Cours de Physique Générale I, Prof. Georges Meylan — EPFL

Section de math 1ère année — Série No 1 – 27.10.2006

Mécanique générale

Énoncé des exercices

Problème 1 :

On mesure 20 fois la longueur L d'un pendule et on obtient les résultats suivants (exprimés en mètres) :

1.500 1.502 1.503 1.502 1.504 1.502 1.502 1.501 1.499 1.501
1.502 1.503 1.502 1.501 1.504 1.502 1.501 1.502 1.504 1.501

1. Dessiner l'histogramme des résultats. Indication : construire l'histogramme normalisé, c'est-à-dire où les "barres" sont divisées par le nombre total, de sorte que l'intégrale de l'histogramme vaut 1.
2. Calculer la moyenne $< L >$ et l'écart quadratique moyen ΔL. Estimer la distribution de probabilité de la longueur.
3. En admettant que la période T des oscillations du pendule est reliée à sa longueur par la formule $T = 2\pi\sqrt{L/g}$ (avec $g = 9.81\ \mathrm{m\,s^{-2}}$), évaluer la moyenne $< T >$ et l'écart quadratique moyen ΔT de la période du pendule.

Problème 2 :

En utilisant la relation d'incertitude

$$\Delta x \cdot \Delta v \geq \frac{\hbar}{2m}$$

(on considère le problème à une dimension) avec

$$\hbar \simeq 1.0546 \cdot 10^{-34}\ J\,s; \qquad m_p \simeq 1.673 \cdot 10^{-27}\ kg; \qquad m(^1H) \simeq 1.674 \cdot 10^{-27}\ kg$$

1. évaluer l'incertitude minimale Δv sur la mesure de la vitesse d'un proton dont la position est connue avec une incertitude Δx de 1 fermi ($= 10^{-15}$ m) ;
2. même question pour un atome d'hydrogène dont la position est localisée avec une incertitude de 1 Ångström ($= 10^{-10}$ m) ;
3. même question pour une cellule ($m \simeq 10^{-12}$ kg) dont la position est estimée avec une incertitude de 1 micron ($= 10^{-6}$ m).

Problème 3 :

1. La durée de vie d'un π^0 immobile est $\tau = 0.87 \cdot 10^{-16}$ s. Quelle sera la distance parcourue par un π^0 de vitesse $v = 0.9999 \cdot c$, si l'on admet l'hypothèse de Newton de temps absolu ?
2. La théorie d'Einstein prédit que la durée de vie d'un π^0 de vitesse v est $\tau/\sqrt{1 - v^2/c^2}$. Quelle sera la durée de vie du π^0 (de vitesse $v = 0.9999\,c$) et quelle sera la distance parcourue, si l'on admet la théorie d'Einstein ?

Problème 4 :

1. Vérifier que l'évolution temporelle définie sur l'espace de phase $\mathbb{R}^6$, associé aux variables
$$(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = (x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3)$$
par la transformation
$$\Phi_t : \begin{pmatrix} \mathbf{x}^{(0)} \\ \mathbf{p}^{(0)} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \mathbf{x}(t) = & \mathbf{x}^{(0)} + \frac{1}{m}\mathbf{p}^{(0)}t + \frac{1}{2}\mathbf{g}\, t^2 \\ \mathbf{p}(t) = & \mathbf{p}^{(0)} + m\, \mathbf{g}\, t \end{pmatrix}$$
où m et $\mathbf{g}$ sont des constantes, satisfait les propriétés de groupe :
$$1)\ \ \Phi_{t=0} = \mathbb{1} \qquad ; \qquad 2)\ \ \Phi_{t_2} \circ \Phi_{t_1} = \Phi_{t_2+t_1}\, .$$

2. Trouver le système d'équations différentielles du type
$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} = f_n(t, x_1, \ldots, x_n) \end{cases}$$
associé à cette évolution, qui décrit la chute libre d'un corps à la surface de la Terre.

Problème 5 :

Même problème que ci-dessus, mais pour l'évolution temporelle définie par la transformation
$$\Phi_t : \begin{pmatrix} \mathbf{x}^{(0)} \\ \mathbf{p}^{(0)} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \mathbf{x}(t) = & \mathbf{x}^{(0)} \cos\omega t + \frac{\mathbf{p}^{(0)}}{m\omega} \sin\omega t \\ \mathbf{p}(t) = & -m\,\omega\, \mathbf{x}^{(0)} \sin\omega t + \mathbf{p}^{(0)} \cos\omega t \end{pmatrix}$$
où m et ω sont des constantes (c'est un mouvement d'oscillateur harmonique).

Mécanique générale

Corrigé des exercices

Problème 1 :

1. L'histogramme normalisé se présente comme suit :

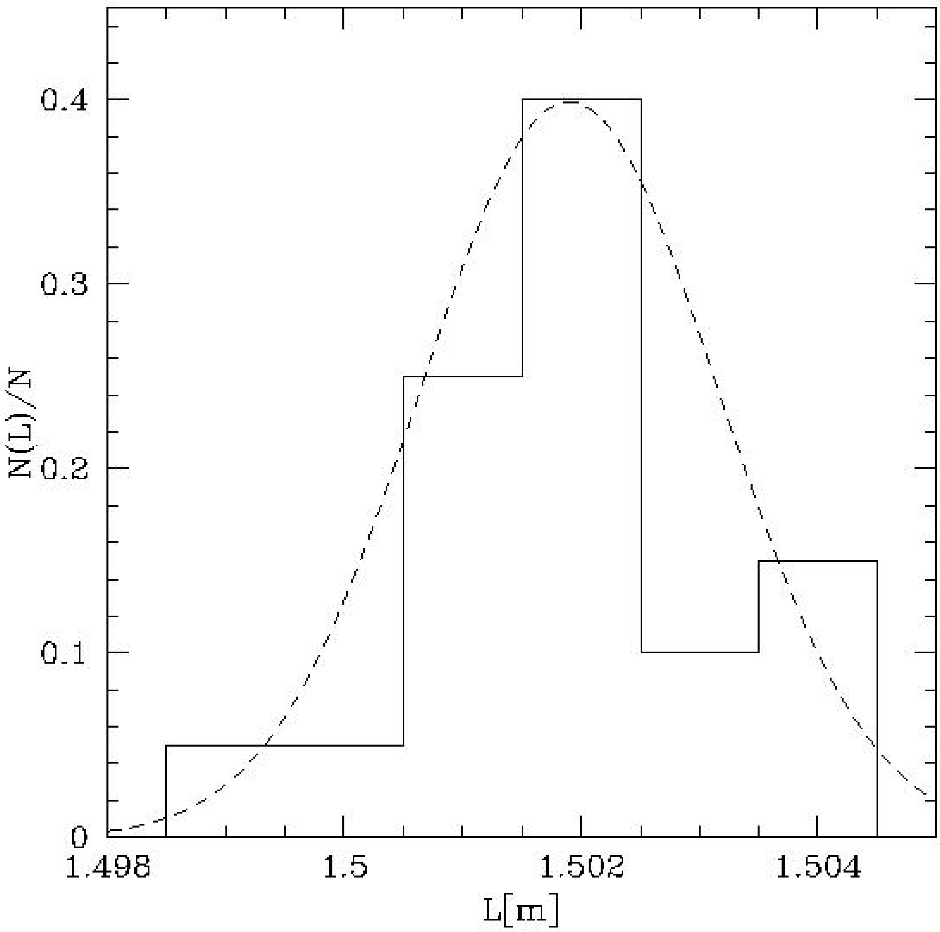


Fig. 1 – Histogramme normalisé des résultats. La gaussienne, au σ de laquelle on a attribué la valeur de l'écart quadratique moyen (voir ci-dessous), représente la forme vers laquelle tendrait l'histogramme pour un nombre de mesures qui tendrait vers l'infini.

