6 mars 2009

cours de la semaine # 03b

Bienvenue au

Cours de physique générale

Physique II pour étudiants de première année en section de mathématiques

Prof. Georges Meylan

Laboratoire d'astrophysique

Site web du laboratoire et du cours :

http://lastro.epfl.ch

Forces de frottement (ou friction)

- Forces exercées sur un corps par :
  - le fluide (gaz ou liquide) dans lequel il se déplace
  - tout autre corps avec lequel il est en contact et par rapport auquel il se déplace (ou pourrait se déplacer).
- Ces forces s'opposent au mouvement du corps :

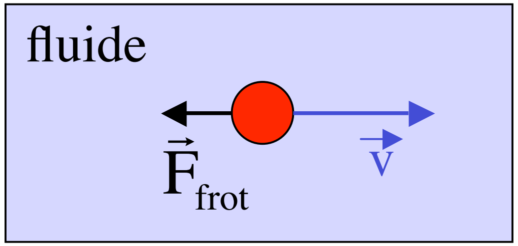
$$\boxed{\vec{F}_{\text{frot}} = -f(v)\,\hat{v}, \qquad f(v) > 0}$$

- Elles résultent d'un grand nombre de phénomènes microscopiques (interactions entre molécules), complexes à décrire :
  - Exemple : frottement de l'air sur un avion

    - A priori on devrait pouvoir décrire cette situation comme une succession d'un grand nombre de « chocs » entre l'avion et les molécules d'air …
    - … mais ceci supposerait qu'on puisse déterminer les trajectoires de toutes les molécules d'air, ce qui est irréaliste
- On décrit donc les forces de frottement par des **lois empiriques** :
  - Tirées de l'expérience
  - Non fondamentales
  - Approximatives et pas toujours applicables

Forces de frottement visqueux

- Solide en mouvement dans un fluide :
  - On distingue plusieurs régimes en fonction de la vitesse v par rapport au fluide

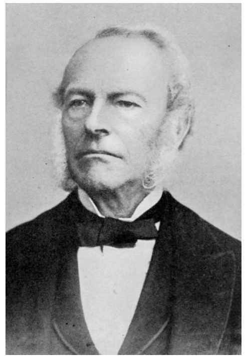


- A très basse vitesse (< 5 m/s dans l'air) en régime laminaire :

$$\boxed{\vec{F}_{frot} = -k\,\eta\,\vec{v}}$$

$$\boxed{k = 6\pi R \begin{cases}\text{pour boule}\\ \text{de rayon R}\end{cases}}$$

George Gabriel Stokes
(1819 - 1903)
mathématicien et physicien irlandais.
Contributions en mécanique des fluides,
l'optique et la géodésie.



Loi de Stokes

  - k = coefficient caractéristique de la géométrie du solide
  - η = coefficient de viscosité du fluide (dépend de la température)

	0°C	20°C	40 °C
η(air)	$0.017 \cdot 10^{-3}$	$0.018 \cdot 10^{-3}$	$0.019 \cdot 10^{-3}$
η(eau)	$1.8 \cdot 10^{-3}$	$1.0 \cdot 10^{-3}$	$0.7 \cdot 10^{-3}$
η(glycérine)		$1490 \cdot 10^{-3}$	

