- Un système (filtre) numérique S est une « boîte noire » permettant de transformer un signal d ’entrée *x* en un signal de sortie *y*.

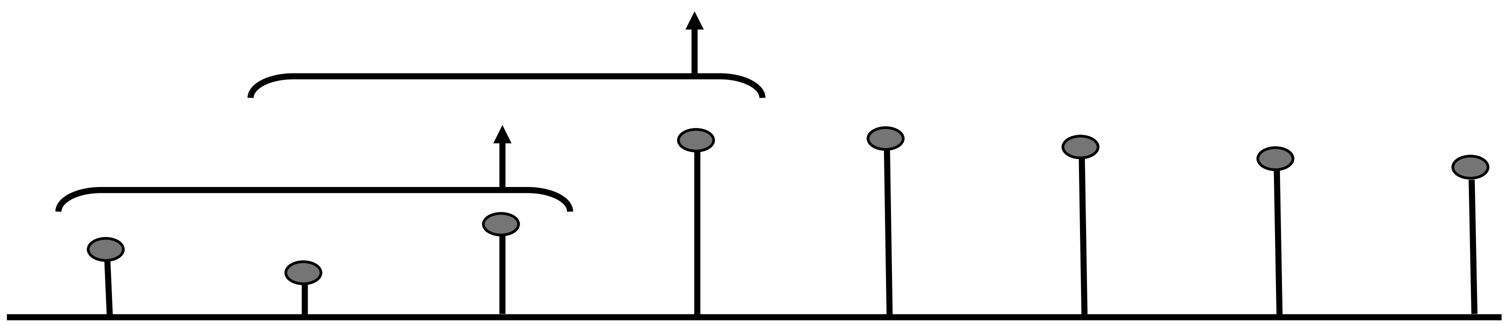
$$x \longrightarrow \boxed{S} \longrightarrow y$$

- Bien sûr, il y a un très grand nombre de possibilités pour définir comment on calcule un échantillon $y(n)$ à partir des échantillons de *x*.

- Nous allons regarder plus en détail ce que fait un filtre (dit “moyenneur” de longueur 3), défini par l’opération:

$$y(n)=\frac{1}{3}[x(n)+x(n-1)+x(n-2)]$$

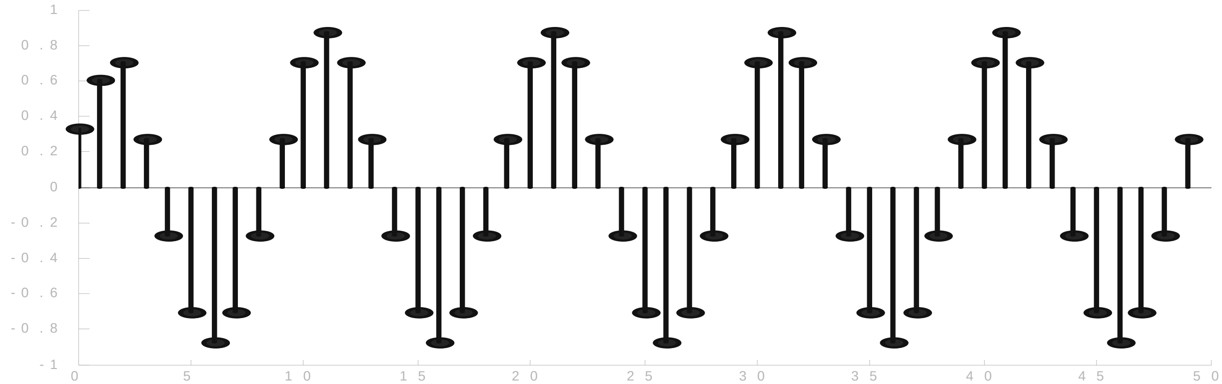
- En clair, l’échantillon $y(n)$ est la moyenne des échantillons $x(n)$, $x(n\text{-}1)$, et $x(n\text{-}2)$:



- Notez que si x est un signal de longueur finie, défini pour les indices n de 0 à N-1, il y a un problème pour calculer $y(0)$ et $y(1)$, car il manque des échantillons de x. En pratique, on peut toujours dire que les échantillons de x sont nuls pour $n < 0$ (donc $x(-1) = 0$, $x(-2) = 0$, ….).
- Voyons maintenant ce que fait le filtrage sur les signaux les plus représentatifs: les sinusoïdes bien sûr.

