



ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

24 février 2009
cours de la semaine # 02a

Bienvenue au



EPFL - LABORATOIRE
D'ASTROPHYSIQUE

Cours de physique générale

Physique II pour étudiants de première année
en section de mathématiques

Prof. Georges Meylan

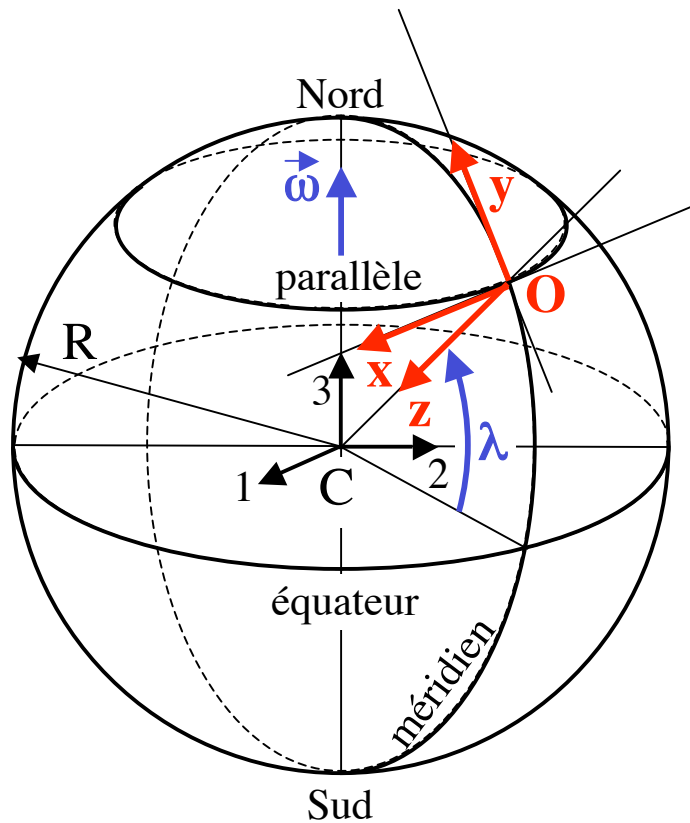
Laboratoire d'astrophysique

Site web du laboratoire et du cours :

<http://lastro.epfl.ch>

Pendule de Foucault

Référentiel terrestre avec repère lié à la Terre



Pendule de Foucault (2)

Pendule suspendu à l'origine du repère terrestre $Oxyz$, muni des coordonnées sphériques r, θ, ϕ :

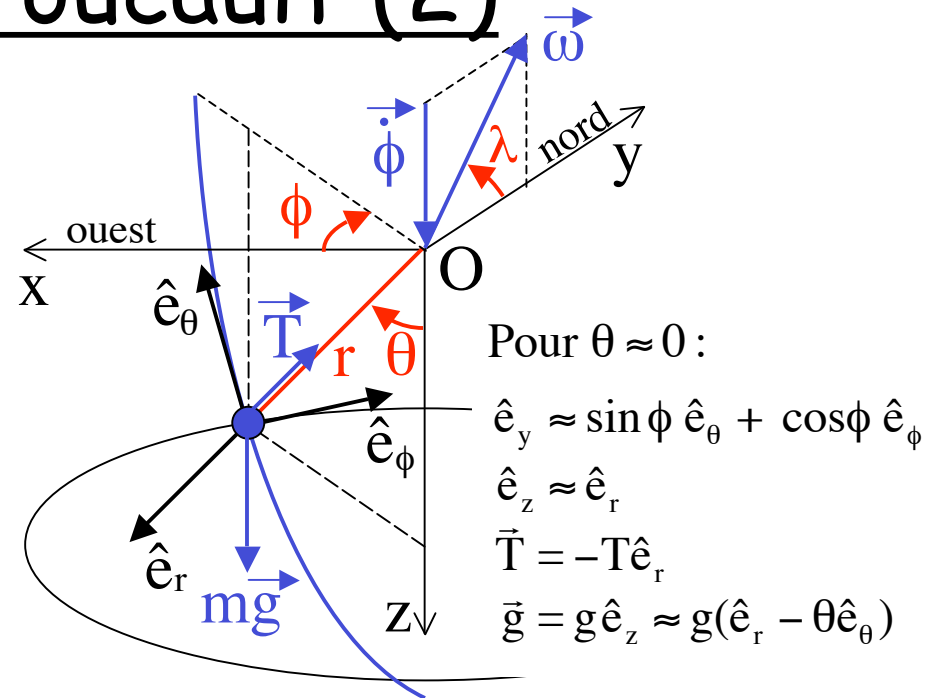
- On néglige le terme centripète (ou on redéfinit z selon la verticale)
- θ très petit $\rightarrow \sin\theta \approx 0$ et $\cos\theta \approx 1$
- Contraintes : $r = L, \dot{r} = 0, \ddot{r} = 0, \ddot{\phi} = 0$

$$\vec{v} = \dot{r} \hat{e}_r + r\dot{\theta} \hat{e}_\theta + r\dot{\phi} \sin\theta \hat{e}_\phi \approx L\dot{\theta} \hat{e}_\theta$$

$$\begin{aligned} \vec{a} = & (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2 \sin^2\theta) \hat{e}_r \\ & + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2 \sin\theta \cos\theta) \hat{e}_\theta \\ & + (r\ddot{\phi} \sin\theta + 2\dot{r}\dot{\phi} \sin\theta + 2r\dot{\phi}\dot{\theta} \cos\theta) \hat{e}_\phi \\ \approx & -L\dot{\theta}^2 \hat{e}_r + L\ddot{\theta} \hat{e}_\theta + 2L\dot{\phi}\dot{\theta} \hat{e}_\phi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{\omega} = & \omega \cos\lambda \hat{y} - \omega \sin\lambda \hat{z} \\ \approx & \omega \cos\lambda (\sin\phi \hat{e}_\theta + \cos\phi \hat{e}_\phi) - \omega \sin\lambda \hat{e}_r \end{aligned}$$

$$\vec{\omega} \wedge \vec{v} \approx -\omega L\dot{\theta} (\sin\lambda \hat{e}_\phi + \cos\lambda \cos\phi \hat{e}_r)$$



