



ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

24 mars 2009
cours de la semaine # 06a



EPFL - LABORATOIRE
D'ASTROPHYSIQUE

Bienvenue au

Cours de physique générale

Physique II pour étudiants de première année
en section de mathématiques

Prof. Georges Meylan

Laboratoire d'astrophysique

Site web du laboratoire et du cours :

<http://lastro.epfl.ch>

Cinquième partie :

Chapitres spéciaux de mécanique analytique et de relativité restreinte

Mécanique analytique :

- coordonnées généralisées
- formalismes de Lagrange (et Hamilton)

Mécanique relativiste :

- postulats de la relativité restreinte d'Einstein
- transformation de Lorentz
- cinématique et dynamique relativiste

Buts :

- acquisition d'outils supplémentaires pour la résolution de problèmes plus complexes
(mécanique classique des systèmes matériels avec contraintes)
- sensibilisation aux principes et phénomènes de relativité restreinte

La mécanique lagrangienne

mécanique analytique, formalisme lagrangien

- Simplement une reformulation très générale des équations du mouvement de la mécanique newtonienne classique, aboutissant aux **équations de Lagrange** :

- totalement équivalente à la description de Newton, c-à-d $\vec{F} = m\vec{a}$
- donc, pas de nouveau concept fondamental

- **Avantages** :

- permet une **approche systématique** de tous les problèmes de la mécanique (et même plus !), aussi difficiles soient-ils
- apporte une **simplification** pour la détermination de mouvements complexes, en particulier dans le cas de plusieurs points matériels ou solides soumis à des contraintes (forces de liaisons)
- permet de travailler avec **n'importe quel type de coordonnées** (pas seulement cartésiennes, cylindriques ou sphériques)
Démos : Résonance entre deux pendules # 67 ; Pendules couplés # 769
- permet de se débarrasser des forces de liaison inconnues et auxquelles on ne s'intéresse pas forcément
- élimine les vecteurs et donc la nécessité de faire des projections

INTRODUCTION À LA MÉCANIQUE ANALYTIQUE

L'étude des systèmes avec liaisons (sect. 12.6) a montré qu'il fallait commencer par éliminer des équations de Newton les forces de liaison (inconnues), de manière à obtenir des équations différentielles dans lesquelles seules les forces appliquées (connues) apparaissent. Ayant trouvé l'évolution, les équations de Newton permettent ensuite de calculer les forces de liaison. Cependant, nous avons vu qu'un tel programme est souvent laborieux. La mécanique analytique que nous allons esquisser dans ce dernier chapitre est une approche de la mécanique qui traite les liaisons de façon simple et systématique. Cette méthode permet d'obtenir immédiatement les équations d'évolution en fonction des forces appliquées uniquement ; les liaisons sont introduites de manière « automatique » dans le formalisme, ce qui présente un grand avantage pour la résolution des problèmes.

G & B p. 645

De plus, la mécanique analytique est le formalisme le mieux adapté à l'étude des propriétés générales du mouvement dans l'espace de phase. C'est par exemple l'approche utilisée pour comprendre l'apparition du chaos à partir d'équations déterministes.

Mentionnons également que, conceptuellement, les idées de la mécanique analytique sont satisfaisantes pour le physicien. En effet, ce formalisme est basé sur des principes variationnels (§ 22.1.7) appréciés en physique parce qu'ils font ressortir des propriétés globales et permettent de tirer profit des symétries.

Remarquons pour terminer que la mécanique analytique est l'outil nécessaire pour la mécanique statistique, la mécanique quantique et la théorie des champs.

G & B p. 645

Rappel de définitions

On appelle *coordonnées généralisées* tout ensemble de k grandeurs (q_1, \dots, q_k) tel que la donnée de (q_1, \dots, q_k, t) détermine univoquement la position du système à l'instant t

Si les k coordonnées généralisées sont des variables indépendantes, et *s'il est possible de les faire varier de façon indépendante*, on dit que le système est *holonôme à k degrés de liberté*.

G & B pp. 68-69

Commençons par un cas particulier simple ...

Systemes conservatifs à un degré de liberté

- q = variable spécifiant l'état du système à chaque instant
 - Exemple : distance parcourue depuis le point de départ du « Xcelerator »
- Quelle est l'évolution du système, c'est-à-dire l'équ. diff. pour $q(t)$?
- Méthode de Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} L = L(q, \dot{q}) = T - V = \text{lagrangien du système} \\ T = \text{énergie cinétique du système} \\ V = \text{énergie potentielle du système} \end{array} \right.$$

il suffit donc de déterminer le lagrangien, puis de résoudre l'équation de Lagrange ...



