ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

3 avril 2009

cours de la semaine # 07b

Bienvenue au

EPFL - LABORATOIRE D'ASTROPHYSIQUE

# Cours de physique générale

## Physique II pour étudiants de première année en section de mathématiques


Prof. Georges Meylan

Laboratoire d'astrophysique


Site web du laboratoire et du cours :

http://lastro.epfl.ch

# Examen écrit de Physique générale II

| LUNDI 22.06.2009 de 08:15 à 12:00 | |
|---|---|
| **Matière** | Physique générale II (Ecrit) |
| **Section** | Mathématiques, 2008-2009, Bachelor semestre 2 [92] |
| **Salles** | CO2<br>CO3 |
| **Enseignant** | Meylan Georges |
| **Expert / observateur** | |
| **Remarques** | |
| **Inscrits [92]** | Aegerter Stéphane; Aimé Jacques; Bahri Rym; Barbey Aurélie; Berrich Sarra; Boutin Thomas; Brefin Mathieu; Cabalzar Filipi; Cloux Lucas; Corthésy Marielle; Despond Kevin; Devaud Denis; De France Axelle; Décrevel Yan; Do Prado Ana Sophia; Drahi Angelina; Droxler Jonathan; Dubuis Samuel; Dudok De Wit Laurent; Dupraz Marie; Dupuis Robin; Durand Bona Pierre; Dutoit Fanny; Egger Patricia; El Bachir Yousra; Erismann Valentin; Essafi Fatine; Fakhran Zeina; Feyer Aurélie; Fontaine Marine; Garret Louise Anne; Gaspoz Gaël; Gassner Dylan; Gautier Antoine; Girardin Colombe; Guetat Anvo Yann-Gaël; Guignard Fabian; Hachouch Rached; Hentgen Jeremy; Hess Julien; Hitz Adrien; Horowitz Benjamin; Hubeaux Stanislas; Jallut Lionel; Jäggli Christoph; Jollivet Céline; Kneubühler Vincent; Kokollari Kreshnik; Lugrin Thomas; Luyet Stéphanie; Manzini Charlotte; Marcone Adrien; Markovic Aleksandar; Mouliom Idriss; Muraleedharan Supriya; Nakic Daniel; Ngo Quang Dung; Nicolini Marin-Jerry; Oguey Romain; Patelli Alessandro; Piguet Eiichi; Piller Thomas; Prod'Hom Raphaël; Regamey Samuel; Revaz Sandrine; Ricci Charlotte; Ruffieux Hélène; Rupp Florence; Salvador Julien; Schneider Julien; Schreier Christopher; Sciré Nicolas; Simonoff Maria Alexandra; Si Adjeme Yves Martial Cyprien; Souid Yassine; Stalder Odile; Strütt David; Tamenu Yaffet; Tarhouni Amira; Thabet Malek; Theurillat Grégoire; Tholen Franka; Tolou Didar; Truong Minh Quang; Uldry Mélanie; Vila Maximilien; Villard Alexandre; Voirol Ludovic; Von Niederhäusern Léonard; Wilhelm Matthieu; Wolfe Thomas; Zargari Maryam |

a

# Examen écrit de Physique générale II

Date : lundi 22 juin 2009
Heure : de 08h15 à 12h00
Lieu : dans les auditoires CE2 et CE3

Conditions d'examen :

- Les données des problèmes à résoudre sont distribuées en début d'examen, i.e., à 08h15, dans une enveloppe
- Les solutions rédigées sont à rendre au plus tard à la fin de l'examen, i.e., à 12h00, avec les énoncés dans l'enveloppe
- Matériel autorisé : papier vierge, pas de crayon, stylo, formulaire personnel manuscrit (maximum de 2 feuilles A4 double face)
- Calculatrice non programmable ; pas d'autre matériel autorisé
- Travail individuel en silence
- Aucune interaction autorisée entre les étudiants pendant l'examen

b

# Examen écrit de Physique générale II

**Répartition dans les auditoires**

**Vous êtes répartis,**
**selon votre nom de famille,**
**dans les deux auditoires CE2 et CE3 :**

**CE2 Aegerter - Jollivet**
**CE3 Kneubühler - Zargari**

**Un plan de placement sera affiché sur les portes de chaque auditoire.**
**Dans l'auditoire correspondant, vous trouverez**
**votre nom sur une petite « carte de visite », à votre place,**
**avec une enveloppe contenant les énoncés des exercices.**
**A la fin de l'examen, vous rendez l'énoncé dans l'enveloppe avec,**
**en plus, vos solutions et la « carte de visite ».**

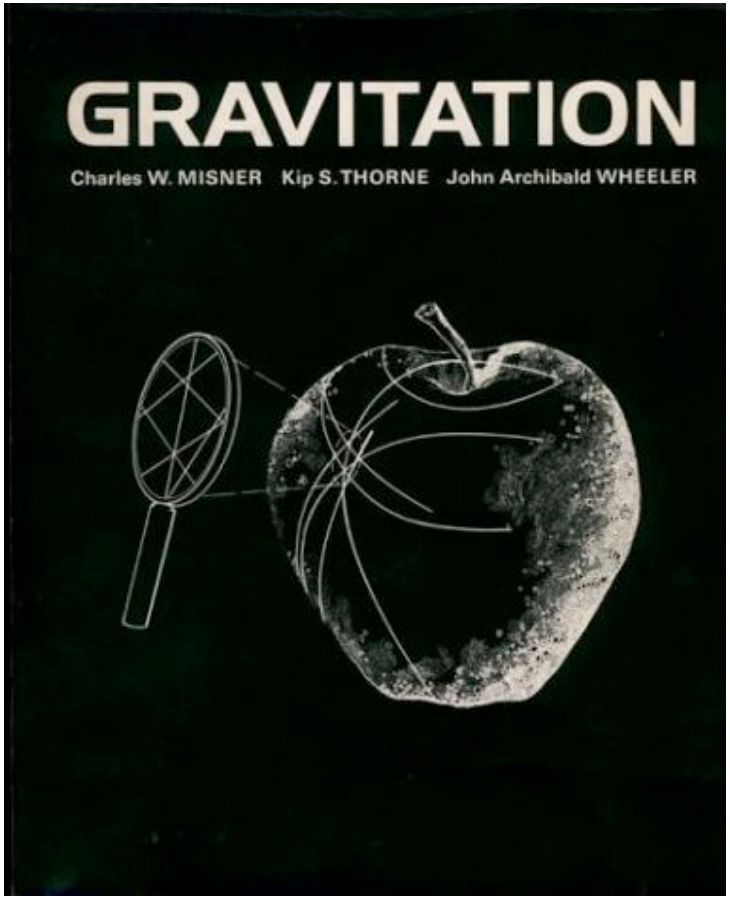
# Séance de questions

Une semaine avant l'examen

**Lundi 15 juin 2009**

**de 14h15 à 18h00**

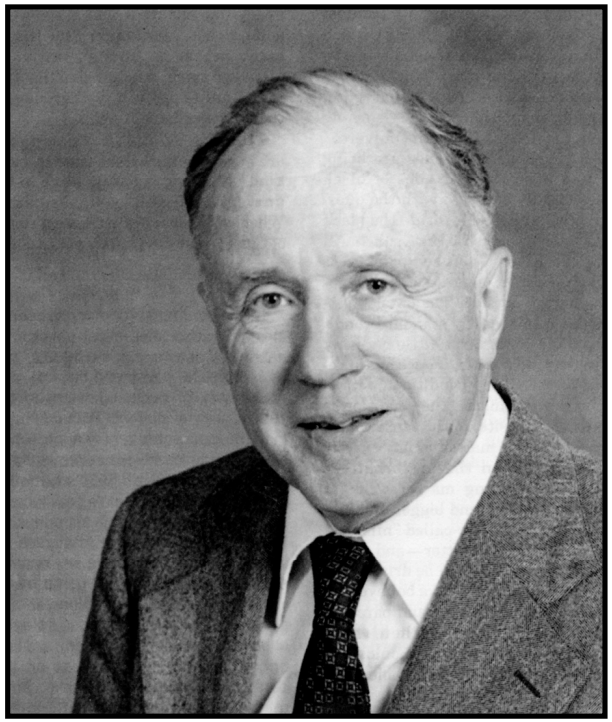
**Auditoire ??**




Charles W. Misner, Kip S. Thorne, John Archibald Wheeler

La bible de la théorie de la gravitation : RR et RG

# L'inventeur du nom « trou noir » !



**John Archibald Wheeler**

9 juillet 1911 (Jacksonville, Fl) - 13 avril 2008 (Hightstown, NJ)