Unité de viscosité dynamique = décapoise (cgs) = N m^{-2} s = kg $m^{-1}s^{-1}$

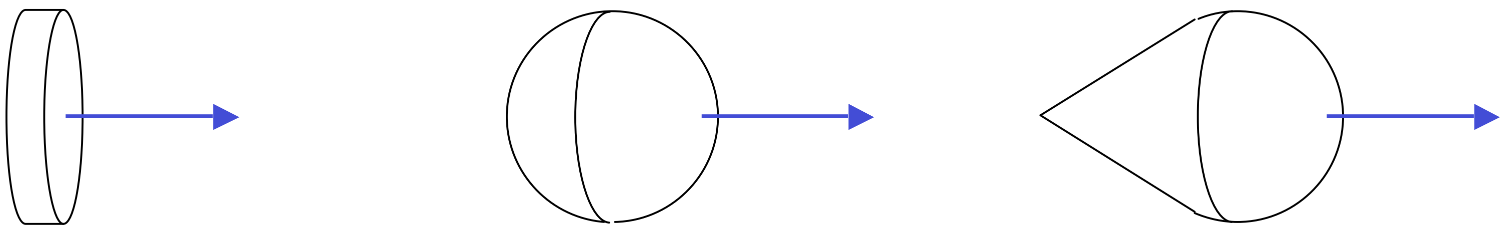
Poise : de Poiseuille : Jean-Louis-Marie Poiseuille (22 avril 1797, Paris - 26 décembre 1869, Paris) : médecin français.
Auteur de mémoires sur le cœur et la circulation du sang dans les vaisseaux (l'hémodynamique).
Il établit en 1844, dans son ouvrage "Le mouvement des liquides dans les tubes de petits diamètres »,
les lois de l'écoulement laminaire des fluides visqueux dans les tuyaux cylindriques.

Forces de frottement visqueux (suite)

- A plus grande vitesse (5 < v < 20 m/s dans l'air),
  18 < v < 72 km/h
  en régime turbulent :

$$\boxed{\vec{F}_{\text{frot}} = -C_x \, \tfrac{1}{2} \rho v^2 \, S \, \hat{v}}$$

  - ρ = masse volumique du fluide
  - S = aire du solide selon direction perpendiculaire à la vitesse
  - C_x = coefficient de traînée caractérisant la géométrie du solide (sans unité)

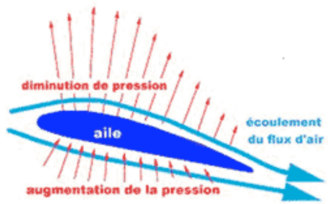


disque: $C_x \approx 1.32$ boule: $C_x \approx 0.45$ demi-boule+cône: $C_x \approx 0.04$

- A très grande vitesse (mais < vitesse du son) :

$v_{son}^{air} = 330\ m/s$; $v_{son}^{eau} = 1400\ m/s$

$$\boxed{\vec{F}_{\text{frot}} \propto -v^n \, \hat{v}, \quad n \geq 2}$$

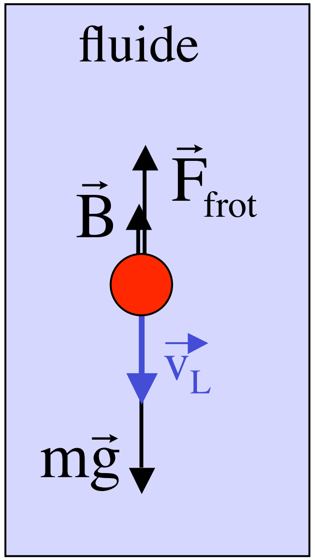


Aile d'avion: $C_x \approx 0.02$

Vitesse limite de chute dans un fluide

- Principe d'Archimède :

  Un solide dans un fluide subit de la part du fluide une force (poussée d'Archimède) dans la direction opposée au poids du corps et égale au poids du volume de fluide déplacé :
  $$\vec{B} = -m_{\text{fluide}}\,\vec{g}$$



- Lorsque la vitesse limite v_L (constante) est atteinte :
  $$\vec{F}_{\text{frot}} + m\vec{g} + \vec{B} = m\vec{a} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{\text{frot}} = (m - m_{\text{fluide}})g$$

- Pour une boule (rayon R, masse volumique ρ) : $F_{\text{frot}} = \frac{4}{3}\pi R^3(\rho - \rho_{\text{fluide}})g$

$$\begin{cases} \text{a) régime laminaire (Stokes)}: & v_L = F_{\text{frot}}/(6\pi R\,\eta) = \frac{2}{9}gR^2(\rho - \rho_{\text{fluide}})/\eta \\ \text{b) régime turbulent} \quad : & v_L = \sqrt{F_{\text{frot}}/(0.45\,\frac{1}{2}\rho_{\text{fluide}}\pi R^2)} \cong \sqrt{6gR\left(\rho/\rho_{\text{fluide}} - 1\right)} \end{cases}$$