$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T} - 2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}$$

$$\begin{aligned} \hat{e}_r : & -mL\dot{\theta}^2 = mg - T + 2m\omega L\dot{\theta} \cos\lambda \cos\phi \\ \hat{e}_\theta : & mL\ddot{\theta} = -mg\theta \Rightarrow \ddot{\theta} = -(g/L) \theta \\ \hat{e}_\phi : & m2L\dot{\phi}\dot{\theta} = 2m\omega L\dot{\theta} \sin\lambda \Rightarrow \dot{\phi} = \omega \sin\lambda \end{aligned}$$

$$\text{Période} = \frac{2\pi}{\dot{\phi}} = \frac{2\pi}{\omega \sin\lambda} = \frac{24 \text{ h}}{\sin\lambda} = 33 \text{ h à Lausanne} \quad (\sim 11^\circ/\text{h})$$

Les bases de la mécanique Newtonienne classique

(sous forme de rappel de notions déjà apparues dans ce cours)

Les 3 lois de Newton

1. Loi d'inertie

mouvement rectiligne uniforme $\Leftrightarrow \vec{F} = 0$

2. Loi fondamentale de la dynamique

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad \text{où } \vec{p} = m\vec{v} \quad \left(\begin{array}{l} \vec{F} = m\vec{a} \\ \text{si } m = \text{cste} \end{array} \right)$$

3. Loi de l'action et de la réaction

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -\vec{F}_{2 \rightarrow 1}$$

1. Définit les « bons » référentiels pour la 2ème loi, c'est-à-dire les référentiels d'inertie

2. Introduit les grandeurs physiques importantes ; de cette loi découle le théorème du moment cinétique :

$$\vec{M}_O = \frac{d\vec{L}_O}{dt} \quad \text{où } \begin{cases} \vec{M}_O = \vec{r} \wedge \vec{F} \\ \vec{L}_O = \vec{r} \wedge \vec{p} \end{cases}$$

O = point arbitraire du référentiel

3. Enonce une propriété générale des forces :

Dans un système la somme des forces et des moments internes est nulle
 $\Rightarrow$ la 2ème loi de Newton et le théorème du moment cinétique sont valables pour la quantité de mouvement totale et le moment cinétique total en ne considérant que les forces extérieures au système

$$\begin{aligned} \vec{F}^{\text{ext}} &= \frac{d\vec{p}_{\text{tot}}}{dt} \\ \vec{M}_O^{\text{ext}} &= \frac{d\vec{L}_{O,\text{tot}}}{dt} \end{aligned}$$

Relativité Galiléenne (invariance par changement de référentiel d'inertie)

Les intervalles de temps et d'espace sont les mêmes dans tous les référentiels d'inertie
Les lois de la mécanique sont les mêmes dans tous les référentiels d'inertie

Lois (principes) de conservation

(sous forme de rappel de notions déjà apparues dans ce cours)

- Pour un système isolé :

$$(\vec{F}^{\text{ext}} = 0 \text{ et } \vec{M}_O^{\text{ext}} = 0)$$

$$\begin{aligned} \vec{p}_{\text{tot}} &= \text{constante} \\ \vec{L}_{O,\text{tot}} &= \text{constante} \quad \forall O \end{aligned}$$

- Conséquence directe des lois de Newton, mais ...
- ... **ces lois sont fondamentales**, valables mêmes en dehors du cadre de la mécanique Newtonienne classique (par ex. en relativité restreinte et en mécanique quantique)
- ... elles peuvent être comprises comme **l'expression de symétries** (homogénéité et isotropie de l'espace)

- Pour un système partiellement isolé (isolé selon une direction u) :

$$(\hat{u} \cdot \vec{F}^{\text{ext}} = 0 \text{ et } \hat{u} \cdot \vec{M}_O^{\text{ext}} = 0)$$

$$\begin{aligned} \vec{p}_{\text{tot}} \cdot \hat{u} &= \text{constante} \\ \vec{L}_{O,\text{tot}} \cdot \hat{u} &= \text{constante} \quad \forall O \end{aligned}$$

- Exemples :
 - Objets sur rail à air horizontal
 - Tabouret tournant

- Cas spécial : système soumis à une force centrale :

$$(\vec{M}_O^{\text{ext}} = 0)$$

$$\vec{L}_{O,\text{tot}} = \text{constante} \quad \text{pour un point } O$$

Lois de conservation: remarques, exemples ...

- Il existe également une autre loi de conservation, très importante en mécanique : la **conservation de l'énergie**
 - tout aussi fondamentale que la conservation de p et L
 - l'énergie cinétique totale d'un système, même isolé, n'est pas toujours conservée, car il existe des formes « cachées » d'énergie (énergies potentielles, chaleur, énergie électrique ou chimique, masse, ...), dont certaines seront abordées plus loin dans ce cours
 - cette loi dépasse donc le cadre strict de la mécanique !
- Les lois de conservation sont des concepts et des outils puissants :
 - Analyse simplifiée de situations complexes
- Exemples et démonstrations (pour constater la conservation de $\vec{p}$ et L , et pour chercher les formes d'énergie « cachées »):
 - « voiture à boulets », « voiture à gaz »
 - chocs élastiques, choc mou
 - tabouret tournant

Démo : Tabouret tournant # 17

Système de masse variable (fusée)

- On considère, au temps t , la fusée et son gaz :

$$\vec{p}(t) = m(t) \vec{v}(t)$$

$$\vec{p}(t + dt) = (m(t) + dm) (\vec{v}(t) + d\vec{v}) - dm (\vec{v}(t) + \vec{u})$$

$$d\vec{p} = \vec{p}(t + dt) - \vec{p}(t) = m(t) d\vec{v} - dm \vec{u}$$

$$\boxed{\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m(t) \vec{a}(t) - \frac{dm}{dt} \vec{u}}$$

- Fusée au décollage :

$$\vec{F}(t) = m(t) \vec{g} \Rightarrow m(t) \vec{a}(t) = m(t) \vec{g} + \frac{dm}{dt} \vec{u}$$

Projection sur axe vertical :