Exemples très simples (Lagrange)

- **Mouvement rectiligne sous l'action d'une force conservative**

$q = \text{position } x$

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - V(x) \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} = \text{quantité de mouvement } p \\ \frac{\partial L}{\partial q} = \frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{\partial V}{\partial x} = \text{force } F \end{cases}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \Rightarrow \frac{dp}{dt} - F = 0 \quad (\text{2ème loi de Newton})$$

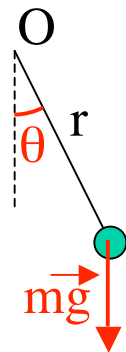
- **Pendule simple de longueur r dans un plan vertical**

$q = \text{angle } \theta$

$$L = \underbrace{\frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2}_T + \underbrace{mg r \cos\theta}_{-V} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} = \text{moment cinétique} \\ \frac{\partial L}{\partial q} = \frac{\partial L}{\partial \theta} = -mg r \sin\theta = \text{moment de force } M \end{cases}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} (mr^2\dot{\theta}) - M = 0 \quad (\text{théorème du moment cinétique})$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{r} \sin\theta = 0$$



Perle sur un collier parabolique

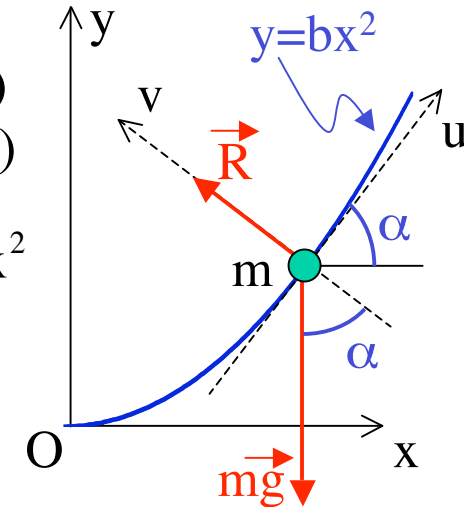
- Loi de Newton (projetée sur axes u et v) :

$$\vec{R} + m\vec{g} = m\vec{a} \Rightarrow \begin{cases} -mg \sin\alpha = m(\ddot{x} \cos\alpha + \ddot{y} \sin\alpha) & (1) \\ R - mg \cos\alpha = m(-\ddot{x} \sin\alpha + \ddot{y} \cos\alpha) & (2) \end{cases}$$

avec $\operatorname{tg}\alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{d(bx^2)}{dx} = 2bx$ et $\dot{y} = 2bx\dot{x}$, $\ddot{y} = 2bx\ddot{x} + 2b\dot{x}^2$

$$(1) \Rightarrow -g \operatorname{tg}\alpha = \ddot{x} + \ddot{y} \operatorname{tg}\alpha = \ddot{x} + (2bx\ddot{x} + 2b\dot{x}^2)2bx$$

$$\Rightarrow -2bgx = \ddot{x}(1 + 4b^2x^2) + 4b^2x\dot{x}^2$$



- Méthode de Lagrange

- 2 coordonnées x et y
avec contrainte : $y = bx^2$

- un seul degré de liberté, on choisit $q = x$

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \text{ et } V = mgy$$

$$L(x, \dot{x}) = T - V = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + (2bx\dot{x})^2) - mgbx^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2(1 + 4b^2x^2) - mgbx^2$$

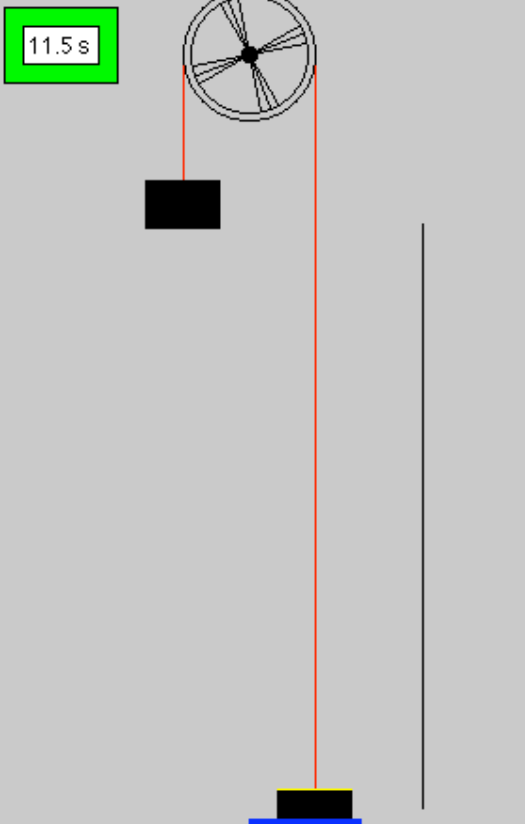
$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}(1 + 4b^2x^2) & \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \Rightarrow \\ \frac{\partial L}{\partial x} = 4mb^2\dot{x}^2x - 2mgbx & \ddot{x}(1 + 4b^2x^2) + 8b^2x\dot{x}^2 - 4b^2x\dot{x}^2 + 2bgx = 0 \end{cases}$$