physicien théoricien américain

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Année académique 2007-2008

EPFL - LABORATOIRE D'ASTROPHYSIQUE

## Complément de RR

## Relativité Restreinte

# Cours de physique générale

Physique II pour étudiants de première année
en section de mathématiques

Voir fichier **physmathRRGetB.ppt** sur la page web du cours

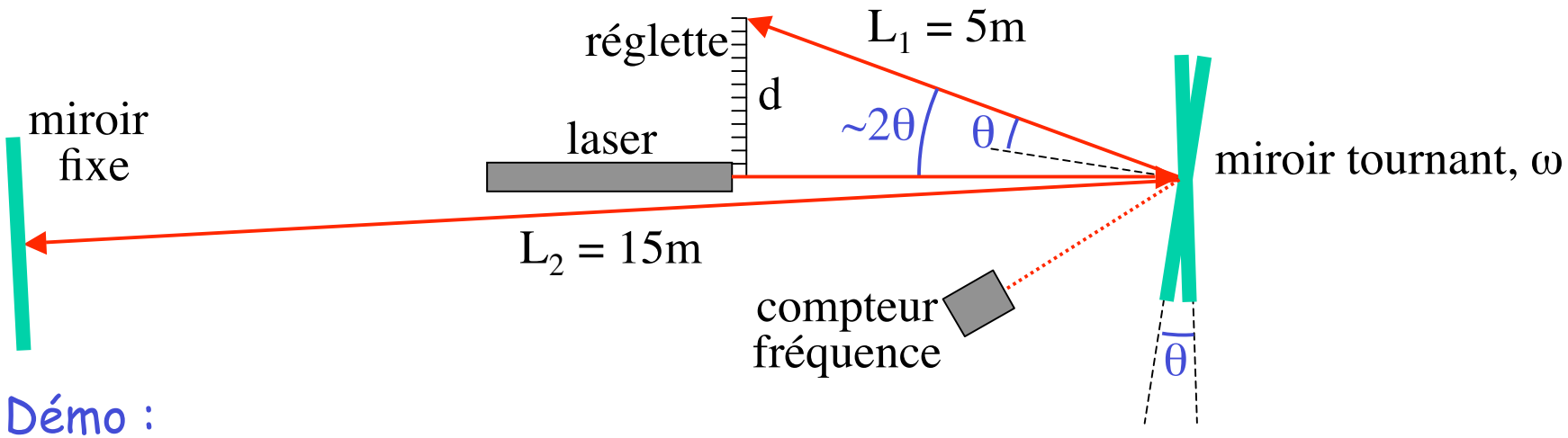

Prof. Georges Meylan

Laboratoire d'astrophysique


Site web du laboratoire et du cours :

http://lastro.epfl.ch

# Mesure de la vitesse de la lumière




- Démo :
  - on mesure la déviation d sur la réglette et la fréquence ν au compteur :

$$\frac{d}{L_1} \cong 2\theta = 2\omega\Delta t = 2(2\pi\nu)\left(\frac{2L_2}{c}\right) = 8\pi\nu\frac{L_2}{c} \quad \Rightarrow \quad \boxed{c = 8\pi\nu\frac{L_1 L_2}{d}}$$

en assimilant l'air au vide (approximation)

- Remarques :
  - Depuis 1983, le mètre est défini comme la distance parcourue par la lumière dans le vide en 1/299792458 seconde ⇒ $\boxed{c = 299\,792\,458 \text{ m/s}}$
  - Il n'est donc plus « possible » (ni nécessaire) de mesurer c !
  - On peut très bien choisir un système d'unités dans lequel c = 1 (couramment utilisé en physique des particules)

Démo : Cuve à ondes # 198

# Le défi de l'électromagnétisme à la mécanique

- Maxwell unifie l'électricité et le magnétisme :
  - les équations de Maxwell pour les champs E et B prédisent que la vitesse d'une onde électromagnétique (donc de la lumière) vaut $c \approx 3 \times 10^8$ m/s
  - mais par rapport à quel référentiel ?

James C Maxwell
1831–1879

- Les équations Maxwell n'obéissent manifestement pas à la relativité Galiléenne !
  - on pense alors que c est la vitesse de la lumière par rapport à un référentiel privilégié défini par « l'éther luminifère», qui serait le milieu dans lequel les ondes électromagnétiques se propagent

notion de « référentiel absolu », contraire au principe de relativité

Analogie: la vitesse du son dans l'air ( ~ 330 m/s) est définie dans le référentiel où l'air est au repos ; cette vitesse n'est pas la même dans tous les référentiels d'inertie (effet Doppler).
Sans air ou autre milieu, il n'y peut pas exister d'onde sonore !

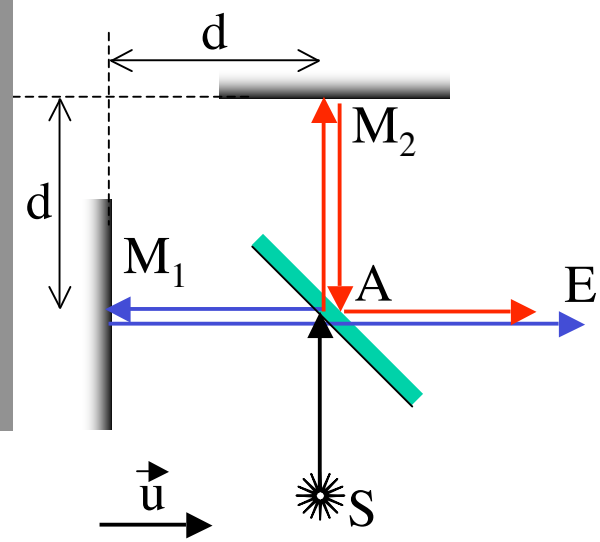
# Expérience de Michelson et Morley (1881,1887)

S = source de lumière monochromatique de fréquence n

A = lame semi-argentée

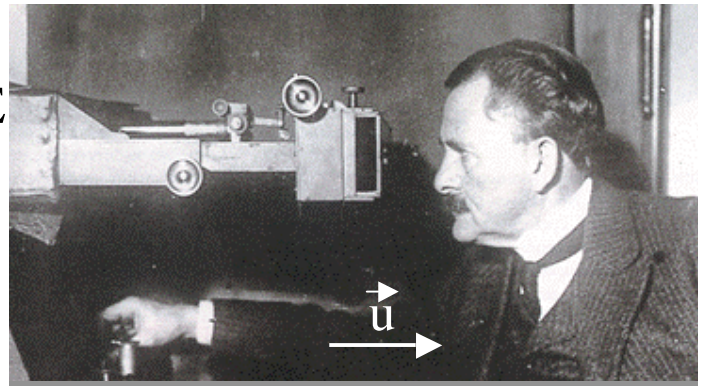
M1, M2 = miroirs

E = écran

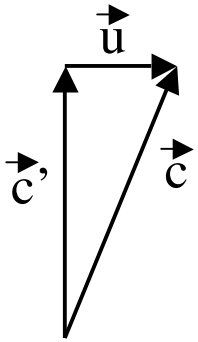



(vue de dessus)

observation des franges d'interférence dues au déphasage $\Delta\Phi = \nu(t_1 - t_2)$ entre les deux faisceaux lumineux