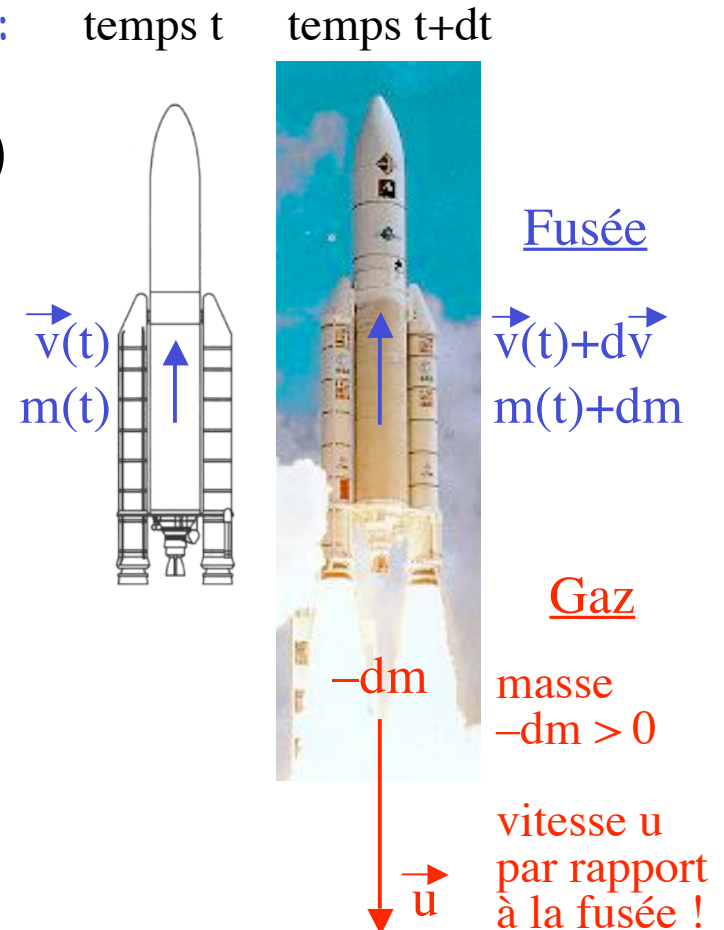
$$m(t) a(t) = -m(t) g - \frac{dm}{dt} u$$

Condition de démarrage ($t=0$) :

$$a(0) > 0 \Rightarrow \underbrace{\left| \frac{dm}{dt} \right| u}_{\text{poussée}} > \underbrace{m(0) g}_{\text{poids}}$$

Si u = constante, on obtient:

$$v(t) - \underbrace{v(0)}_0 = -gt - u \ln \frac{m(t)}{m(0)} \Rightarrow v(t) = u \ln \frac{m(0)}{m(t)} - gt$$



Fusée Saturne V

Fusée Saturne V	
Masse totale	2940 tonnes
<i>1^{er} étage :</i>	
Masse de carburant	2150 tonnes
Combustion	13,3 t/s
Vitesse d'éjection	2,8 km/s
Poussée moyenne	3270 tonnes-force

Chocs ou collisions entre particules

- Peuvent être analysés sur la base des lois de conservation et permettent d'étudier les forces en jeu
- Modélisation : le système des deux particules est isolé :

① Bien avant le choc ($t \ll 0$) :

- Les particules n'exercent aucune force l'une sur l'autre (elles sont très éloignées et on suppose une force à courte portée)
- Chaque particule est un système isolé

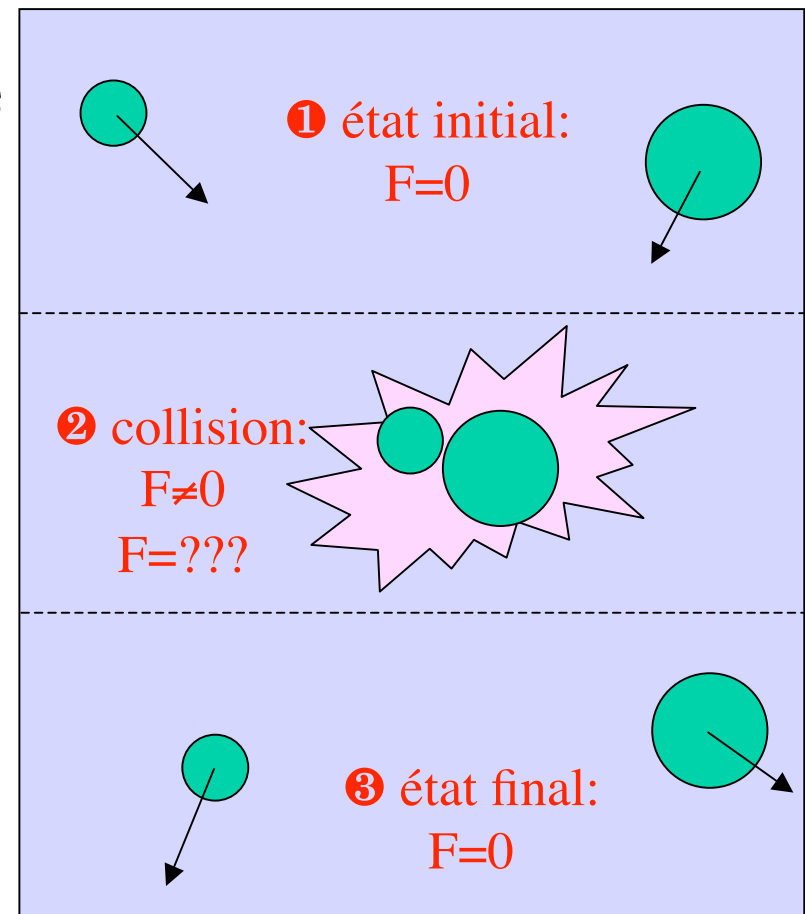
② Pendant le choc ($t \sim 0$) :

- Les particules interagissent, sous l'effet d'une force F (qu'on ne décrit pas)

③ Bien après le choc ($t \gg 0$) :