- pas de vecteurs à projeter sur des axes qu'il faudrait choisir judicieusement
- pas de force de liaison à considérer

Machine d'Atwood

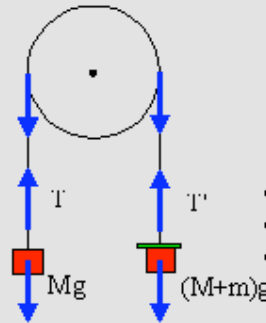
Machine d'Atwood

Surcharge 5 g 10 g 25 g



Commentaires :

Principe de la machine :



On considère le système ci-contre (machine d'Atwood). Deux masses identiques M sont reliées par un fil inextensible passant sur une poulie de rayon R et de moment d'inertie I . A l'instant t initial, on place sur la masse de droite une surcharge m .

Comme les vitesses sont faibles, le frottement de l'air peut être négligé.

Les équations du système sont :

- $T - Mg = M\gamma$ (fil de gauche)
- $(M + m)g - T' = (M+m)\gamma$ (fil de droite)
- $I d^2\theta/dt^2 = (T' - T)R$ (poulie)

Si I est négligeable, alors $T = T'$ et $\gamma = mg/(2M + m)$.

Ce dispositif permet l'étude de la chute des corps avec une valeur faible de l'accélération.

L'applet :

Les cases à cocher permettent de modifier la valeur de la surcharge.

Toutes les 0,5 s, on trace un marqueur donnant la position (en cm) de la masse de droite.

On suppose que les deux masses M valent 0,5 kg.

Vérifiez que le mouvement des deux masses est uniformément accéléré.

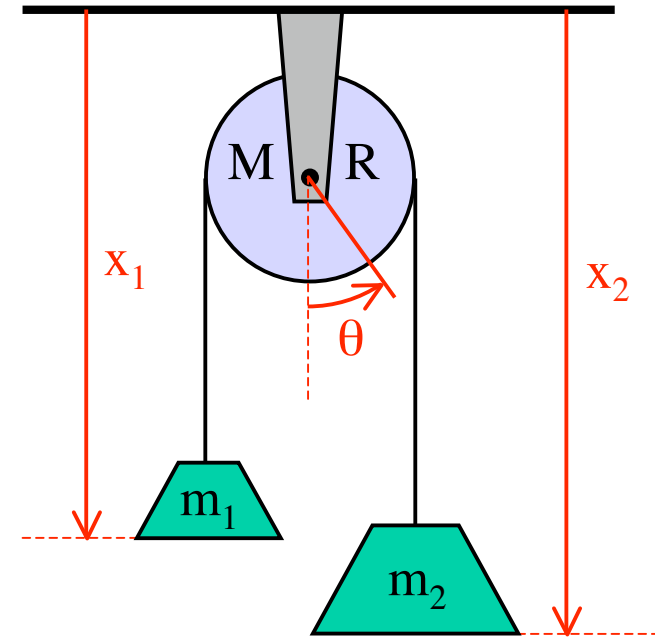


[Retour au menu "mécanique".](#)

<http://www.univ-lemans.fr/enseignements/physique/O2/meca/atwood.html>

Machine d'Atwood

- Deux points matériels reliés par un fil passant sur une poulie :
 - fil souple, sans masse, ne glissant pas sur la poulie
 - pas de frottement sur l'axe de la poulie
- Un seul degré de liberté :
 - Coordonnées : x_1, x_2, θ
 - Contraintes : $\begin{cases} x_1 + x_2 = \ell = \text{constante} \\ \omega = \dot{\theta} = \frac{\dot{x}_1}{R} \end{cases}$
 - On choisit : $q = x_1 = x$