COMMENCONS PAR UN EXEMPLE (3)

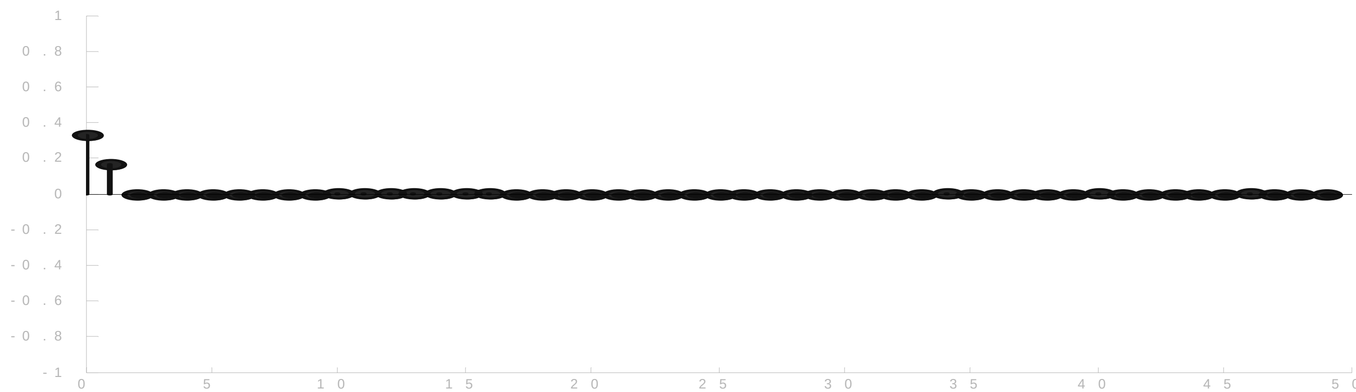
- Sortie du filtre pour un cosinus de fréquence normalisée 0.1



- Sortie du filtre pour un cosinus de fréquence normalisée 0.2

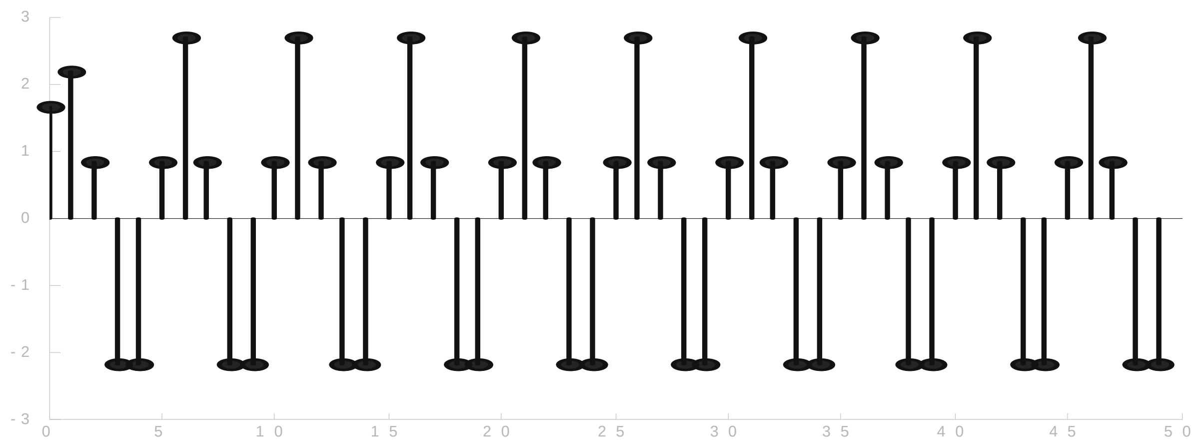
COMMENCONS PAR UN EXEMPLE (4)