2. Les formules 1.3 et 1.8 du livre *Mécanique générale* peuvent s'écrire respectivement :

$$
\begin{aligned}
< L > &= \frac{1}{N} \sum_{i=1,n}^{N} \ell_i \\
\Delta L &= \sqrt{< (L - < L >)^2 >} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1,n}^{N} (\ell_i - < L >)^2} = \sqrt{< L^2 > - < L >^2}
\end{aligned}
$$

   On trouve une moyenne $< L >= 1.5019$ m et un écart quadratique moyen $\Delta L = 0.0013$ m.
   Notons que, comme $\Delta L << < L >$, on peut considérer la fonction racine comme localement linéaire, et on peut se permettre, en pratique ici (mais pas nécessairement dans n'importe quel cas !), de poser

$$
\begin{aligned}
< \sqrt{L} > &\simeq \sqrt{< L >} \\
\left\langle \frac{1}{\sqrt{L}} \right\rangle &\simeq \frac{1}{\sqrt{< L >}}
\end{aligned}
$$

   La distribution de probabilité de la longueur est donnée approximativement par l'histogramme normalisé ; idéalement, c'est-à-dire si le nombre de mesures tendait vers l'infini, elle serait donnée par une gaussienne centrée en $< L >$ et de $\sigma = \Delta L$ (il n'est pas question de démontrer cela ici).

3. $$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \quad \Rightarrow \quad < T >= 2\pi \frac{< \sqrt{L} >}{\sqrt{g}} = 2.458 \text{ s}$$

   Pour estimer ΔT, on différencie la fonction $T(L)$, chose que l'on peut se permettre à cause de la petitesse de l'erreur relative :

$$\Delta T = \frac{\pi}{\sqrt{g}} \frac{\Delta L}{< \sqrt{L} >} = 0.001 \text{ s}$$

<u>Problème 2</u> :

1. Si $\Delta x = 1$ fm $= 10^{-15}$ m, alors

$$\Delta v = \frac{\hbar}{2\, m_p\, \Delta x} = 3.17 \cdot 10^7 \text{ m s}^{-1} = 31700 \text{ km s}^{-1}$$

2. Même relation, mais avec m_H au lieu de m_p ; on obtient

$$\Delta v = 300 \text{ m s}^{-1} = 0.3 \text{ km s}^{-1}$$

3. Le calcul donne

$$\Delta v = 5.3 \cdot 10^{-17} \text{ m s}^{-1}$$

   .

Problème 3 :

1. Avec $c \simeq 299800$ km s^{-1}, on aura une distance
$d = \tau \cdot 0.9999 \cdot c = 2.61 \cdot 10^{-11}$ km $= 2.61 \cdot 10^{-8}$ m $= 26.1$ nm
2. $\tau(v) = \tau \cdot \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} = 6.15 \cdot 10^{-15}$ s.

$$\Rightarrow \quad d = \tau(v) \cdot 0.9999 \cdot c = 1.84 \cdot 10^{-9} \text{ km} = 1840 \text{ nm}$$

Problème 4 :

1. Rappelons en premier lieu que la force $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$ et que l'impulsion $\mathbf{p} = m\,\mathbf{v}$. La première propriété de groupe est triviale :

$$\Phi_{t=0} : \begin{pmatrix} \mathbf{x}^{(0)} \\ \mathbf{p}^{(0)} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \mathbf{x}(t) = & \mathbf{x}^{(0)} \\ \mathbf{p}(t) = & \mathbf{p}^{(0)} \end{pmatrix}$$

On voit que pour $t = 0$, on a bien : $\Phi_{t=0} = \mathbb{1}$
Vérifions la deuxième propriété de groupe. Pour cela, écrivons successivement les transformations Φ_{t_1} et Φ_{t_2} :

$$\Phi_{t_1} : \begin{pmatrix} \mathbf{x}^{(0)} \\ \mathbf{p}^{(0)} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \mathbf{x}(t_1) = & \mathbf{x}^{(0)} + \frac{1}{m}\mathbf{p}^{(0)} t_1 + \frac{1}{2}\mathbf{g}\, t_1^2 \\ \mathbf{p}(t_1) = & \mathbf{p}^{(0)} + m\,\mathbf{g}\, t_1 \end{pmatrix}$$

$$\Phi_{t_2} : \begin{pmatrix} \mathbf{x}(t_1) \\ \mathbf{p}(t_1) \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \mathbf{x}(t_2) = & \mathbf{x}(t_1) + \frac{1}{m}\mathbf{p}(t_1) t_2 + \frac{1}{2}\mathbf{g}\, t_2^2 \\ \mathbf{p}(t_2) = & \mathbf{p}(t_1) + m\,\mathbf{g}\, t_2 \end{pmatrix}$$

Notons que ces deux équations sont de la forme bien connue

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \frac{1}{2}\mathbf{a}\, t^2 + \mathbf{v}_0\, t + \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{v}(t) &= \mathbf{a}\, t + \mathbf{v}_0 \end{aligned}$$

La combinaison des deux opérateurs donne donc, par substitution des vecteurs $\mathbf{x}(t_1)$ et $\mathbf{p}(t_1)$:

$$\Phi_{t_2} \circ \Phi_{t_1} : \begin{pmatrix} \mathbf{x}^{(0)} \\ \mathbf{p}^{(0)} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \mathbf{x}(t_2, t_1) = & \mathbf{x}^{(0)} + \frac{1}{m}\mathbf{p}^{(0)} t_1 + \frac{1}{2}\mathbf{g}\, t_1^2 + \frac{1}{m}(\mathbf{p}^{(0)} + m\,\mathbf{g}\, t_1)\, t_2 + \frac{1}{2}\mathbf{g}\, t_2^2 \\ \mathbf{p}(t_2, t_1) = & \mathbf{p}^{(0)} + m\,\mathbf{g}\, t_1 + m\,\mathbf{g}\, t_2 \end{pmatrix}$$

En regroupant les termes, on a bien :

$$\Phi_{t_2} \circ \Phi_{t_1} \begin{pmatrix} \mathbf{x}^{(0)} \\ \mathbf{p}^{(0)} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \mathbf{x}(t_2, t_1) = \mathbf{x}(t_2 + t_1) = & \mathbf{x}^{(0)} + \frac{1}{m}\mathbf{p}^{(0)}(t_1 + t_2) + \frac{1}{2}\mathbf{g}\,(t_1 + t_2)^2 \\ \mathbf{p}(t_2, t_1) = \mathbf{p}(t_2 + t_1) = & \mathbf{p}^{(0)} + m\,\mathbf{g}\,(t_1 + t_2) \end{pmatrix}$$

On a donc vérifié que $\Phi_{t_2} \circ \Phi_{t_1} = \Phi_{t_2 + t_1}$.

2. En dérivant les deux équations qui définissent Φ_t, on obtient immédiatement :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}(t) &= \frac{\mathbf{p}^{(0)}}{m} + \mathbf{g} \cdot t = \mathbf{v}^{(0)} + \mathbf{g} \cdot t \\ \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t}(t) &= m \cdot \mathbf{g} \end{aligned}$$

Problème 5 :

1. Opérons de la même façon que pour l'exercice précédent :

$$\Phi_t : \begin{pmatrix} \mathbf{x}^{(0)} \\ \mathbf{p}^{(0)} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \mathbf{x}(t) = & \mathbf{x}^{(0)}\,\cos\omega t + \frac{\mathbf{p}^{(0)}}{m\omega}\,\sin\omega t \\ \mathbf{p}(t) = & -m\,\omega\,\mathbf{x}^{(0)}\sin\omega t + \mathbf{p}^{(0)}\,\cos\omega t \end{pmatrix}$$

