



ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

20 février 2009
cours de la semaine # 01b

Bienvenue au



EPFL - LABORATOIRE
D'ASTROPHYSIQUE

Cours de physique générale

Physique II pour étudiants de première année
en section de mathématiques

Prof. Georges Meylan

Laboratoire d'astrophysique

Site web du laboratoire et du cours :

<http://lastro.epfl.ch>

Dynamique dans référentiel en mouvement

- Soit un référentiel R (absolu) dans lequel la deuxième loi de Newton est valable.
Pour le point matériel P, auquel s'appliquent des forces F^{ext} :

$$\sum \vec{F}^{\text{ext}} = m\vec{a}_P$$

- Dans un référentiel R' accéléré par rapport à R, on a :

Transformation
des vitesses et
des accélérations

$$\sum \vec{F}^{\text{ext}} = m\left(\vec{a}'_P + 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}'_P + \vec{a}_{O'} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overline{O'P}) + \dot{\vec{\omega}} \wedge \overline{O'P}\right)$$

$$\sum \vec{F}^{\text{ext}} \underbrace{- 2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}'_P - m\vec{a}_{O'} - m\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overline{O'P}) - m\dot{\vec{\omega}} \wedge \overline{O'P}}_{\sum \vec{F}^{\text{inertie}}} = m\vec{a}'_P$$

force de Coriolis
force centrifuge



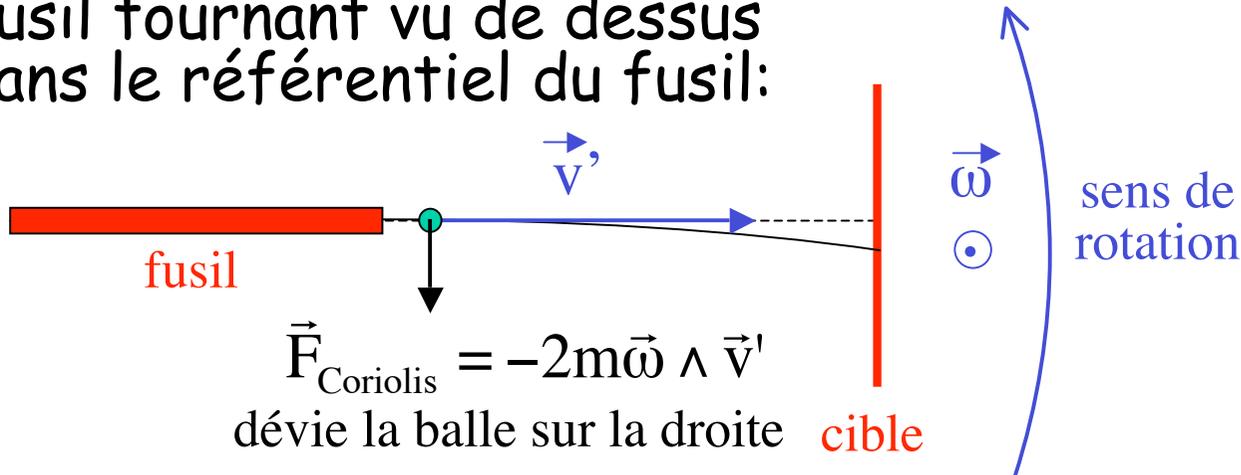
- les "**forces d'inertie**" ne sont pas des vraies forces ; il s'agit d'un concept introduit pour rétablir la loi $\Sigma F=ma$ dans les référentiels accélérés ! "**forces d'inertie**" = "**pseudo forces**"

Les forces d'inertie ne satisfont pas à la loi de l'action et de la réaction

Démo : Force de Coriolis
fusil tournant # 8

Force de Coriolis

- Fusil tournant vu de dessus dans le référentiel du fusil:

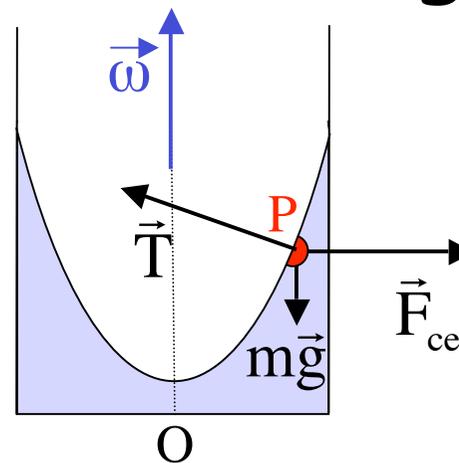


Gaspard-Gustave Coriolis
1792-1843

Démo : Force centrifuge
réipient plat # 51

Force centrifuge

- Réipient vu de coté dans le référentiel du réipient (liquide immobile)



Equilibre d'une goutte P à la surface du liquide:

$$m\vec{g} + \vec{T} + \vec{F}_{\text{centrifuge}} = 0$$

$$\vec{F}_{\text{centrifuge}} = -m\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overline{OP})$$

Force de Coriolis

Remarquons que l'observateur lié à la table tournante ou au fusil tournant interprétera la courbure de la trajectoire comme une manifestation des forces d'inertie et de Coriolis.

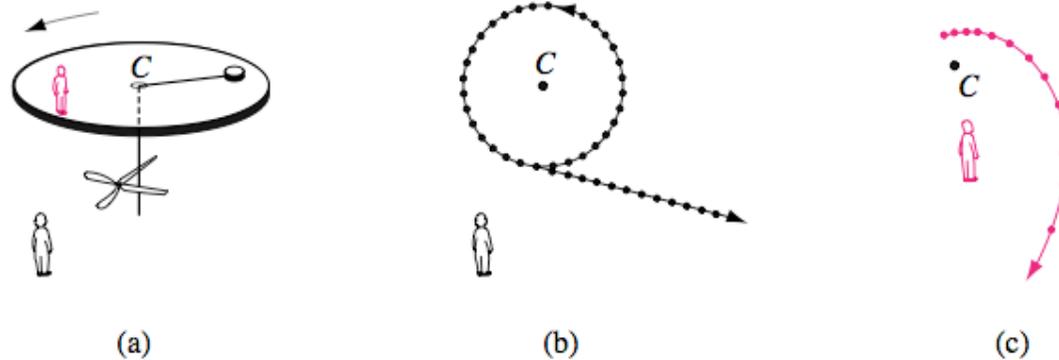


Fig. 4.1 Description du même mouvement (a) par un observateur dans le laboratoire (b) et sur le plateau tournant (c).



Fig. 4.2 La même expérience effectuée dans le laboratoire (a) et sur le support tournant (b).

Loi d'inertie et référentiels d'inertie

- Première loi de Newton (loi d'inertie) :

Tout corps persévère dans l'état de repos ou de mouvement uniforme en ligne droite à moins qu'une force n'agisse sur lui et ne le contraigne à changer d'état

NB: cette loi n'est pas valable dans tous les référentiels !