- Sortie du filtre pour un cosinus de fréquence normalisée 1/3



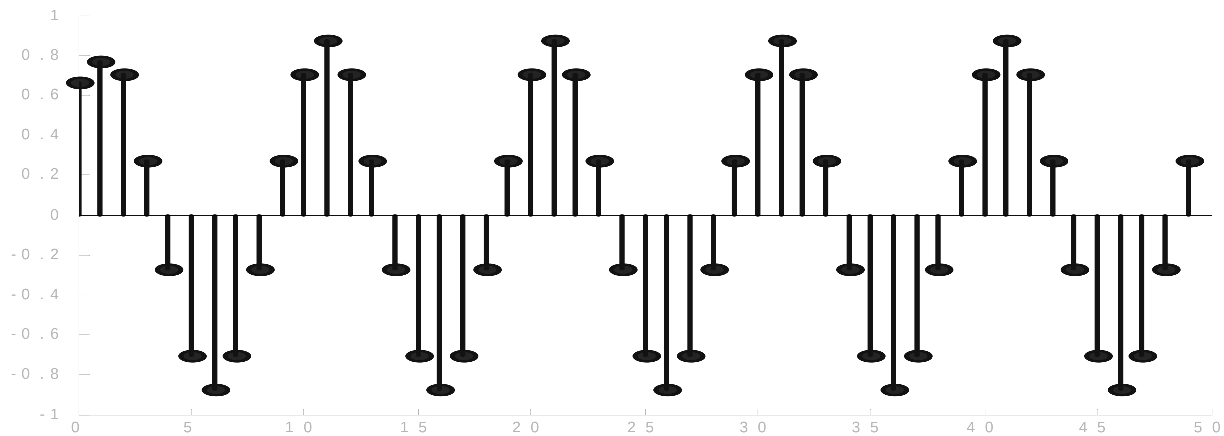
- Constatations:
  – Après un transitoire, les sorties sont des sinusoïdes à la même fréquence que l’entrée
  – Selon la fréquence d’entrée, on a plus ou moins d’atténuation (diminution d’amplitude)

- Sortie du filtre pour un cosinus de fréquence normalisée 0.2 et d'amplitude 5



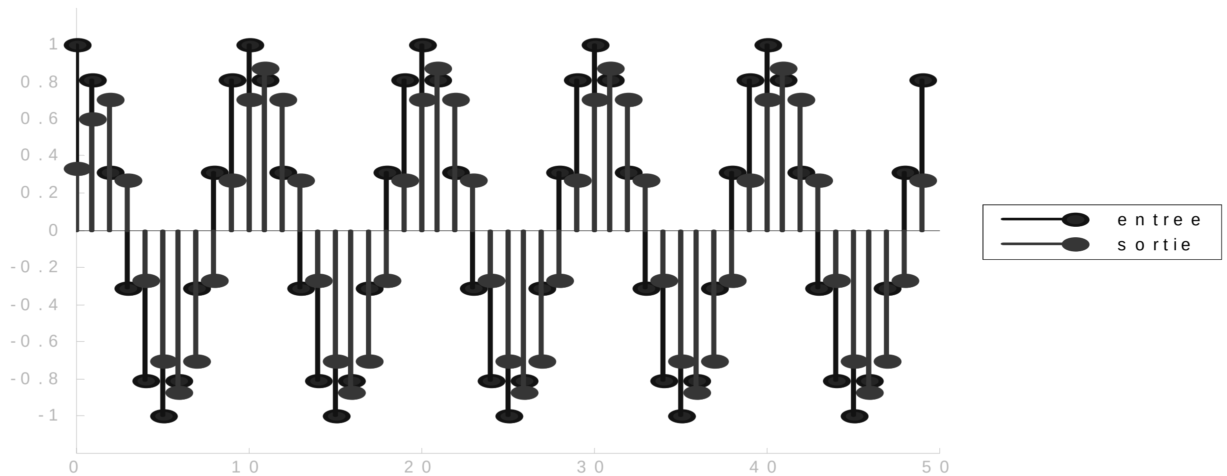
- On a la même sortie que pour le cosinus d'amplitude 1, multipliée par 5.

- Sortie du filtre pour la somme des cosinus de fréquence normalisée 0.1 et 1/3



- La sortie est identique à la somme des sorties obtenues pour chacun des cosinus séparément. Ceci et la propriété d'avant caractérisent les *filtres linéaires*.

- Comparaison de la sortie du filtre et de l'entrée pour un cosinus de fréquence normalisée 0.1



- La sortie est en retard d'un échantillon par rapport à l'entrée (déphasage).