- Application numérique pour un grêlon

$$\begin{cases} R = 5\ \text{mm} \\ \rho_{\text{glace}} = 917\ \text{kg/m}^3 \\ \rho_{\text{air}} = 1.3\ \text{kg/m}^3 \\ \eta_{\text{air}} = 1.8\cdot 10^{-5}\ \text{kg}\,\text{m}^{-1}\text{s}^{-1} \\ g = 9.8\ \text{m/s}^2 \end{cases}$$

a) 2800 m/s faux (Stokes pas valable)

b) 15 m/s ~ OK

Vitesse limite d'un corps en chute libre

Exemple 1. Vitesse limite d'un corps en chute libre G & B p.328

Cherchons la vitesse limite d'une sphère homogène de masse spécifique ρ et de rayon R qui tombe dans un fluide de masse spécifique ρ_{fl} et de viscosité η (fig. 12.11).

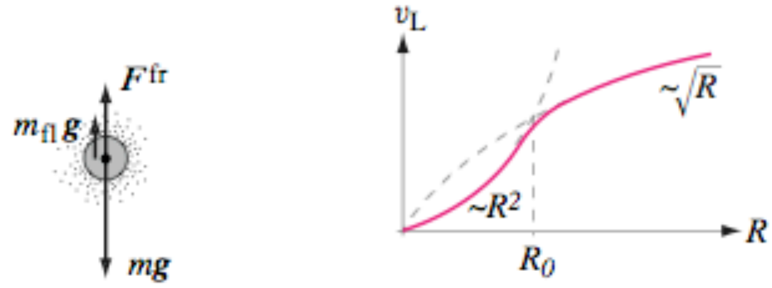


Fig. 12.11 Vitesse limite pour une sphère de rayon R.

En tenant compte de la force d'Archimède, on a

$$F^{ext} = (\rho - \rho_{fl})\tfrac{4}{3}\pi R^3 g.$$

Par conséquent, la vitesse limite v_L sera obtenue à partir de (12.41) et de la condition $F^{fr} + F^{ext} = 0$. On obtient

La force de frottement visqueux sur une sphère de rayon R est en général donnée par l'Eq. (12.41)

$$f(v) = 6\pi R\eta v + \tfrac{1}{2}(\pi R^2)\,0{,}45\,\rho_{fl} v^2 \quad \Rightarrow \quad 6\pi R\eta v_L + \tfrac{1}{2}\pi R^2\,0{,}45\,\rho_{fl} v_L^2 = (\rho - \rho_{fl})\tfrac{4}{3}\pi R^3 g. \qquad (12.44)$$

Prenons par exemple un grêlon de 1 cm de diamètre qui tombe dans l'air :

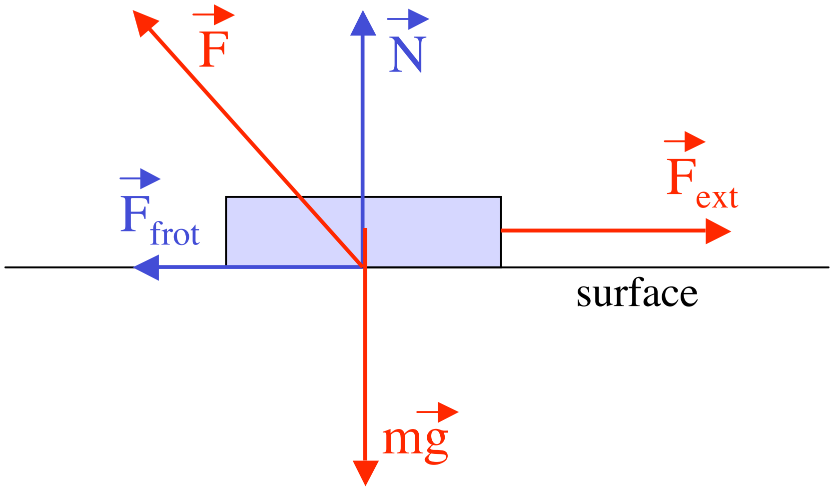
$$\rho = 0{,}917 \cdot 10^3\,\mathrm{kg/m^3}\ ; \quad \rho_{air} = 1{,}3\,\mathrm{kg/m^3}\ ; \quad \eta_{air} = 1{,}8 \cdot 10^{-5}\mathrm{Nm^{-2}s}.$$

