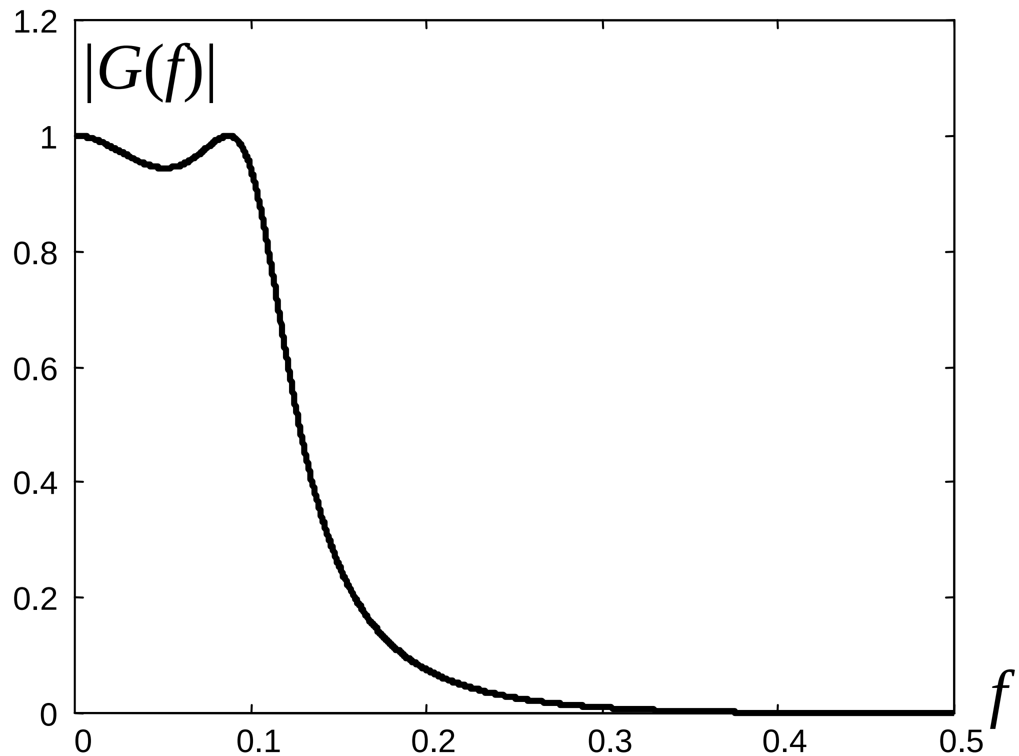


- Les composantes du signal à toutes les fréquences sont ramenées à leur position initiale (avec un éventuel changement d'amplitude). On n'a donc plus de déphasage (retard) de la sortie.
- On peut montrer que si $|G(f)|$ est la réponse en amplitude du filtre, ce double filtrage correspond à une réponse en amplitude $|G(f)|^2$.
- La réponse des filtres classiques (passe-bas, …) n'est donc pas trop modifiée.

- En ce qui concerne les filtres RII, la méthode de conception de loin la plus utilisée consiste, par le biais d'une transformation particulière (appelée bilinéaire) à utiliser la théorie très développée de conception de filtres analogiques.
- L'ordre (taille) du filtre analogique, et donc du filtre numérique après transformation, dépend du gabarit demandé: un meilleur filtre a bien sûr un ordre plus élevé!

- Les modèles de filtres analogiques (et donc les filtres numériques qui en découlent) les plus utilisés sont les filtres de Chebyshev, Butterworth, Bessel, et elliptiques. Le choix de l'ordre et la conception elle-même sont implantés dans des logiciels tels que Matlab.
- Le choix du type de filtre dépend de l'application. Par exemple:
  - les filtres de Chebyshev ont une transition assez « raide »
  - les filtres de Butterworth sont maximalement plats en bande passante.

- Réponse en amplitude d'un filtre de Chebyshev avec taux d 'ondulation maximum en bande passante 0.5 dB, atténuation 40 dB (ordre 3).



- Réponse en amplitude d'un filtre de Butterworth avec taux d 'ondulation maximum en bande passante 0.5 dB, atténuation 40 dB (ordre = 4).