On voit qu'ici aussi, pour $t=0$, on a bien :

$$\Phi_{t=0} = \mathbb{1}$$

puisque les termes en sinus s'annulent. Vérifions la propriété de groupe $\Phi_{t_2} \circ \Phi_{t_1}$ comme auparavant :

$$\Phi_{t_1} : \begin{pmatrix} \mathbf{x}^{(0)} \\ \mathbf{p}^{(0)} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \mathbf{x}(t_1) = & \mathbf{x}^{(0)}\,\cos\omega t_1 + \frac{\mathbf{p}^{(0)}}{m\omega}\,\sin\omega t_1 \\ \mathbf{p}(t_1) = & -m\,\omega\,\mathbf{x}^{(0)}\sin\omega t_1 + \mathbf{p}^{(0)}\,\cos\omega t_1 \end{pmatrix}$$

$$\Phi_{t_2} : \begin{pmatrix} \mathbf{x}(t_1) \\ \mathbf{p}(t_1) \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \mathbf{x}(t_2) = & \mathbf{x}(t_1)\,\cos\omega t_2 + \frac{\mathbf{p}(t_1)}{m\omega}\,\sin\omega t_2 \\ \mathbf{p}(t_2) = & -m\,\omega\,\mathbf{x}(t_1)\sin\omega t_2 + \mathbf{p}(t_1)\,\cos\omega t_2 \end{pmatrix}$$

La combinaison des deux opérateurs donne donc :

$$\Phi_{t_2}\circ\Phi_{t_1} : \begin{pmatrix} \mathbf{x}^{(0)} \\ \mathbf{p}^{(0)} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \mathbf{x}(t_2,t_1) = & \left(\mathbf{x}^{(0)}\,\cos\omega t_1 + \frac{\mathbf{p}^{(0)}}{m\omega}\,\sin\omega t_1\right)\,\cos\omega t_2 \\ & + \frac{1}{m\,\omega}\,\left(-m\,\omega\,\mathbf{x}^{(0)}\sin\omega t_1 + \mathbf{p}^{(0)}\,\cos\omega t_1\right)\,\sin\omega t_2 \\ \mathbf{p}(t_2,t_1) = & -m\,\omega\,\left(\mathbf{x}^{(0)}\,\cos\omega t_1 + \frac{\mathbf{p}^{(0)}}{m\,\omega}\,\sin\omega t_1\right)\,\sin\omega t_2 \\ & + \left(-m\,\omega\,\mathbf{x}^{(0)}\sin\omega t_1 + \mathbf{p}^{(0)}\,\cos\omega t_1\right)\,\cos\omega t_2 \end{pmatrix}$$

En regroupant les termes, la paire d'équations devient :

$$\Phi_{t_2}\circ\Phi_{t_1} : \begin{pmatrix} \mathbf{x}^{(0)} \\ \mathbf{p}^{(0)} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \mathbf{x}(t_2,t_1) = & \mathbf{x}^{(0)}\,\left(\cos\omega t_1\cos\omega t_2 - \sin\omega t_1\sin\omega t_2\right) \\ & + \frac{\mathbf{p}^{(0)}}{m\,\omega}\,\left(\sin\omega t_1\cos\omega t_2 + \cos\omega t_1\sin\omega t_2\right) \\ \mathbf{p}(t_2,t_1) = & -m\,\omega\,\mathbf{x}^{(0)}\,\left(\cos\omega t_1\sin\omega t_2 + \sin\omega t_1\cos\omega t_2\right) \\ & + \mathbf{p}^{(0)}\,\left(\cos\omega t_1\cos\omega t_2 - \sin\omega t_1\sin\omega t_2\right) \end{pmatrix}$$

En utilisant des relations trigonométriques, on trouve finalement :

$$\Phi_{t_2}\circ\Phi_{t_1} : \begin{pmatrix} \mathbf{x}^{(0)} \\ \mathbf{p}^{(0)} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \mathbf{x}(t_2+t_1) = & \mathbf{x}^{(0)}\,\cos\left[\omega\,(t_1+t_2)\right] + \frac{\mathbf{p}^{(0)}}{m\,\omega}\,\sin\left[\omega\,(t_1+t_2)\right] \\ \mathbf{p}(t_2+t_1) = & -m\,\omega\,\mathbf{x}^{(0)}\,\sin\left[\omega\,(t_1+t_2)\right] + \mathbf{p}^{(0)}\,\cos\left[\omega\,(t_1+t_2)\right] \end{pmatrix}$$

et l'on retrouve bien $\Phi_{t_2+t_1}$.

2. Dérivons les deux équations par rapport au temps :

$$\begin{aligned} \frac{\partial\mathbf{x}}{\partial t}(t) &= -\omega\,\mathbf{x}^{(0)}\,\sin\omega t + \frac{\mathbf{p}^{(0)}}{m}\,\cos\omega t \\ \frac{\partial\mathbf{p}}{\partial t}(t) &= -m\,\omega^2\,\mathbf{x}^{(0)}\,\cos\omega t - \omega\,\mathbf{p}^{(0)}\,\sin\omega t \end{aligned}$$

Il s'agit ici d'un mouvement d'oscillateur harmonique.

Mécanique générale

Énoncé des exercices

Problème 1 :

Soient $(t, x_i, v_i, a_i, f_i, g)$ les valeurs numériques des grandeurs temps T, espace X_i, vitesse V_i, accélération A_i, force F_i et constante de la gravitation G dans le système d'unités SI.

1. Quelles sont les valeurs numériques $(t', x_i', v_i', a_i', f_i', g')$ de ces grandeurs relativement au système d'unités défini par
$$[L]' = \text{cm}, \qquad [T]' = \text{ms}, \qquad [M]' = \text{kg}$$
2. On effectue le changement d'état défini par la transformation
$$(t, x_i, v_i) \mapsto \left(\tilde{t} = 10^3\, t, \tilde{x}_i = 10^2\, x_i, \tilde{v}_i = 10^{-1}\, v_i\right)$$
Trouver les valeurs numériques $\left(\tilde{a}_i, \tilde{f}_i, \tilde{g}\right)$ de ces grandeurs dans le nouvel état.
3. Comparer les résultats obtenus lors de la transformation passive (a) et active (b). Peut-on arriver à la même conclusion pour les transformations définies par
$$[L]'' = \text{cm}, \qquad [T]'' = \mu\text{s}, \qquad [M]'' = \text{kg}$$

Problème 2 :

Le mouvement d'une particule P obéit aux lois suivantes :
$$\mathbf{F} = M\,\mathbf{A} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{F} = K\,\frac{\mathbf{X}}{|\mathbf{X}|^{n+1}}$$
où K et n sont des constantes, et $\mathbf{X} = \mathbf{OP}$ avec O un point fixé (si $n = 0$, le point O peut se trouver à distance finie ou infinie de P ; dans le second cas, cela signifie que $\mathbf{F} = K\,\mathbf{e}$ avec $\mathbf{e}$ un vecteur fixé). On désigne à nouveau par $(t,\ x_i,\ v_i,\ a_i,\ f_i,\ k)$ les valeurs numériques des grandeurs dans le système d'unités SI.

1. Trouver les valeurs numériques de ces grandeurs relativement au système d'unités défini par
$$1\,[L] = \lambda\,[L]', \qquad 1\,[T] = \tau\,[T]', \qquad 1\,[M] = 1\,[M]'.$$
Comment choisir λ et τ pour que $k' = k$?
2. Effectuer le changement d'état défini par la transformation
$$(t, x_i, v_i) \mapsto \left(\tilde{t} = \tau\, t,\ \tilde{x}_i = \lambda\, x_i,\ \tilde{v}_i = \lambda\,\tau^{-1}\, v_i\right)$$
Quelles sont les valeurs numériques des grandeurs ci-dessus dans ce nouvel état ? Quelles conclusions peut-on tirer si l'on a choisi λ et τ de manière telle que $k' = k$ dans 1 ?
On remarquera que $n = 2$ est la loi de la gravitation, $n = -1$ est la loi de Hooke, et $n = 0$ est la loi de la pesanteur (en prenant O à l'infini).

Problème 3 :

Connaissant la loi de Coulomb

$$\mathbf{F} = \bar{K}\,\frac{Q_1\,Q_2}{|\mathbf{X}|^3}\,\mathbf{X}$$

où $\bar{k} = 8.99 \cdot 10^9$ dans le système d'unités SI, trouver la relation entre le Coulomb et l'unité de charge du système CGS-électrostatique.