$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\left(\frac{\dot{x}}{R}\right)^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2 + \frac{1}{2}M)\dot{x}^2$$

$$V = -m_1gx_1 - m_2gx_2 = -m_1gx - m_2g(\ell - x) = (m_2 - m_1)gx - m_2g\ell$$

$$L(x, \dot{x}) = T - V = \frac{1}{2}(m_1 + m_2 + \frac{1}{2}M)\dot{x}^2 - (m_2 - m_1)gx + m_2g\ell$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = (m_1 + m_2 + \frac{1}{2}M)\ddot{x} + (m_2 - m_1)g = 0 \Rightarrow \ddot{x} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2}M} g$$

Contraintes et forces de liaison

- Système de N points matériels ($\alpha = 1, \dots, N$) soumis à des contraintes (géométriques) connues qui limitent son mouvement :
 - on peut toujours remplacer les contraintes par N forces de liaison, R_α , inconnues a priori, mais s'exerçant sur les points du système de sorte à ce qu'il obéisse en tout temps à ces contraintes
- Déplacement virtuel compatible avec les contraintes :
 - tout déplacement du système que l'on pourrait imposer (par une action extérieure) en respectant les contraintes qui existent à un instant donné
- Condition des travaux virtuels :

$$\boxed{\sum_{\alpha=1}^N \vec{R}_\alpha \cdot \delta \vec{r}_\alpha = 0} \quad \text{où} \quad \begin{cases} \vec{R}_\alpha = \text{force de liaison s'exerçant sur le point } \alpha \\ \delta \vec{r}_\alpha, \alpha = 1, \dots, N : \text{déplacement virtuel compatible} \end{cases}$$

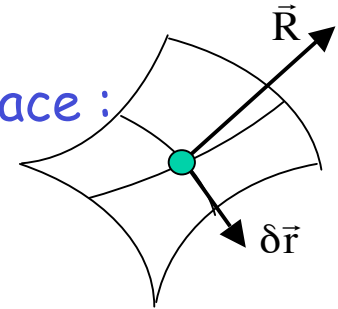
- on ne considérera que des liaisons qui respectent cette condition (liaisons parfaites), c'est-à-dire telles que la somme des travaux est nulle pour tout déplacement virtuel compatible

Contraintes et forces de liaisons (2)

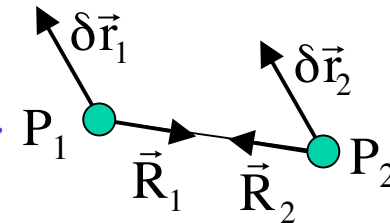
- Exemples :

- un seul point matériel contraint à rester sur une surface :

- la condition des travaux virtuels exprime que la force de liaison est perpendiculaire à la surface



- système de deux points matériels P_1 et P_2 contraints à rester à une distance fixe l'un de l'autre (par une tige rigide, par exemple) :

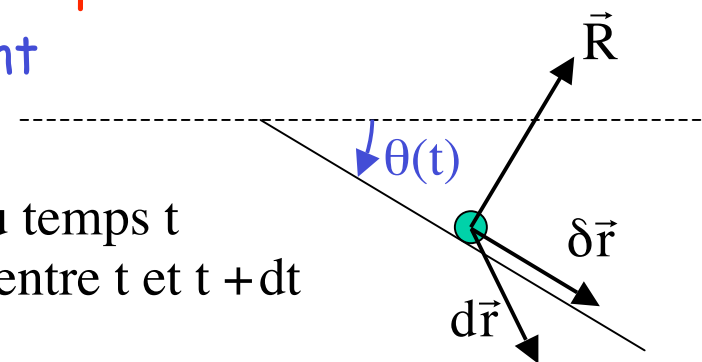


$$\left. \begin{array}{l} \vec{R}_2 = -\vec{R}_1 = \text{parallèle à } \overline{P_1P_2} \text{ (3ème loi)} \\ \delta\vec{r}_2 = \delta\vec{r}_1 + \delta\vec{\phi} \wedge \overline{P_1P_2} \text{ (solide indéformable)} \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{R}_1 \cdot \delta\vec{r}_1 + \vec{R}_2 \cdot \delta\vec{r}_2 = 0$$

- Différence entre déplacement virtuel et déplacement réel :

- point matériel sur une trappe s'ouvrant à vitesse constante : $\theta(t) = \omega t$

- $\delta\vec{r}$ = déplacement virtuel compatible au temps t
 - $d\vec{r} = \vec{r}(t + dt) - \vec{r}(t)$ = déplacement réel entre t et $t + dt$



12.6.2 Classification des liaisons

Considérons un système décrit par les coordonnées généralisées (q_1, \dots, q_k) , c'est-à-dire que pour tout point matériel P_α , on a

$$\mathbf{x}^{(\alpha)} = \mathbf{x}^{(\alpha)}(q_1, \dots, q_k, t). \quad (12.93)$$

Le système est dit *holonôme à k degrés de liberté* s'il peut être décrit par k coordonnées généralisées $\{q_i\}$, telles que les $\{q_i, \dot{q}_i\}$ sont des variables indépendantes, c'est-à-dire s'il n'existe aucune condition entre ces $2k$ variables.