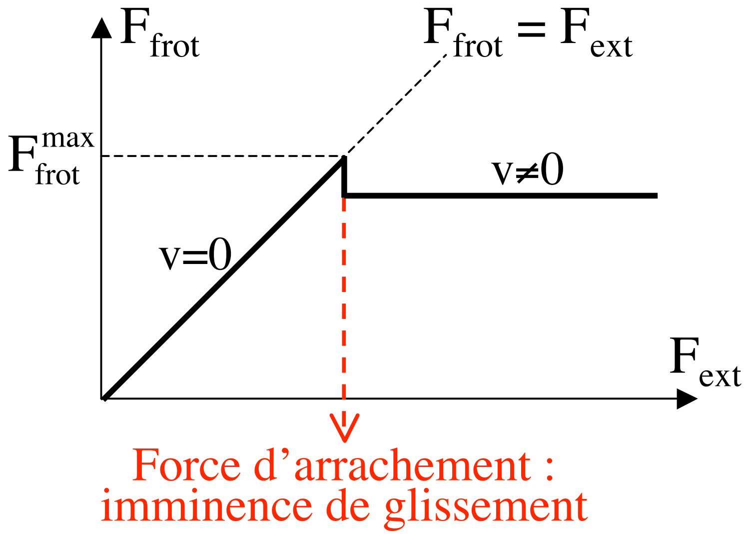
L'équation (12.44) devient $v_L^2 + 0{,}08 v_L - 2{,}35 \cdot 10^2 = 0$ d'où $v_L = 15$ m/s.

Démos : Force de frottement sec # 69
Frottement dynamique et statique (poutre) #146

Forces de frottement sec

- Force F exercée par une surface sur un solide :
  - composante normale à la surface N = réaction (force de liaison)
  - composante tangente à la surface F_{frot} = force de frottement sec





- Il faut distinguer deux cas :

Lois de Coulomb

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{si } v = 0 : \quad F_{frot} \leq F_{frot}^{max} = \mu_s N \\ \text{si } v \neq 0 : \quad \vec{F}_{frot} = -\mu_c N \dfrac{\vec{v}}{v} \end{array}}$$

μ_s = coefficient de frottement statique

μ_c = coefficient de frottement cinétique

Coefficients de frottement

- Dépendent de :
  - Nature des corps en contact
  - Etat des surfaces (rugueux ou poli, sec ou lubrifié, …)
  - Température
- En première approximation, ne dépendent pas de :
  - Vitesse (si $v \neq 0$)
  - Dimension des surfaces de contact (si surfaces planes)
- Exemples (valeurs indicatives) :

Corps en contact	μ_s	μ_c
Acier sur acier (sec)	0.78	0.42
Acier sur acier (gras)	0.10	0.05
Acier sur acier (surfaces polies)	100	100
Bois sur bois	0.5	0.3
Métal sur glace	0.03	0.01
Pneu sur route sèche	0.8	0.6
Pneu sur route mouillée	0.15	0.1
Téflon sur téflon	0.04	0.04
Cuir sur fonte	0.28	0.56

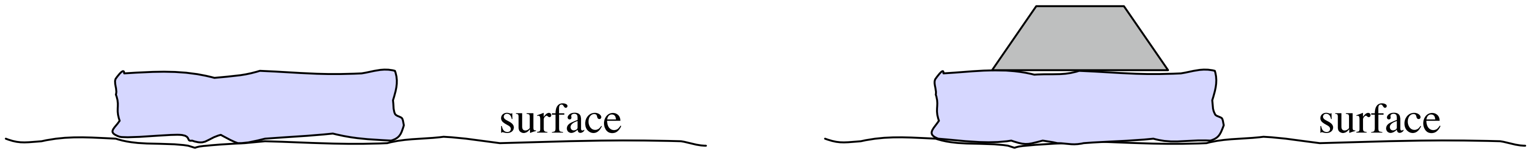
- En règle générale :

