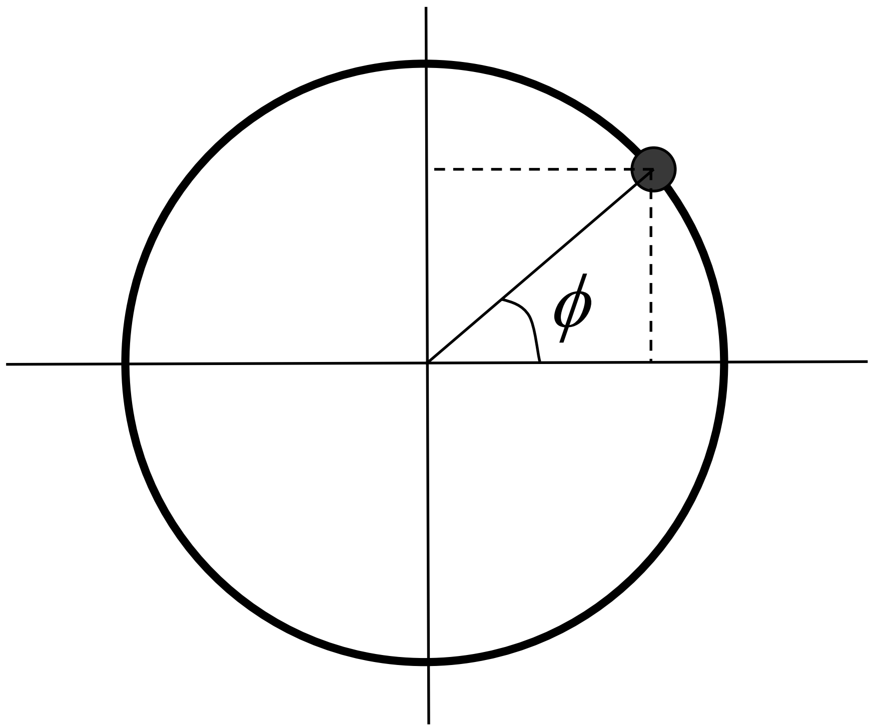
QU 'EST-CE QU 'UN SIGNAL? (1)

- Un signal, d'un point de vue très général, est l'évolution d'une certaine grandeur au cours du temps.
- Exemples:
  - Evolution de la température en un lieu donné
  - Signal de parole
  - Evolution de la luminosité d'une étoile …
  - Evolution de la pression artérielle d'un sujet
  - Signal synthétique généré sur l'ordinateur

- Dans tous ces exemples, notez que cette évolution est obtenue à l’aide d’un *capteur*, c’est-à-dire un instrument permettant de mesurer la grandeur, et de la transformer le plus souvent en voltage électrique.
- Exemple: la variation de pression de l’air lorsqu’une personne parle est transformée en signal électrique par un microphone.

- Avant l’avènement des ordinateurs, on traitait effectivement ces signaux électriques continus dans le temps (signaux *analogiques*), à l’aide de circuits électriques (exemple: égaliseurs sur les vieilles chaînes stéréo).
- Le problème est qu’on ne peut faire qu’un nombre limité d’opérations avec un circuit, et qui si on veut modifier le traitement, il faut reconstruire un autre circuit. C’est pourquoi le traitement des signaux sur ordinateur a révolutionné le domaine.

- Les sinus et cosinus sont l'archétype des fonctions oscillantes. Si on a un point qui se déplace de façon régulière sur un cercle de rayon unité:

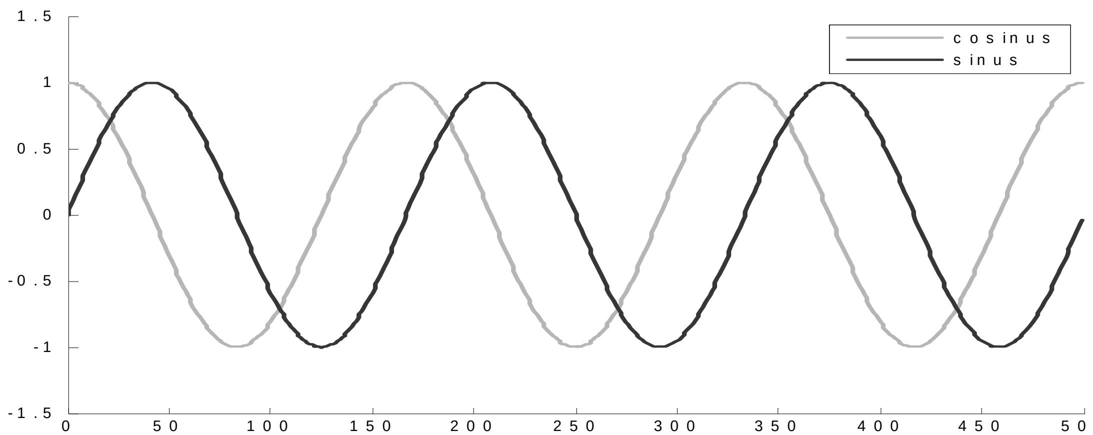


$\phi = 2\pi f t$

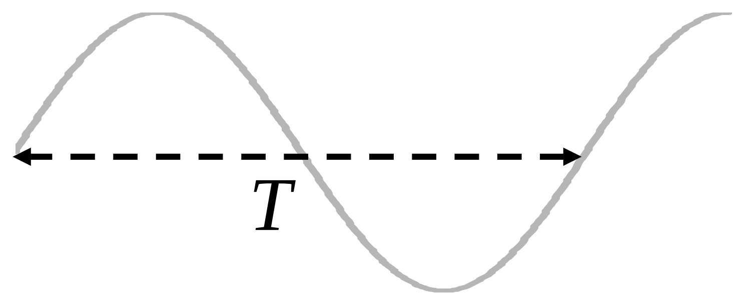
t un temps en secondes

Alors son abscisse et son ordonnée évoluent comme le cosinus et le sinus de l'angle avec l'axe horizontal:

$$x = \cos(2\pi f t) \qquad y = \sin(2\pi f t)$$

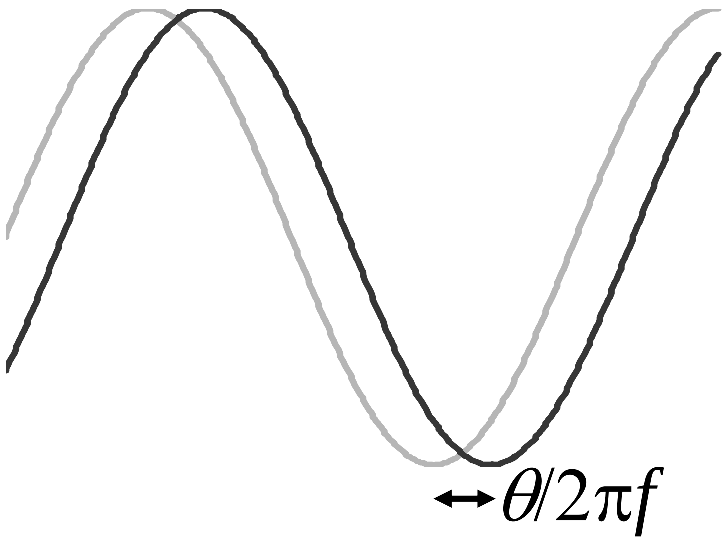


- Si la phase instantanée $\phi = 2\pi ft$ augmente de 0 à 2π quand t croît à partie de 0, alors $y = \sin(2\pi ft)$ revient à la même valeur.



- Ceci se produit à $t = T = 1/f$. T est la période de la sinusoïde, $f = 1/T$ est sa fréquence, exprimée en inverse de secondes, ou Hertz (Hz).

- Supposons qu'on a un sinus $y = \sin(2\pi ft)$. La version déphasée de ce signal $y = \sin(2\pi ft - \theta)$ est une version *retardée* de ce signal pour $\theta > 0$.
- Par exemple, il passera par 0 pour $2\pi ft = \theta$, soit $t = \theta / 2\pi f$.