- Les particules sont à nouveau libres

$\Rightarrow \vec{L}_{\text{tot}}$ et $\vec{p}_{\text{tot}}$ conservés

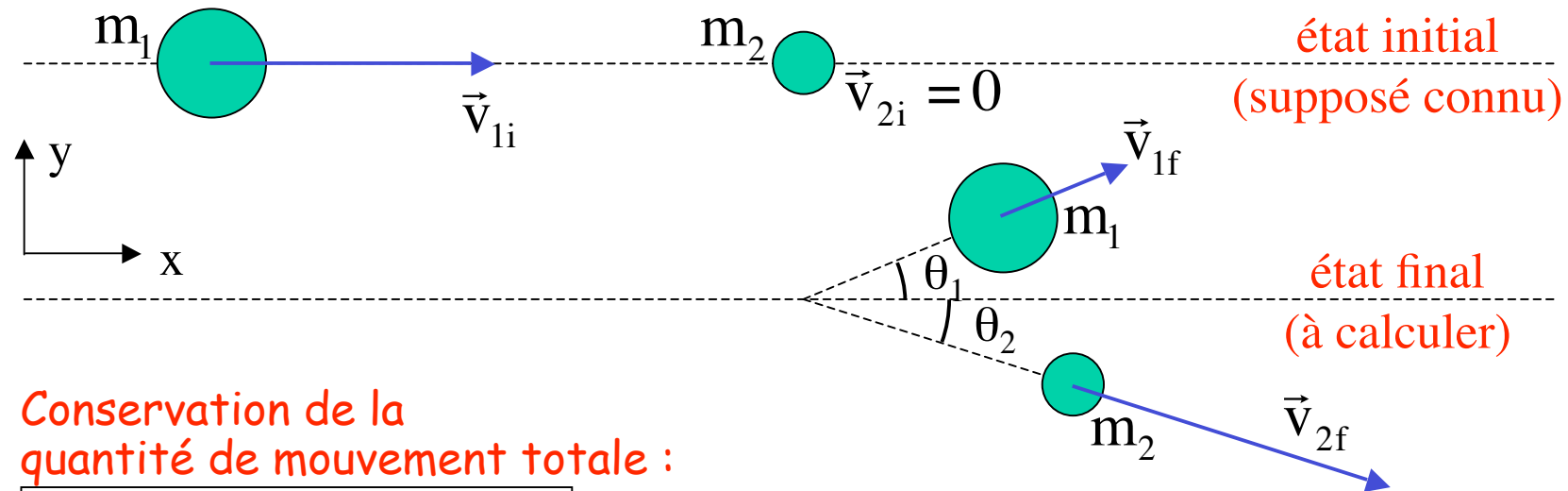


état initial $\neq$ état final : les particules ont échangé, entre autres, de la quantité de mouvement :

$$\Delta \vec{p} = \int_{\text{choc}} \vec{F}(t) dt = \text{impulsion}$$

Choc entre deux points matériels

- On choisit, sans perte de généralité, un référentiel dans lequel l'une des deux boules est initialement au repos (relativité !)



- Conservation de la quantité de mouvement totale :

$$m_1 \vec{v}_{1i} = m_1 \vec{v}_{1f} + m_2 \vec{v}_{2f} \Rightarrow \text{toutes les vitesses sont dans un même plan}$$

Projections x et y

$$\begin{cases} m_1 v_{1i} = m_1 v_{1f} \cos\theta_1 + m_2 v_{2f} \cos\theta_2 \\ 0 = m_1 v_{1f} \sin\theta_1 - m_2 v_{2f} \sin\theta_2 \end{cases}$$

- Variation d'énergie cinétique totale :

$$Q \equiv K_{\text{final}} - K_{\text{initial}} = \underbrace{\frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2}_{K_{1f}} + \underbrace{\frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2}_{K_{2f}} - \underbrace{\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2}_{K_{1i}}$$

Pour un choc entre deux boules (par exemple de billard), il faudrait en plus tenir compte de la conservation du moment cinétique et de l'énergie cinétique de rotation !
 $(K = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I_G \omega^2)$

Choc élastique entre deux points matériels

- Définition choc élastique: énergie cinétique conservée $\Leftrightarrow Q=0$

$$\begin{cases} m_1 v_{1i} = m_1 v_{1f} \cos\theta_1 + m_2 v_{2f} \cos\theta_2 \\ 0 = m_1 v_{1f} \sin\theta_1 - m_2 v_{2f} \sin\theta_2 \end{cases} \xRightarrow{\text{élimination } \theta_2} \begin{cases} \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2 \\ v_{1i}^2 + v_{1f}^2 - 2v_{1i} v_{1f} \cos\theta_1 = \frac{m_2^2}{m_1^2} v_{2f}^2 \end{cases}$$

$$\frac{v_{1f}}{v_{1i}} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \left(\cos\theta_1 \pm \sqrt{\cos^2\theta_1 - 1 + \frac{m_2^2}{m_1^2}} \right)$$

$\xleftarrow{\text{élimination } v_{2f}^2}$

Conditions à satisfaire : $(\cos\theta_1 \pm \sqrt{\dots}) \geq 0$ et argument de la racine ≥ 0

a) si $m_1 < m_2$:

- signe « - » exclu et l'angle θ_1 n'est pas restreint : $0 \leq \theta_1 \leq \pi$

b) si $m_1 > m_2$:

- les deux signes sont possibles, mais l'angle θ_1 doit satisfaire à :

$$\cos^2\theta_1 > 1 - \frac{m_2^2}{m_1^2} \text{ et } \cos\theta_1 > 0 \Rightarrow \theta_1 < \theta_1^{\max} \text{ où } \cos\theta_1^{\max} = \sqrt{1 - \frac{m_2^2}{m_1^2}}$$

(Exemples : chocs entre balle de ping-pong et boule de pétanque)

Choc élastique entre deux pts matériels (2)

Démos : Choc entre plusieurs boules # 89

Choc élastique et choc mou (sur rail à air) # 766

- Remarques :

- Le problème n'est pas complètement soluble sans information sur la force
- La donnée de la direction finale de la particule 1 permettrait de tout connaître (on obtiendrait $|\vec{v}_{1f}|$ et $\vec{v}_{2f}$ à partir des 4 équations de conservation)