Indication : On posera

$$1\,C = q\,[Q]', \quad 1\,N = 10^5\,[F]', \quad 1\,m = 10^2\,[L]'$$

et l'on cherchera q de sorte que $k' = 1$.

Problème 4 :

L'expérience montre que la fréquence de vibration ν d'une corde tendue dépend de la longueur ℓ, de la force F appliquée aux extrémités, de la masse par unité de longueur ρ_ℓ, et du nombre sans dimension n (= harmonique). Etablir la relation suivante entre ces grandeurs

$$\nu = f(n)\,\frac{1}{\ell}\,\sqrt{\frac{F}{\rho_\ell}}$$

où $f(n)$ est une fonction qu'il faudra trouver par l'expérience ou la théorie.

Problème 5 :

On observe que la vitesse v des vagues au large de l'océan dépend de leur longueur d'onde ℓ, mais pas de leur amplitude. En admettant que les grandeurs dont dépend v sont ℓ, l'accélération terrestre g et la masse volumique de l'eau ρ, établir le résultat suivant :

$$v = C\,\sqrt{g\,\ell}$$

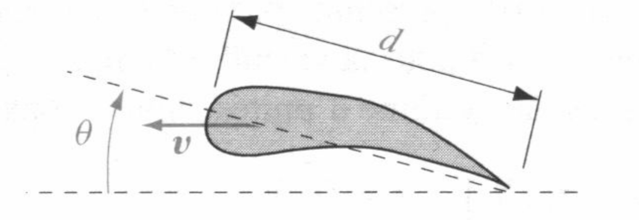
où C est une constante.

Problème 6 :

L'expérience montre que la force qui s'exerce sur un solide se déplaçant à très faible vitesse dans un fluide est indépendante de la densité du fluide. Vérifier que cette force est de la forme

$$f = \eta\,d\,\phi(\theta)\,v$$

où η est la viscosité, de dimension $[F][T][L]^{-2}$(loi de Stokes).



Mécanique générale

Corrigé des exercices

Problème 1 :

1. On a de manière générale (formules 2.8 et 2.9 du livre *Mécanique générale*) :

$$< A >= a[A] = a'[A]' \quad \text{et} \quad 1[A]' = \alpha[A] \quad \Rightarrow \quad a' = \alpha^{-1} a$$

Considérons successivement les différentes grandeurs :

– $t[T] = t'[T]'$ et $1[T]' = \tau[T] \quad \Leftrightarrow \quad 1\,\text{ms} = 10^{-3}\,\text{s} \;\Rightarrow\; \tau = 10^{-3}$
Ainsi, $t' = \tau^{-1}\,t \quad \Rightarrow \quad \underline{t' = 10^3\,t}$

– $\ell[L] = \ell'[L]'$ et $1[L]' = \lambda[L] \quad \Leftrightarrow \quad 1\,\text{cm} = 10^{-2}\,\text{m} \;\Rightarrow\; \lambda = 10^{-2} \;\Rightarrow\; \underline{x_i' = 10^2\,x_i}$

– $[V] = [L][T]^{-1},\; [V]' = [L]'[T]'^{-1} = \lambda\,\tau^{-1}\,[L][T]^{-1} = 10\,[V] \;\Rightarrow\; \underline{v_i' = 10^{-1}\,v_i}$

– $[A] = [L][T]^{-2} \;\Rightarrow\; [A]' = \lambda\,\tau^{-2}\,[L][T]^{-2} = 10^4\,[A] \;\Rightarrow\; \underline{a_i' = 10^{-4}\,a_i}$

– $[F] = [M][L][T]^{-2} \;\Rightarrow\; [F]' = 1 \cdot \lambda\,\tau^{-2}\,[M][L][T]^{-2} = 10^4\,[F] \;\Rightarrow\; \underline{f_i' = 10^{-4}\,f_i}$

– Comme on a

$$\mathbf{F} = -G\frac{M_1\,M_2}{|\mathbf{X}|^3}\,\mathbf{X}$$

il est clair que $[M][L][T]^{-2} = [G][M]^2[L]^{-2}$. Par conséquent,
$[G] = [M]^{-1}[L]^3[T]^{-2} \;\Rightarrow\; [G]' = 1 \cdot \lambda^3\,\tau^{-2}\,[M]^{-1}[L]^3[T]^{-2} = 1\,[G] \;\Rightarrow\; \underline{g' = 1\,g}$

2. On a cette fois-ci un changement d'état. Considérons successivement les trois grandeurs en question :

– $\tilde{a}_i = \lambda\,\tau^{-2}\,a_i$ avec $\tau = 10^3$ et $\lambda = 10^2 \quad \Rightarrow \quad \underline{\tilde{a}_i = 10^{-4}\,a_i}$

– $\tilde{f}_i = \mu\,\lambda\,\tau^{-2}\,f_i$ avec $\mu = 1 \quad \Rightarrow \quad \underline{\tilde{f}_i = 10^{-4}\,f_i}$

– $\tilde{g} = \lambda^3\,\tau^{-2}\,g \quad \Rightarrow \quad \underline{\tilde{g} = 1\,g}$

3. Comparons les résultats a et b :
Dans les deux cas, le temps, les longueurs, les vitesses, les accélérations et les forces sont modifiées dans les mêmes proportions. Dans les deux cas aussi, la constante de gravitation reste inchangée.
Le premier cas est donc une <u>similitude</u>.

Voyons ce que deviennent les grandeurs considérées pour les transformations proposées ici. Pour répondre à la question, il suffit de considérer la transformation de la constante de gravitation de g en g'' ; comme désormais $\tau = 10^{-6}$:
$[G] = [M]^{-1}[L]^3[T]^{-2} \;\Rightarrow\; [G]'' = 1{\cdot}\lambda^3\,\tau^{-2}\,[M]^{-1}[L]^3[T]^{-2} = 10^6\,[G] \;\Rightarrow\; \underline{g'' = 10^6\,g}$

On a donc $g'' \neq g$ et la transformation n'équivaut pas à une similitude. La réponse est donc non.

Problème 2 :

1. Rappel : pour une observable A qui prend la valeur a dans le système d'unités $[A]$ et la valeur a' dans le système d'unités $[A]'$, on a

$$\begin{aligned} a\,[A] &= a'\,[A]' \\ 1\,[A]' &= \alpha\,[A] \end{aligned}$$

avec $a' = \alpha^{-1}\,a$. Par conséquent, on a pour la variable t : $\alpha = 1/\tau$, pour les variables x_i : $\alpha = 1/\lambda$ etc., ce qui mène à :

$$\begin{aligned} t' &= \tau\,t \\ x_i' &= \lambda\,x_i \\ v_i' &= \frac{\lambda}{\tau}\,v_i \\ a_i' &= \frac{\lambda}{\tau^2}\,a_i \\ f_i' &= \mu\,\frac{\lambda}{\tau^2}\,f_i \qquad \text{avec } \mu = 1 \text{ dans } m' = \mu\,m \\ k' &= \mu\,\frac{\lambda}{\tau^2}\,\lambda^n \cdot k = \mu\,\frac{\lambda^{n+1}}{\tau^2}\,k \end{aligned}$$

puisque $\mathbf{F} = k\,\frac{\mathbf{X}}{|\mathbf{X}|^{n+1}}$. Rappelons qu'ici $\mu = 1$.

Par conséquent, pour que $k = k'$, il faut que $\underline{\tau = \lambda^{\frac{n+1}{2}}}$.

2. La transformation

$$(t,\, x_i,\, v_i) \mapsto \left(\tilde{t} = \tau\,t,\, \tilde{x}_i = \lambda\,x_i,\, \tilde{v}_i = \lambda\,\tau^{-1}\,v_i\right)$$

implique

$$\begin{aligned} \tilde{a}_i &= \lambda\,\tau^{-2}\,a_i = \lambda^{1-n-1}\,a_i = \lambda^{-n}\,a_i \\ \tilde{f}_i &= \lambda^{-n}\,f_i \end{aligned}$$

Comme $\tilde{k} = k$, on a une <u>similitude</u>.