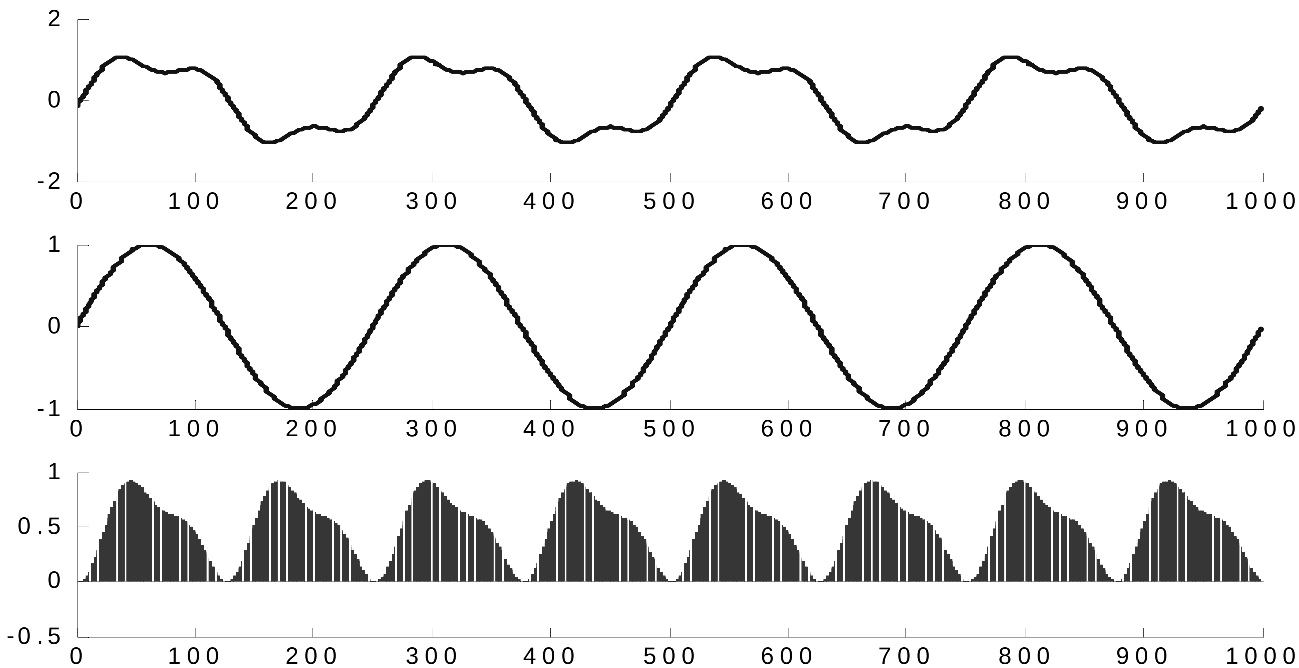
- Faire l'analyse de Fourier (fréquentielle) d'un signal analogique consiste à le comparer à des sinusoïdes à toutes les fréquences possibles.
- Cette comparaison est faite en calculant l'intégrale du produit entre le signal et les sinusoïdes à chaque fréquence, sur tout l'axe du temps (entre moins l'infini et plus l'infini).
- Si cette intégrale a une grande valeur pour une fréquence, cela veut dire que le signal analysé ressemble à la sinusoïde à cette fréquence.

- La fréquence est présente dans le signal. L’intégrale sur le produit porte sur des `bosses` positives → l’intégrale est grande.

signal

sinusoïde

intégrale du produit



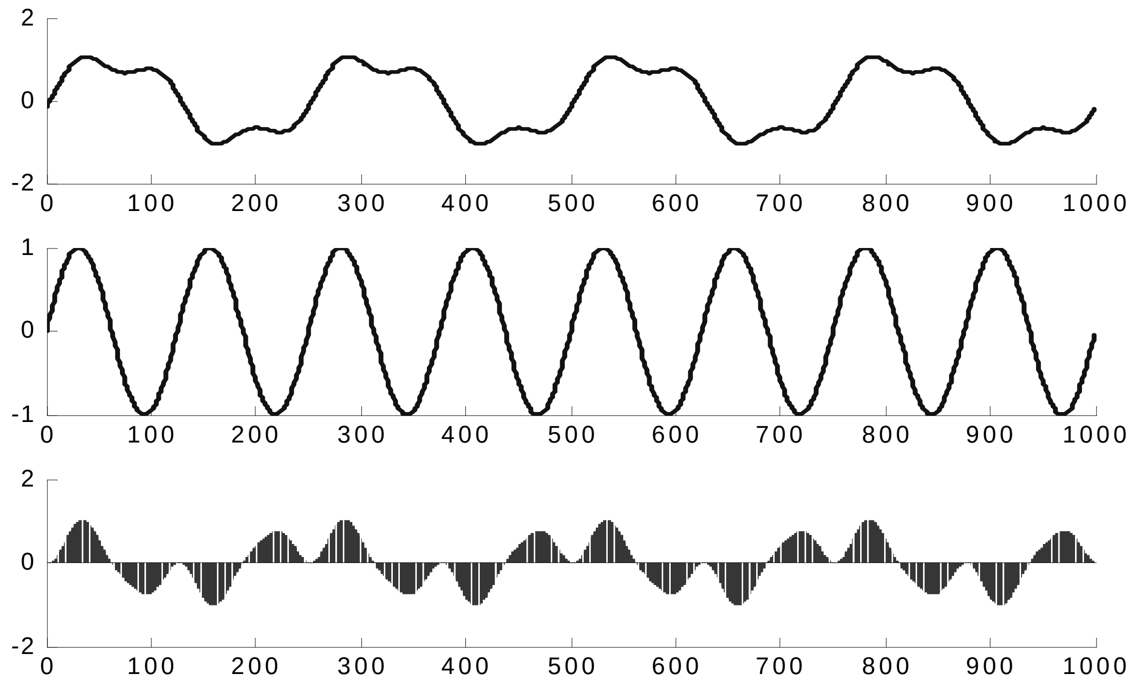
ANALYSE DE FOURIER EN TEMPS CONTINU (3)

- La fréquence n'est pas présente dans le signal. L'intégrale sur le produit porte sur des `bosses` positives et négatives → l'intégrale est nulle.