- On appelle **référentiel d'inertie** (ou absolu) un référentiel dans lequel la **loi d'inertie** est valable
- Propriétés :
 - Il n'y a pas de « forces d'inertie » dans un référentiel d'inertie ; la deuxième loi de Newton y est valable
 - Un référentiel en mouvement rectiligne uniforme par rapport à un référentiel d'inertie est un référentiel d'inertie
 - Tous les référentiels d'inertie sont en mouvement rectiligne uniforme les uns par rapport aux autres



Ne pas confondre avec le « repère d'inertie » qui diagonalise le tenseur d'inertie d'un solide

Référentiel en translation non-uniforme

- Poids apparent dans un ascenseur accéléré vers le haut :
 - On mesure le poids par l'extension du ressort
 - Dans le référentiel R' de l'ascenseur, la masse m est immobile :

$$\vec{a}'_P = 0$$

- Dans le référentiel d'inertie R :

$$\vec{a}_P = \vec{a}'_P + \vec{a}_{O'} = \vec{a}$$

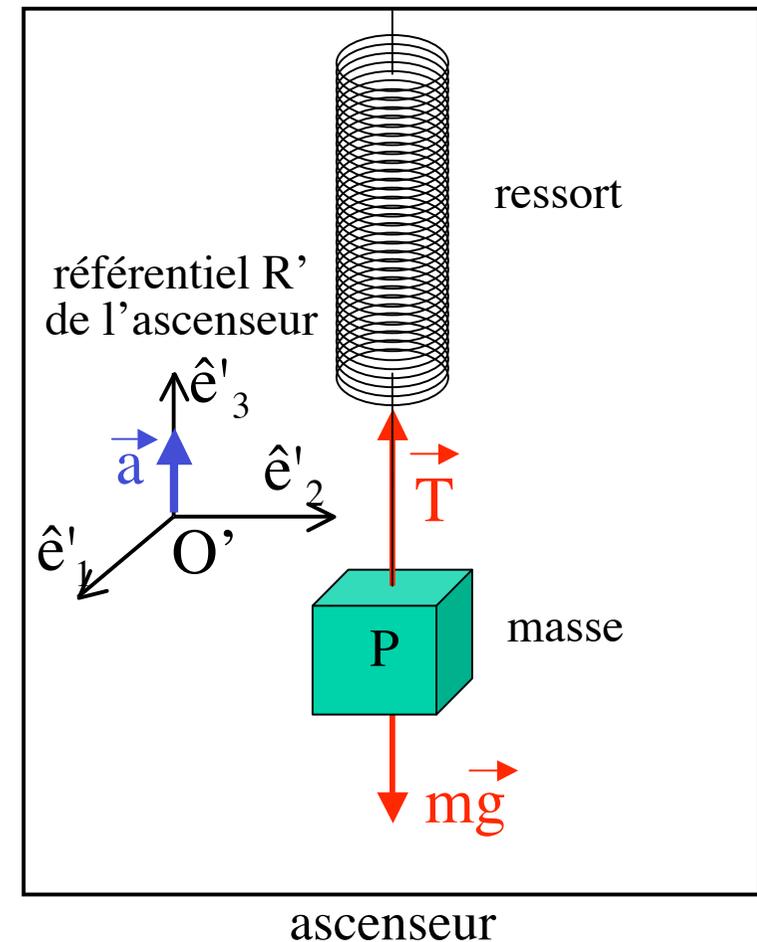
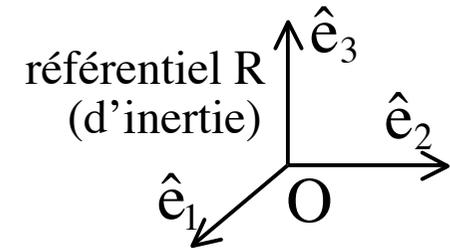
- 2ème loi de Newton appliquée à la masse m dans le référentiel R :

$$\sum \vec{F}^{\text{ext}} = m\vec{a}_P$$

$$\vec{T} + m\vec{g} = m\vec{a}$$

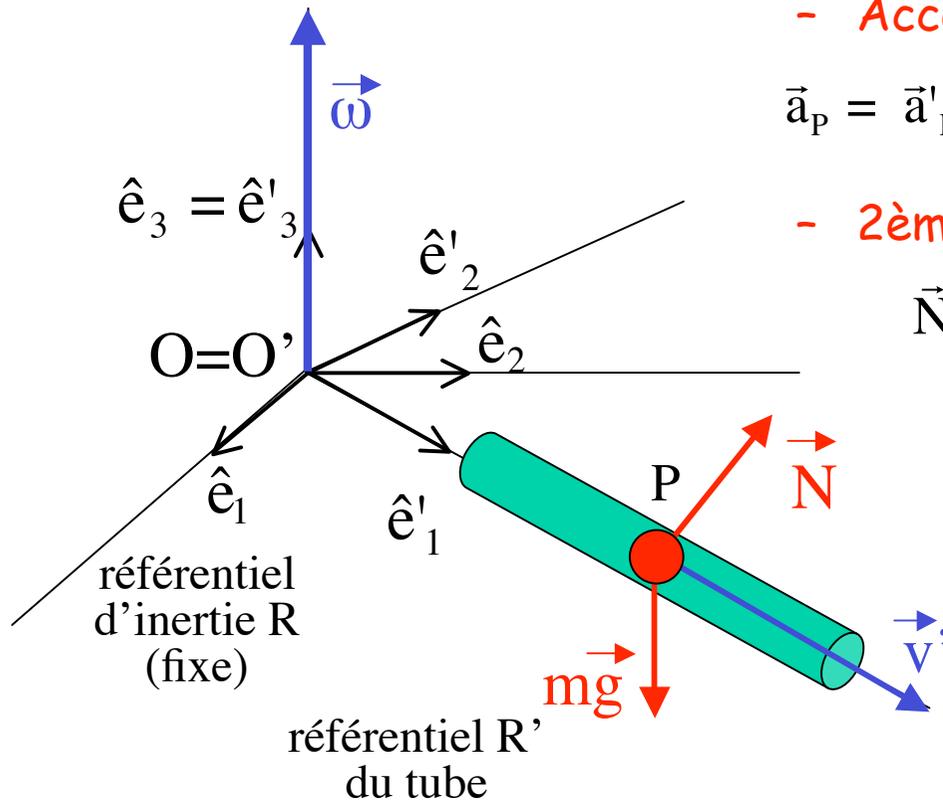
$$T - mg = ma$$

$$T = m(a + g) \quad \text{poids apparent}$$



Centrifugeuse

- Point matériel dans un tube horizontal en rotation uniforme autour d'un axe vertical (pas de frottements)
 - **Contraintes** : \vec{a}'_P , \vec{v}'_P et $\vec{r}'_P = \overline{O'P}$ selon $O'\hat{e}'_1$
 - **Force de liaison (réaction du tube) normale au tube** : $\vec{N} = N'_2 \hat{e}'_2 + N'_3 \hat{e}'_3$



- **Accélération absolue (dans R) :**

$$\vec{a}_P = \vec{a}'_P + 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}'_P + \vec{a}_{O'} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overline{O'P}) + \dot{\vec{\omega}} \wedge \overline{O'P}$$