Albert A Michelson (1852–1931)




c' = vitesse de la lumière entre A et $M_2$ par rapport à l'observateur
c = vitesse de la lumière par rapport à l'éther $\approx 3 \times 10^8$ m/s
u = vitesse de l'observateur par rapport à l'éther $\approx 30$ km/s $\approx 10^{-4}$ c

$$t_1 = t_{A\to M_1} + t_{M_1\to A} = \frac{d}{c+u} + \frac{d}{c-u} = \frac{2d}{c}\,\frac{1}{1-u^2/c^2}$$

$$t_2 = t_{A\to M_2} + t_{M_2\to A} = \frac{d}{c'} + \frac{d}{c'} = \frac{2d}{c}\,\frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}} < t_1$$

déphasage $\Delta\Phi > 0$, qui devrait devenir $-\Delta\Phi$ si l'expérience est tournée de 90°

expérience répétée après rotation de 90°: pas de modification des franges ! $\Rightarrow t_1 = t_2$

# 21.1 Introduction

## 21.1.1 Expériences de Michelson et Morley

- Le Chap. 1 a présenté les expériences et les réflexions ayant amené Einstein à rejeter les concepts newtoniens d'espace et de temps absolus et à formuler une nouvelle théorie, appelée :

  **Théorie de la relativité restreinte (1905).**

- Remarque : Les lois de la mécanique sont remises en question mais pas les principes d'invariance qui, au contraire, se trouvent confirmés et étendus à tous les domaines de la physique.
- Fizeau montre en 1851 que l'éther n'est pas entraîné par l'observateur. Donc, en admettant que la lumière se déplace avec une vitesse scalaire $c$ = cte par rapport à l'éther, la vitesse de la lumière par rapport à l'observateur devait dépendre du mvt de celui-ci par rapport à l'éther : il devenait possible de mettre en évidence le mvt absolu, i.e., le mvt par rapport à l'éther.
- Michelson (1881) et Michelson & Morley (1887) construisent des interféromètres de plus en plus précis pour mettre en évidence la variation de la vitesse de la lumière, supposée différente selon la direction de propagation (voir Fig. 21.1).

# 21.1 Introduction

## 21.1.1 Expériences de Michelson et Morley (suite)

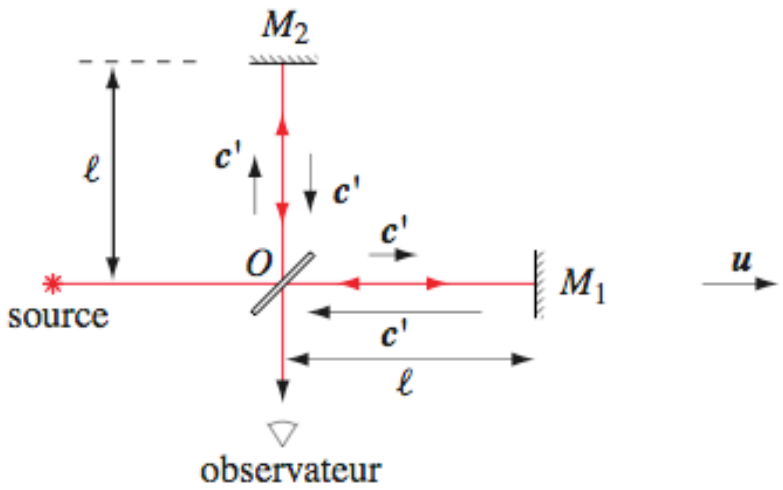



**Fig. 21.1** Expérience de Michelson ; $\boldsymbol{u}$ vitesse de la Terre (= observateur) par rapport à l'éther ; $\boldsymbol{c}'$ vitesse de la lumière par rapport à l'observateur.

Michelson & Morley utilisent la variation de la direction de la vitesse de révolution de la Terre autour du Soleil, ceci tout au long de l'année.

vitesse scalaire orbitale moyenne de la Terre : $v_m = 2{,}98\ 10^4\ m/s^{-1}$

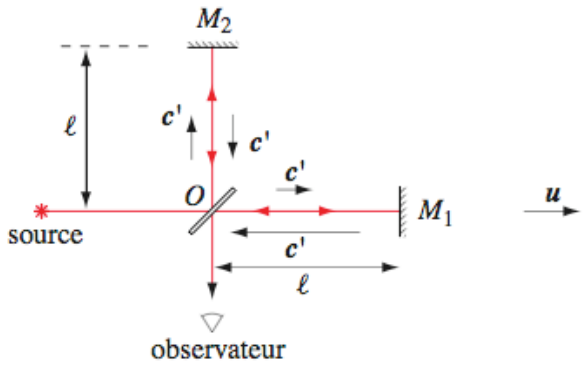
# 21.1 Introduction

## 21.1.1 Expériences de Michelson et Morley (suite)

- Un rayon lumineux émis par une source est divisé en deux par un miroir semi-transparent $O$. Les deux rayons sont ensuite réfléchis par deux miroirs $M_1$ et $M_2$ et se superposent à nouveau pour atteindre l'observateur.
- En admettant que la vitesse de la lumière par rapport à l'éther est $c$ et que la vitesse de la Terre par rapport à l'éther est $\boldsymbol{u}$, il découle du Chap. 9, décrivant les mvts relatifs non relativistes, que la vitesse de la lumière par rapport à la Terre est $\boldsymbol{c}' = \boldsymbol{c} - \boldsymbol{u}$.
- Supposons que les deux bras de l'interféromètres ont même longueur $l$ et orientons l'appareil de manière telle que le bras $OM_1$ soit parallèle à $u$ : les temps mis par les rayons pour parcourir les chemins $OM_1O$ et $OM_2O$ sont respectivement :

$$t_1 = \frac{\ell}{c-u} + \frac{\ell}{c+u} = \frac{2\ell}{c}\,\frac{1}{1-u^2/c^2}$$

$$t_2 = \frac{2\ell}{c}\,\frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$



# 21.1 Introduction

## 21.1.1 Expériences de Michelson et Morley (suite)

- Dans la direction de $M_1$ : temps avec le courant $l/(c - u)$ et temps à contre courant $l/(c + u)$ d'où :

  $t_1 = 2l/c/(c^2-u^2)$ et de façon équivalente :

  $t_1 = (2l/c)(1-u^2/c^2)^{-1}$

- Fait observationnel déjà acquis : la vitesse $u$ de la Terre dans l'éther est certainement beaucoup plus petite que $c$, sinon elle aurait déjà été détectée voilà longtemps, e.g., à travers l'observation des temps des éclipses des satellites de Jupiter. Ceci implique que : $u^2/c^2 \ll 1$.
  On utilise deux faits mathématiques importants :

  (i) si $x \ll 1$, alors $1/(1-x) \cong 1+x$ ;

  (ii) si $x \ll 1$, alors $(1+x)^{1/2} \cong 1+x/2$ .

  Donc de (i), pour le trajet aller-retour, $t_1 \cong (2l/c)(1 + u^2/c^2)$ est une bonne approximation.

# 21.1 Introduction

## 21.1.1 Expériences de Michelson et Morley (suite)

- Par construction, comme les deux bras de l'interféromètre sont dans des directions perpendiculaires l'une à l'autre, l'addition vectorielle des vitesses (analogie avec un bateau traversant un fleuve) donne l'hypoténuse (diagonale) correspondant à la vitesse $c$ et la petite cathète à la vitesse du courant $u$.