Si les $2k$ variables $\{q_i, \dot{q}_i\}$ ne sont pas indépendantes, on dit qu'il existe des *liaisons*.

G & B p. 351

On distingue deux types de liaisons.

Les *liaisons unilatérales* sont des liaisons définies par des conditions qui s'introduisent – ou qui cessent – brusquement au cours du temps : particule à l'intérieur d'une enceinte, point matériel attaché à un fil souple, skieur sur un tremplin (§ 12.6.4). Ces liaisons s'expriment généralement au moyen d'inégalités

$$f(q_1, \dots, q_k, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_k, t) \geq 0. \quad (12.94)$$

Les *liaisons bilatérales* sont des liaisons qui persistent au cours du temps ; elles s'expriment par des fonctions, appelées *équations de liaison*, de la forme

$$f^{(\nu)}(q_1, \dots, q_k, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_k, t) = 0, \quad \nu = 1, \dots, m. \quad (12.95)$$

G & B p. 351

Si les $2k$ variables $\{q_i, \dot{q}_i\}$ sont soumises à des liaisons bilatérales, on pourra chercher s'il existe $(k - m)$ nouvelles coordonnées $\{q'_j\}$ telles que le système soit holonôme à $(k - m)$ degrés de liberté.

Le cas le plus simple est celui où l'équation de liaison (12.93) ne dépend pas des variables $\{\dot{q}_i\}$, soit

$$f^{(v)}(q_1, \dots, q_k, t) = 0. \quad (12.96)$$

De telles liaisons sont dites *holonômes*; elles permettent de diminuer le nombre de coordonnées généralisées.

Par exemple, dans le cas du pendule plan, en choisissant les coordonnées cartésiennes (x, y, z) , on aura les liaisons holonômes

$$x = 0 \quad \text{et} \quad x^2 + y^2 + z^2 = \ell^2.$$

Au contraire, en choisissant les coordonnées polaires dans le plan du mouvement, il suffira d'une seule coordonnée θ et $\{\theta, \dot{\theta}\}$ sont des variables indépendantes : le système est holonôme à 1 degré de liberté.

G & B p. 351

Remarquons que l'équation de liaison (12.96) peut s'écrire sous la forme

$$\sum_{i=1}^k \frac{\partial f^{(v)}}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f^{(v)}}{\partial t} = 0. \quad (12.97)$$

De façon générale, on introduit l'*hypothèse* que toutes les liaisons bilatérales s'expriment au moyen d'équations de liaison de la forme

$$\sum_{i=1}^k f_i^{(v)}(q_1, \dots, q_k, t) \dot{q}_i + f_0^{(v)}(q_1, \dots, q_k, t) = 0 \quad v = 1, \dots, m \quad (12.98)$$

dont (12.97) est un cas particulier.

G & B p. 352

Avec cette hypothèse, pour tout intervalle de temps dt *infinitésimal*, le déplacement (réel) (dq_1, \dots, dq_k) à partir de l'état (q_1, \dots, q_k, t) satisfait les équations

$$\sum_{i=1}^k f_i^{(v)}(q_1, \dots, q_k, t) dq_i + f_0^{(v)}(q_1, \dots, q_k, t) dt = 0. \quad (12.99)$$

et le déplacement (réel) du point matériel P_α est donné par

$$d\mathbf{x}^{(\alpha)} = \sum_{i=1}^k \frac{\partial \mathbf{x}^{(\alpha)}}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial \mathbf{x}^{(\alpha)}}{\partial t} dt. \quad \text{Définition du déplacement réel} \quad (12.100)$$

Une liaison bilatérale de la forme (12.98) est dite *intégrable* si elle peut s'écrire sous la forme d'une *liaison holonôme*

$$F^{(v)}(q_1, \dots, q_k, t) = C \quad (12.101)$$

Une liaison intégrable permet ainsi de diminuer le nombre de variables, mais, contrairement à (12.96), C est ici une constante qui peut dépendre des conditions initiales $\{q_i(0), \dot{q}_i(0)\}$.