- **2ème loi de Newton :**

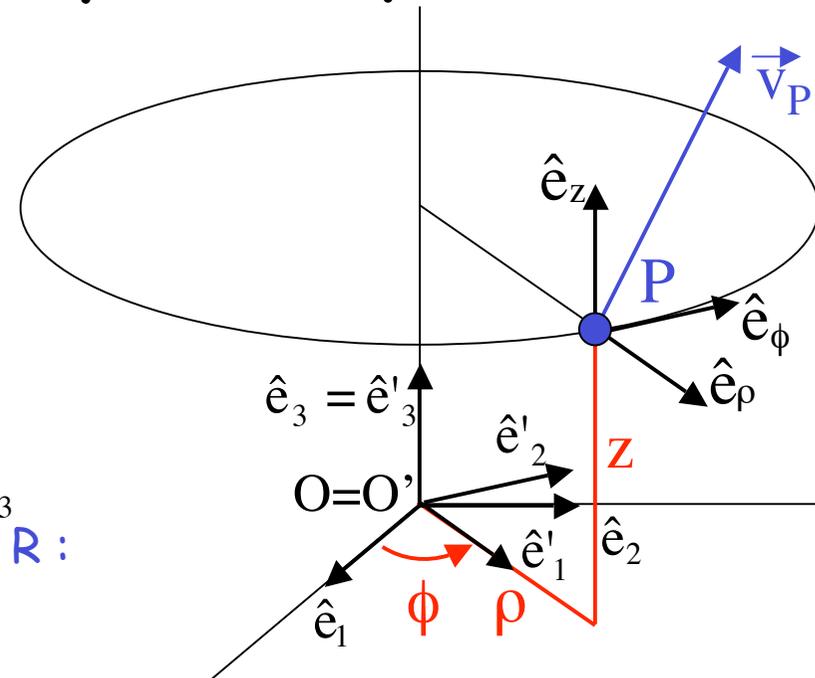
$$\begin{aligned} \vec{N} + m\vec{g} &= m\vec{a}_P \\ &= m\vec{a}'_P + 2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}'_P + m\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overline{OP}) \\ &= m\ddot{x}'\hat{e}'_1 + 2m\omega\dot{x}'\hat{e}'_2 - m\omega^2x'\hat{e}'_1 \end{aligned}$$

- **En projection sur les axes du réf. R' :**

$$\begin{cases} 0 = m\ddot{x}' - m\omega^2x' \\ N'_2 = 2m\omega\dot{x}' \\ N'_3 - mg = 0 \end{cases}$$

Vitesse et accélération en coordonnées cylindriques

- Repère lié à un référentiel absolu R :
 $O\hat{e}_1\hat{e}_2\hat{e}_3$
- Repère lié à un référentiel R' suivant le mouvement azimutal du point P :
 $O'\hat{e}'_1\hat{e}'_2\hat{e}'_3$ avec $O'=O$ et $\hat{e}'_3=\hat{e}_3$
- Vitesse de rotation : $\vec{\omega} = \dot{\phi}\hat{e}_3$
- Repère lié au point P (coord. cyl.) :
 $P\hat{e}_\rho\hat{e}_\phi\hat{e}_z$ avec $\hat{e}_\rho = \hat{e}'_1$, $\hat{e}_\phi = \hat{e}'_2$, $\hat{e}_z = \hat{e}'_3$
- Vitesse et accélération du point P dans R :

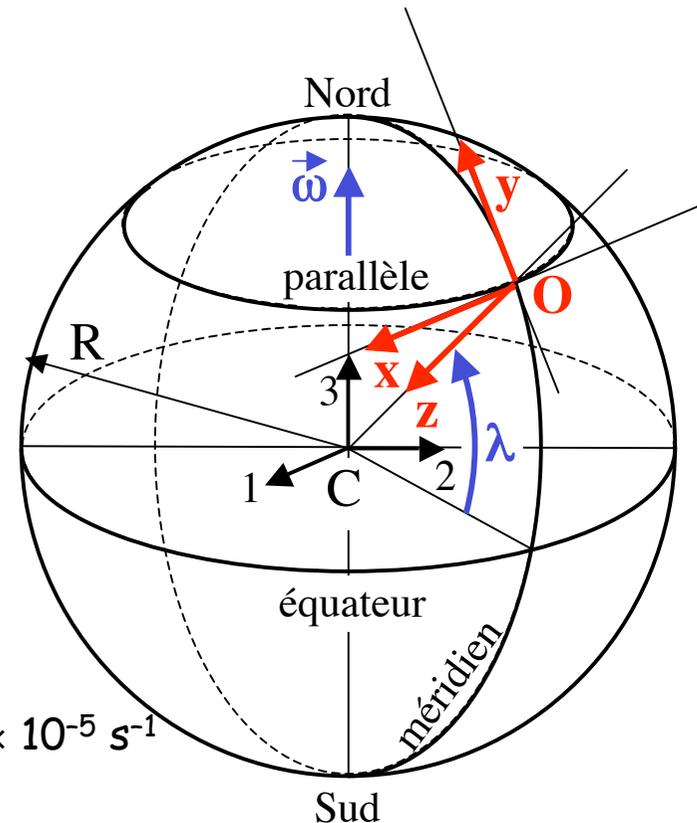


$$\begin{aligned}\vec{v}_P &= \vec{v}'_P + \vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \wedge \overline{O'P} \\ &= (\dot{\rho}\hat{e}'_1 + \dot{z}\hat{e}_3) + \dot{\phi}\hat{e}_3 \wedge (\rho\hat{e}'_1 + z\hat{e}_3) \\ &= \dot{\rho}\hat{e}_\rho + \rho\dot{\phi}\hat{e}_\phi + \dot{z}\hat{e}_z\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{a}_P &= \vec{a}'_P + 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}'_P + \vec{a}_{O'} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overline{O'P}) + \dot{\vec{\omega}} \wedge \overline{O'P} \\ &= (\ddot{\rho}\hat{e}'_1 + \ddot{z}\hat{e}_3) + 2\dot{\phi}\hat{e}_3 \wedge (\dot{\rho}\hat{e}'_1 + \dot{z}\hat{e}_3) + \dot{\phi}\hat{e}_3 \wedge (\dot{\phi}\hat{e}_3 \wedge (\rho\hat{e}'_1 + z\hat{e}_3)) + \ddot{\phi}\hat{e}_3 \wedge (\rho\hat{e}'_1 + z\hat{e}_3) \\ &= \ddot{\rho}\hat{e}_\rho + \ddot{z}\hat{e}_z + 2\dot{\phi}\dot{\rho}\hat{e}_\phi + \dot{\phi}\hat{e}_z \wedge \dot{\phi}\rho\hat{e}_\phi + \ddot{\phi}\rho\hat{e}_\phi \\ &= (\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2)\hat{e}_\rho + (\rho\ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi})\hat{e}_\phi + \ddot{z}\hat{e}_z\end{aligned}$$

Référentiel terrestre

- On considère la Terre comme un « référentiel relatif » en mouvement de rotation uniforme ω par rapport à un « référentiel absolu » défini par le centre de la Terre et trois étoiles fixes (on néglige le mouvement de la Terre autour du Soleil, ...)
- C = centre de la Terre
- O = point sur la Terre à la latitude λ
- **Repère $Oxyz$** lié à la Terre (référentiel terrestre)
 - Ox pointe vers l'ouest, Oy vers le nord, et Oz vers C
- **Repère $C123$** lié au référentiel absolu
 - $C3$ pointe vers le nord
- Valeurs numériques:
 - rayon $R = 6.37 \times 10^6$ m
 - vitesse angulaire $\omega = 2\pi / \text{jour} = 7.29 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$