Avec un filtre linéaire:

- on peut calculer la sortie séparément sur chaque composante.
- Une sinusoïde en entrée donne une sinusoïde à la même fréquence en sortie.
- Le changement d'amplitude dépend de la fréquence.
- La sortie est déphasée vis-à-vis de l'entrée
- Pour un signal de durée finie, il y a un transitoire au début dû au fait qu'implicitement le signal est considéré comme nul avant le début.

- On peut montrer que si on a un filtre linéaire, l'échantillon $y(n)$ s'obtient obligatoirement comme:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(k)x(n-k)$$

- Ceci s'appelle un *produit de convolution*. Le signal g est appelé *réponse impulsionnelle* du filtre. C'est la sortie du filtre si on prend comme entrée une impulsion unité.

- En bref, pour un filtre linéaire, l'échantillon $y(n)$ est une somme pondérée des échantillons de l'entrée.
- Dans le domaine fréquentiel:

$$Y(f) = G(f)X(f)$$

avec Y la transformée de Fourier de la sortie y, X celle de l'entrée x, et X celle de la réponse impulsionnelle g. Tout ceci est bien sûr en fréquences normalisées.

- *G*(*f*) est appelé la *réponse en fréquence* du filtre. La réponse en fréquence est complexe.
- Son module (abs dans Matlab) est la réponse en amplitude, qui est le facteur de changement d'amplitude d'une sinusoide à la sortie du filtre.
- Son argument (angle dans Matlab) est la réponse en phase, qui est le déphasage d'une sinusoïde à la sortie du filtre.

- Dans la convolution donnant l'échantillon $y(n)$, $g(0)$ multiplie $x(n)$, $g(1)$ multiplie $x(n\text{-}1)$ …, mais $g(\text{-}1)$ multiplie $x(n+1)$.
- Cela veut dire que, si on est au temps n, on va avoir besoin d'échantillons *futurs* du signal d'entrée.
- On dit que le filtre est causal si $g(k) = 0$ pour $k < 0$. Matlab par exemple, suppose toujours le filtre causal.
- Notez que quand on travaille sur un signal enregistré, il est possible de prendre les échantillons futurs.

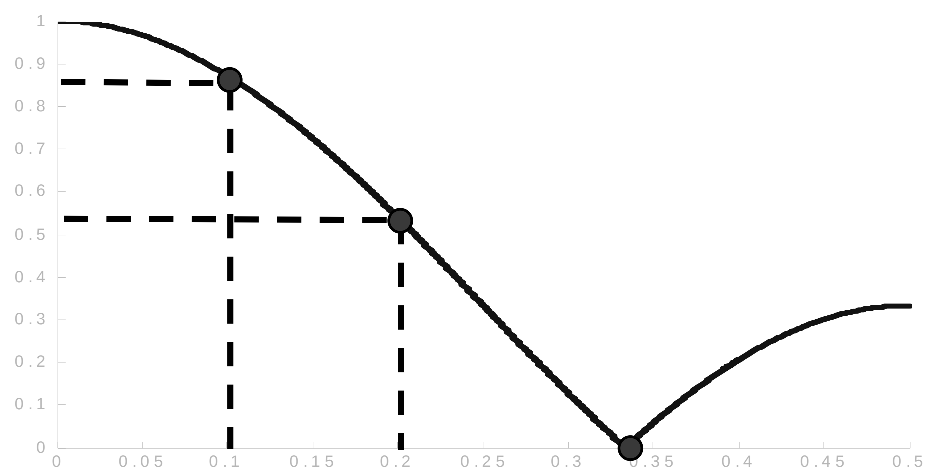
- L'équation de convolution est jolie, mais on doit en principe faire un nombre infini de calculs.
- Une première solution simple consiste à prendre un filtre à réponse impulsionnelle finie (RIF) pour lequel $g(k) \neq 0$ pour un nombre fini de valeurs de k, par exemple entre k_0 et k_1. On obtient:

$$y(n) = \sum_{k=k_0}^{k_1} g(k)\,x(n-k)$$

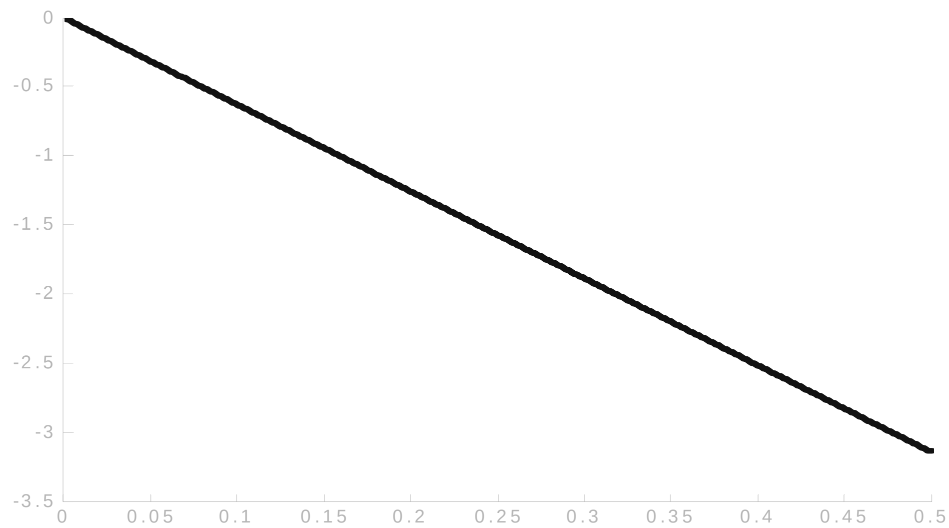
- Le filtre présenté au début est bien RIF, et causal:

$$g(0) = g(1) = g(2) = 1/3$$

- On peut calculer exactement (ou pour un certain nombre de fréquences avec Matlab) sa réponse en amplitude:

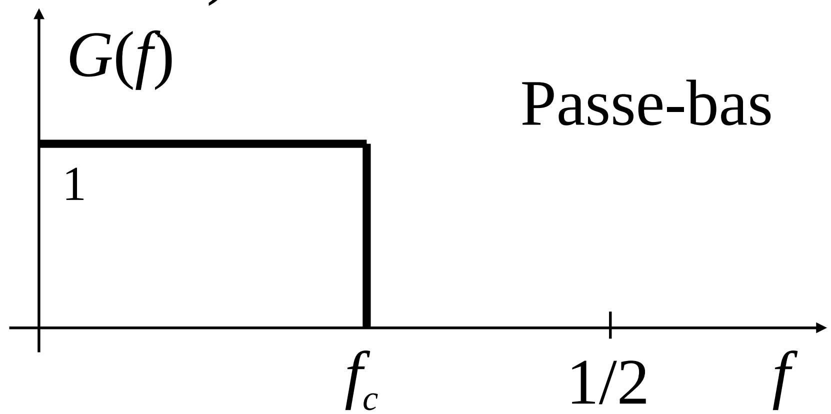


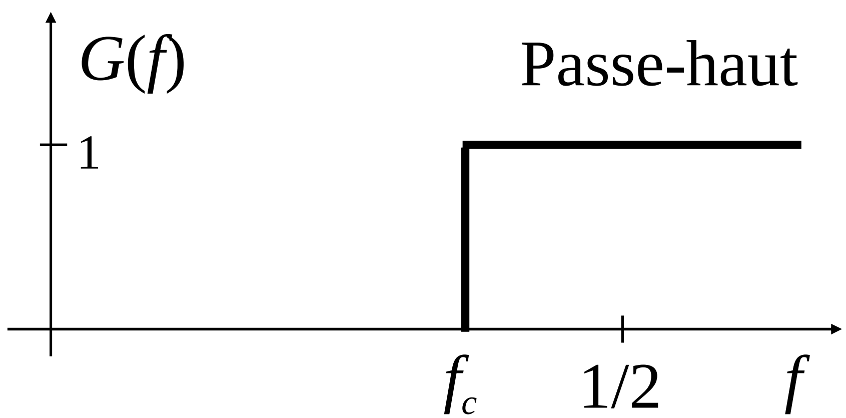
- On voit bien sur le graphe que la sinusoïde à la fréquence $f = 0.1$ est un peu atténuée, celle à $f = 0.2$ plus atténuée, et celle à $f = 1/3$ complètement mise à zéro.
- On peut montrer que la réponse en phase est $\theta(f) = -2\pi f$.