G & B p. 352

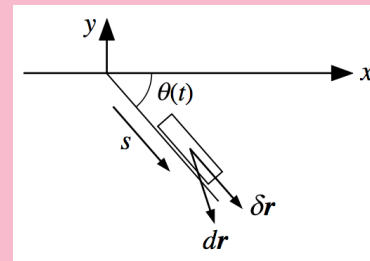
On appelle *déplacement virtuel compatible* à partir de (q_1, \dots, q_k, t) tout déplacement que l'on pourrait imposer au système en tenant compte des liaisons telles qu'elles existent à l'instant t , c'est-à-dire

$$\delta \mathbf{x}^{(\alpha)} = \sum_{i=1}^k \frac{\partial \mathbf{x}^{(\alpha)}}{\partial q_i} \delta q_i \quad \alpha = 1, \dots, N$$

Définition
du déplacement virtuel (12.102)

où les δq_i sont solutions des équations

$$\sum_{i=1}^k f_i^{(\nu)}(q, t) \delta q_i = 0 \quad \nu = 1, \dots, m$$



(12.103)

Ces expressions sont à comparer avec le *déplacement infinitésimal réel* qui satisfait les équations (12.99) et (12.100).

Propriété. Si le système est à liaisons holonômes indépendantes du temps, tout déplacement infinitésimal réel est un déplacement virtuel compatible.

G & B p. 354

Principe de d'Alembert

- 2ème loi de Newton appliquée à chaque point α d'un système :

$$m\vec{a}_\alpha = \vec{F}_\alpha + \vec{R}_\alpha \quad \text{où} \quad \begin{cases} \vec{R}_\alpha = \text{force de liaison s'exerçant sur le point } \alpha \\ \vec{F}_\alpha = \text{résultante des autres forces appliquées sur } \alpha \end{cases}$$



Jean le Rond, dit d'Alembert
1717–1783

- Pour tout déplacement virtuel compatible avec les contraintes :

$$\sum_{\alpha=1}^N (m\vec{a}_\alpha - \vec{F}_\alpha) \cdot \delta\vec{r}_\alpha = 0$$

Equation de d'Alembert (1758)

Note :

les forces de liaisons sont éliminées,
par l'introduction des déplacements
virtuels compatibles avec les contraintes

Coordonnées généralisées

- La configuration d'un système est décrite par la donnée de N vecteurs positions, c'est-à-dire 3N composantes cartésiennes $\vec{r}_\alpha(t) = \begin{pmatrix} x_\alpha(t) \\ y_\alpha(t) \\ z_\alpha(t) \end{pmatrix}, \alpha = 1, \dots, N$

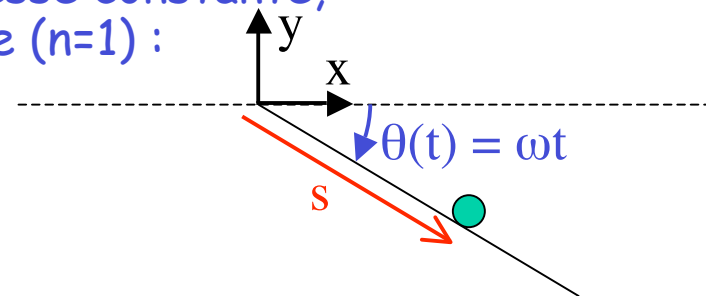
- Coordonnées généralisées :** ensemble de n variables q_i , dont les valeurs à chaque instant t spécifient complètement la configuration du système $\vec{r}_\alpha(t) = \vec{r}_\alpha(q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t), t)$

- les grandeurs q_i peuvent être de n'importe quelle nature ; elles n'ont pas besoin d'avoir la même dimension !

- Exemples (N = 1) :**
 - coordonnées sphériques (n = 3) : $\vec{r}(t) = \vec{r}(r(t), \theta(t), \phi(t)) = \begin{pmatrix} r \sin\theta \cos\phi \\ r \sin\theta \sin\phi \\ r \cos\theta \end{pmatrix}$
r=distance, θ =angle, ϕ =angle

- point matériel sur trappe s'ouvrant à vitesse constante, coordonnée s = déplacement sur la trappe (n=1) :

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(s(t), t) = \begin{pmatrix} s \cos(\omega t) \\ -s \sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}$$