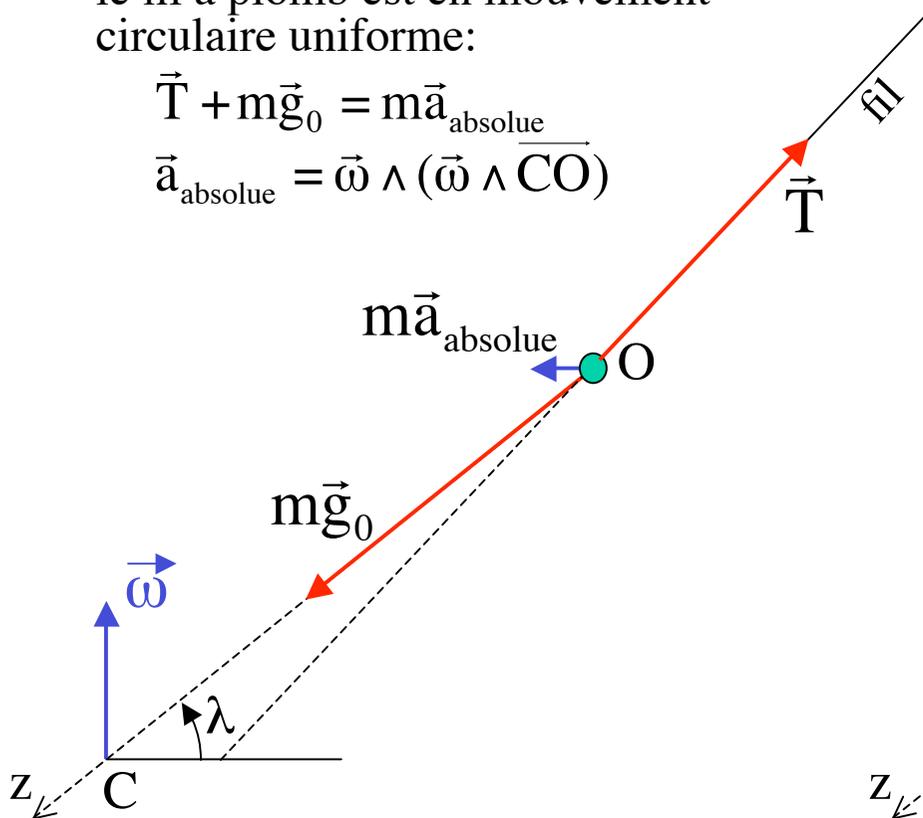
Champ de pesanteur terrestre (1)

- Fil à plomb installé au point O :
 - soumis à son « poids absolu » $m\vec{g}_0$ (dirigé selon Oz) et à la tension du fil \vec{T} (g_0 est le champ de gravitation dû à la masse de la Terre)

Dans le référentiel absolu, le fil à plomb est en mouvement circulaire uniforme:

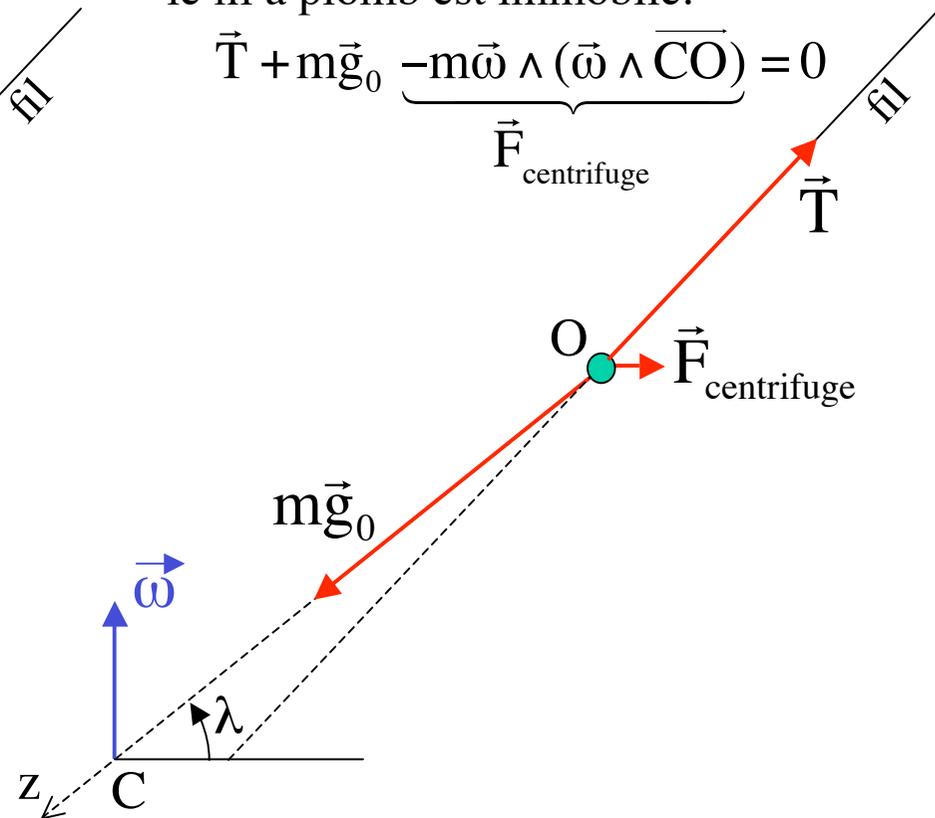
$$\vec{T} + m\vec{g}_0 = m\vec{a}_{\text{absolue}}$$

$$\vec{a}_{\text{absolue}} = \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overline{CO})$$



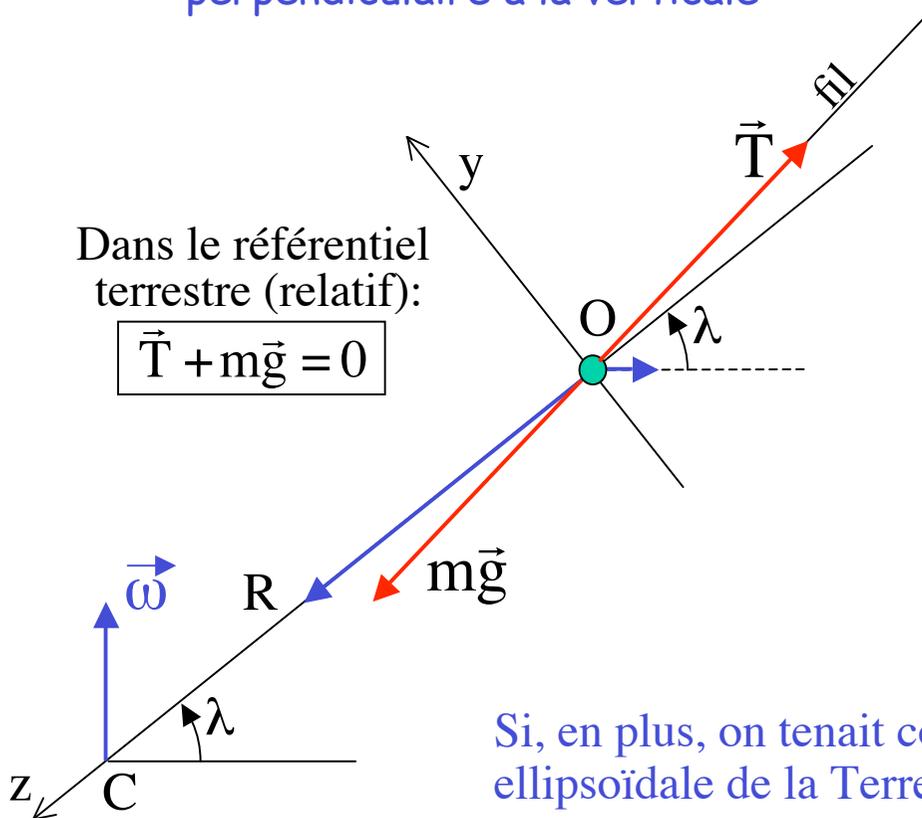
Dans le référentiel terrestre (relatif), le fil à plomb est immobile:

$$\vec{T} + m\vec{g}_0 - \underbrace{m\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overline{CO})}_{\vec{F}_{\text{centrifuge}}} = 0$$



Champ de pesanteur terrestre (2)

- On définit le « poids apparent » mg comme l'opposé de la tension du fil
- Ce poids apparent définit la verticale au point O :
 - La verticale ne passe pas par le centre de la Terre (sauf si O est aux pôles ou à l'équateur)
 - Un plan d'eau calme est toujours perpendiculaire à la verticale