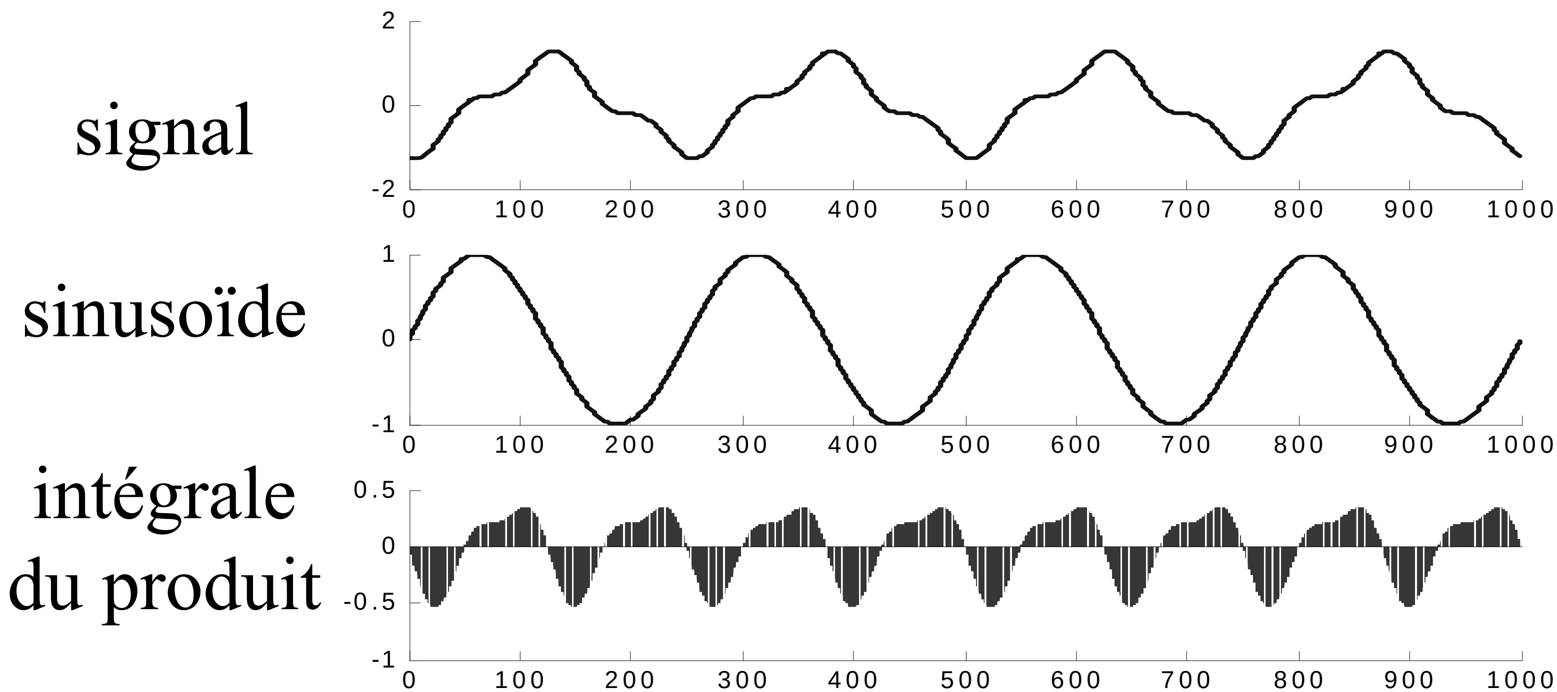
signal

sinusoïde

intégrale du produit



- Mais notez que si la phase du signal est changée, le résultat est petit pour la fréquence présente.

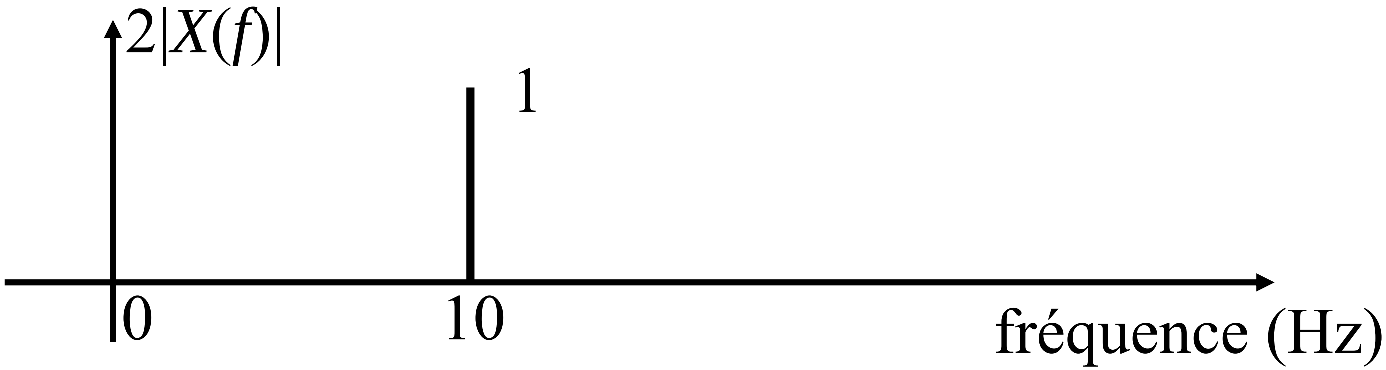


- En fait il faudrait faire cette analyse pour une phase quelconque des sinusoïdes. C’est possible en passant par les exponentielles complexes, qui ″mélangent″ sinus et cosinus. La formule théorique de la transformation de Fourier s’écrit:

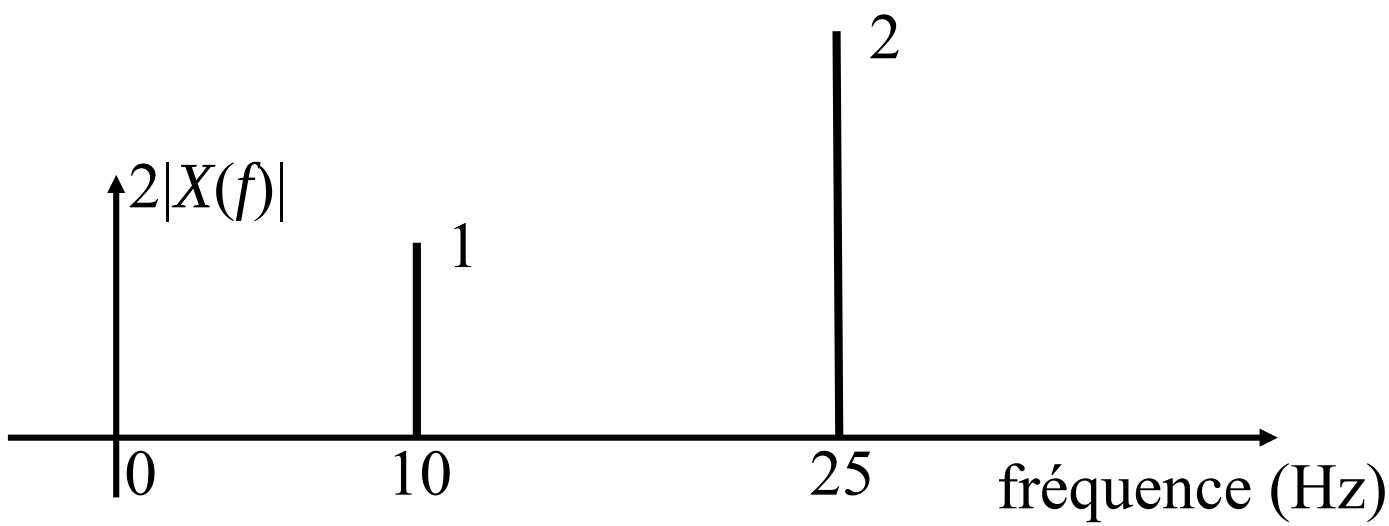
$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \exp(-j2\pi f t) dt$$

- (on n’ira pas plus loin là-desssus).

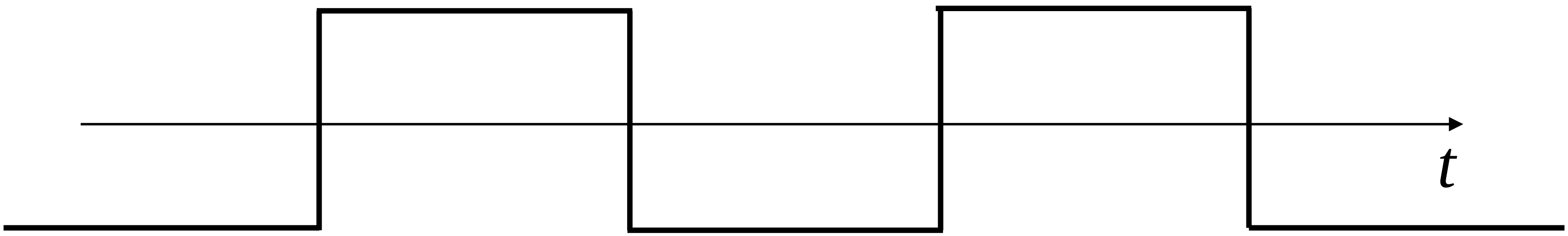
- Le module (fonction `abs` dans Matlab) de $X(f)$, noté $|X(f)|$, est la moitié de l'amplitude de la composante de $x(t)$ à la fréquence f, son argument (fonction `angle` dans Matlab) est la phase de cette composante. On obtient le *spectre d'amplitude*.
- Exemple: signal sinusoïdal, fr. 10 Hz, amplitude 1.