- Dans la direction de $M_2$ : pour déterminer le temps de parcours perpendiculairement au courant, on utilise le théorème de Pythagore pour exprimer la vitesse $(c^2-u^2)^{1/2}$ perpendiculairement au courant. Comme la vitesse est la même dans les deux sens, le temps total est égal à $t_2 = (2l/)\,(c^2-u^2)^{-1/2} = (2l/c)(1-u^2/c^2)^{-1/2}$.

- Et, utilisant (ii), cette dernière expression devient :
  $t_2 \cong (2l/c)(1 - u^2/2c^2)^{-1}$ et en remplaçant $1/(1-x)$ par $1+x$ on obtient :
  $t_2 \cong (2l/c)(1 + u^2/2c^2)$

# 21.1 Introduction

## 21.1.1 Expériences de Michelson et Morley (suite)

- Des deux équations : $t_1 = (2l/c)(1-u^2/c^2)^{-1}$ et $t_2 = (2l/c)(1-u^2/c^2)^{-1/2}$, en négligeant les termes d'ordre supérieur à 2 en $u/c$, nous voyons qu'il y a un déphasage $\Delta\Phi$ entre les deux temps, donné par :

$$\Delta\Phi = \nu(t_2 - t_1) = \frac{\nu l u^2}{c^3}, \qquad (21.1)$$

où $\nu$ est la fréquence de la lumière émise par la source.

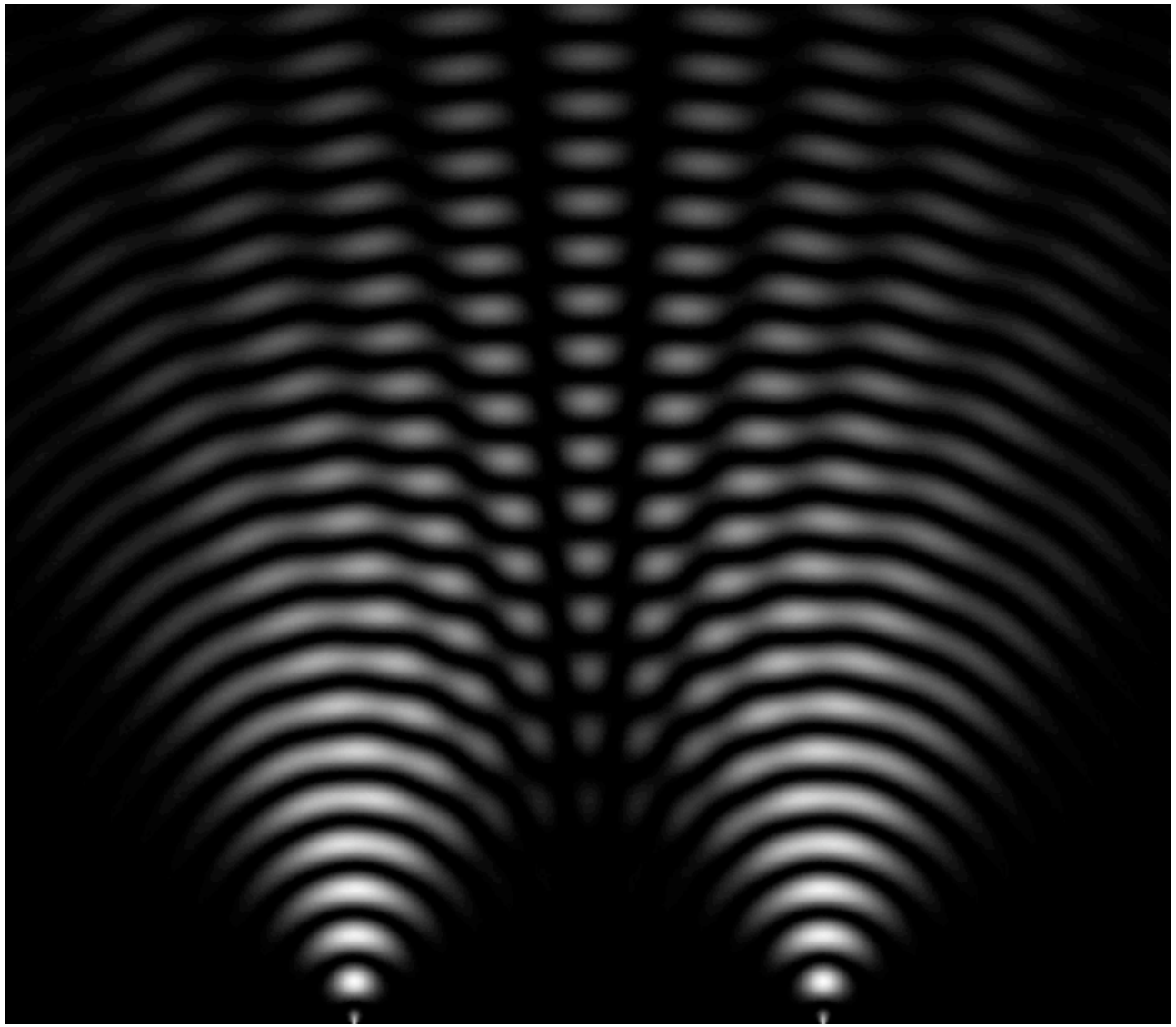
- En faisant tourner l'interféromètre de 90° (naturellement le long de l'orbite terrestre ou mécaniquement dans le laboratoire), le déphasage change de signe et devient égal à $-\Delta\Phi$. **Donc on devrait observer un déplacement des franges d'interférence.**

- **Contrairement aux prédictions de la physique classique, aucune modification des franges d'interférence n'a été observée, quelle que soit la période de l'année ou la situation du laboratoire contenant l'interféromètre.**