Champ de pesanteur apparent:

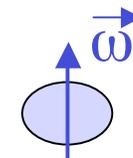
$$\vec{g} = \vec{g}_0 - \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overline{CO})$$

$$\varepsilon = \frac{\omega^2 R}{g_0} \approx \frac{(7.3 \cdot 10^{-5})^2 \cdot 6.4 \cdot 10^6}{9.8} \approx 0.0035$$

$$\begin{aligned} \vec{g} &= \vec{g}_0 - \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overline{CO}) \\ &= g_0 \hat{z} - (\omega^2 R \cos \lambda)(\cos \lambda \hat{z} + \sin \lambda \hat{y}) \\ &= g_0 [(1 - \varepsilon \cos^2 \lambda) \hat{z} - \varepsilon \cos \lambda \sin \lambda \hat{y}] \\ g &\approx g_0 (1 - \varepsilon \cos^2 \lambda) \approx g_{\text{éq}} (1 + \varepsilon \sin^2 \lambda) \end{aligned}$$

Si, en plus, on tenait compte de la légère déformation ellipsoïdale de la Terre due à la force centrifuge:

$$g \approx g_{\text{éq}} (1 + 0.0053 \sin^2 \lambda) \quad \text{avec } g_{\text{éq}} \approx 9.78 \text{ m/s}^2$$



Dynamique terrestre : chute libre (1)

- On se place dans le référentiel terrestre (repère $Oxyz$)
- Une masse m est lâchée au point O sans vitesse initiale
 - conditions initiales : $\vec{r} = 0$ et $\vec{v} = 0$ à $t = 0$
 - Approximation : on considère g constant
- Equation du mouvement :
$$\vec{m}\vec{a} = m\vec{g} - \underbrace{2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}}_{\text{Coriolis}}$$

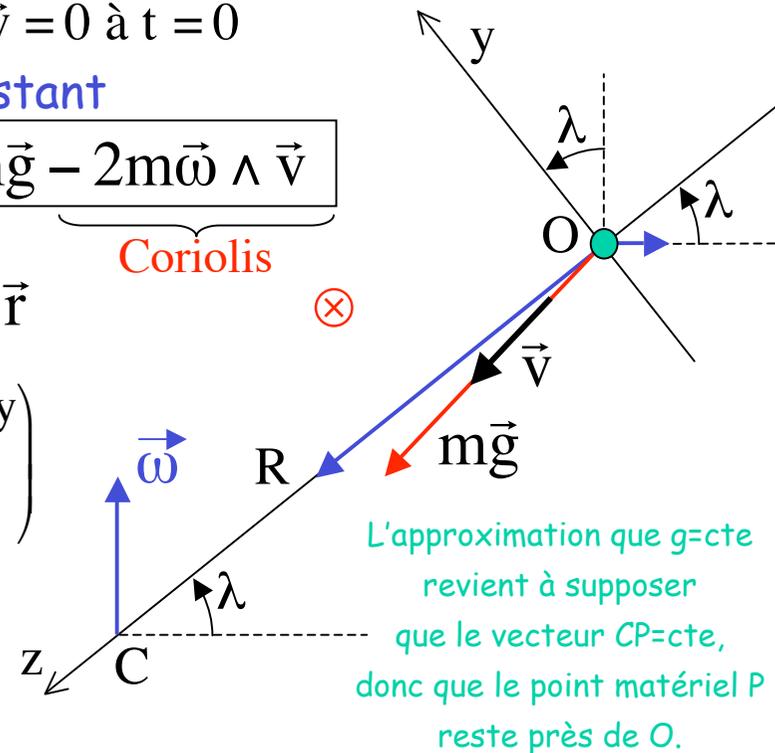
ou, par intégration : $\vec{v} = \vec{g}t - 2\vec{\omega} \wedge \vec{r}$

$$\vec{\omega} \wedge \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ \omega \cos\lambda \\ -\omega \sin\lambda \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega \cos\lambda z + \omega \sin\lambda y \\ -\omega \sin\lambda x \\ -\omega \cos\lambda x \end{pmatrix}$$

$$\vec{g} = g_0 \begin{pmatrix} 0 \\ -\varepsilon \cos\lambda \sin\lambda \\ 1 - \varepsilon \cos^2\lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = -2\omega \cos\lambda z - 2\omega \sin\lambda y \\ \dot{y} = -\varepsilon \cos\lambda \sin\lambda g_0 t + \underbrace{2\omega \sin\lambda x}_{\text{négligé}} \\ \dot{z} = (1 - \varepsilon \cos^2\lambda) g_0 t + \underbrace{2\omega \cos\lambda x}_{\text{négligé}} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x \cong -\omega \cos\lambda (1 - \varepsilon) \frac{1}{3} g_0 t^3 \\ y \cong -\varepsilon \cos\lambda \sin\lambda \frac{1}{2} g_0 t^2 \\ z \cong (1 - \varepsilon \cos^2\lambda) \frac{1}{2} g_0 t^2 \cong \frac{1}{2} g t^2 \quad z = h = (1/2) g t^2 \end{cases}$$



Dynamique terrestre : chute libre (2)

- Si la masse tombe d'une hauteur $z = h$:

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \Rightarrow \begin{cases} x \cong -\frac{2}{3} \omega \cos\lambda (1 - \varepsilon) h \sqrt{\frac{2h}{g}} \cong -\frac{2}{3} \cos\lambda h \sqrt{\frac{2\varepsilon h}{R}} \\ y \cong -\varepsilon \cos\lambda \sin\lambda h \\ z \cong h \end{cases}$$

- Déviations de la trajectoire par rapport à la direction Oz :
 - Selon x (direction est-ouest), à cause de la **force de Coriolis** :

- **vers l'est** : $x < 0$ quel que soit λ

- Selon y (direction sud-nord), à cause de la **force centrifuge** :

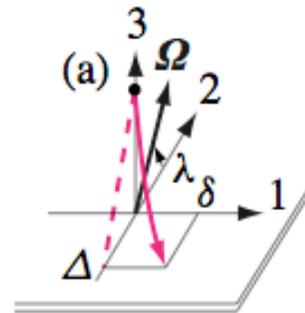
- **vers le sud** dans l'hémisphère nord : $y < 0$ si $\lambda > 0$
 - **vers le nord** dans l'hémisphère sud : $y > 0$ si $\lambda < 0$
- } Cette déviation correspond à celle du fil à plomb, c-à-d la masse tombe verticalement dans le plan Oyz

- Exemple :

- $h = 100$ m et $\lambda = 46.5^\circ$ (Lausanne) $\Rightarrow x \approx -1.5$ cm et $y \approx -17.5$ cm

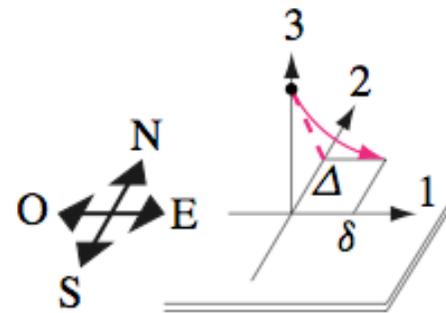
Dynamique terrestre : résumé

Dans l'hémisphère nord
déviaton
vers l'est et le sud



(a)

Dans l'hémisphère sud
déviaton
vers l'est et le nord



(b)

(a) Hémisphère Nord ; (b) hémisphère Sud.