$$\boxed{\mu_c < \mu_s}$$

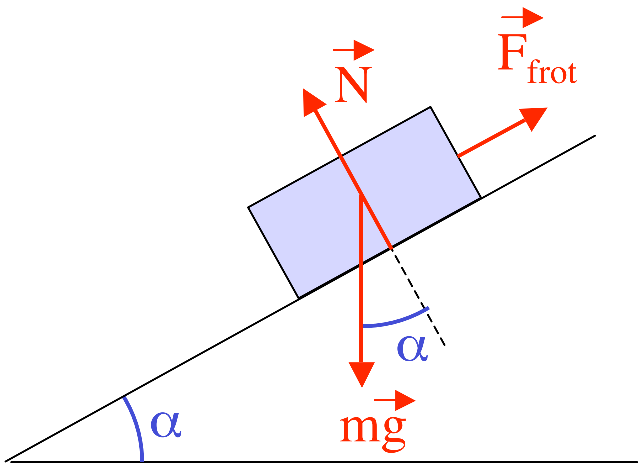
- Note :
  - Avec un lubrifiant, le frottement peu devenir de type visqueux …

Forces de frottement sec (suite)

- Ne dépendent pas de la dimension de la surface de contact :
  - Surface pas parfaitement plane
  - Surface de contact véritable proportionnelle à la charge



- Solide sur plan incliné :



- Cas statique :

$$\vec{N} + \vec{F}_{frot} + m\vec{g} = 0$$

$$\alpha_s = \text{ angle } \alpha \text{ tel que } F_{frot} = F_{frot}^{max} = \mu_s N$$
(début glissement)

$$\begin{cases} \mu_s N = mg \sin \alpha_s \\ N = mg \cos \alpha_s \end{cases} \Rightarrow \mu_s = \operatorname{tg} \alpha_s$$

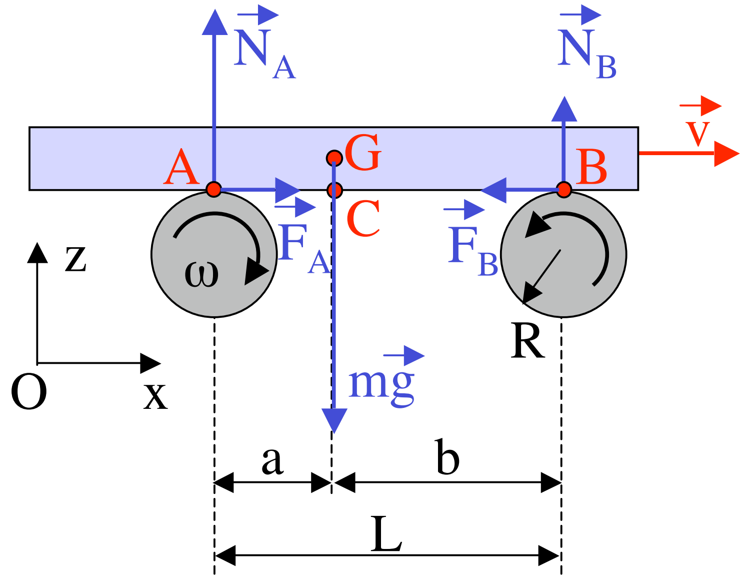
- Glissement :

$$\alpha_c = \text{ angle } \alpha \text{ tel que } \vec{v} = \text{constante}$$

$$\mu_c = \operatorname{tg} \alpha_c$$

Forces de frottement sec (suite)

Barreau oscillant sur roues en rotation de sens opposés



- Quand A ne glisse pas et B glisse :