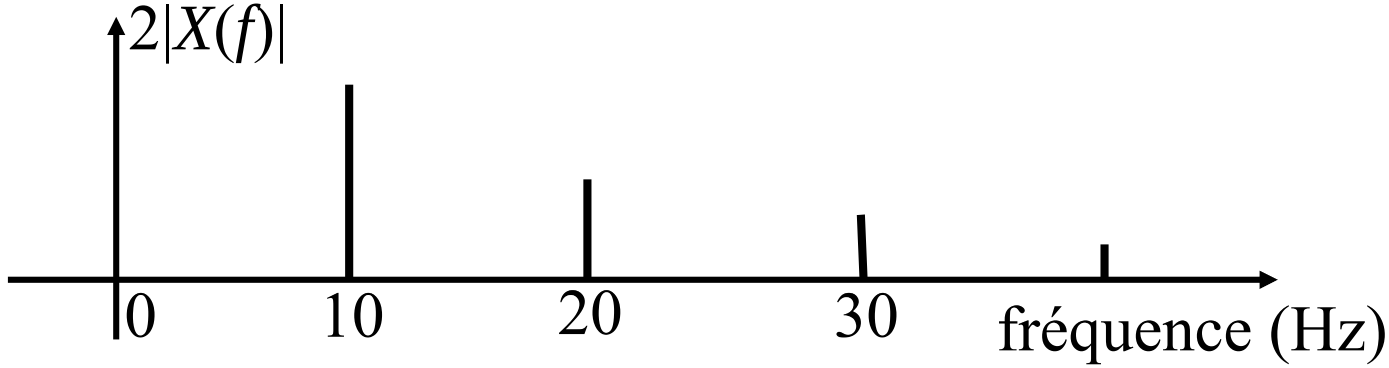


- Signal somme d'une sinusoïde, fr. 10 Hz, amplitude 1, et d'une sinusoïde, fr. 25 Hz, amplitude 2.

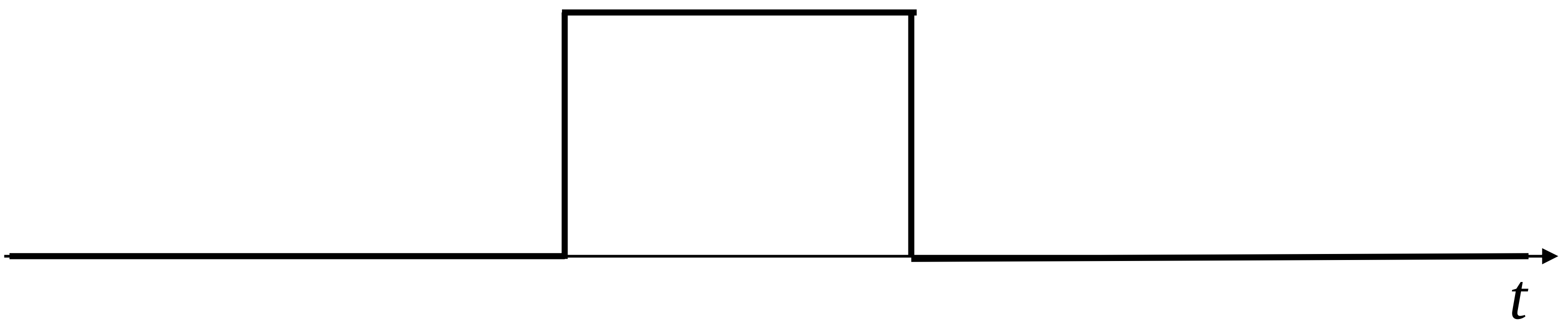


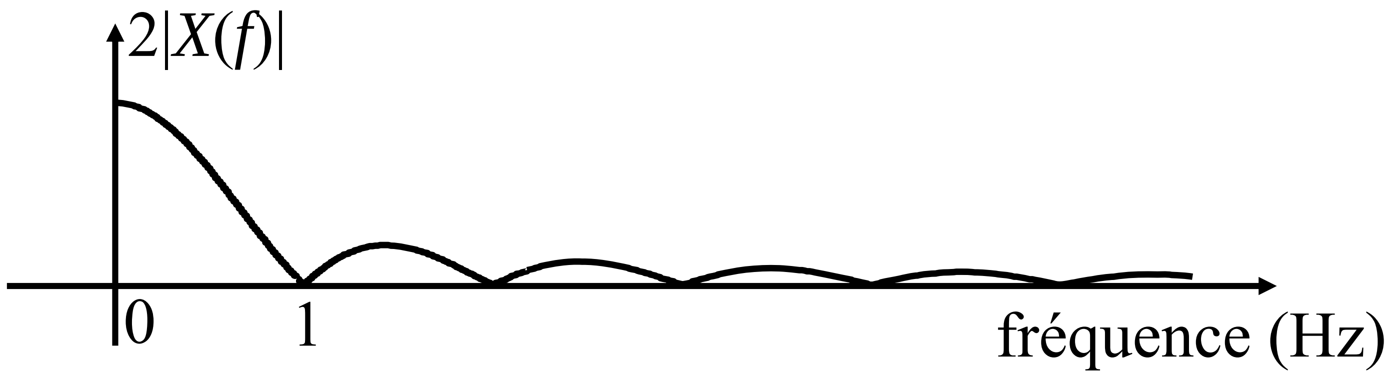
- Signal rectangulaire périodique, période 0.1 seconde





- Impulsion rectangulaire, durée 1 seconde





- Un signal numérique (en temps discret) peut être défini de manière très générale comme une suite $\{x(k)\}$ de valeurs numériques indexées par les entiers relatifs k.
- La plupart du temps k correspondra au temps
- Ce signal pourra être:
  - « théorique »
  - synthétisé sur ordinateur
  - acquis sur un phénomène (conversion analogique/numérique)

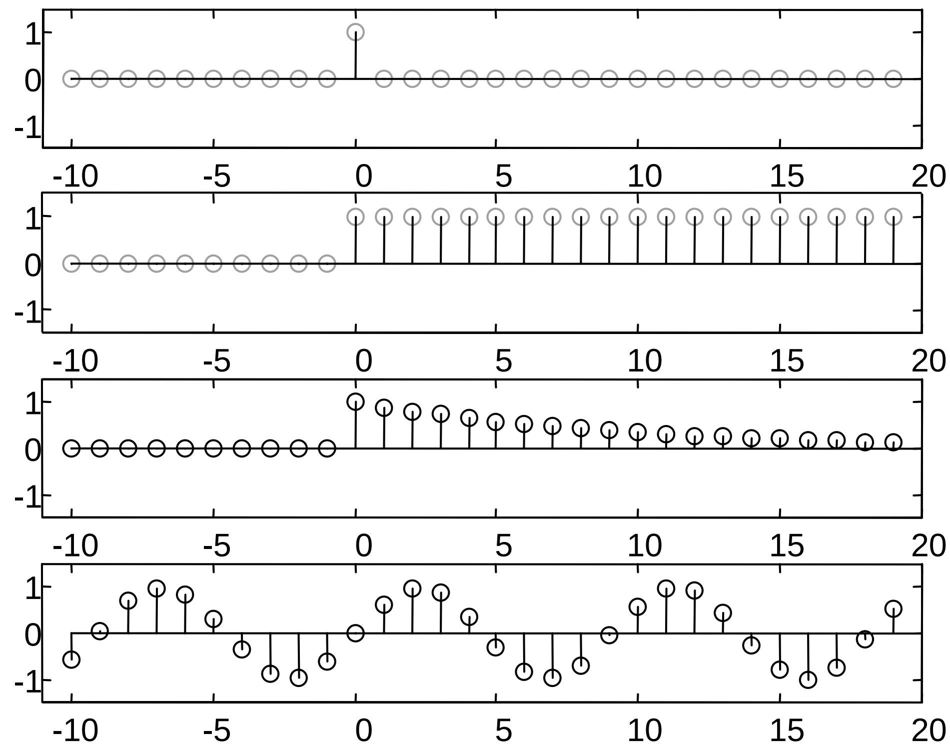
EXEMPLES DE SIGNAUX NUMERIQUES

Impulsion unité d(k)

Saut unité ε(k)

Exponentielle ε(k)a^k

Sinusoïde sin($2\pi f_n k$)



- Remarquez ce qui se passe pour la sinusoïde si on augmente la fréquence de 1:

$$x(k) = \sin[2\pi(f_n+1)k] = \sin(2\pi f_n k + 2\pi k)$$
$$= \sin(2\pi f_n k)$$

$\longrightarrow$ Il suffit de considérer les fréquences f_n sur un intervalle de largeur 1.

- L'échantillonnage d'un signal analogique $x_a(t)$ a consiste à mesurer la valeur de ce signal tous les Δt secondes.