# 21.1 Introduction

## 21.1.1 Expériences de Michelson et Morley (suite)

Franges d'interférence obtenues avec les fentes de Young

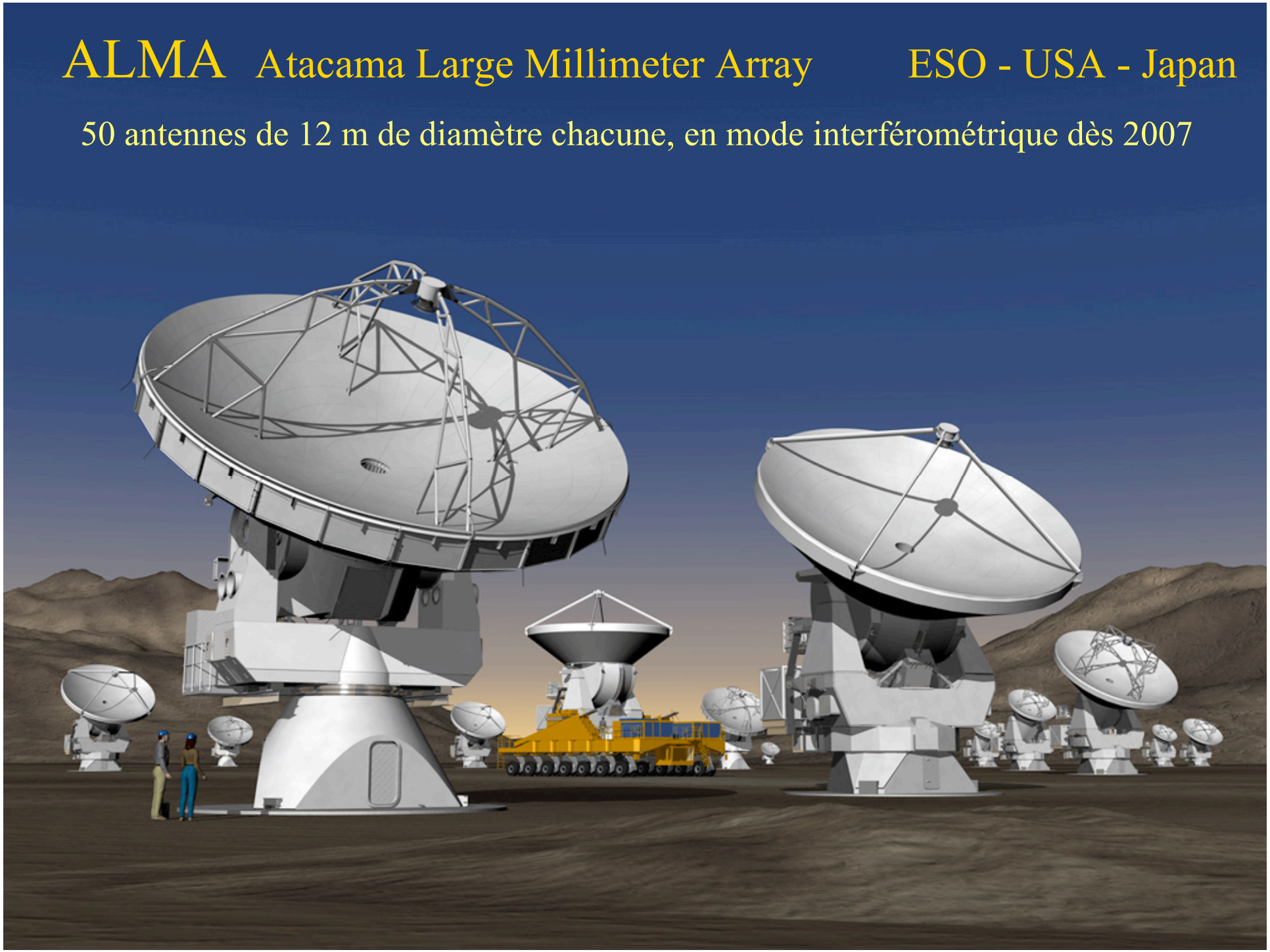


# Observatoire de Paranal, ESO, Chili

# ALMA Chajnantor Atacama Chile

# ALMA Atacama Large Millimeter Array ESO - USA - Japan

50 antennes de 12 m de diamètre chacune, en mode interférométrique dès 2007



# 21.1 Introduction

## 21.1.1 Expériences de Michelson et Morley (suite)

- **Une seule conclusion simpose** : $\boxed{t_1 = t_2}$

- Ce résultat, pour la première fois fermement établi par Michelson & Morley (1881 et 1887), en contradiction complète avec les prédictions classiques, **remettait alors en question les bases conceptuelles de la mécanique newtonienne**.

- Durant le 20e siècle, de multiples expériences ont été entreprises par différents groupes. Dans les années 1950, Charles H. Townes entreprend l'expérience avec un interféromètre de grande précision (km au lieu de m) grâce au laser dont il est un des inventeurs. Les résultats les plus récents, dus à Hils & Hall (1990), confirment les résultats de Michelson & Morley et réduisent un possible anisotropie à $2\ 10^{-13}$.

# Défi relevé: la relativité restreinte

- Après les travaux de Voigt (1887), Lorentz (1892), Fitzgerald (1892), Poincaré (1905), … Einstein réussit à éliminer définitivement et clairement toute contradiction, en formulant la théorie de la relativité restreinte (1905), puis de la relativité générale (1915).

  La mécanique et électromagnétisme sont réconciliés par :
  - l'abandon de la notion de référentiel absolu (l'éther)
  - l'abandon de la notion de temps et d'espace absolus

Albert Einstein
1879–1955

- **Principe de relativité restreinte (Einstein, 1905) :**

  Les lois de la physique sont les mêmes dans tous les référentiels d'inertie

  → et donc pas seulement celles de la mécanique (comme énoncé par Galilée), mais aussi celles de l'électromagnétisme, …

  → il n'y a donc pas de référentiel privilégié parmi les référentiels d'inertie

  - En appliquant ce postulat aux équations de Maxwell, où la vitesse c apparaît :

La vitesse de la lumière dans le vide, notée c, est indépendante du référentiel (observateur) et du mouvement de la source

c = constante qui ne dépend de rien !

## 15.2 Référentiels en transl. unif. et principe de rel. de Galilée

### RAPPEL 15.2.2 Principe de la relativité de Galilée (suite) RAPPEL

- **Principe de la relativité de Galilée**.

- Il existe des référentiels particuliers, appelés **référentiels d'inertie**, par rapport auxquels **l'espace vide de matière et de rayonnement** est **homogène-isotrope** et le **temps homogène**.

- En particulier, **tout corps isolé possède un mvt rectiligne uniforme par rapport à un référentiel d'inertie**, et **tout référentiel en translation uniforme par rapport à un référentiel d'inertie est également un référentiel d'inertie**.

- **Les lois de la mécanique possèdent la même forme relativement à n'importe quel référentiel d'inertie**. On dira également que les lois de la mécanique sont « **invariantes par rapport aux transformations de Galilée** », ou aussi que « **les transformations de Galilée sont un groupe de symétrie de la mécanique newtonienne** ».

## 21.2 L'espace-temps de la relativité restreinte
### 21.2.2 Axiome de la relativité restreinte (suite)

- **Principe de la relativité restreinte (Einstein 1905)**

- Il existe des référentiels privilégiés, appelés **référentiels d'inertie**, par rapport auxquels l'espace est **homogène-isotrope** et le temps **homogène**. En particulier, relativement à un référentiel d'inertie, un corps isolé a un mvt rectiligne uniforme et, dans le vide, la lumière se déplace en ligne droite avec une vitesse qui est la même dans toutes les directions.

- Tout référentiel $\mathcal{R}'$ en translation uniforme par rapport à un référentiel d'inertie $\mathcal{R}$ est aussi un référentiel d'inertie. Pour les systèmes isolés, la transformation de $\mathcal{R}$ à $\mathcal{R}'$ est une symétrie.

- Toutes les lois de la physique sont invariantes, i.e., qu'elles ne changent pas de forme lorsque l'on passe d'un référentiel d'inertie à un nouveau référentiel en translation uniforme par rapport au premier. Il découle de ce postulat que la lumière se déplace dans le vide avec une vitesse $c$ indépendante du référentiel et du mvt de la source.

L'énoncé d'Einstein (§21.2.2) est une extension de celui de Galilée (§15.2.2) à toutes les lois de la physique

## 21.2 L'espace-temps de la relativité restreinte

### 21.2.2 Axiome de la relativité restreinte

- Pour expliquer le résultat de M & M, Einstein généralise à toute la physique le principe de la relativité introduit en mécanique par Galilée (§ 15.2.2 et diapo suivante). Cette généralisation constitue l'axiome de base de la mécanique relativiste, axiome qu'Einstein substitue à ceux de la mécanique newtonienne.

- **Remarque** :

  **La relativité restreinte est une théorie des phénomènes physiques en l'absence de gravitation et relativement à des coordonnées cartésiennes de l'espace**.