Dynamique terrestre : mvt horizontal

- Mouvement dans un plan ~ horizontal ($\dot{z} \approx 0, \ddot{z} \approx 0$), maintenu par une force de liaison T verticale :

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T} - \underbrace{2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}}_{\text{Coriolis}}$$

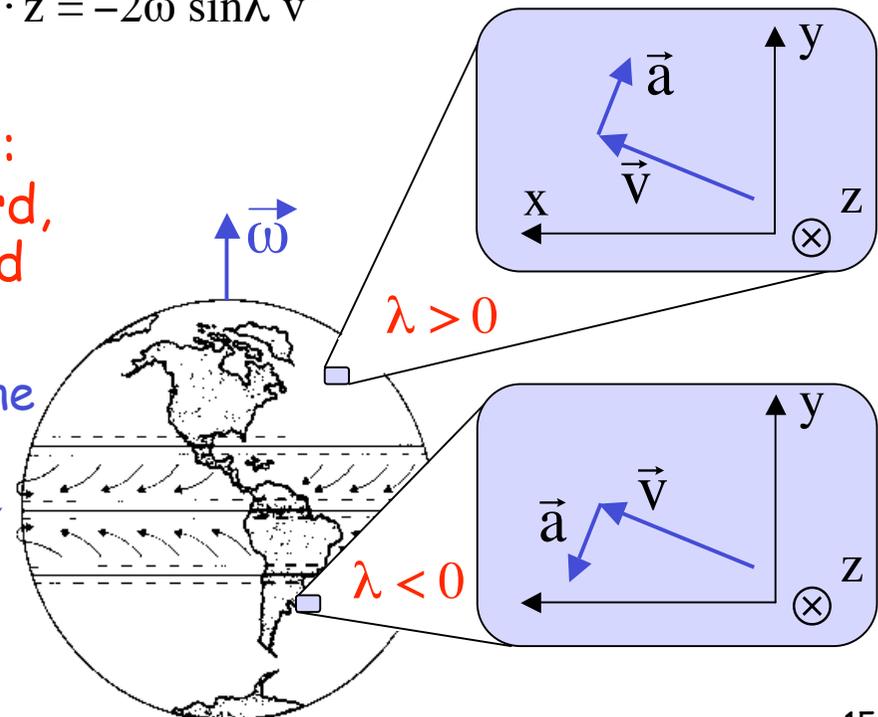
$$\vec{a} = \vec{g} + \frac{\vec{T}}{m} - 2\vec{\omega} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ g + T/m \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 0 \\ \omega \cos\lambda \\ -\omega \sin\lambda \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\omega \sin\lambda \dot{y} \\ 2\omega \sin\lambda \dot{x} \\ g + T/m + 2\omega \cos\lambda \dot{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{v} = 0 \text{ et } (\vec{a} \wedge \vec{v}) \cdot \hat{z} = \left(\begin{pmatrix} -2\omega \sin\lambda \dot{y} \\ 2\omega \sin\lambda \dot{x} \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ 0 \end{pmatrix} \right) \cdot \hat{z} = -2\omega \sin\lambda v^2$$

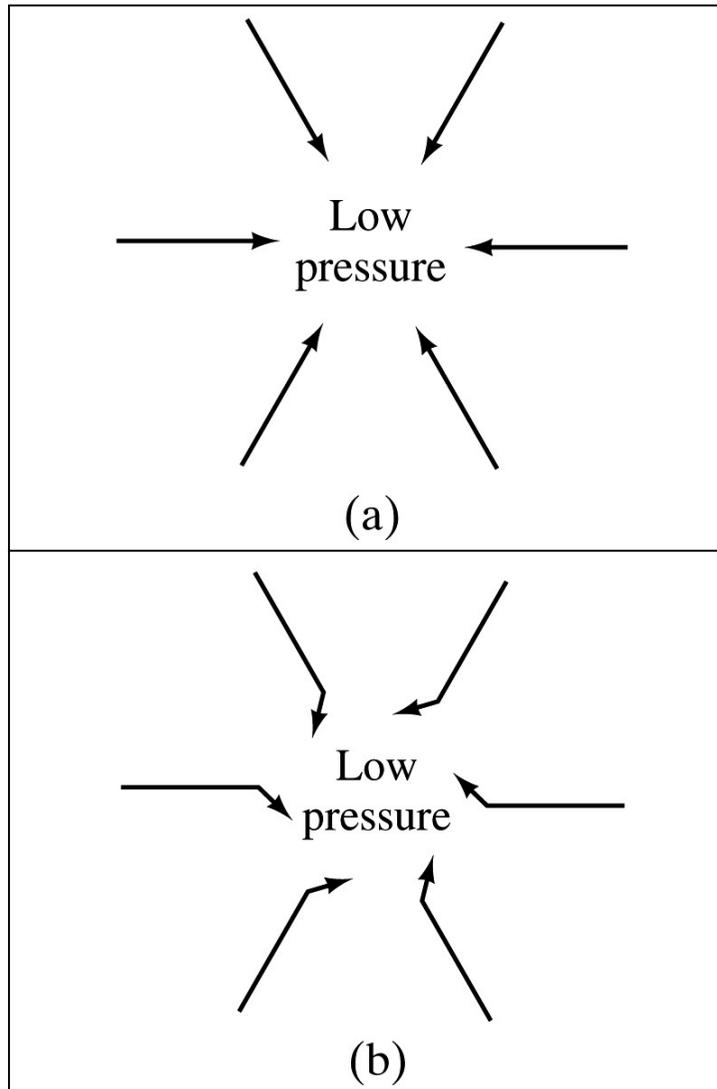
- Déviations dues à la force de Coriolis :
 vers la droite dans l'hémisphère nord,
 vers la gauche dans l'hémisphère sud

- Exemples :

- Tourbillonnement dans un cyclone
- Erosion des berges d'un fleuve
- Vents alizés
- Pendule de Foucault



Dynamique terrestre : mvt horizontal



mvt des masses d'air vers
une zone de basse pression atm.
à la surface de la Terre
sans rotation terrestre

mvt des masses d'air vers
une zone de basse pression atm.
à la surface de la Terre
avec rotation terrestre :
les vents sont déviés
par la force de Coriolis :
vers la droite (hémisphère nord)
vers la gauche (hémisphère sud)

Dynamique terrestre : mvt horizontal



Fig. 15.13 Formation d'un cyclone : (a) il tourne en sens contraire des aiguilles d'une montre dans l'hémisphère Nord ; (b) le cyclone tourne dans le sens opposé dans l'hémisphère Sud.

Si l'on considère un point matériel astreint à se déplacer dans un plan horizontal, la **force de Coriolis** est **dirigée vers la droite par rapport à la direction du mvt dans l'hémisphère Nord** et elle est **dirigée vers la gauche dans l'hémisphère Sud**. C'est cette force de Coriolis qui est responsable de l'érosion de la berge des grands fleuves, de la déviation des courants atmosphériques et du mvt de tourbillon des cyclones.