Forces généralisées

- Déplacement virtuel compatible avec les contraintes quand la position du système passe de $\{q_i; i=1, \dots, n\}$ à $\{q_i + \delta q_i; i=1, \dots, n\}$:

$$\delta \vec{r}_\alpha(t) = \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots + \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_n} \delta q_n = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_i} \delta q_i$$

où $\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_i} = \text{dérivée partielle de } \vec{r}_\alpha \text{ par rapport à } q_i \text{ (tous les autres } q_j \text{ fixes)} \\ \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_i} \delta q_i = \text{déplacement causé par la variation } \delta q_i \text{ de } q_i \end{array} \right.$

- Travail des forces:
$$\delta W = \sum_{\alpha=1}^N \vec{F}_\alpha \cdot \delta \vec{r}_\alpha = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{\alpha=1}^N \vec{F}_\alpha \cdot \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_i} \right) \delta q_i = \sum_{i=1}^n Q_i \delta q_i$$

- Note: la dimension de Q_i est telle que $Q_i q_i$ ait la dimension d'une énergie

$Q_i =$ force généralisée associée à q_i

- Si les forces dérivent d'une énergie potentielle V :

$$Q_i = \sum_{\alpha=1}^N \vec{F}_\alpha \cdot \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_i} = \sum_{\alpha=1}^N \sum_{k=1}^3 F_{\alpha,k} \frac{\partial r_{\alpha,k}}{\partial q_i} = \sum_{\alpha=1}^N \sum_{k=1}^3 - \frac{\partial V}{\partial r_{\alpha,k}} \frac{\partial r_{\alpha,k}}{\partial q_i} = - \frac{\partial V}{\partial q_i}$$

Degrés de liberté

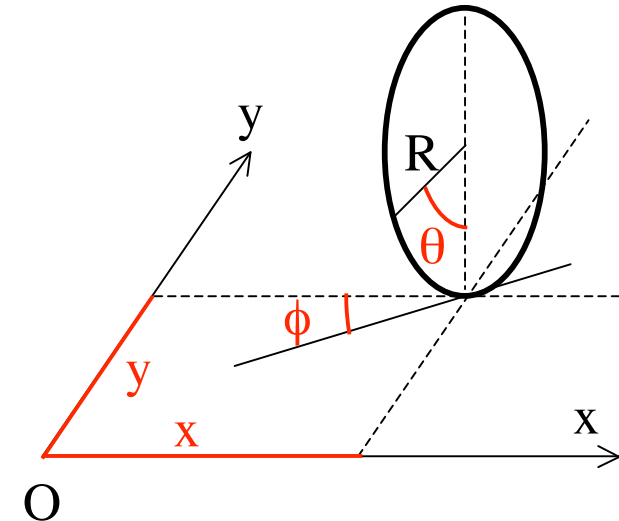
- n = nombre minimal de coordonnées généralisées nécessaires
 - $\left\{ \begin{array}{l} n = 3N \text{ si le système n'est soumis à aucune contrainte} \\ n < 3N \text{ si le système est soumis à des contraintes} \end{array} \right.$
- Si les n coordonnées peuvent varier indépendamment les unes des autres sans violer les contraintes, alors le système est dit **holonôme à n degrés de liberté**
- **Exemples de systèmes holonomes :**
 - cylindre sur trappe s'ouvrant à vitesse constante :
 - 1 degré de liberté (coordonnée s) si roulement sans glissement
 - 2 degrés de liberté (coordonnées s et ϕ) si roulement avec glissement
 - point matériel sur un cône :
 - 2 degrés de libertés (coordonnées r et ϕ , θ fixé)
 - 2 points matériels séparés par une distance constante :
 - 5 degrés de liberté
 - 3 degrés de liberté si les points sont astreints à rester sur la même sphère
 - 1 degré de liberté si les points sont astreints à rester sur le même cercle
 - 2 pendules, l'un suspendu à l'autre :
 - 4 degrés de liberté
 - solide indéformable :
 - 6 degrés de liberté

Cerceau roulant sans glisser sur un plan

- Cerceau vertical de rayon R se déplaçant sans glisser sur un plan horizontal
- 4 coordonnées généralisées : x , y , θ et ϕ
- Ces coordonnées ne sont pas indépendantes, il existe des relations entre leurs variations:

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = R\dot{\theta} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = v \cos\phi = R\dot{\theta} \cos\phi \\ \dot{y} = v \sin\phi = R\dot{\theta} \sin\phi \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} dx = R \cos\phi d\theta \\ dy = R \sin\phi d\theta \end{cases}$$