**RR (sans gravitation) ≠ RG (avec gravitation)**

## 21.2 L'espace-temps de la relativité restreinte

### 21.2.2 Axiome de la relativité restreinte

Inclusion de la gravitation $\Rightarrow$ équations d'Einstein de la RG (1915-1916)

$$\boxed{G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - (1/2)\, g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} = -(8\pi G/c^4)\, T_{\mu\nu}}$$

où

$G_{\mu\nu}$ = tenseur d'Einstein

$R_{\mu\nu}$ = tenseur de Ricci ou de courbure,
f (coordonnées spatiales + temps)

$g_{\mu\nu}$ = tenseur métrique,
f (coordonnées spatiales + temps)

$R$ = scalaire de courbure

$\Lambda$ = constante cosmologique

$T_{\mu\nu}$ = tenseur impulsion-énergie
f (coordonnées spatiales + temps + pression + densité)

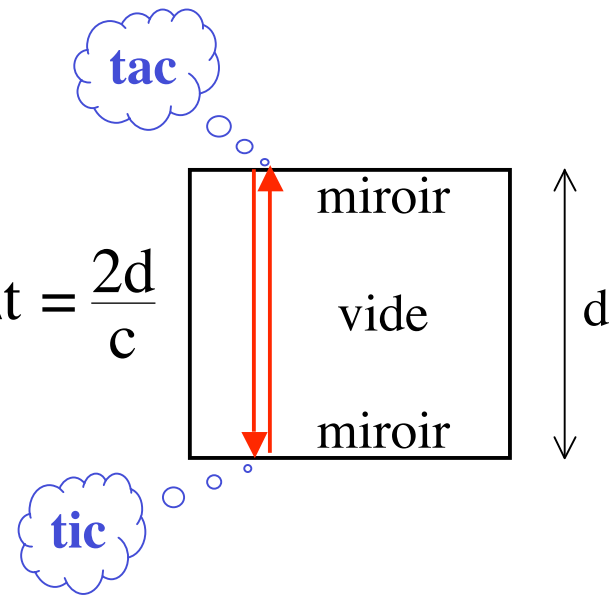

ALBERT
EINSTEIN
CONFOE-
DERATIO
HELVETICA
5 FR
1979

# Horloges lumineuses

- La mesure du temps consiste toujours à compter le nombre de périodes d'un processus physique pris comme référence :
  - Exemples :
    - mouvement des planètes et satellites
    - mouvement de la Terre sur elle-même
    - période d'oscillations d'un pendule, d'une pendule à quartz
    - période d'oscillation du rayonnement émis par un atome, …

- « Horloge lumineuse » :
  - deux miroirs parallèles séparés par une distance d (de vide) se renvoient perpétuellement un rayon de lumière
  - période propre de l'horloge :
    intervalle de temps $\Delta t$ entre deux « tics » mesuré dans le référentiel de l'horloge

$$\Delta t = \frac{2d}{c}$$




- Expérience de pensée :
  - deux horloges identiques, A et B :
    $\Rightarrow$ même période propre
  - Horloge A reste sur Terre (référentiel R)
  - Horloge B est placée dans une navette spatiale (référentiel R') de vitesse constante u par rapport à la Terre

$$\Delta t_A = \Delta t'_B = \frac{2d}{c}$$

# 21.2 L'espace-temps de la relativité restreinte

## 21.2.3 Paramétrisation des événements par l'observateur $O$ dans le référentiel d'inertie $\mathfrak{R}$

- Le principe de la relativité d'Einstein étant **en contradiction** avec les axiomes de base de la mécanique newtonienne (Sect. 9.2), il devient nécessaire de définir précisément la méthode utilisée pour la description du mvt (cinématique).
- Un système de coordonnée, ou « **carte** », est une paramétrisation qui à tout événement $E$ associe 4 nombres réels $x_E = (x_E{}^0, x_E{}^1, x_E{}^2, x_E{}^3)$ tels que :
- $x_E{}^0 = ct_E$ où $c$ est la vitesse de la lumière, $t_E$ paramétrisant l'**instant** de l'événement et
- $x_E = (x_E{}^1, x_E{}^2, x_E{}^3)$ sont trois coordonnées cartésiennes paramétrisant le **lieu** de cet événement (soit le point coïncidant dans $\mathfrak{R}$).
- De cette manière, **les quatre coordonnées** $x_E{}^\mu$ **ont même dimension**. Par la suite nous adoptons la notation :

$$x_E^\mu \quad \text{lorsque} \quad \mu = 0, 1, 2, 3$$

$$x_E^i \quad \text{lorsque} \quad i = 1, 2, 3, \quad \text{par exemple} \quad \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = \sum_{i=1}^{3} x^i y^i .$$

La paramétrisation de $E$ par $x_E{}^\mu$ s'effectue en imposant la condition du princ. de RR (§ 21.2.2).

# 21.2 L'espace-temps de la relativité restreinte

## 21.2.3 Paramétrisation des événements par l'observateur $O$ dans le référentiel d'inertie $\mathfrak{R}$ (suite)

- **Condition 1**. « **Constance de la vitesse de la lumière** »

  **Dans le vide et par rapport à un référentiel d'inertie, la lumière se propage en ligne droite avec une vitesse $c$ indépendante de la direction, du mvt de la source et du référentiel.**

La valeur de la vitesse de la lumière est prise égale à $c = 2{,}99792458\ 10^8\ \mathrm{ms}^{-1}$ ou à $c = 1$ RR-RG

On montre que cette Condition 1 permet de paramétriser les événements en utilisant uniquement des rayons lumineux émis par l'observateur, puis reçus par l'observateur après réflexion sur l'événement en question.

- Remarquons que si deux événements $A$ et $B$ sont reliés par un rayon lumineux (Fig. 21.4 a), la Condition 1 entraîne nécessairement que :

$$|\Delta \boldsymbol{x}| = c\,|\Delta t| \qquad \text{(par définition de la vitesse)}, \qquad (21.3)$$

où : $$|\Delta \boldsymbol{x}|^2 = \sum_{i=1}^{3}(x_B^i - x_A^i)^2 = \sum_{i=1}^{3}(\Delta x^i)^2 \quad \text{(coordonnées cartésiennes)}$$

et : $$c\Delta t = c(t_B - t_A) = x_B^0 - x_A^0 = \Delta x^0.$$

# 21.2 L'espace-temps de la relativité restreinte

## 21.2.3 Paramétrisation des événements par l'observateur $O$ dans le référentiel d'inertie $\mathcal{R}$ (suite)

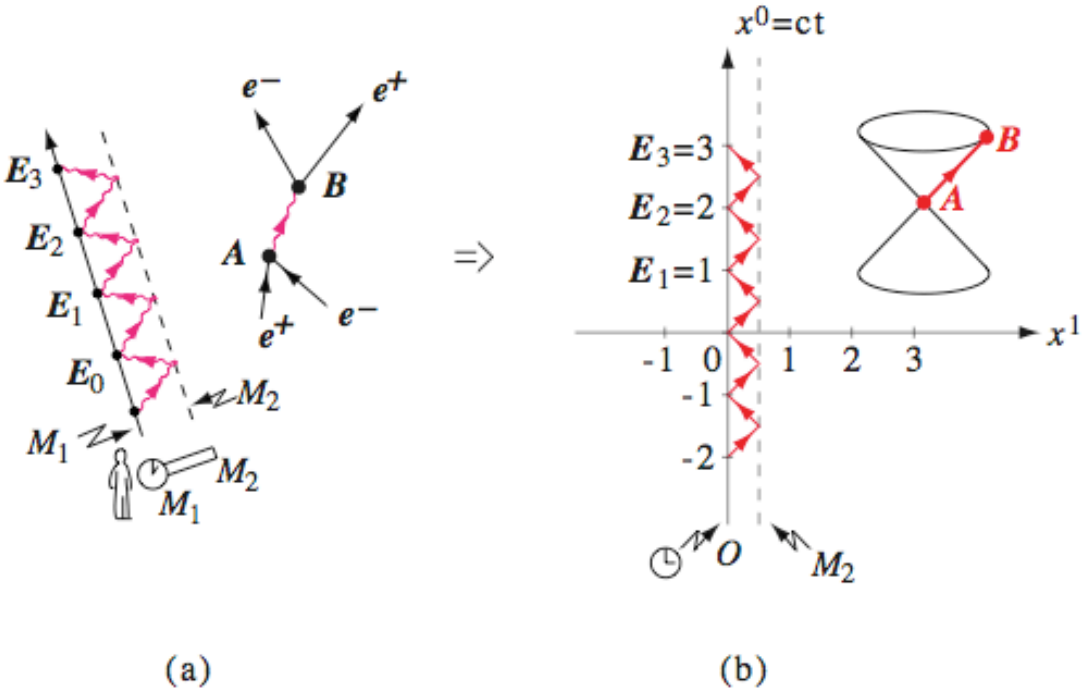



**Fig. 21.4** (a) Événements physiques $A$ et $B$ ; (b) représentation des événements sur la carte de l'observateur $O$. L'axe $x^0 = ct$ représente l'observateur avec son horloge.