$F_A \le F_A^{max} = \mu_s N_A$ et $F_B = \mu_c N_B$

$\vec{v} = \omega R\,\hat{x} = \text{constante}$ (car A ne glisse pas)

$$\begin{cases} \sum \vec{F}_i^{ext} = \vec{F}_A + \vec{F}_B + \vec{N}_A + \vec{N}_B + m\vec{g} = 0 \\ \sum \vec{M}_{C,i}^{ext} = \overrightarrow{CA} \wedge \vec{N}_A + \overrightarrow{CB} \wedge \vec{N}_B = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F_A - F_B = 0 \\ N_A + N_B - mg = 0 \\ N_A a - N_B b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N_A = b\,mg/L \\ N_B = a\,mg/L \\ F_A = F_B = \mu_c N_B \end{cases}$$

- a, N_B et F_A=F_B augmentent alors que b, N_A et F_A^{max} diminuent
- Quand F_A= F_A^{max}, A se met à glisser et F_A diminue soudain de $\mu_s N_A$ à $\mu_c N_A$
- La barre est alors accélérée vers la gauche jusqu'à ce que B ne glisse plus

- Quand B ne glisse pas et A glisse :

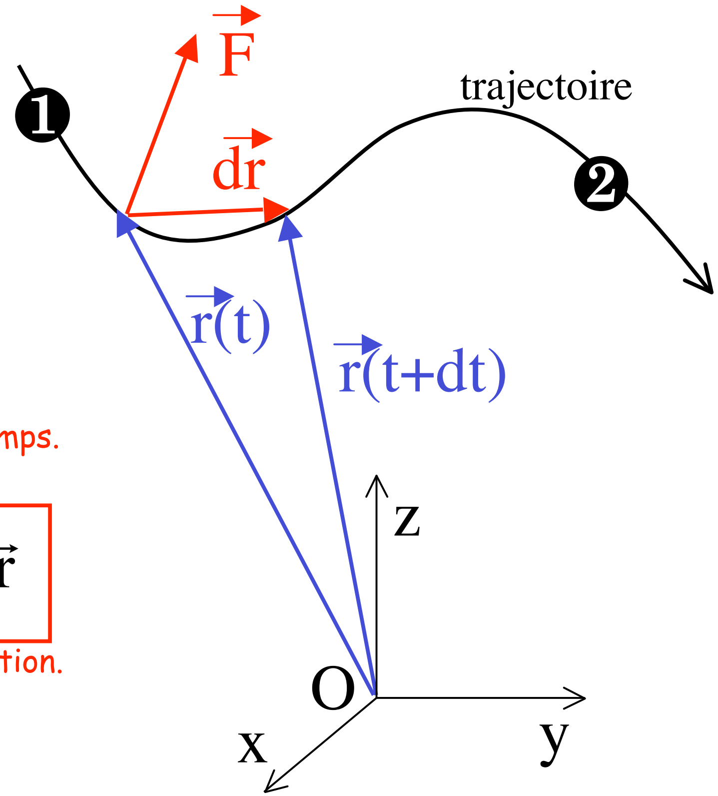
$F_B \le F_B^{max} = \mu_s N_B$ et $F_A = \mu_c N_A$

$\vec{v} = -\omega R\,\hat{x} = \text{constante}$ (car B ne glisse pas)

etc ...

Impulsion et travail

- Point matériel soumis à une force résultante F entre les points ❶ et ❷
- Définitions :



Impulsion

$$d\vec{I} = \vec{F}\,dt \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{I}_{12} = \int_1^2 d\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\,dt}$$

Le calcul de l'impulsion suppose qu'on connaisse la force en fonction du temps.

Travail (« work »)

$$\delta W = \vec{F}\cdot d\vec{r} \quad \Rightarrow \quad \boxed{W_{12} = \int_1^2 \delta W = \int_1^2 \vec{F}\cdot d\vec{r}}$$

Le calcul du travail suppose qu'on connaisse la force en fonction de la position.