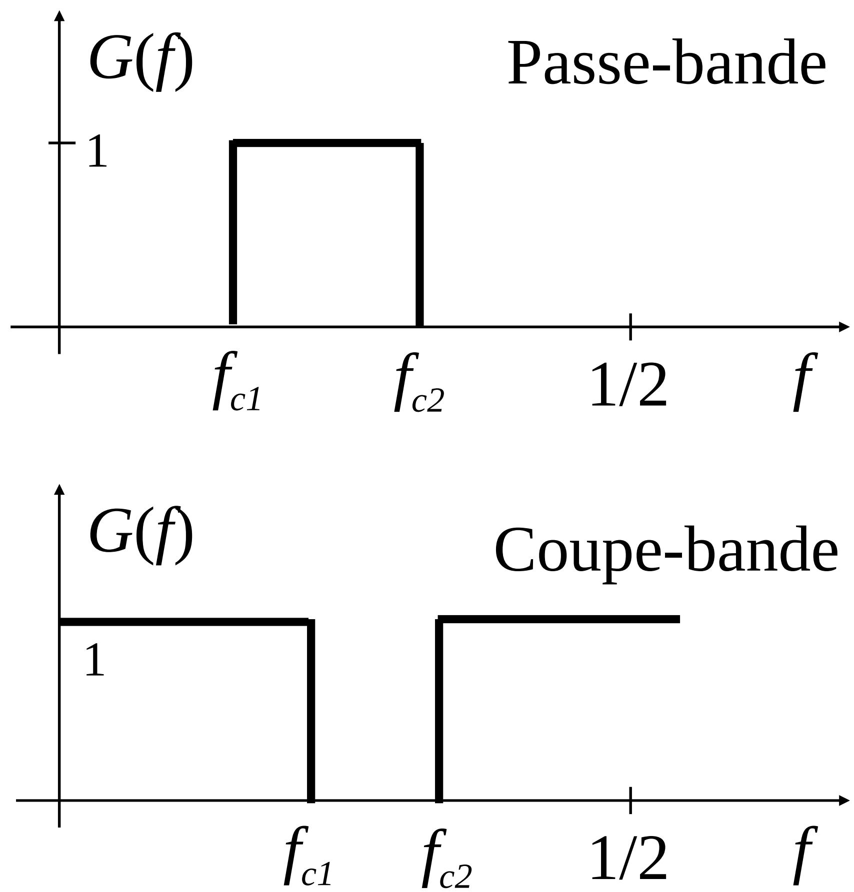
TYPES CLASSIQUES DE FILTRES (1)

- Classification des filtres idéaux (notez bien qu 'ils sont à réponse de phase nulle):



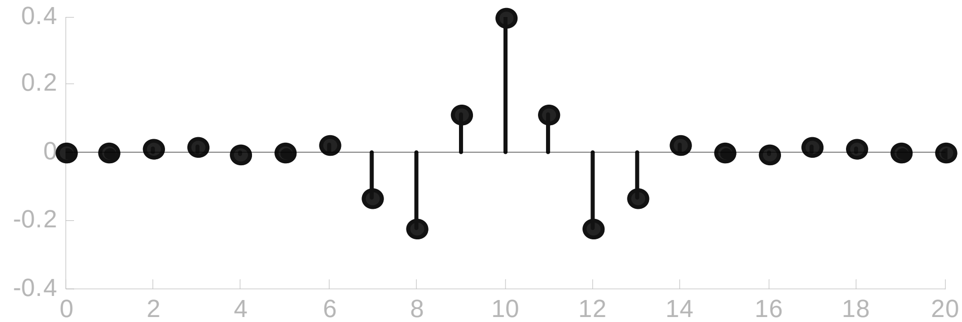


TYPES CLASSIQUES DE FILTRES (2)