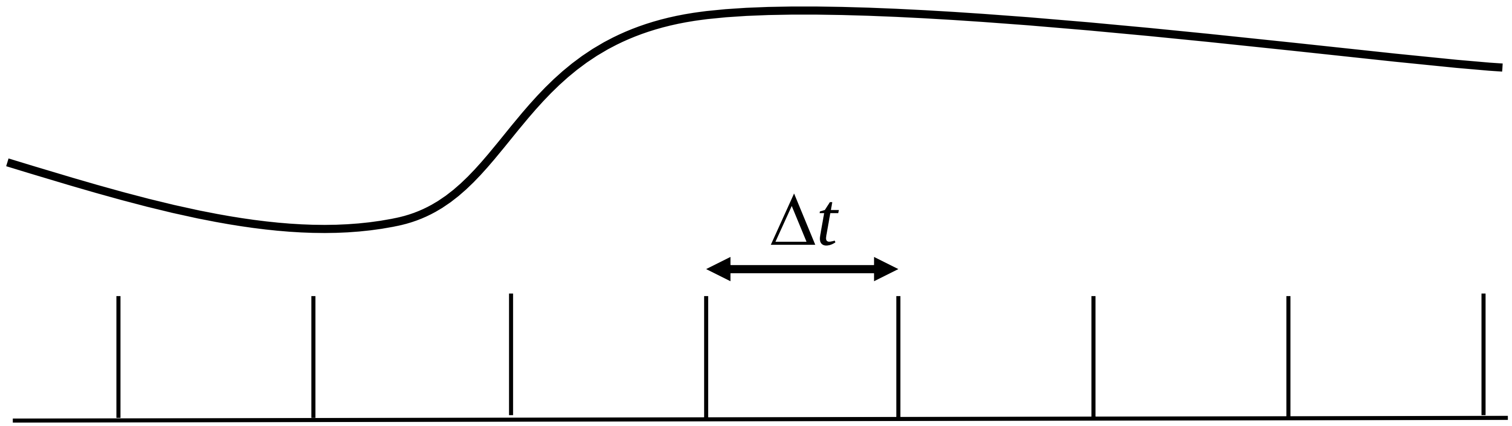
$$x(k) = x_a(k.\ \Delta t)$$

- Δt est la période d 'échantillonnage (typiquement en secondes)

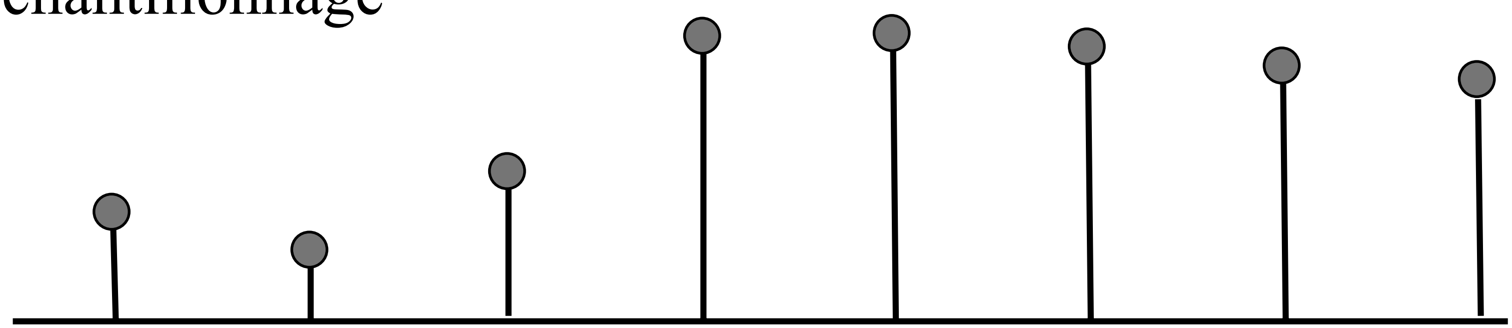
- . $f_e = 1/\Delta t$ est la fréquence d 'échantillonnage (typiquement en Hertz).

- Principe:

signal
analogique

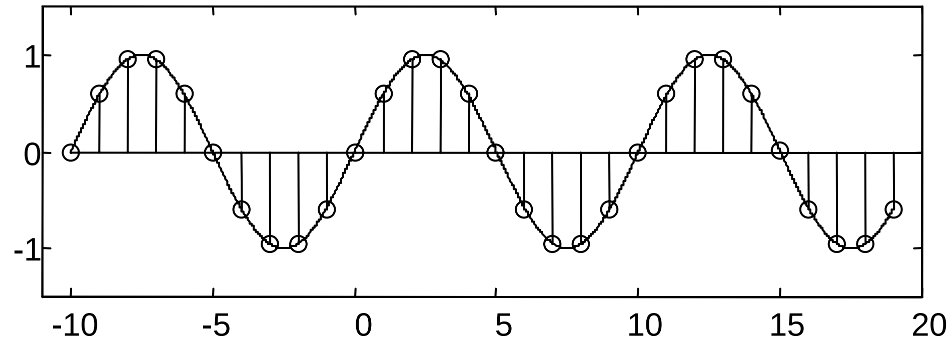


instants d’échantillonnage

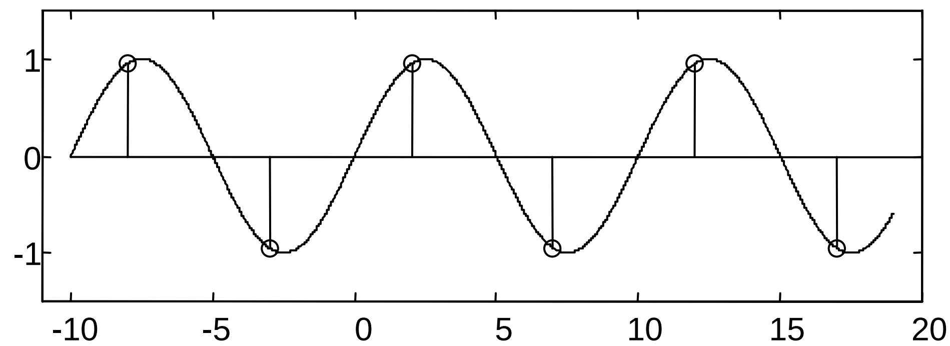


- Il faut que la fréquence d'échantillonnage soit suffisamment élevée!!

Fréquence d'échantillonnage élevée

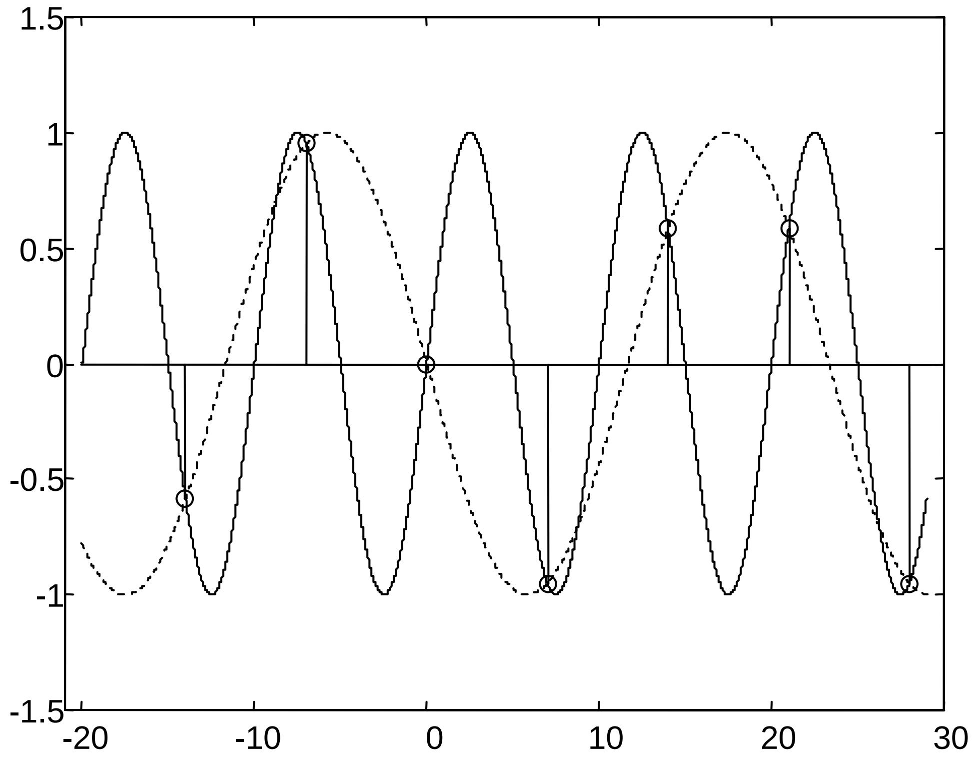


Fréquence d'échantillonnage limite



- Fréquence d'échantillonnage insuffisante causant un repliement spectral (aliasing)

A partir des échantillons obtenus, on a l'impression de voir une sinusoïde à une fréquence plus basse (fréq. départ - fréq. éch.)