- Appliquons la 2ème loi de Newton :

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \Rightarrow \begin{cases} \vec{I}_{12} = \int_1^2 d\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 \\ W_{12} = \int_1^2 m\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v}dt = \int_1^2 \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\vec{v}^2\right)dt = K_2 - K_1 \end{cases}$$

$$\boxed{\text{La variation de } \begin{cases}\text{la quantité de mouvement } \vec{p} \\ \text{l'énergie cinétique K}\end{cases} \text{ est égale } \begin{cases}\text{à l'impulsion } \vec{I} \\ \text{au travail W}\end{cases} \text{ de la force}}$$

Conservation de l'énergie mécanique

- Si $W_{12} \neq 0$, alors l'**énergie cinétique K** n'est pas conservée
- Cependant, dans certains cas particuliers, $\vec{F}$ ne dépend que de la position et « dérive d'un potentiel », c'est-à-dire qu'il existe une **énergie potentielle $V(\vec{r})$** telle que :

$$W_{12} = \int_1^2 \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = V(\vec{r}_1) - V(\vec{r}_2), \quad \forall \vec{r}_1, \vec{r}_2 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{F}(\vec{r}) = -\begin{pmatrix} \partial V(\vec{r})/\partial x \\ \partial V(\vec{r})/\partial y \\ \partial V(\vec{r})/\partial z \end{pmatrix}$$

- On dit alors que la force est « conservative ».
- Dans ce cas, on a : $W_{12} = V(\vec{r}_1) - V(\vec{r}_2) = K_2 - K_1$

donc : $K_1 + V(\vec{r}_1) = K_2 + V(\vec{r}_2)$

et l'**énergie mécanique E** est conservée :

$$\boxed{E = K + V(\vec{r}) = \text{ constante}}$$

Exemple déjà rencontré :

Point matériel soumis à la pesanteur $\vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix}$

$$E = \tfrac{1}{2}mv^2 + \underbrace{mgz}_{V(\vec{r})} = \text{ cste}$$

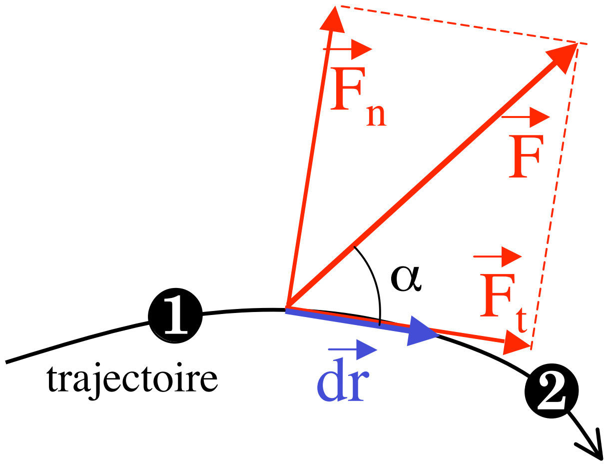
Travail et puissance d'une force

$$W_{12} = \int_1^2 \delta W = \int_1^2 \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_1^2 \underbrace{F\cos\alpha}_{F_t}\, ds$$

$$\int_1^2 \ldots = \text{intégrale curviligne le long de la trajectoire}$$

$$s = \text{abscisse curviligne le long de la trajectoire}$$

$$ds = |d\vec{r}|$$



- Seule la composante de F tangente à la trajectoire (F_t) travaille ; la composante normale à la trajectoire (F_n) ne travaille pas
  - Exemple : la force centripète du mouvement circulaire uniforme ne travaille pas, les forces de liaisons (perpendiculaires au déplacement) ne travaillent pas
- Une force dont le point d'application est immobile ne travaille pas :
  - Exemple : force de frottement sur un cylindre roulant sans glisser sur un plan incliné
- Le travail élémentaire δW a le signe de la projection de F sur la direction de mouvement :
  - Exemple : le travail d'une force de frottement sec vaut $W_{12} = -\mu_c N\,(s_2 - s_1) < 0$

Puissance instantanée d'une force : $$\boxed{P = \frac{\delta W}{dt} = \frac{\vec{F}\cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F}\cdot\vec{v}}$$

Théorème de l'énergie cinétique

(valable quelle que soit la nature des forces)

- Pour un point matériel :

$$\boxed{K_2 - K_1 = W_{12} \Leftrightarrow \frac{dK}{dt} = P = \vec{F}\cdot\vec{v}}$$

P = puissance développée par la force F.