Si $\tau = \lambda^{\frac{n+1}{2}}$ (point 1), alors

$$n = 2 \quad \Rightarrow \quad \tau = \lambda^{3/2} \Rightarrow \frac{t'}{t} = \left(\frac{\ell'}{\ell}\right)^{3/2} \quad \text{ou} \quad \frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{3/2} \tag{1}$$

$$n = 0 \quad \Rightarrow \quad \tau = \lambda^{1/2} \Rightarrow \frac{t_1}{t_2} = \sqrt{\frac{\ell_1}{\ell_2}} \tag{2}$$

$$n = -1 \quad \Rightarrow \quad \tau = \text{constante} \Rightarrow T_1 = T_2 \tag{3}$$

Le cas 1 est celui de la gravitation, avec la 3e loi de Kepler, où T_1 et T_2 sont les temps de révolution et a_1, a_2 les demi-grands axes des orbites ; le cas 2 est celui de la pesanteur (avec O relégué à l'infini) : on a les temps de chute et les longueurs de chute ; le cas 3 est celui de la loi de Hooke, caractérisé par l'isochronisme des oscillations d'un pendule ou d'un ressort en régime linéaire.

Problème 3 :

On avait

$$1\,C = q\,[Q]', \quad 1\,N = 10^5\,[F]', \quad 1\,m = 10^2\,[L]'$$

avec la loi de Coulomb

$$\mathbf{F} = \bar{K}\,\frac{Q_1\,Q_2}{|\mathbf{X}|^3}\,\mathbf{X}$$

Par conséquent, on a

$$1\,[\bar{K}] = [F]\,[L]^2\,[Q]^{-2} = 10^5 \cdot \frac{10^4}{q^2}[F]'\,[L]'^2\,[Q]'^{-2} = 10^9\,q^{-2}\,[K]'$$

qui implique

$$k' = 10^9\,q^{-2}\,\bar{k} = 8.99 \cdot 10^{18}\,q^{-2}$$

Si $k' = 1$, on a $q^2 = 10^9\,\bar{k} = 8.99 \cdot 10^{18} \;\Rightarrow\; \underline{q \simeq 3 \cdot 10^9}$.

On a donc 1 C$\simeq 3 \cdot 10^9$ CGS-es .

Problème 4 :

Les paramètres du problème sont la fréquence ν, la longueur ℓ de la corde, la force F appliquée aux extrémités de la corde, la masse par unité de longueur ρ_ℓ et le nombre sans dimension n qui définit l'harmonique ($n = 1$ correspond à la fondamentale). La fréquence est donc fonction de ces paramètres :

$$\nu = \nu\,(n,\, \ell,\, F,\, \rho_\ell)$$

Si $\ell' = \lambda\,\ell, \quad t' = \tau\,t, \quad m' = \mu\,m$, alors

$$\begin{aligned} v' &= \lambda\,\tau^{-1}\,v \\ a' &= \lambda\,\tau^{-2}\,a \\ F' &= \mu\,\lambda\,\tau^{-2}\,F \\ \rho'_\ell &= \mu\,\lambda^{-1}\,\rho_\ell \\ n' &= n \\ \nu' &= \tau^{-1}\,\nu \end{aligned}$$

et le théorème d'homogénéité nous permet d'écrire

$$\nu\left(n,\, \lambda\,\ell,\, \mu\,\lambda\,\tau^{-2}\,F,\, \mu\,\lambda^{-1}\,\rho_\ell\right) = \tau^{-1}\,\nu\,(n,\, \ell,\, F,\, \rho_\ell)$$

En choisissant $\lambda = \ell^{-1}, \quad \tau^2 = \lambda\,\mu\,F, \quad \mu = \lambda\,\rho_\ell^{-1}$, on obtient

$$\tau^2 = \lambda^2\,F\,\rho_\ell^{-1} = \ell^{-2}\,F\,\rho_\ell^{-1}$$

d'où

$$\nu\,(n,\, 1,\, 1,\, 1) = \ell\,F^{-1/2}\,\rho_\ell^{1/2}\,\nu\,(n,\, \ell,\, F,\, \rho_\ell) \;\Rightarrow$$

$$\underline{\nu\,(n,\, \ell,\, F,\, \rho_\ell)} = \ell^{-1}\,F^{1/2}\,\rho_\ell^{-1/2}\,\nu\,(n,\, 1,\, 1,\, 1) = \underline{\frac{1}{\ell}\sqrt{\frac{F}{\rho_\ell}}\,f(n)}$$

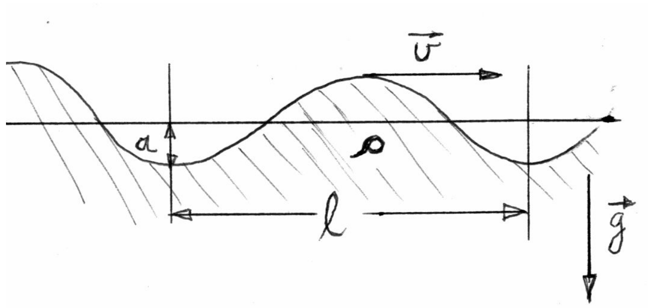
cqfd.

Problème 5 :

La vitesse v des vagues dépend de ℓ, g, ρ : $v = v(\ell,\, g,\, \rho)$.

Si $\ell' = \lambda\,\ell$, $\quad t' = \tau\,t$, $\quad m' = \mu\,m$, alors

$$\begin{aligned} v' &= \lambda\,\tau^{-1}\,v \\ g' &= \lambda\,\tau^{-2}\,g \\ \rho' &= \mu\,\lambda^{-3}\,\rho \end{aligned}$$



et le théorème d'homogénéité permet d'écrire

$$v\left(\lambda\,\ell,\, \lambda\,\tau^{-2}\,g,\, \mu\,\lambda^{-3}\,\rho\right) = \lambda\,\tau^{-1}\,v(\ell,\, g,\, \rho)$$

En choisissant $\lambda = \ell^{-1}$, $\mu\,\lambda^{-3} = \rho^{-1}$, $\lambda\,\tau^{-2} = g^{-1}$, on obtient $\tau^{-1} = g^{-1/2}\,\ell^{1/2}$ d'où

$$v(1,\, 1,\, 1) = \lambda\,\tau^{-1}\,v(\ell,\, g,\, \rho) = \ell^{-1}\,g^{1/2}\,\ell^{1/2}\,v(\ell,\, g,\, \rho) = g^{-1/2}\,\ell^{-1/2}\,v(\ell,\, g,\, \rho)$$

$$\Rightarrow\ \underline{v(\ell,\, g,\, \rho)} = v(1,\, 1,\, 1)\,g^{1/2}\,\ell^{1/2}\underline{= C \cdot \sqrt{g\,\ell}}$$

On voit que la vitesse ne dépend pas de la densité : les vagues de la Mer Morte vont à la même vitesse que celles du Lac Léman, pour autant qu'elles aient la même longueur d'onde.

Problème 6 :

On a une force qui est fonction de la dimension d, de la vitesse v, de l'angle θ et de la viscosité η. En se rappelant que

$$[\eta] = [M]\,[L]^{-1}\,[T]^{-1}$$

et que

$$d' = \lambda\,d\ ;\ v' = \lambda\,\tau^{-1}\,v\ ;\ m' = \mu\,m\ ;\ f' = \mu\,\lambda\,\tau^{-2}\,f\ ;\ \eta' = \mu\,\lambda^{-1}\,\tau^{-1}\,\eta$$

et en invoquant à nouveau le théorème d'homogénéité, on écrira

$$f\left(\theta,\, \lambda\,d,\, \lambda\,\tau^{-1}\,v,\, \mu\,\lambda^{-1}\,\tau^{-1}\,\eta\right) = \mu\,\lambda\,\tau^{-2}\,f(\theta,\, d,\, v,\, \eta)$$

Posons

$$\lambda = d^{-1}\ ;\ \lambda\,\tau^{-1} = v^{-1}\ ;\ \mu\,\lambda^{-1}\,\tau^{-1} = \eta^{-1}$$

si bien que

$$\mu\,\lambda\,\tau^{-2} = \mu\,\underbrace{\lambda\,\tau^{-1}}_{v^{-1}}\,\tau^{-1} = \underbrace{\mu\,\tau^{-1}}_{\eta^{-1}\,\lambda}\,v^{-1} = \eta^{-1}\,d^{-1}\,v^{-1}$$

On a donc finalement

$$f(\theta,\, 1,\, 1,\, 1) = \eta^{-1}\,d^{-1}\,v^{-1}\,f(\theta,\, d,\, v,\, \eta) \quad \Rightarrow \quad \underline{f(\theta,\, d,\, v,\, \eta) = \eta\,d\,\phi(\theta)\,v}$$

cqfd.