- D’après les exemples précédents, il apparaît que, pour avoir une idée correcte sur un signal oscillant, il faut au moins 1 échantillon par demi période, donc 2 échantillons par période.
- Cela veut donc dire que la période d’échantillonnage doit être au moins 2 fois plus petite que la période du signal, donc la fréquence d’échantillonnage doit être au moins 2 fois plus grande que la fréquence du signal oscillant.

- Ceci se généralise au cas où le signal contient plusieurs oscillations à des fréquences différentes.

- Le résultat global est: Si F est la plus grande fréquence présente, la fréquence d'échantillonnage doit vérifier:

$$f_e > 2F$$

- Nous avons vu que pour une sinusoïde numérique $x(k) = \sin(2\pi f_n k)$, il suffit de considérer la fréquence numérique f_n sur un intervalle de longueur 1.
- Si maintenant on obtient ce signal en échantillonnant une sinusoïde réelle de fréquence f_a avec une fréquence d 'échantillonnage f_e (période d 'échantillonnage Δt), on obtient:

$$x(k) = \sin(2\pi f_a k \Delta t) = \sin(2\pi k [f_a / f_e])$$

- Pour parler du même signal $x(k)$, il faut donc:

$$f_n = f_a / f_e$$

- Ca tombe bien: pour que tout se passe bien lors de l'échantillonnage, il faut:

$$f_e \geq 2 f_a \quad \Rightarrow \quad \frac{f_a}{f_e} \leq \frac{1}{2}$$

FREQUENCE NORMALISEE (3)

- Plutôt que de faire intervenir systématiquement la fréquence d 'échantillonnage f_e (ou la période Δt), on va donc la mettre en arrière-plan et travailler avec des fréquences numériques:

$$f_n = f_a / f_e$$

- Ceci permet de s'affranchir de Δt dans les développements, et, comme on se limite à une fréquence analogique $f_e / 2$, on va considérer un intervalle [0 , 1/2] pour f_n.

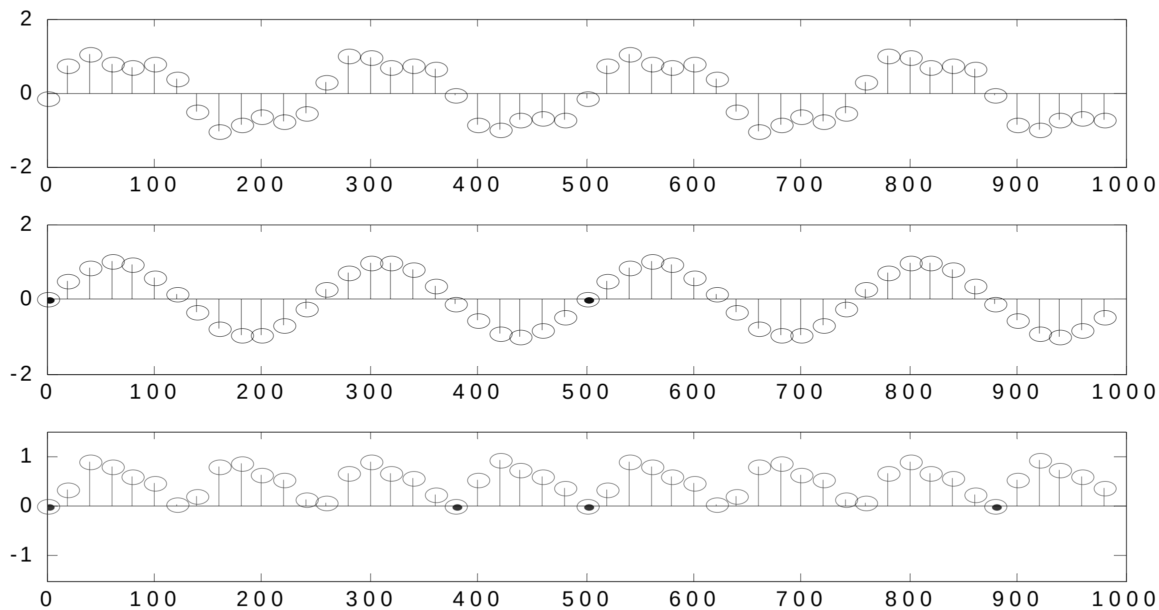
- On ne peut plus utiliser l'intégrale du produit pour comparer le signal aux sinusoïdes, vu qu'il n'est plus continu.
- On utilise en fait le même principe: on va cette fois calculer la somme des échantillons du signal obtenu en faisant le produit (échantillon par échantillon) du signal analysé et de sinusoïdes à toutes les fréquences normalisées.

- La fréquence est présente dans le signal. La somme sur le produit porte sur des valeurs positives → la somme est grande.

signal

sinusoïde

produit

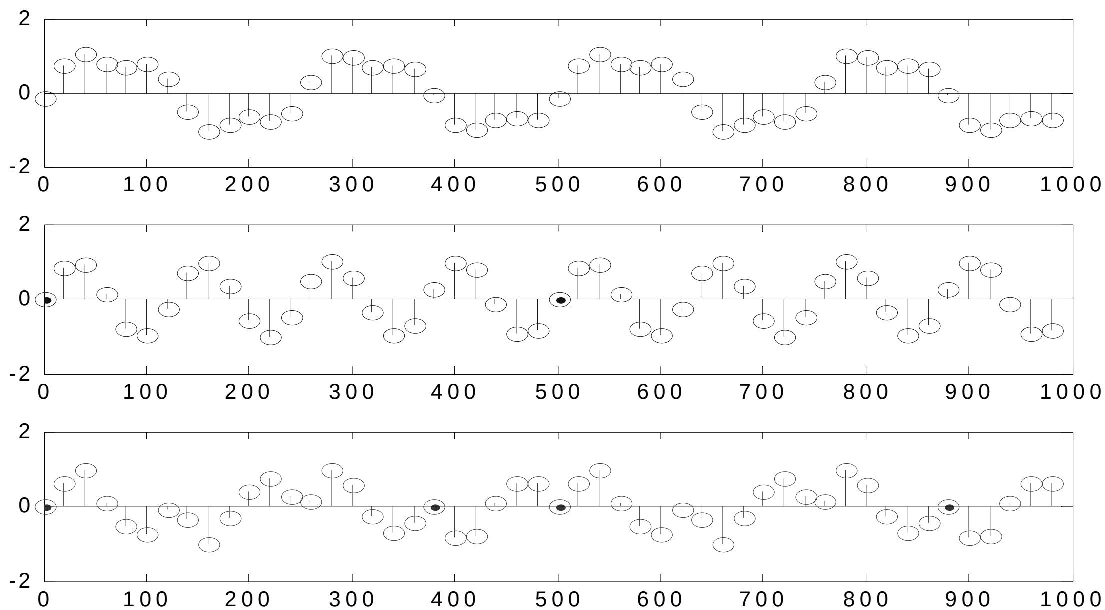


- La fréquence est n'est pas présente dans le signal. La somme sur le produit porte sur des valeurs positives et négatives $\rightarrow$ la somme est petite.