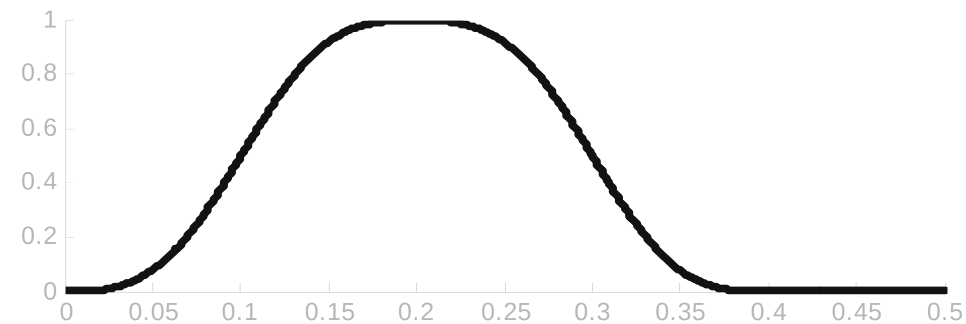


- En pratique bien sûr, on n’obtient pas un filtre parfait. Exemple: filtre de longueur $2L+1 = 21$, filtre passe-bande entre 0.1 et 0.3

réponse impulsionnelle

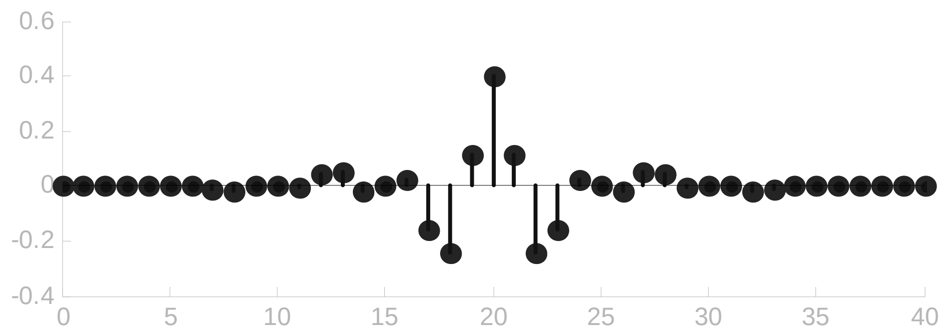


réponse en amplitude

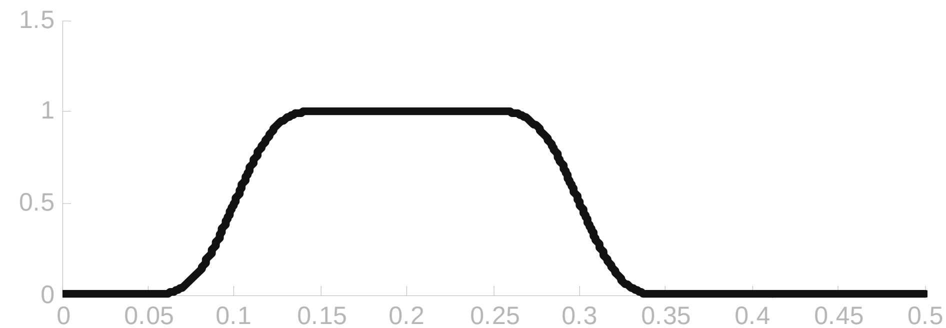


- Plus le filtre est long, meilleur il est. Exemple: filtre de longueur $2L+1 = 41$, filtre passe-bande entre 0.1 et 0.3