- Cas particulier d'une collision unidimensionnelle (entièrement soluble avec les lois de conservation)

- On reprend les résultats précédents avec $\theta_1 = \theta_2 = 0$, mais v_{1i} , v_{1f} , et v_{2f} sont maintenant les coordonnées sur l'axe x (et non plus les normes)
- On obtient :

$$\frac{v_{1f}}{v_{1i}} = \frac{m_1 \pm m_2}{m_1 + m_2} \Rightarrow \underbrace{\begin{cases} v_{1f} = v_{1i} \\ v_{2f} = 0 \end{cases}}_{\text{pas de choc !}} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i} \\ v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i} \end{cases}$$

- Cas limites :

Si $m_1 = m_2$: $v_{1f} = 0$ et $v_{2f} = v_{1i}$

Si $m_1 \ll m_2$: $v_{1f} \approx -v_{1i}$ et $v_{2f} \approx 0$

Si $m_1 \gg m_2$: $v_{1f} \approx v_{1i}$ et $v_{2f} \approx 2v_{1i}$

échange des vitesses

rebond sur une masse « infinie »

collision avec masse négligeable

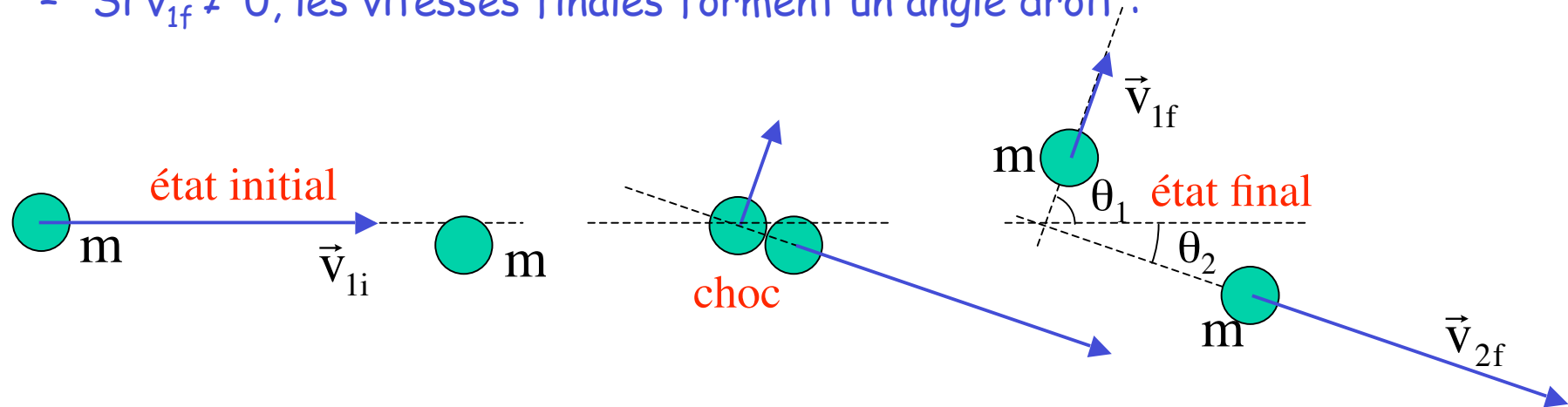
Choc élastique entre deux pts matériels (3)

- Cas particulier $m_1=m_2=m$:

- Par exemple boules de billard sans frottements (pour autant que l'approximation du point matériel soit valable, i.e., billard « sans effets »)

- On obtient :
$$\frac{v_{1f}}{v_{1i}} = \frac{1}{2} \left(\cos\theta_1 \pm \sqrt{\cos^2\theta_1} \right) \Rightarrow \begin{cases} v_{1f} = 0 : \text{échange des vitesses} \\ v_{1f} = v_{1i} \cos\theta_1 \end{cases}$$

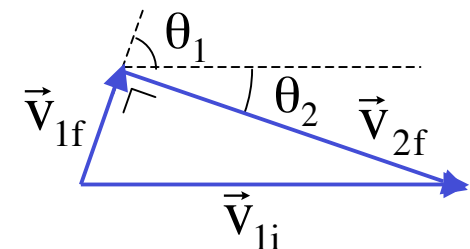
- Si $v_{1f} \neq 0$, les vitesses finales forment un angle droit :



conservation de $\vec{p}_{\text{tot}}$: $\vec{v}_{1i} = \vec{v}_{1f} + \vec{v}_{2f} \Rightarrow$ triangle

conservation de K_{tot} : $v_{1i}^2 = v_{1f}^2 + v_{2f}^2 \Rightarrow$ triangle rectangle

$\Rightarrow \theta_1 + \theta_2 = \pi/2$



Choc inélastique

Démos : Choc élastique et choc mou (sur rail à air) # 766

Choc élastique et choc mou (différents matériaux) # 82

entre deux points matériels

- **Définition choc inélastique : énergie cinétique non conservée**
 - $Q > 0$: la collision dégage de l'énergie cinétique (exo-énergétique)
 - $Q < 0$: la collision absorbe de l'énergie cinétique (endo-énergétique)
- **La variation d'énergie interne du système vaut $-Q$ (par conservation de l'énergie totale) :**
 - elle peut conduire à un changement de l'identité des particules en interaction, ou du nombre de particules dans l'état final; exemples :
 - Choc entre un marteau et un verre de cristal
 - Collisions entre particules élémentaires, par ex. $e^- + e^+ \rightarrow \mu^- + \mu^+$
- **Cas particulier: choc mou (les deux points matériels s'accolent) :**

$$\vec{v}_{1f} = \vec{v}_{2f} = \vec{v}_{\text{mou}}$$

$$m_1 \vec{v}_{1i} = m_1 \vec{v}_{1f} + m_2 \vec{v}_{2f} = (m_1 + m_2) \vec{v}_{\text{mou}} \Rightarrow \vec{v}_{\text{mou}} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{v}_{1i}$$

$$Q \equiv K_{\text{final}} - K_{\text{initial}} = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_{\text{mou}}^2 - \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{m_1^2}{m_1 + m_2} - m_1 \right) v_{1i}^2 = -\frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} v_{1i}^2 < 0$$