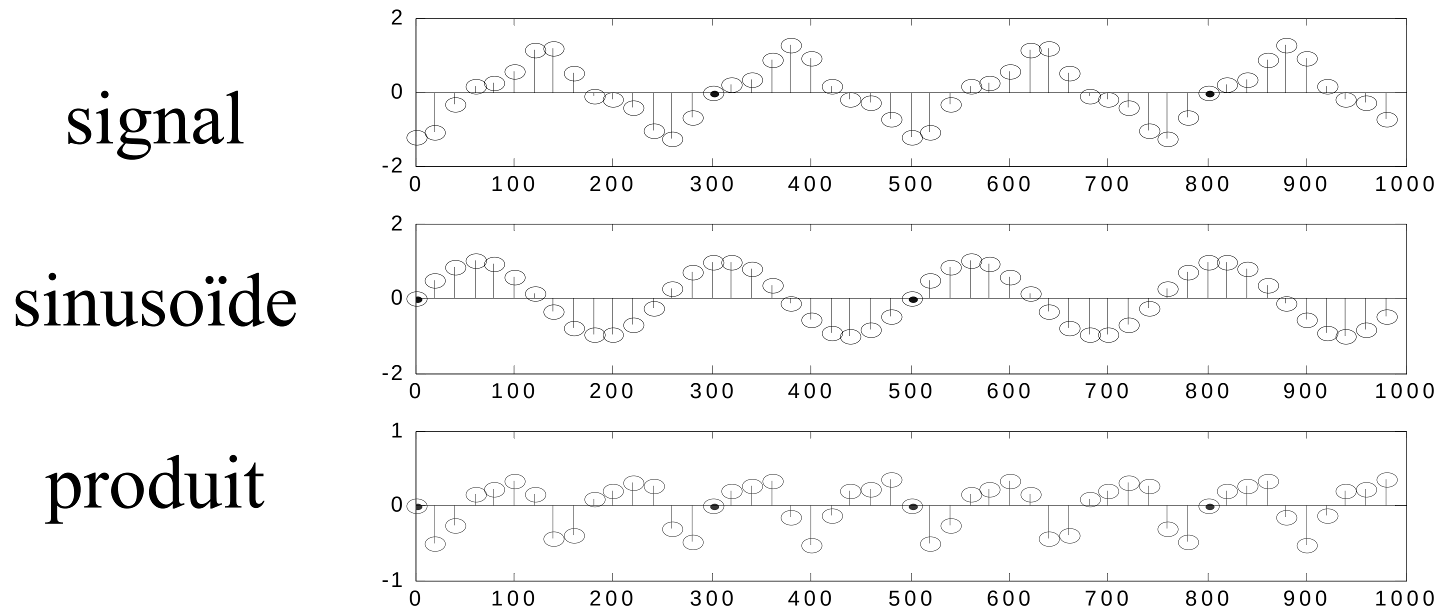
signal

sinusoïde

produit



- Mais notez que si la phase du signal est changée, le résultat est petit pour la fréquence présente.

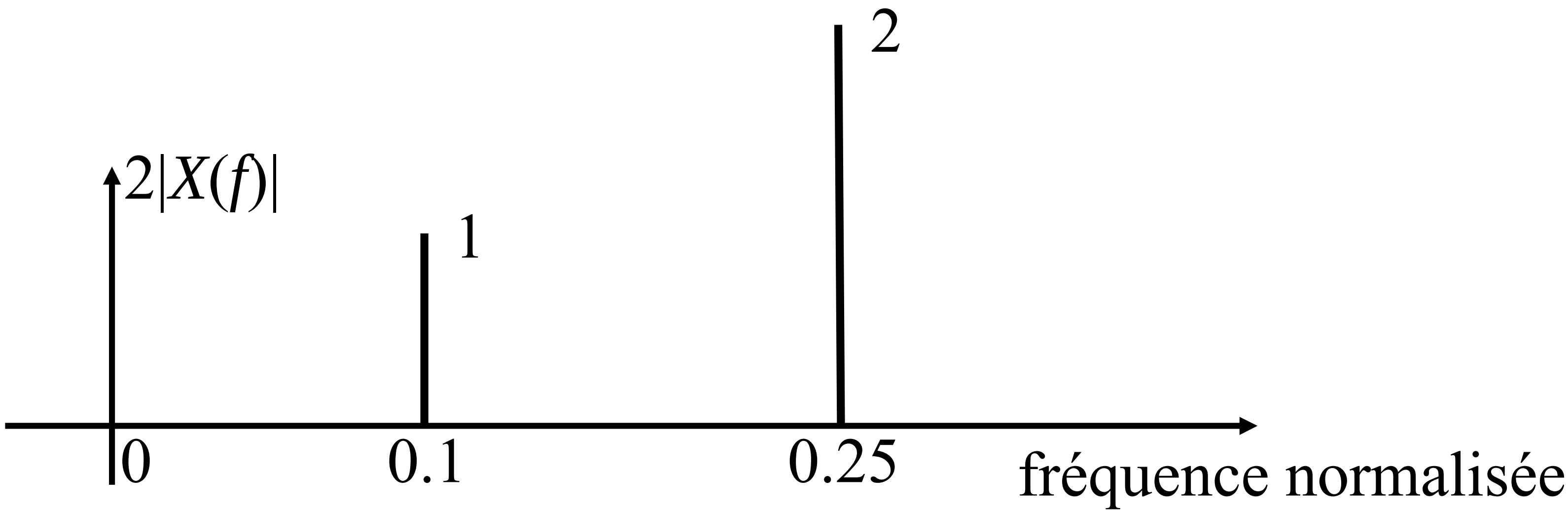


- La solution consiste de nouveau à passer par les exponentielles complexes, qui ″mélangent″ sinus et cosinus. La formule théorique de la transformation de Fourier des signaux numériques s'écrit:

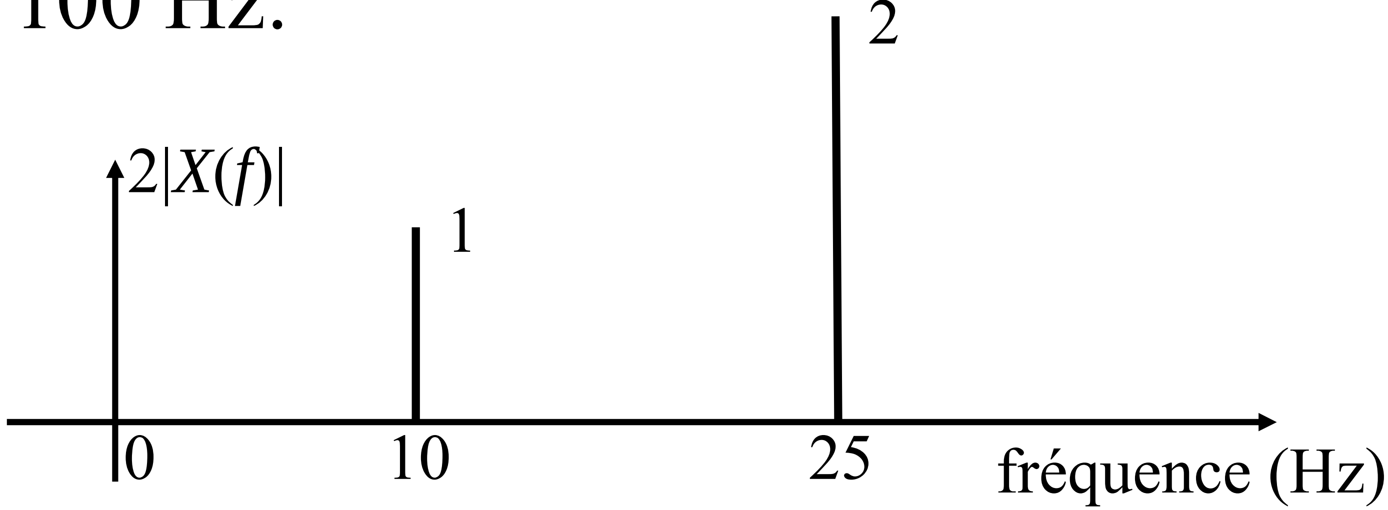
$$X(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \exp(-\mathrm{j}2\pi f k)$$

- Notez que $X(0)$, la composante à la fréquence zéro, correspond à la somme des échantillons du signal.