Démos : Pendule de Foucault
(modèle) # 456
(réel) # 721

Pendule de Foucault

masse $m = 28 \text{ kg}$
longueur $L = 67 \text{ m}$
période = 16.5 s
amplitude max. = 6 m

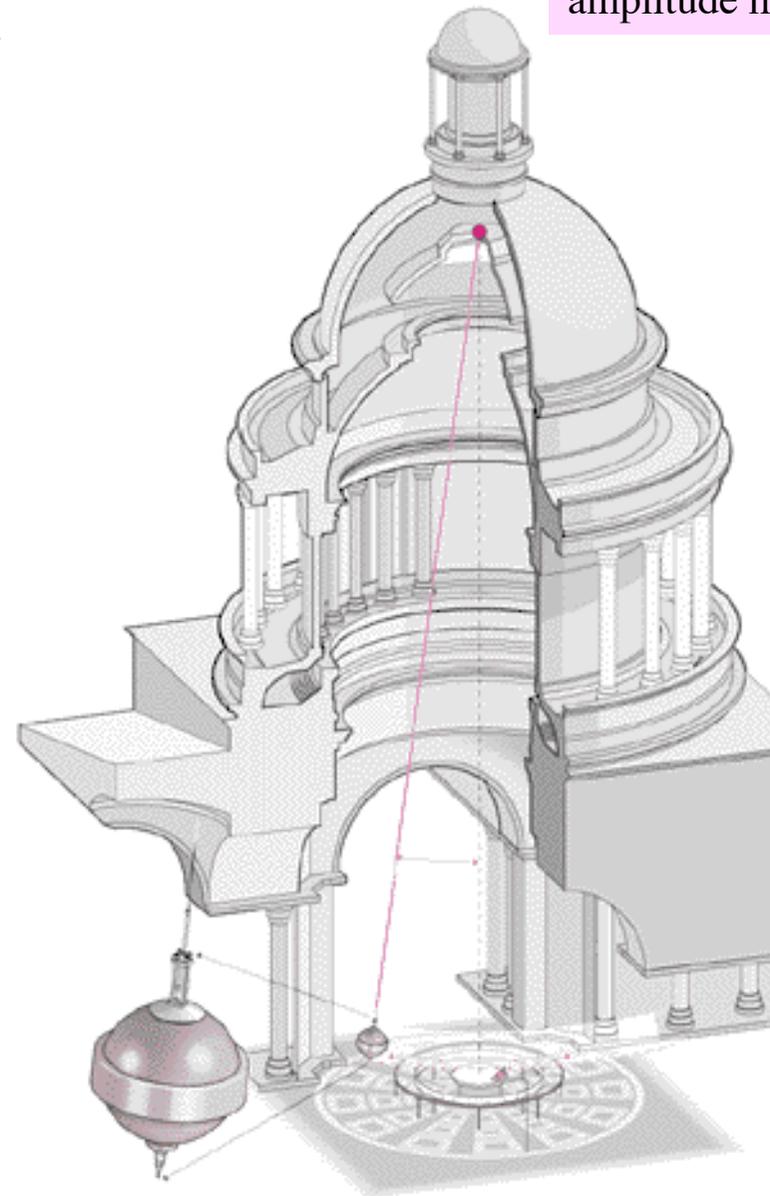
Louis Napoléon Bonaparte ayant eu connaissance des travaux de Foucault lui demande de réaliser son expérience dans un lieu prestigieux, ce sera le **Panthéon**. L'expérience eut lieu le **31 mars 1851**.



Léon Foucault
(1819-1868)

La sphère pesait **28 kg** et le fil **67 m** de long.
La période du pendule
(aller et retour) était de **16.5 secondes**,
l'amplitude maximale de **6 mètres**
et le temps d'amortissement de **6 heures**.

On pouvait ainsi observer un déplacement de plusieurs millimètres par aller et retour du pendule.



Pendule de Foucault

- La **démonstration expérimentale** du **mvt de rotation de la Terre** fut réalisée par **Foucault** en **1851** au moyen d'une pendule de **67 m** de long suspendu sous la coupole du Panthéon à Paris.

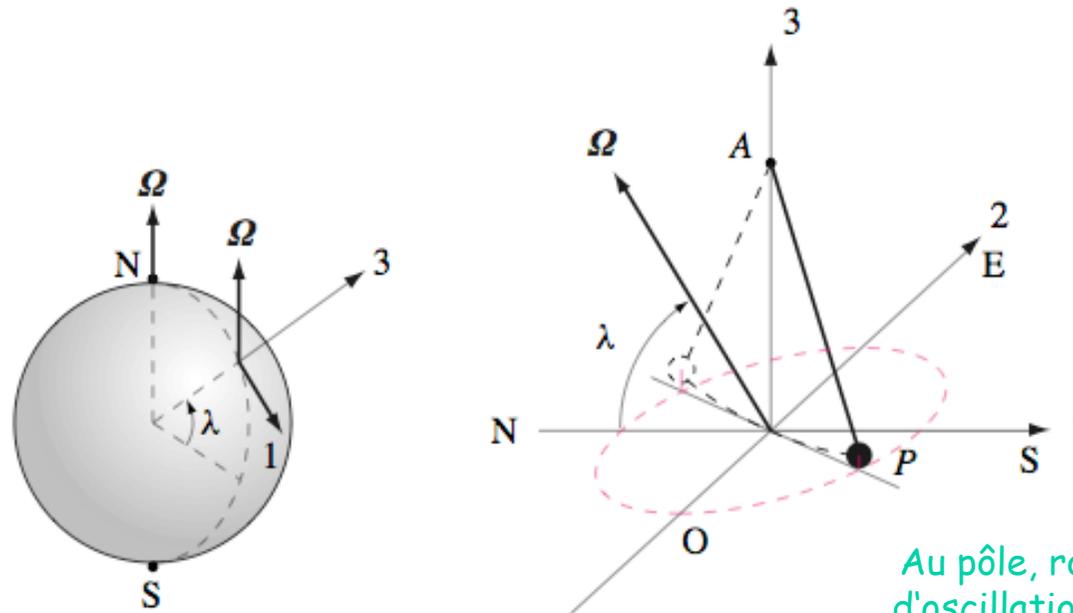


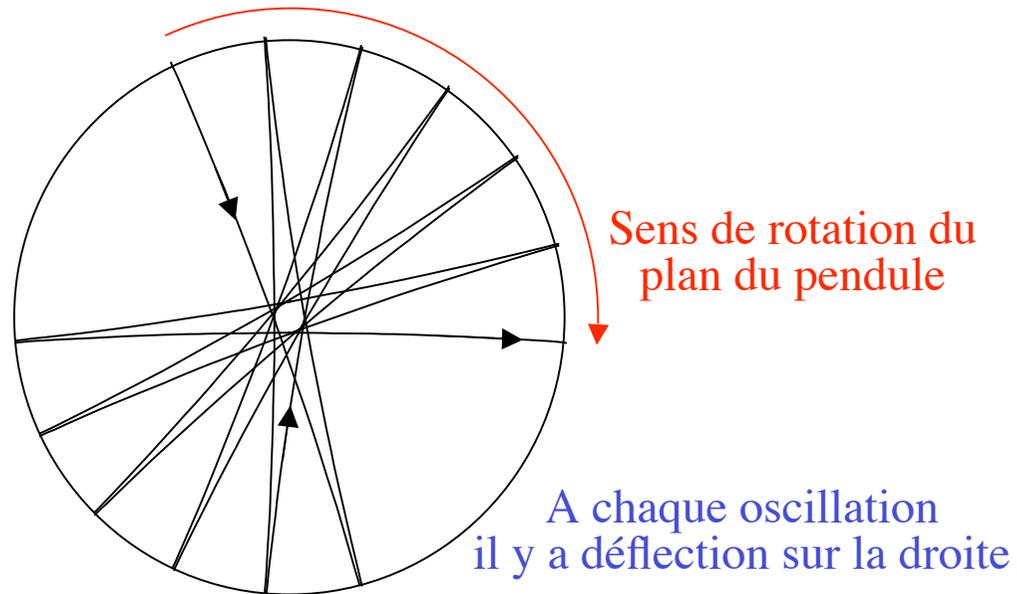
Fig. 15.11 Pendule de Foucault.