Mécanique générale

Énoncé des exercices

Problème 1 :

Evaluer le nombre de molécules H_2 contenues dans 1 m^3 aux conditions standard, et la distance moyenne entre deux molécules. Même question pour l'eau H_2O et le fer Fe.

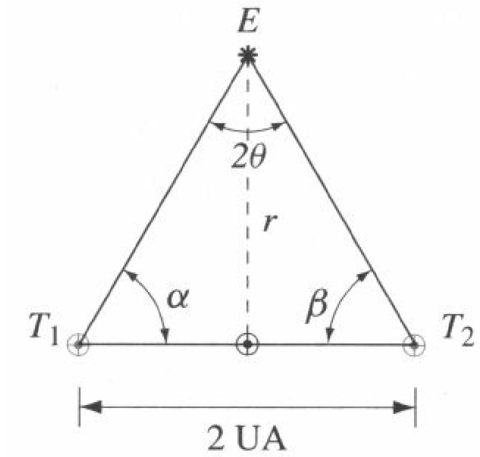
Mass atomique	H	O	Fe
(u)	1.00797	15.994	55.847
Masse spécifique	H_2	H_2O	Fe
(kg/m^3)	$9 \cdot 10^{-2}$	10^3	$7.9 \cdot 10^3$

Indication : la quantité de matière, exprimée en grammes et numériquement égale à la masses atomique, contient un nombre de molécules égal au nombre d'Avogadro.

Problème 2 :

La parallaxe θ d'une étoile est la moitié de l'angle sous-tendu par le diamètre T_1T_2 de la trajectoire de la Terre autour du Soleil perpendiculaire à la droite étoile-Soleil (voir figure).

1. Sachant que la parallaxe de l'étoile α du Centaure est 0.745", évaluer la distance en mètres de cette étoile au Soleil.
2. Par définition, le parsec est la distance correspondant à une parallaxe de 1". Établir la relation entre parsec et mètre.



Problème 3 :

1. Le Soleil étant situé à environ 25000 années-lumière du centre de la Galaxie, quelle serait la précision requise, exprimée en secondes d'arc, pour mesurer à 10% près la distance des étoiles du bulbe galactique ? (le bulbe est le volume de forme sphéroïdale entourant le centre de la Galaxie, et contenant un grand nombre d'étoiles).
2. Un amas globulaire contient typiquement 30000 étoiles dans un espace sphérique de 5 années-lumière de rayon.

(a) Estimer la fraction de ce volume occupée par les étoiles, sous l'hypothèse (grossière !) que chaque étoile est semblable au Soleil.

(b) Estimer la distance moyenne entre les étoiles en pc, en a.l., en UA et en rayons solaires : comment se compare-t-elle à la distance de notre plus proche voisine, Proxima Centauri, dont la parallaxe vaut 0.772" ?

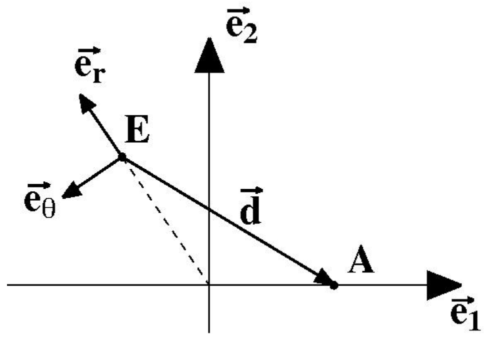
3. À quelle pression (en atmosphère) doit être soumis un gaz à la température ordinaire pour que la distance entre molécules par rapport au diamètre de la molécule ($\simeq 10^{-10}$ m) soit la même que sous 2b ?

   Idée : utiliser la loi de Boyle, $pV = nRT$ reliant la pression p, le volume V, la température T et le nombre de mole n du gaz ($R = 8.31$ JK^{-1}mol^{-1}).

<u>Problème 4</u> :

Ayant choisi un étalon de longueur $[L]$ et un repère orthonormé $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$, les points A, B, C sont représentés par A(1,0,0), B(-2,4,1) et C(2,-3,5).

1. Trouver la norme des vecteurs **AB**, **AC**, **BC** et **AB**+**AC**.
2. Dessiner et calculer l'angle CAB.
3. Dessiner et calculer la projection orthogonale de **OA** sur **BC**.
4. Calculer l'aire du triangle ABC.
5. Calculer le volume du tétrahèdre OABC (à dessiner).
6. Calculer les coordonnées du point D défini par **OD**=**AB** $\wedge$**BC**.
7. Dessiner et calculer les coordonnées du point E, intersection de la droite BC et du plan $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$.
8. Calculer les composantes (d_r, d_θ, d_3) du déplacement **d**=**EA** relativement au repère orthonormé $\mathrm{E}\mathbf{e}_\mathrm{r}\mathbf{e}_\theta\mathbf{e}_3$ où $\mathbf{e}_\mathrm{r}$ est parallèle à **OE** (voir figure).



<u>Problème 5</u> :

Vérifier que les quatre points de coordonnées cartésiennes $A = (4, 5, 1)$, $B = (-3, 0, 1)$, $C = (3, 9, 4)$ et $D = (-4, 4, 4)$ sont coplanaires.

Mécanique générale

Corrigé des exercices

Problème 1 :

Si N est le nombre de molécules ou d'atomes par m^3, alors

$$N = \frac{\text{masse volumique}}{\text{masse d'une molécule}}$$

Or, la masse d'une molécule est égale à la masse atomique en grammes (à convertir en kg !) divisée par le nombre d'Avogadro $N_{Av} = 6.022 \cdot 10^{23}$.

Le volume moyen V_1 occupé par une seule molécule (ou un atome) vaut alors $V_1 = 1/N$, et la distance moyenne $< d >$ entre deux particules sera $< d >= V_1^{1/3}$.

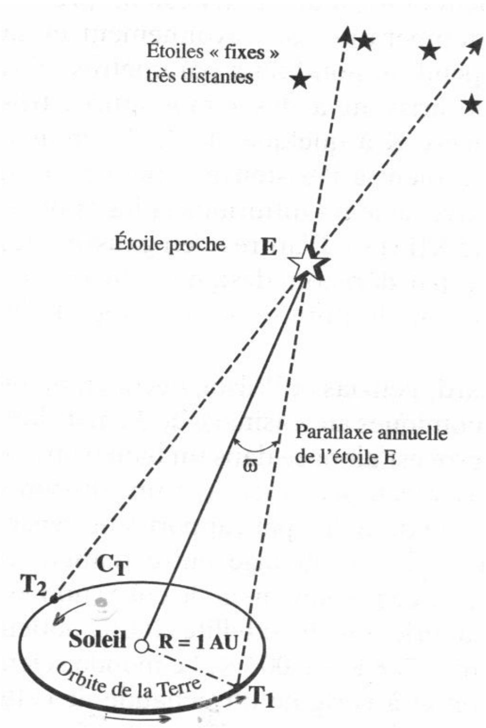
On a alors pour les trois espèces en question :

$$\begin{aligned}
N(H_2) &= \frac{9 \cdot 10^{-2} \cdot 6.022 \cdot 10^{23}}{2 \cdot 1.00797 \cdot 10^{-3}} = 2.69 \cdot 10^{25}\,\mathrm{m}^{-3} \\
V_1 &= \frac{1}{N(H_2)} = 3.72 \cdot 10^{-26}\,\mathrm{m}^{-3} \\
< d > &= (V_1)^{1/3} = 3.3 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{m} = 33\ \text{Å} \\
N(H_2O) &= \frac{10^3 \cdot 6.022 \cdot 10^{23}}{(2 \cdot 1.00797 + 15.994) \cdot 10^{-3}} = 3.34 \cdot 10^{28}\,\mathrm{m}^{-3} \\
< d > &= \left(\frac{1}{N(H_2O)}\right)^{1/3} = 3.1 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{m} \simeq 3\ \text{Å} \\
N(Fe) &= \frac{7.9 \cdot 10^3 \cdot 6.022 \cdot 10^{23}}{55.847 \cdot 10^{-3}} = 0.85 \cdot 10^{29}\,\mathrm{m}^{-3} \\
< d > &= \left(\frac{1}{N(Fe)}\right)^{1/3} = 2.27 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{m} \simeq 2.3\ \text{Å}
\end{aligned}$$