# 21.3 Transformations de Lorentz

## 21.3.1 Observateur en translation uniforme par rapport à $O$ (suite)

- L'énoncé du principe de la relativité nous conduit à introduire la condition suivante :

- **Condition 2. « Homogénéité du temps »**
  - **Tout référentiel $\mathcal{R}'$ en translation uniforme par rapport à un référentiel d'inertie $\mathcal{R}$ est également un référentiel d'inertie.**
  - **Si $\mathcal{R}'$ est en translation uniforme par rapport à $\mathcal{R}$, les « secondes » de $\mathcal{R}'$ définissent des intervalles de temps égaux par rapport à $\mathcal{R}$.**

- Il découle de cette Condition 2 que les secondes, ou « tocs », de l'horloge en mvt (= $E_n'$ « secondes de $O'$ ») sont représentés :

$$\begin{aligned} &\text{sur la carte de } O' \quad \text{par} \quad E'_n = (x'^0_n = ct'_n = n, 0) \\ &\text{et sur la carte de } O \quad \text{par} \quad E'_n = (x^0_n = \gamma x'^0_n, x^1_n = \gamma \frac{u}{c} x'^0_n) \end{aligned} \tag{21.9}$$

où $\gamma$ est une cte qui dépend de $O$ et $O'$ à déterminer.

## 21.3 Transformations de Lorentz

### 21.3.2 Transformation de Lorentz

Jusqu'ici l'unité de longueur choisie par les différents observateurs (tube de lumière) était entièrement arbitraire. Pour obtenir les formules de transformation de coordonnées d'un observateur $O$ à un observateur $O'$, il nous faut ajuster la longueur des tubes de lumière de tous les observateurs. Cette « synchronisation » des horloges s'effectue en imposant la condition suivante, qui exprime le **principe de la relativité** selon lequel **tous les observateurs en translation uniforme sont équivalents**.

- **Condition 3**. « **Ajustement des horloges** »

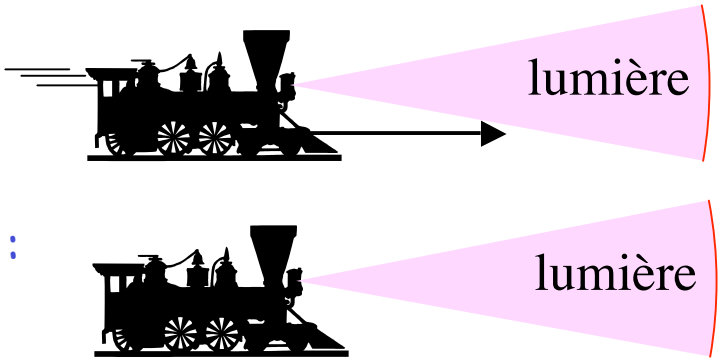
  **La durée des secondes de l'observateur $O'$ mesurée par l'observateur $O$ est égale à la durée des secondes de l'observateur $O$ mesurée par l'observateur $O'$.**

# Conséquences de « c = constante »

- La transformation de Galilée, donc la loi d'addition des vitesses, n'est plus valable !

Dans un référentiel R lié au sol :

$$\begin{cases} v_{\text{locomotive}} > 0 \\ v_{\text{lumière}} = c \end{cases}$$




Dans un référentiel R' lié à la locomotive :

$$\begin{cases} v'_{\text{locomotive}} = 0 \\ v'_{\text{lumière}} = c \neq v_{\text{lumière}} - v_{\text{locomotive}} \;\; !! \end{cases}$$

Démo (contre-exemple) :
Cuve à ondes # 198

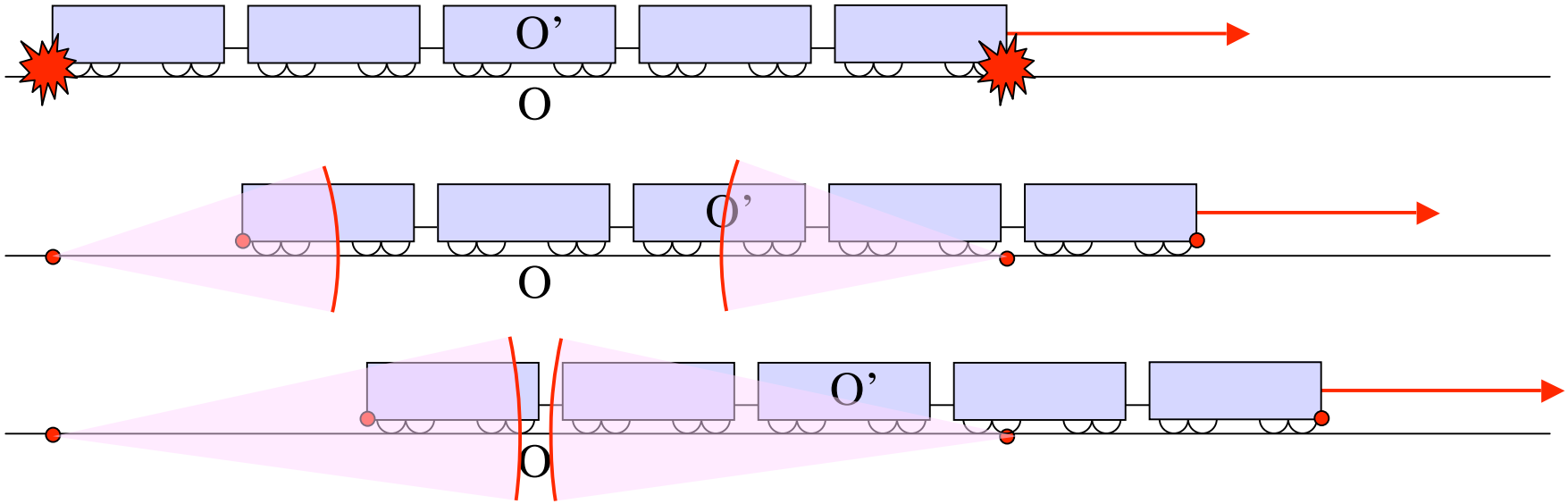
- c = limite supérieure à toute vitesse

- L'espace et le temps ne sont plus des absolus
  - les longueurs et les intervalles de temps dépendent du référentiel !
  - ces « déformations » de l'espace et du temps sont corrélées de sorte que c = constante en toute circonstance
  - mélange entre l'espace et le temps → notion d'espace-temps

Démos : les 4 coordonnées de l'espace-temps
synchronisation des horloges dans un même référentiel + simultanéité

# La simultanéité est relative !

- Deux éclairs sont émis simultanément à l'avant et à l'arrière d'un train en mouvement, laissant des marques sur le train et sur les rails :
  - Un observateur O se tenant sur le sol, à mi-distance entre les marques sur les rails, reçoit les éclairs au même moment :
    ⇒ l'observateur O conclut que les éclairs ont été émis simultanément
  - Un observateur O' se tenant sur le train, à mi-distance entre les marques sur le train, reçoit d'abord l'éclair émis à l'avant du train, puis celui émis à l'arrière :
    ⇒ l'observateur O' conclut que les éclairs n'ont pas été émis simultanément !