Vitesse relative et coefficient de restitution

- Collision dans un référentiel quelconque :

- Conservation quantité de mouvement :

$$\vec{p}_{1f} = \vec{p}_{1i} + \Delta\vec{p}, \quad \vec{p}_{2f} = \vec{p}_{2i} - \Delta\vec{p} \quad \text{avec} \quad \Delta\vec{p} = \Delta p \hat{u}, \quad \Delta\vec{p} \cdot \hat{u} = \Delta p$$

- Bilan énergétique :

$$\frac{p_{1i}^2}{2m_1} + \frac{p_{2i}^2}{2m_2} + Q = \frac{p_{1f}^2}{2m_1} + \frac{p_{2f}^2}{2m_2} \Rightarrow \frac{1}{2m_1}(p_{1f}^2 - p_{1i}^2) = \frac{1}{2m_2}(p_{2i}^2 - p_{2f}^2) + Q$$

$$\frac{1}{2m_1}(2\vec{p}_{1i} \cdot \Delta\vec{p} + \Delta\vec{p}^2) = \frac{1}{2m_2}(2\vec{p}_{2i} \cdot \Delta\vec{p} - \Delta\vec{p}^2) + Q$$

$$\frac{1}{2m_1}(2\vec{p}_{1i} + \Delta\vec{p}) \cdot \hat{u} = \frac{1}{2m_2}(2\vec{p}_{2i} - \Delta\vec{p}) \cdot \hat{u} + \frac{Q}{\Delta p} \Rightarrow (\vec{v}_{1i} + \vec{v}_{1f}) \cdot \hat{u} = (\vec{v}_{2i} + \vec{v}_{2f}) \cdot \hat{u} + \frac{2Q}{\Delta p}$$

$$(\vec{v}_{2f} - \vec{v}_{1f}) \cdot \hat{u} = -(\vec{v}_{2i} - \vec{v}_{1i}) \cdot \hat{u} - \frac{2Q}{\Delta p}$$

- On définit $e = \text{coefficient de restitution}$ $\underbrace{(\vec{v}_{2f} - \vec{v}_{1f}) \cdot \hat{u}}_{\text{Vitesse relative d'éloignement selon direction } \Delta p \text{ dans l'état final}} = -e \underbrace{(\vec{v}_{2i} - \vec{v}_{1i}) \cdot \hat{u}}_{\text{Vitesse relative de rapprochement selon direction } \Delta p \text{ dans l'état initial}}$

choc élastique ($Q = 0$) $\Leftrightarrow e = 1$

choc mou ($\vec{v}_{2f} = \vec{v}_{1f}$) $\Rightarrow e = 0$

Vitesse relative
d'éloignement
selon direction Δp
dans l'état final

Vitesse relative de
rapprochement
selon direction Δp
dans l'état initial

Problème à deux corps

- 2ème loi appliquée à chaque corps :

$$\begin{cases} \vec{F}_{2 \rightarrow 1} = m_1 \ddot{\vec{r}}_1 & (1) \\ \vec{F}_{1 \rightarrow 2} = m_2 \ddot{\vec{r}}_2 & (2) \end{cases}$$

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} + \vec{F}_{2 \rightarrow 1} = 0$$

(3ème loi)

- Changement de variables :

$$\begin{cases} \vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} = \text{coord. du centre de masse} \\ \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 = \text{coord. relatives} \end{cases}$$

$$(1) + (2) \Rightarrow 0 = (m_1 + m_2) \ddot{\vec{R}}$$

Equation du mouvement du centre de masse
(théorème du CM pour $\Sigma \vec{F}^{\text{ext}} = 0$)

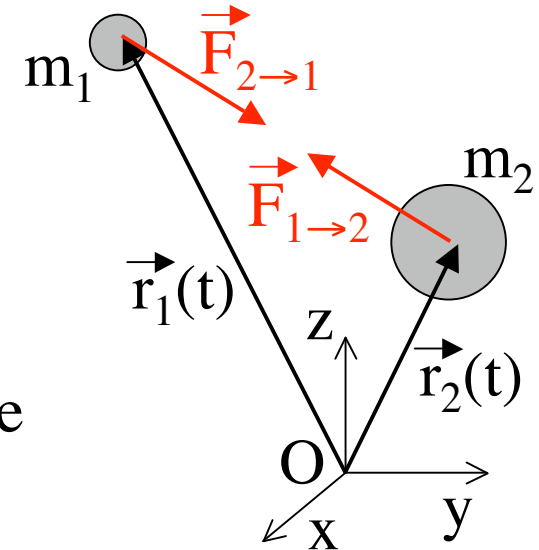
$$(1) \times m_2 - (2) \times m_1 \Rightarrow m_2 \vec{F}_{2 \rightarrow 1} - m_1 \vec{F}_{1 \rightarrow 2} = m_1 m_2 \ddot{\vec{r}} \Rightarrow \vec{F}_{2 \rightarrow 1} (m_1 + m_2) = m_1 m_2 \ddot{\vec{r}}$$