Problème 2 :

1. La situation est rappelée dans la figure ci-contre. Comme l'unité astronomique vaut $1.496 \cdot 10^{11}$ m, on a

$$\tan(0.745") = 3.61 \cdot 10^{-6} = \frac{1.496 \cdot 10^{11}}{d} \quad \Rightarrow \quad \underline{d =} \frac{1.496 \cdot 10^{11}}{3.61 \cdot 10^{-6}} = \underline{4.14 \cdot 10^{16}\ \mathrm{m}}$$



2. Dans l'approximation d'une orbite terrestre circulaire, $\tan\theta = \frac{1\ [\text{UA}]}{d}$, et

$$\tan 1" \simeq \frac{1}{206265} = \frac{1.496 \cdot 10^{11}}{1\ \text{pc}}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{1\ \text{pc}} = 1.496 \cdot 10^{11} \cdot 206265 = \underline{3.086 \cdot 10^{16}\ \text{m}}$$

Problème 3 :

1. On a 25000 a.l. $= \frac{25000}{3.26}$ pc $= 7700$ pc donc la parallaxe $\varpi = 1/7700 = 1.3 \cdot 10^{-4}" = 130\ \mu$as où 1 μas $= 10^{-6}$".
   Par ailleurs, on a pour l'erreur :

   $$d = \frac{1}{\varpi} \quad \Rightarrow \quad |\Delta d| = \frac{1}{\varpi^2}\Delta\varpi = d\,\frac{\Delta\varpi}{\varpi} \Rightarrow \quad \frac{\Delta d}{d} = \frac{\Delta\varpi}{\varpi}$$

   Si $\frac{\Delta d}{d} = 10$ pour cent, alors $\underline{\Delta\varpi = 13\ \mu\text{as}}$, où 1 μas $= 10^{-6}$".
   C'est à peu près la précision du satellite Gaïa, que l'ESA espère construire et lancer d'ici 2012.
2. (a) Calculons le volume de l'amas, en admettant $\pi = 3$ (c'est l'ordre de grandeur qui nous intéresse) :

   $$V_{amas} = \frac{4}{3}\pi R^3 \simeq 4 \cdot 125 = 500\ \text{a.l.}^3 = 500 \cdot (0.946 \cdot 10^{13})^3 = 4.2 \cdot 10^{41}\ \text{km}^3$$

   car 1 a.l. $= 0.946 \cdot 10^{13}$ km. Le volume d'une étoile semblable au Soleil vaut

   $$V_* = \frac{4}{3}\pi R_\odot^3 \simeq 4 \cdot *(7 \cdot 10^5)^3 = 1.37 \cdot 10^{18}\ \text{km}^3$$

et le volume total des étoiles sera donc :

$$V_{tot*} = 30000\,V_* \simeq 4.1 \cdot 10^{22} \text{ km}^3$$

ce qui représente une fraction

$$\underline{\frac{V_{tot*}}{V_{amas}}} = \frac{4.1 \cdot 10^{22}}{4.2 \cdot 10^{41}} \underline{\sim 10^{-19}}$$

(b) La distance moyenne $< d >$ est telle que

$$< d >^3 \sim \frac{V_{amas}}{30000} \sim \frac{500 \text{ a.l.}^3}{30000} = 1.67 \cdot 10^{-2} \text{ a.l.}^3$$

d'où

$$\begin{aligned} < d > \sim 0.26 \text{ a.l.} &= \frac{0.26}{3.26} \text{ pc} \sim 0.078 \text{ pc} \\ &= 0.26 \cdot 0.946 \cdot 10^{13} \text{ km} = 2.46 \cdot 10^{12} \text{ km} \\ &= \frac{2.46 \cdot 10^{12}}{1.496 \cdot 10^{8}} \text{ km} = 16440 \text{ UA} \\ &= \frac{2.46 \cdot 10^{12}}{7 \cdot 10^{5}} \text{ R}_\odot \sim 3.5 \cdot 10^{6} \text{ R}_\odot \sim 1.76 \cdot 10^{6} \text{ D}_\odot \end{aligned}$$

où $R_\odot$ et $D_\odot$ sont le rayon et le diamètre solaire respectivement.
La distance de Proxima Centauri est $d_{Proxima} = 1/0.772 = 1.3$ pc, donc $d_{Proxima} \simeq 17 < d >$.

3. Partons de la loi de Boyle $p\,V = n\,R\,T$ avec $T = 0$ C $= 273$ K. On doit avoir $d \sim 2 \cdot 10^6\,D \sim 2 \cdot 10^6 \cdot 10^{-10} = 2 \cdot 10^{-4}$ m. Posons $V = 1$ m^3 ; dans ce cas, on peut écrire le volume d'une molécule comme étant $V(1 \text{ molecule}) = \frac{1}{N} =< d >^3$ où N est la densité numérique de particules. Ainsi :

$$< d >= \left(\frac{1}{N}\right)^{1/3} = \left(\frac{1}{n\,N_{Av}}\right)^{1/3} = \left(\frac{R\,T}{p\,N_{Av}}\right)^{1/3} = 2 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

$$\Rightarrow \quad p = \frac{RT}{< d >^3\ N_{Av}} \simeq 4.7 \cdot 10^{-10} \text{ Pa} \sim 5 \cdot 10^{-15} \text{ atm}$$

puisque 1 atm $= 1.013 \cdot 10^5$ Pa

<u>Problème 4</u> :

De l'énoncé on a $\mathbf{OA} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{OB} = (-2, 4, 1)$ et $\mathbf{OC} = (2, -3, 5)$, d'où on déduit $\mathbf{AB} = (-3, 4, 1)$, $\mathbf{AC} = (1, -3, 5)$ et $\mathbf{BC} = (4, -7, 4)$.

1. On obtient $|\mathbf{AB}| = \sqrt{26}$, $|\mathbf{AC}| = \sqrt{35}$, $|\mathbf{BC}| = 9$ et $|\mathbf{AB} + \mathbf{AC}| = \sqrt{41}$
2. Soit $\alpha =$ angle CAB. Puisque $\mathbf{AC} \cdot \mathbf{AB} = |\mathbf{AC}|\,|\mathbf{AB}|\,\cos\alpha$, on a

$$\alpha = \arccos\left(\frac{\mathbf{AC} \cdot \mathbf{AB}}{|\mathbf{AC}| \cdot |\mathbf{AB}|}\right) = 109.36^o$$

3. La projection orthogonale de $\mathbf{OA}$ sur $\mathbf{BC}$ est donnée par :

$$\left(\mathbf{OA}\cdot\frac{\mathbf{BC}}{|\mathbf{BC}|}\right)\cdot\frac{\mathbf{BC}}{|\mathbf{BC}|}=\frac{4}{81}(4,-7,4)$$