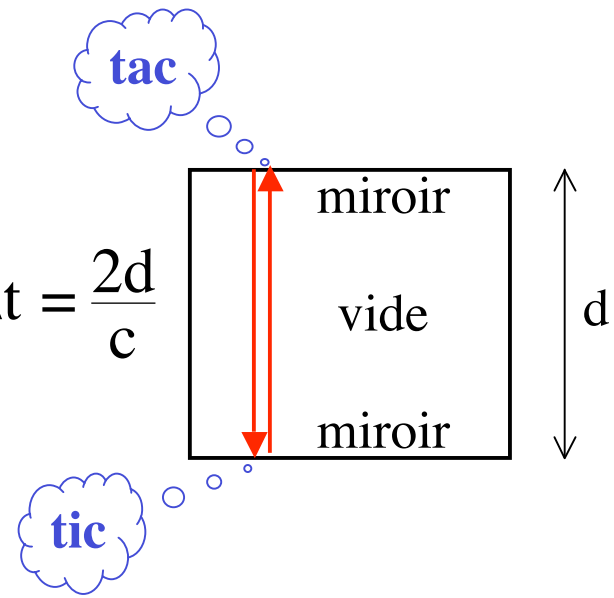


# Horloges lumineuses

- La mesure du temps consiste toujours à compter le nombre de périodes d'un processus physique pris comme référence :
  - Exemples :
    - mouvement des planètes et satellites
    - mouvement de la Terre sur elle-même
    - période d'oscillations d'un pendule, d'une pendule à quartz
    - période d'oscillation du rayonnement émis par un atome, …

- « Horloge lumineuse » :
  - deux miroirs parallèles séparés par une distance d (de vide) se renvoient perpétuellement un rayon de lumière
  - période propre de l'horloge :
    intervalle de temps $\Delta t$ entre deux « tics » mesuré dans le référentiel de l'horloge

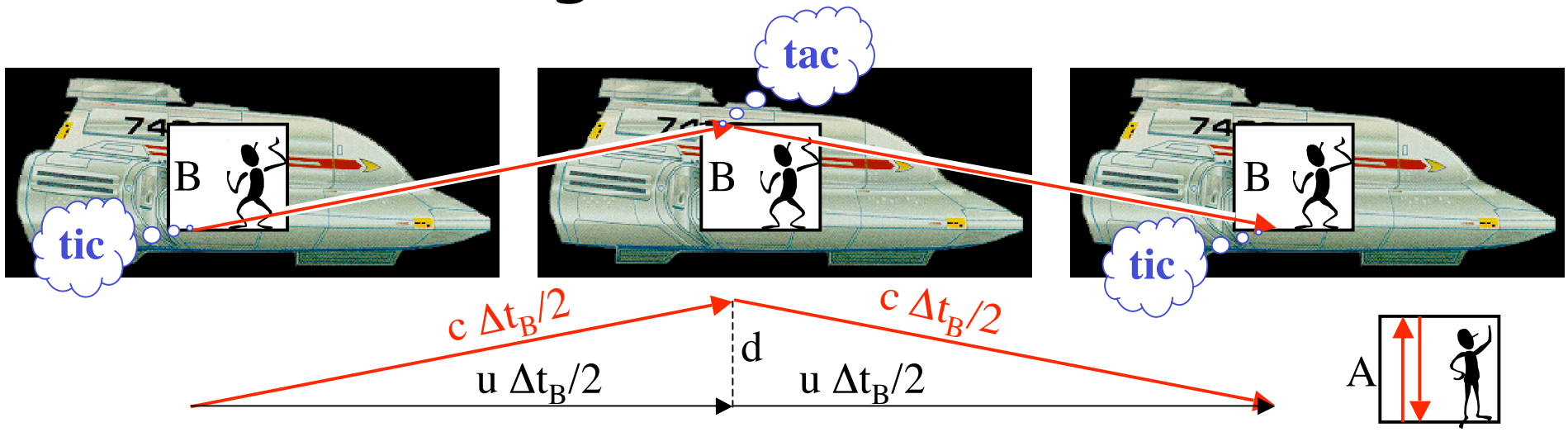
$$\Delta t = \frac{2d}{c}$$




- Expérience de pensée :
  - deux horloges identiques, A et B :
    $\Rightarrow$ même période propre
  - Horloge A reste sur Terre (référentiel R)
  - Horloge B est placée dans une navette spatiale (référentiel R') de vitesse constante u par rapport à la Terre

$$\Delta t_A = \Delta t'_B = \frac{2d}{c}$$

# Horloges en mouvement




$\Delta t_B$ = période de l'horloge B se déplaçant à la vitesse u :

$$(c\Delta t_B/2)^2 = (u\Delta t_B/2)^2 + d^2 \quad \Rightarrow \quad \Delta t_B = \frac{2d}{\sqrt{c^2-u^2}} = \frac{2d}{c}\frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

$\Delta t_A$ = période de l'horloge A au repos : $\Delta t_A = \dfrac{2d}{c}$

Conclusion d'un observateur dans le référentiel R (terre)

$$\Delta t_B = \frac{\Delta t_A}{\sqrt{1-u^2/c^2}} > \Delta t_A \quad \Rightarrow \quad \text{B retarde par rapport à A}$$

Conclusion d'un observateur dans le référentiel R' (navette)

$$\Delta t'_A = \frac{\Delta t'_B}{\sqrt{1-u^2/c^2}} > \Delta t'_B \quad \Rightarrow \quad \text{A retarde par rapport à B}$$

$$\boxed{\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = \text{facteur de dilatation du temps}}$$

# Muons cosmiques

exemple concret et réel de la dilatation du temps

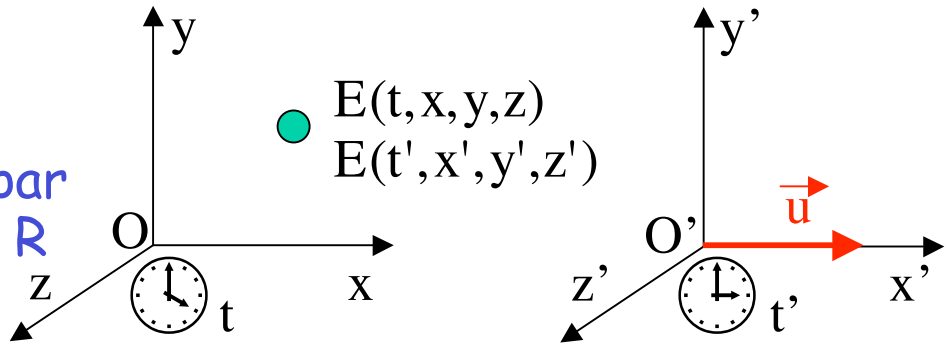
- Des muons sont produits dans la haute atmosphère, à 15–20 km d'altitude, par les rayons cosmiques (protons de haute énergie)
- Temps de vie moyen d'un muon : $\tau = 2.2\ \mu s$
- Distance d que peut parcourir une particule en un temps $\tau$ :
  $d = v\,\tau \leq c\,\tau \approx (3\times10^{8}\ m/s) \times (2\times10^{-6}\ s) = 600\ m$


- Et pourtant, on observe des muons qui arrivent jusqu'au sol
  → effet de la dilatation relativiste du temps

# Transformation de Lorentz

(se démontre à partir du principe de relativité d'Einstein)

- Référentiel d'inertie R
- Référentiel d'inertie R' en « saut de vitesse standard u » par rapport au référentiel d'inertie R
- Même événement E vu dans les deux référentiels:
  - position x, y, z et temps t mesurés dans R
  - position x', y', z' et temps t' mesurés dans R




Hendrik A Lorentz
1853–1928

$$t' = \frac{t - (u/c^2)x}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

$$x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

**transformation de Lorentz**

Remarques:

- tend vers la transformation de Galilée si u/c << 1
- était déjà connue avant la relativité d'Einstein, comme transformation qui laisse les équations de Maxwell invariantes