Equation du
mouvement relatif

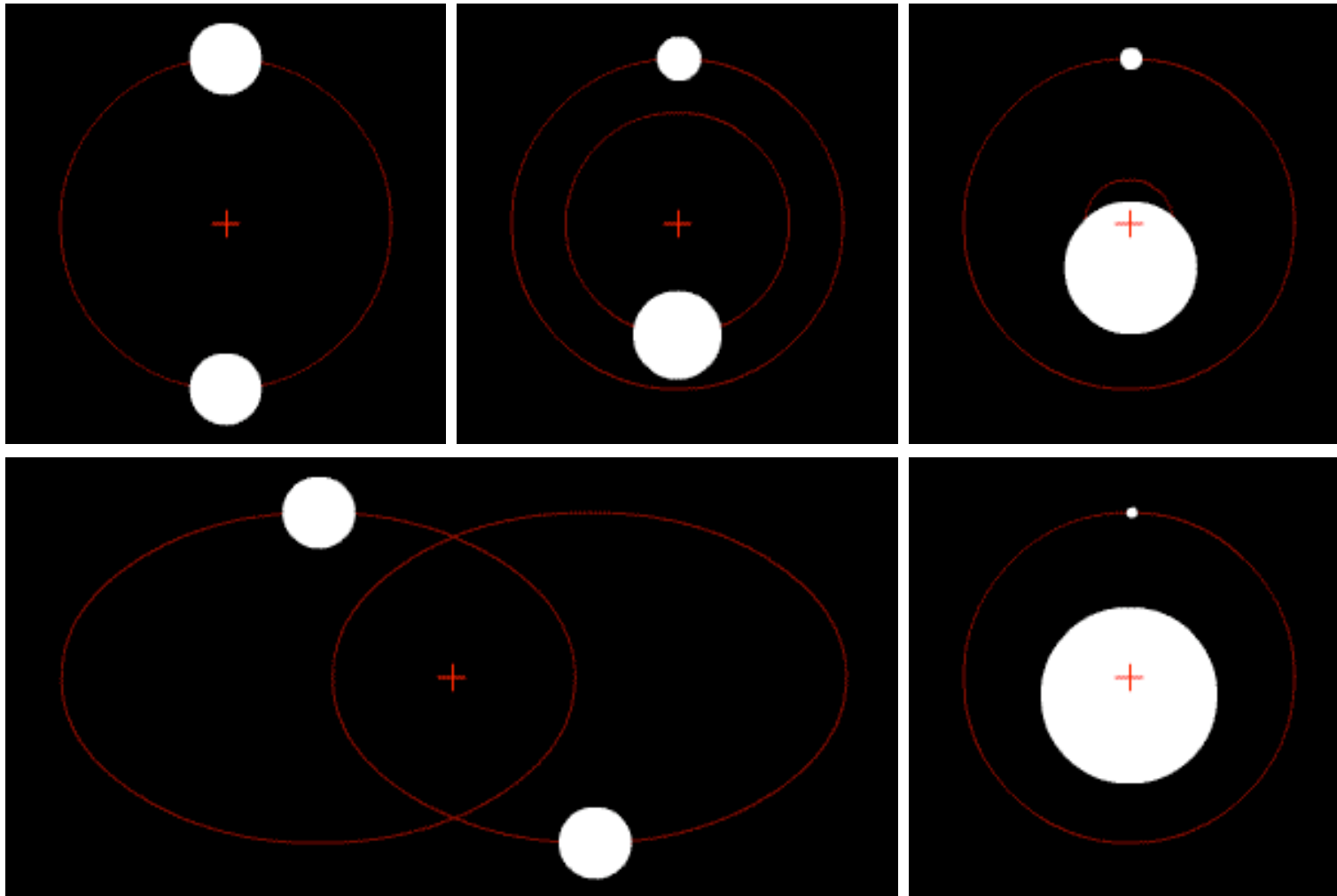
$$\vec{F}_{2 \rightarrow 1} = \mu \ddot{\vec{r}} \quad \text{où} \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \\ M = m_1 + m_2 \end{cases}$$

μ = masse réduite du système
 M = masse totale du système



Problème à deux corps



Problème à deux corps (2)

$$\begin{array}{ccc}
 & \text{référentiel du laboratoire} & \text{référentiel du centre de masse} \\
 \left\{ \begin{array}{l} \vec{R} = \frac{m_1}{M} \vec{r}_1 + \frac{m_2}{M} \vec{r}_2 \\ \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \end{array} \right. & \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \vec{r}_1 = \vec{R} + \frac{\mu}{m_1} \vec{r} \\ \vec{r}_2 = \vec{R} - \frac{\mu}{m_2} \vec{r} \end{array} \right. & \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \vec{r}_1^* = \vec{r}_1 - \vec{R} = \frac{\mu}{m_1} \vec{r} \\ \vec{r}_2^* = \vec{r}_2 - \vec{R} = -\frac{\mu}{m_2} \vec{r} \end{array} \right. \\
 & \text{changement de référentiel} &
 \end{array}$$

- Quantité de mouvement totale : $\begin{cases} \vec{p}_{\text{tot}} = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = M \vec{V} \\ \vec{p}_{\text{tot}}^* = m_1 \vec{v}_1^* + m_2 \vec{v}_2^* = 0 \end{cases}$ $\vec{p}_{\text{tot}} = M \vec{V}$
- Moment cinétique total : Théorème de la quantité de mvt

$$\begin{cases} \vec{L}_{\text{tot},O} = \vec{r}_1 \wedge m_1 \vec{v}_1 + \vec{r}_2 \wedge m_2 \vec{v}_2 = \vec{r}_1 \wedge m_1 (\vec{V} + (\mu/m_1) \vec{v}) + \vec{r}_2 \wedge m_2 (\vec{V} - (\mu/m_2) \vec{v}) \\ \quad = (m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2) \wedge \vec{V} + (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \wedge \mu \vec{v} = \vec{R} \wedge M \vec{V} + \vec{r} \wedge \mu \vec{v} \\ \vec{L}_{\text{tot},G}^* = \vec{r}_1^* \wedge m_1 \vec{v}_1^* + \vec{r}_2^* \wedge m_2 \vec{v}_2^* = \dots = \vec{r} \wedge \mu \vec{v} \end{cases}$$

$$\vec{L}_{\text{tot},O} = \vec{R} \wedge M \vec{V} + \vec{L}_{\text{tot},G}^*$$

1er théorème de König

- Energie cinétique totale :

$$\begin{cases} K_{\text{tot}} = \frac{1}{2} m_1 \vec{v}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \vec{v}_2^2 = \frac{1}{2} m_1 (\vec{V} + (\mu/m_1) \vec{v})^2 + \frac{1}{2} m_2 (\vec{V} - (\mu/m_2) \vec{v})^2 \\ \quad = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \vec{V}^2 + \frac{1}{2} (1/m_1 + 1/m_2) \mu^2 \vec{v}^2 = \frac{1}{2} M \vec{V}^2 + \frac{1}{2} \mu \vec{v}^2 \\ K_{\text{tot}}^* = \frac{1}{2} m_1 \vec{v}_1^{*2} + \frac{1}{2} m_2 \vec{v}_2^{*2} = \dots = \frac{1}{2} \mu \vec{v}^2 \end{cases}$$