- Ces relations ne sont pas intégrables
 - on ne peut pas exprimer une des coordonnées comme une fonction des autres
 - on ne peut donc pas éliminer une des coordonnées
 - ce système n'est **pas holonôme** !
- Il y a au minimum 4 coordonnées, mais seulement 2 degrés de liberté :
 - **Pivotement** : variation de ϕ pour x , y , et θ constants
 - **Roulement** : variation de x , y , ou θ (entraînant nécessairement une variation des deux autres coordonnées) pour ϕ constant

Dérivation des équations de Lagrange

- **Vitesses :** $\vec{v}_\alpha = \frac{d\vec{r}_\alpha}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial \vec{v}_\alpha}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_i}$
- **Energie cinétique totale du système :** $T = \sum_{\alpha=1}^N \frac{1}{2} m_\alpha \vec{v}_\alpha^2 \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \vec{v}_\alpha \cdot \frac{\partial \vec{v}_\alpha}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \vec{v}_\alpha \cdot \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_i}$

Note sur les déplacements réels $d\vec{r}_\alpha$ et virtuels $\delta\vec{r}_\alpha$:
 $d\vec{r}_\alpha = \delta\vec{r}_\alpha \Leftrightarrow \partial\vec{r}_\alpha/\partial t = 0$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) = \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \left(\vec{a}_\alpha \cdot \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_i} + \vec{v}_\alpha \cdot \frac{\partial \vec{v}_\alpha}{\partial q_i} \right) = \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \vec{a}_\alpha \cdot \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_i} + \frac{\partial T}{\partial q_i}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} \right) \delta q_i = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \vec{a}_\alpha \cdot \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_i} \right) \delta q_i = \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \vec{a}_\alpha \cdot \delta \vec{r}_\alpha$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} - Q_i \right) \delta q_i &= \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \vec{a}_\alpha \cdot \delta \vec{r}_\alpha - \sum_{i=1}^n Q_i \delta q_i = \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \vec{a}_\alpha \cdot \delta \vec{r}_\alpha - \sum_{\alpha=1}^N \vec{F}_\alpha \cdot \delta \vec{r}_\alpha \\ &= \sum_{\alpha=1}^N (m_\alpha \vec{a}_\alpha - \vec{F}_\alpha) \cdot \delta \vec{r}_\alpha = 0 \quad (\text{d'Alembert}) \end{aligned}$$

- Si tous les δq_i indépendants (système holonôme) :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} - Q_i = 0, \quad \forall i$$

Equations de Lagrange

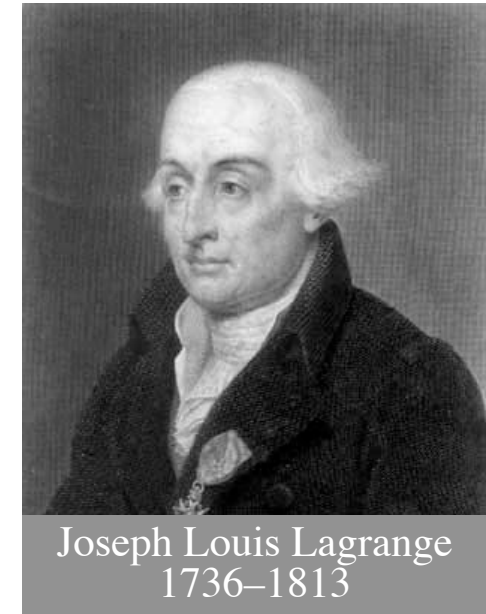
Equations de Lagrange (1788)

- Pour un système holonôme à n degrés de liberté :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} - Q_i = 0, \quad \text{pour } i = 1, \dots, n$$

équations de Lagrange de 1ère espèce

où $\begin{cases} T = \text{énergie cinétique totale du système} \\ q_i = \text{coordonnée généralisée} \\ Q_i = \text{force généralisée associée à la coordonnée } q_i \end{cases}$



- Si les forces dérivent d'un potentiel V tel que :

$$Q_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial V}{\partial q_i} \quad \begin{cases} \text{par exemple } Q_i = -\frac{\partial V}{\partial q_i} \text{ dans le } \underline{\text{cas conservatif}} \\ \text{avec énergie potentielle indépendante des vitesses} \end{cases}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad \text{pour } i = 1, \dots, n$$

équations de Lagrange
de 2ème espèce

où $L = L(q_i, \dot{q}_i, t) = T - V$ = lagrangien du système

= fonction des coordonnées q_i et des vitesses \dot{q}_i généralisées