- Pour un système de points matériels :

$$\boxed{K_2^{tot} - K_1^{tot} = W_{12}^{tot,\,ext} + W_{12}^{tot,\,int} \Leftrightarrow \frac{dK^{tot}}{dt} = P^{tot,\,ext} + P^{tot,\,int}}$$

  - Attention : les forces internes interviennent, car elles peuvent travailler !
  - Cas d'un solide indéformable S (avec A, B $\in$ S) :

$$\begin{aligned} P^{tot,\,ext} + P^{tot,\,int} &= \sum_B \vec{F}_B\cdot\vec{v}_B = \sum_B \vec{F}_B\cdot\left(\vec{v}_A + \vec{\omega}\wedge\overrightarrow{AB}\right) \\ &= \sum_B\left[\vec{F}_B\cdot\vec{v}_A + \vec{\omega}\cdot\left(\overrightarrow{AB}\wedge\vec{F}_B\right)\right] = \sum_B \vec{F}_B\cdot\vec{v}_A + \vec{\omega}\cdot\sum_B \overrightarrow{AB}\wedge\vec{F}_B \end{aligned}$$

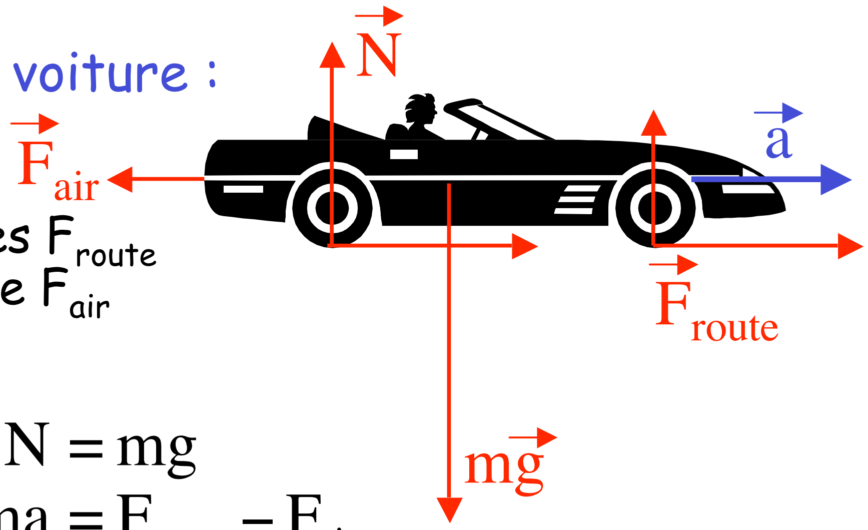
$$\boxed{\frac{dK^{tot}}{dt} = \vec{F}^{ext}\cdot\vec{v}_A + \vec{M}_A^{ext}\cdot\vec{\omega}}$$

Note : $\delta W(\text{rotation}) = \vec{M}_O\cdot d\vec{\theta}$

Rappel : $K^{tot} = \frac{1}{2}Mv_G^2 + \frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot\left(\tilde{I}_G\cdot\vec{\omega}\right)$

Démo : Roulement à billes (frottements) # 45

Voiture en accélération



- Forces extérieures s'exerçant sur la voiture :
  - Poids mg
  - Réaction du sol N
  - Frottements de la route sur les roues F_{route}
  - Frottement de l'air sur la carrosserie F_{air}
- 2ème loi de Newton :

$$m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{route} + \vec{F}_{air} = m\vec{a} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} N = mg \\ ma = F_{route} - F_{air} \end{cases}$$

F_{route} est responsable de l'accélération mais pas du gain en énergie cinétique !

- Travail et énergie cinétique :
  - F_{route} ne travaille pas (roulement sans glissement)
  - Aucune force extérieure ne travaille sauf F_{air}
  - Le travail de F_{air} est négatif et cause une diminution d'énergie cinétique
  - Mais l'énergie cinétique augmente …
    $\Rightarrow$ il y a des forces internes dont le travail est positif !

$$\frac{dK^{\text{voiture}}}{dt} = \underbrace{P^{\text{tot, ext}}}_{<0} + P^{\text{tot, int}} > 0$$