$$K_{\text{tot}} = \frac{1}{2} M \vec{V}^2 + K_{\text{tot}}^*$$

2ème théorème de König

Problème à N corps

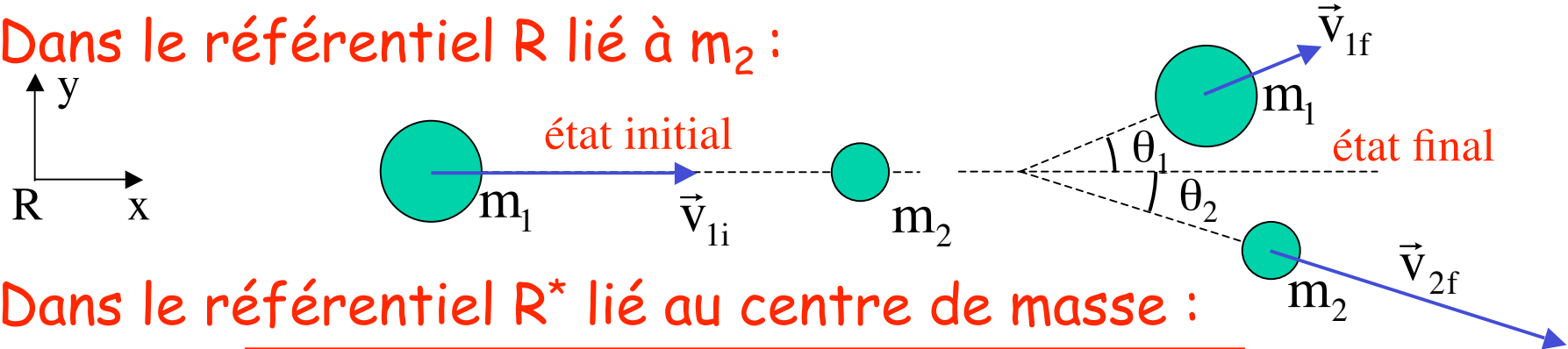
Let a number, N , of particles interact classically through Newton's Laws of Motion and Newton's inverse square Law of Gravitation. The resulting equations of motion provide an approximate mathematical model with numerous applications in astrophysics, including the motion of the moon and other bodies in the Solar System (planets, asteroids, comets and meteor particles); stars in stellar systems ranging from binary and other multiple stars to star clusters and galaxies; and the motion of dark matter particles in cosmology. For $N=1$ and $N=2$ the equations can be solved analytically. The case $N=3$ provides one of the richest of all unsolved dynamical problems -- the general three-body problem. For problems dominated by one massive body, as in many planetary problems, approximate methods based on perturbation expansions have been developed. In stellar dynamics, astrophysicists have developed numerous numerical and theoretical approaches to the problem for larger values of N , including treatments based on the Boltzmann equation and the Fokker-Planck equation; such N -body systems can also be modelled as self-gravitating gases, and thermodynamic insights underpin much of our qualitative understanding.

Douglas Heggie

<http://fr.arxiv.org/abs/astro-ph/0503600v2>

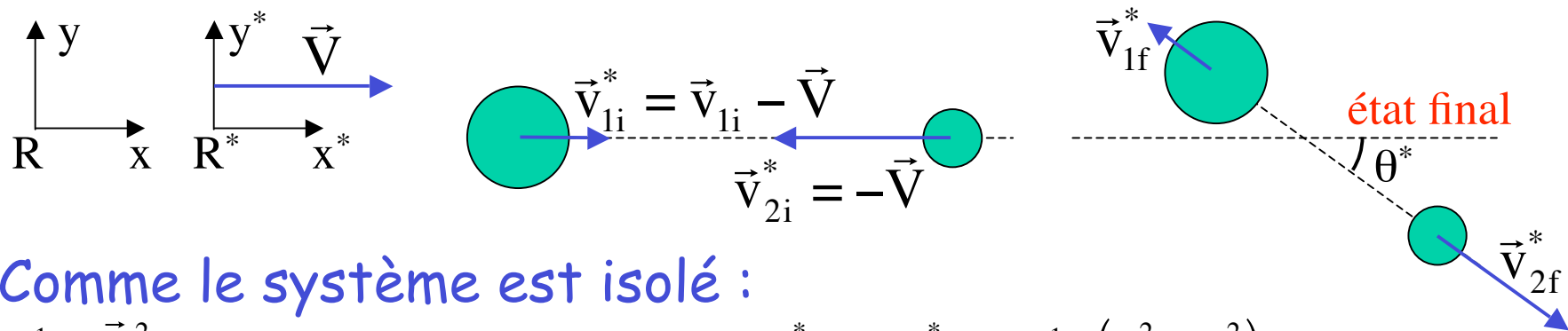
Collision vue du centre de masse

- Dans le référentiel R lié à m_2 :



- Dans le référentiel R^* lié au centre de masse :

$$m_1 \vec{v}_{1i}^* + m_2 \vec{v}_{2i}^* = m_1 \vec{v}_{1f}^* + m_2 \vec{v}_{2f}^* = \vec{p}_{\text{tot}}^* = \vec{P}^* = 0$$



- Comme le système est isolé :

$$\frac{1}{2} M \vec{V}^2 = \text{cste} \Rightarrow Q = K_{\text{final}} - K_{\text{initial}} = K_{\text{final}}^* - K_{\text{initial}}^* = \frac{1}{2} \mu (\vec{v}_f^2 - \vec{v}_i^2)$$

Si $\theta^* = 0$, $Q = \frac{1}{2} \mu (e^2 - 1) v_i^2$

- Si un processus demande l'absorption d'une énergie E_{int} :

au seuil : $-E_{\text{int}} = Q = -\frac{1}{2} \mu \vec{v}_i^2 = -\frac{1}{2} \mu \vec{v}_{1i}^2 \Rightarrow K_{1i} = \frac{1}{2} m_1 \vec{v}_{1i}^2 = \frac{m_1}{\mu} E_{\text{int}} = E_{\text{int}} \left(1 + \frac{m_1}{m_2} \right)$

(= choc mou)