réponse impulsionnelle



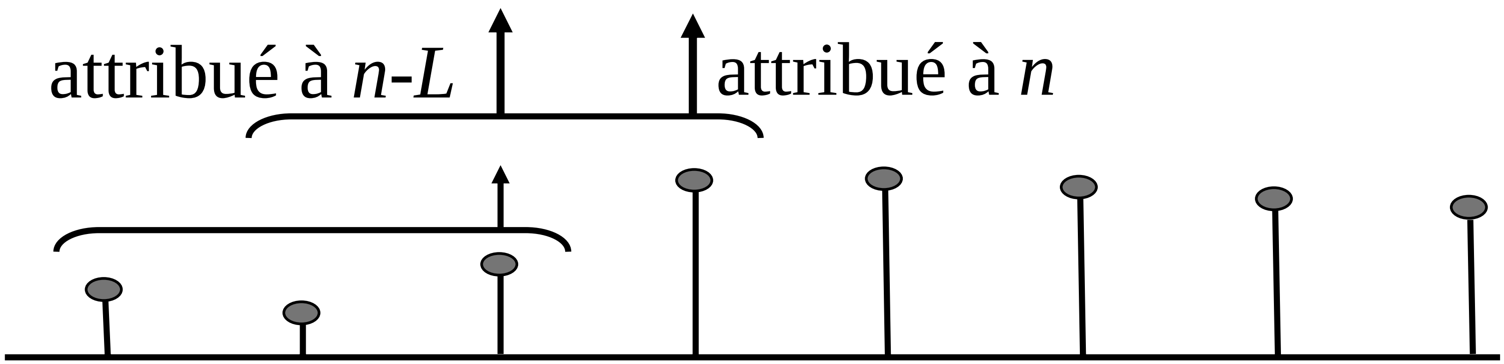
réponse en amplitude



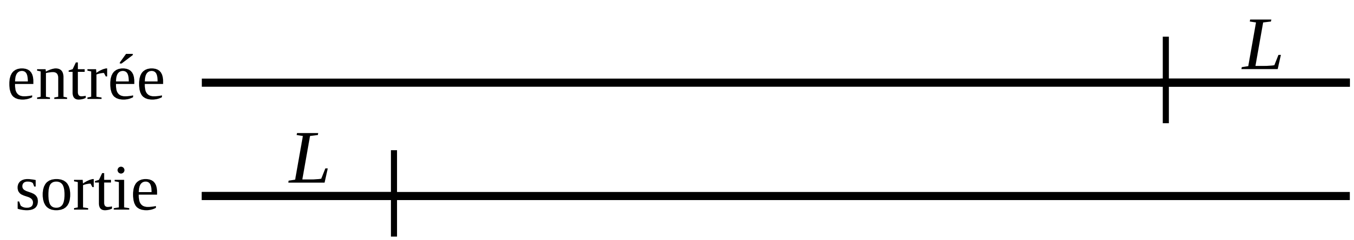
- On constate que les deux filtres précédents (et le filtre moyenneur de l'exemple d'ailleurs) ont une réponse impulsionnelle symétrique par rapport à l'échantillon au milieu.
- Ce type de filtre retarde les sinusoïdes à toute fréquence du même nombre d'échantillons. Pour une longueur de filtre de $2L+1$, ce retard est L.
- En fait, on n'aurait pas de retard en prenant le filtre non causal avec $g(0)$ l'échantillon au milieu.

LE PROBLEME DU DEPHASAGE (2)

- Tout ceci revient à attribuer la valeur de sortie du filtre causal à l'échantillon *n-L* au lieu de *n*.

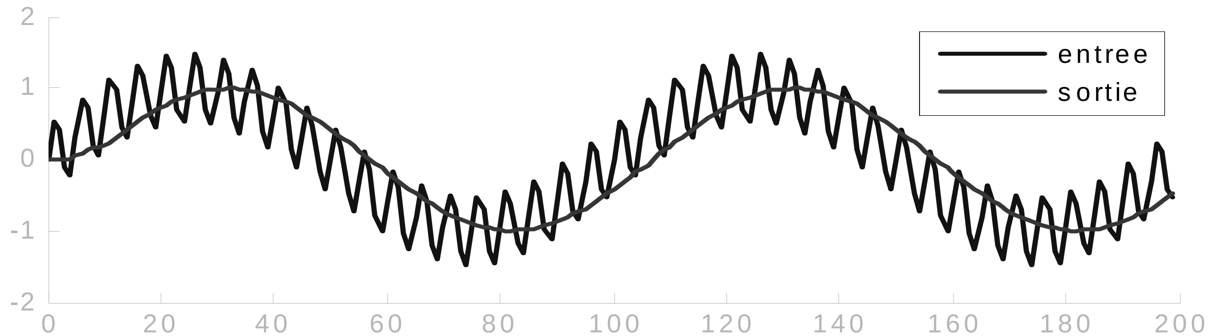


- Comme on ne peut pas prendre un filtre non causal en Matlab, la combine et de considérer l’échantillon L+1 de la sortie comme l’échantillon 1, c’est-à-dire d’écarter les L premiers échantillons.
- Si on veut avoir ensemble entrée et sortie, on écarte les L derniers échantillons de l’entrée.



- Exemple: filtre passe-bas pour garder l'oscillation lente et supprimer l'oscillation rapide

filtrage causal



filtrage non causal