Au pôle, rotation du plan d'oscillation en 24 heures.
Pas de rotation à l'équateur.

La vitesse de rotation du plan d'oscillation est donc $-\omega \sin \lambda$, soit une rotation d'un angle $360^\circ \sin \lambda$ en un jour ou de $15^\circ \sin \lambda$ en une heure. A la latitude de Lausanne ($\lambda = 46.5^\circ$), le plan d'oscillation tourne de 11° par heure.

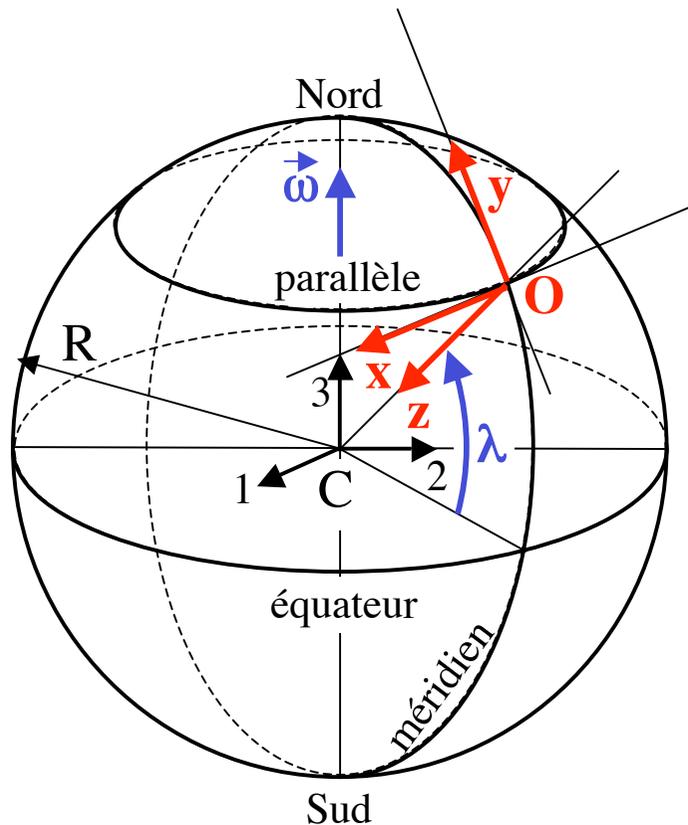
Pendule de Foucault

Trajectoire
vue de dessus



Pendule de Foucault

Référentiel terrestre avec repère lié à la Terre



Pendule de Foucault (2)

Pendule suspendu à l'origine du repère terrestre $Oxyz$, muni des coordonnées sphériques r, θ, ϕ :

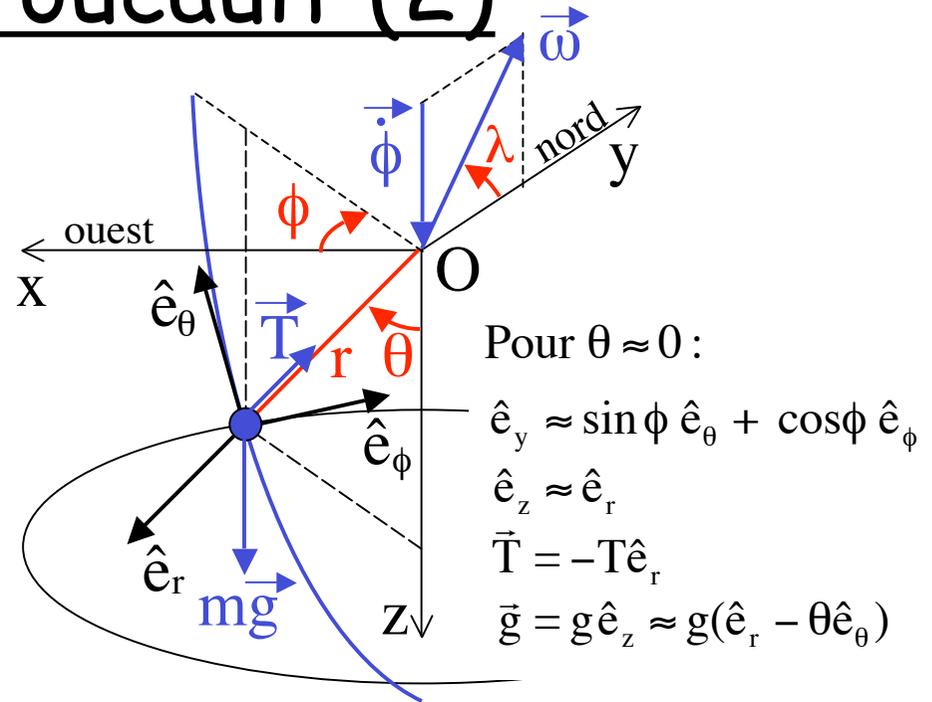
- On néglige le terme centripète (ou on redéfinit z selon la verticale)
- θ très petit $\rightarrow \sin\theta \approx 0$ et $\cos\theta \approx 1$
- Contraintes : $r = L, \dot{r} = 0, \ddot{r} = 0, \ddot{\phi} = 0$

$$\vec{v} = \dot{r} \hat{e}_r + r\dot{\theta} \hat{e}_\theta + r\dot{\phi} \sin\theta \hat{e}_\phi \approx L\dot{\theta} \hat{e}_\theta$$

$$\begin{aligned} \vec{a} = & (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2 \sin^2\theta) \hat{e}_r \\ & + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2 \sin\theta \cos\theta) \hat{e}_\theta \\ & + (r\ddot{\phi} \sin\theta + 2\dot{r}\dot{\phi} \sin\theta + 2r\dot{\phi}\dot{\theta} \cos\theta) \hat{e}_\phi \\ \approx & -L\dot{\theta}^2 \hat{e}_r + L\ddot{\theta} \hat{e}_\theta + 2L\dot{\phi}\dot{\theta} \hat{e}_\phi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{\omega} = & \omega \cos\lambda \hat{y} - \omega \sin\lambda \hat{z} \\ \approx & \omega \cos\lambda (\sin\phi \hat{e}_\theta + \cos\phi \hat{e}_\phi) - \omega \sin\lambda \hat{e}_r \end{aligned}$$

$$\vec{\omega} \wedge \vec{v} \approx -\omega L\dot{\theta} (\sin\lambda \hat{e}_\phi + \cos\lambda \cos\phi \hat{e}_r)$$



Pour $\theta \approx 0$:

$$\hat{e}_y \approx \sin\phi \hat{e}_\theta + \cos\phi \hat{e}_\phi$$

$$\hat{e}_z \approx \hat{e}_r$$

$$\vec{T} = -T\hat{e}_r$$

$$\vec{g} = g\hat{e}_z \approx g(\hat{e}_r - \theta\hat{e}_\theta)$$

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T} - 2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}$$

$$\hat{e}_r : -mL\dot{\theta}^2 = mg - T + 2m\omega L\dot{\theta} \cos\lambda \cos\phi$$

$$\hat{e}_\theta : mL\ddot{\theta} = -mg\theta \Rightarrow \ddot{\theta} = -(g/L)\theta$$

$$\hat{e}_\phi : m2L\dot{\phi}\dot{\theta} = 2m\omega L\dot{\theta} \sin\lambda \Rightarrow \dot{\phi} = \omega \sin\lambda$$

$$\text{Période} = \frac{2\pi}{\dot{\phi}} = \frac{2\pi}{\omega \sin\lambda} = \frac{24 \text{ h}}{\sin\lambda} = 33 \text{ h à Lausanne} \quad (\sim 11^\circ/\text{h})$$