- Voilà! On fait cette analyse pour les fréquences normalisées entre 0 et ½:



- Et il ne reste plus qu'à multiplier l'axe horizontal par f_e pour obtenir le vrai spectre. Par exemple si $f_e = 100$ Hz:



- On obtient exactement le même résultat qu'avec le signal analogique.

- Tout ça est bien gentil, mais le but de l'opération est d'analyser les signaux sur un ordinateur en un temps fini. Or:
  - On suppose dans ce qui précède que le signal est de longueur infinie.
  - On doit faire le calcul pour une infinité de valeurs de la fréquence normalisée entre 0 et ½.
- La solution est ce qu'on appelle la *transformation de Fourier discrète* (TFD).

- La TFD est expressément prévue pour un signal de longueur finie, composé de N échantillons.
- L'idée est de n'évaluer la transformée de Fourier que sur un nombre *fini* de valeurs de fréquence uniformément réparties (on échantillonne donc en fréquence).
- Ces fréquences sont les fréquences *harmoniques*:

$$0,\ 1/N,\ 2/N\ ,\ \ldots,\ [N/2]/N$$

avec $[N/2] = N/2$ si N pair, $(N\text{-}1)/2$ si N impair.

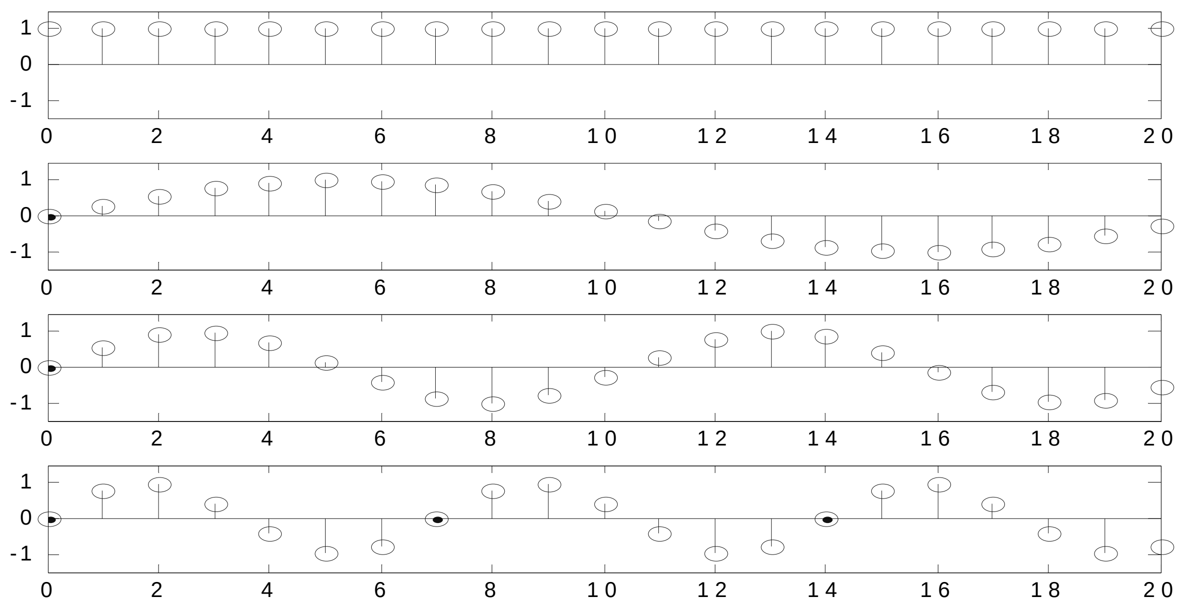
- On compare donc le signal (par produit) à un ensemble de sinusoïdes dont la période divise N (par exemple, pour la fréquence $3/N$, la période est $N/3$).

$f = 0$

$f = 1/N$

$f = 2/N$

$f = 3/N$



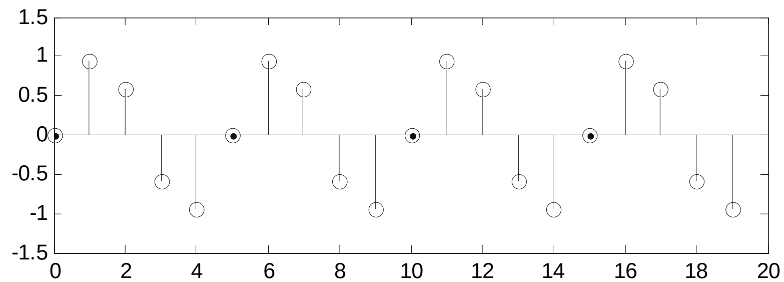
- D'un point de vue mathématique, la TFD s'écrit:

$$X(f = n/N) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \exp\left(-\mathrm{j}2\pi \frac{nk}{N} \right)$$

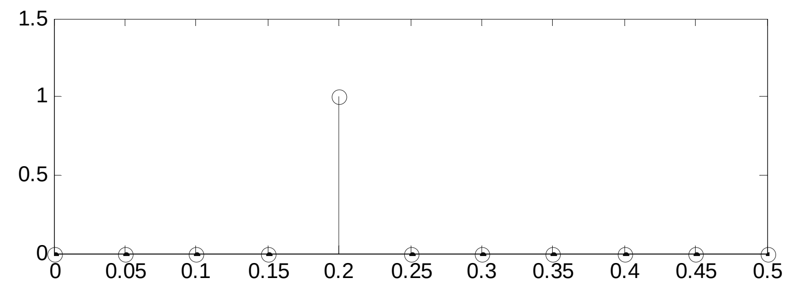
- On a bien cette fois-ci une formule qu'on peut calculer en un nombre fini d'opérations. De plus, il existe un algorithme rapide pour la calculer, la transformation de Fourier rapide (en anglais fast Fourier transform, FFT).

- Si le signal est une sinusoïde à une fréquence harmonique (ici $N = 20$, $f = 0.2 = 4/20$), on obtient un beau résultat:

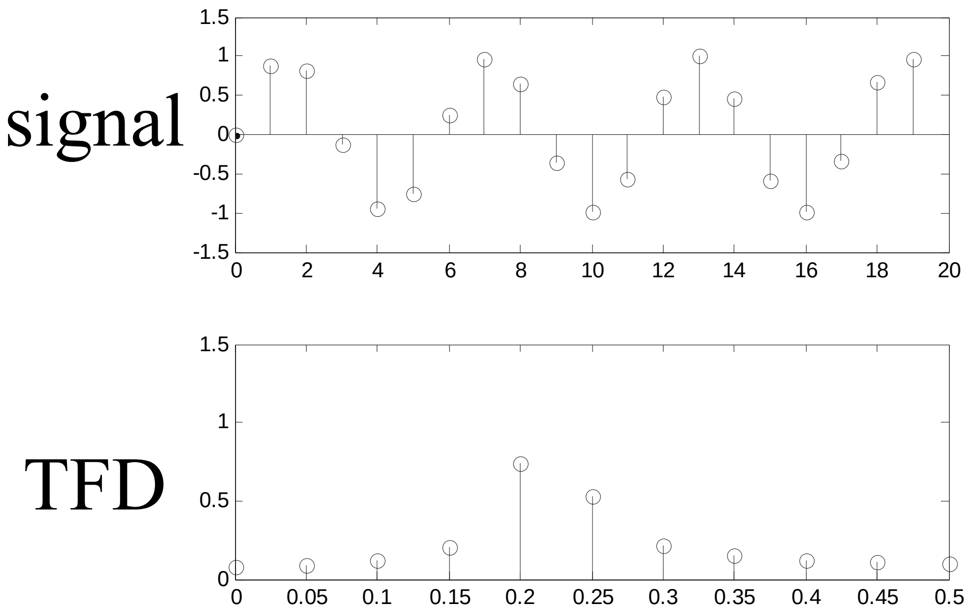
signal



TFD



- Si le signal est une sinusoïde, mais pas à une fréquence harmonique (ici $N = 20$, $f = 0.22 = 4/20$), on obtient un moins beau résultat:



- Deux explications à ce dernier résultat:
  – Comme on n'analyse le signal qu'aux fréquences harmoniques, il n'y a aucune de ces fréquences qui correspond bien à celle du signal.
  – Ce n'est pas une vraie sinusoïde de longueur infinie qu'on est train d'analyser, c'est *un morceau* de sinusoïde.