4. L'aire du triangle ABC $= 1/2\,|\mathbf{AB}|\,|\mathbf{AC}|\,|\sin\alpha| = 1/2\,|\mathbf{AB}\wedge\mathbf{AC}|$

$$\frac{1}{2}|\mathbf{AB}\wedge\mathbf{AC}|=\frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix}-3\\4\\1\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}1\\-3\\5\end{pmatrix}\right|=\frac{1}{2}|(23,16,5)|=\frac{9}{2}\sqrt{10}$$

5. Le volume du tétrahèdre OABC $= 1/3\,\cdot$(surface de base)$\cdot$(hauteur)

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}|\mathbf{AB}\wedge\mathbf{AC}|\right)\cdot\left(\frac{\mathbf{OA}\cdot(\mathbf{AB}\wedge\mathbf{AC})}{|\mathbf{AB}\wedge\mathbf{AC}|}\right)=\frac{1}{6}\mathbf{OA}\cdot(\mathbf{AB}\wedge\mathbf{AC})=\frac{23}{6}$$

6. Les coordonnées du point D : $\mathbf{OD}=\mathbf{AB}\wedge\mathbf{BC}=(23,16,5)$.
7. L'équation de la droite BC : $\mathbf{OB}+\lambda\mathbf{BC}=(-2,4,1)+\lambda(4,-7,4)$. Le point E est dans le plan $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$, ainsi $(\mathbf{OE})_3=0$ et $\lambda=-1/4$. Par conséquent $(\mathbf{OE})_1=-3$ et $(\mathbf{OE})_2=23/4$.
8. Le déplacement $\mathbf{d}=\mathbf{EA}=(4,-23/4,0)$, on définit :

$$\mathbf{e}_r=\frac{\mathbf{OE}}{|\mathbf{OE}|}=\frac{1}{\sqrt{673}}(-12,23,0)\qquad\qquad \mathbf{e}_\theta=\frac{1}{\sqrt{673}}(23,-12,0)$$

D'où on déduit :

$$d_r=\mathbf{d}\cdot\mathbf{e}_r=-\frac{721}{4\sqrt{673}}\qquad d_\theta=\mathbf{d}\cdot\mathbf{e}_\theta=-\frac{23}{\sqrt{673}}\qquad d_3=0$$

<u>Problème 5</u> :

Il suffit de montrer que le produit mixte des vecteurs $\mathbf{AB}$, $\mathbf{BC}$ et $\mathbf{CD}$ est nul :

$$\begin{aligned}
\mathbf{AB} &= -\mathbf{OA}+\mathbf{OB}=\begin{pmatrix}-4\\-5\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7\\-5\\0\end{pmatrix}\\
\mathbf{BC} &= -\mathbf{OB}+\mathbf{OC}=\begin{pmatrix}3\\0\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\9\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\9\\3\end{pmatrix}\\
\mathbf{CD} &= -\mathbf{OC}+\mathbf{OD}=\begin{pmatrix}-3\\-9\\-4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-4\\4\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7\\-5\\0\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

On a donc le produit mixte :

$$(\mathbf{AB}\wedge\mathbf{BC})\cdot\mathbf{CD}=\left[\begin{pmatrix}-7\\-5\\0\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}6\\9\\3\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}-7\\-5\\0\end{pmatrix}=(-15,\,21,\,-33)\begin{pmatrix}-7\\-5\\0\end{pmatrix}=0$$

CQFD

Mécanique générale

Énoncé des exercices

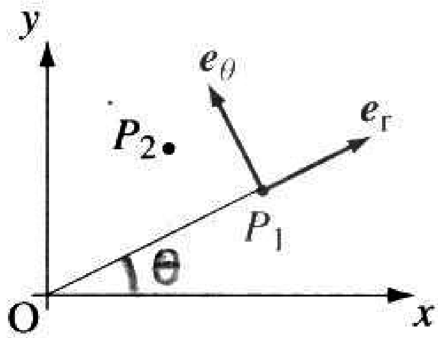
Problème 1 :

Soit deux points de coordonnées sphériques $P_1 = (r_1, \theta_1, \phi_1)$, $P_2 = (r_2, \theta_2, \phi_2)$. Vérifier que l'angle P_1OP_2 est donné par θ, où $\cos\theta = \sin\theta_1 \sin\theta_2 \cos(\phi_1 - \phi_2) + \cos\theta_1 \cos\theta_2$.

(Rappel : $\cos(\phi_1 - \phi_2) = \cos\phi_1 \cos\phi_2 + \sin\phi_1 \sin\phi_2$).

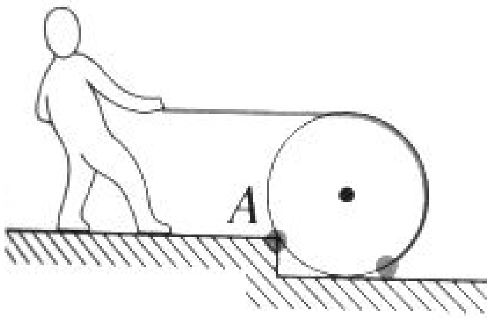
Problème 2 :

Soit (x^1, y^1) et (x^2, y^2) les coordonnées cartésiennes des points P_1 et P_2. Calculer les composantes D_r et D_θ du déplacement $\mathbf{D} = \mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$, relativement au repère orthonormé $P_1\mathbf{e_r}\mathbf{e}_\theta$, où $\mathbf{e_r}$ est parallèle à $\mathbf{OP}_1$ (voir figure).



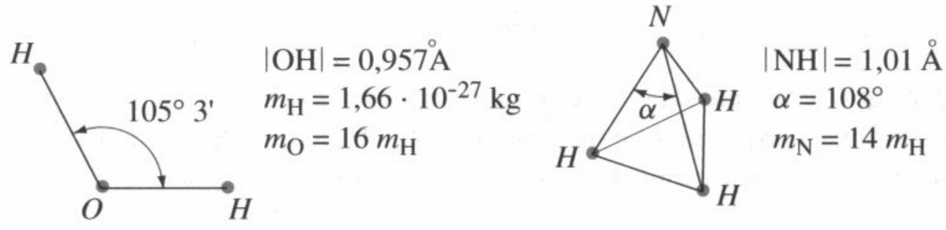
Problème 3 :

Trouver la force minimale nécessaire pour élever un cylindre de 200 kg et de 1.0 m de diamètre au-dessus d'une marche de 20 cm de hauteur au moyen d'un câble enroulé autour du cylindre et sur lequel on tire horizontalement (on admet qu'à chaque instant le cylindre est à l'équilibre).



Problème 4 :

Trouver le centre de masse du système Soleil-Jupiter, sachant que $M_\odot = 322 \cdot 10^3\, M_\oplus$, $M_{Jup} = 317.9\, M_\oplus$ et que le rayon de l'orbite de Jupiter vaut $a = 5.2\,\text{UA}$ ($1\ UA = 1.496 \cdot 10^8$ km) ; exprimer le résultat en rayons solaires ($R_\odot = 6.96 \cdot 10^5$ km). Idem (mais en unités de distance interatomique $|OH|$) pour une molécule d'eau ; une moécule de NH_3 (en unités de $|NH|$; voir figure).

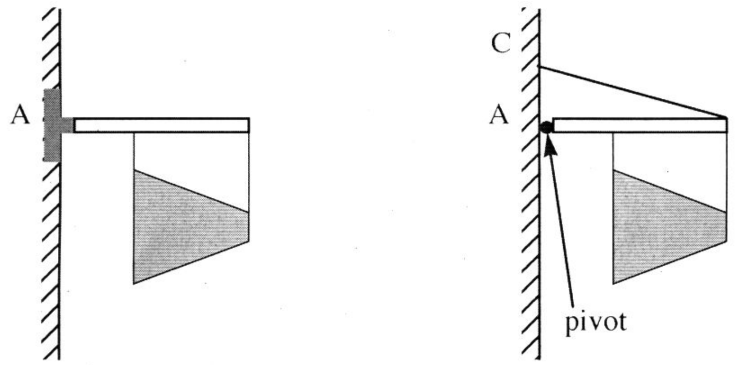


Problème 5 :

Un cône tronqué homogène de 400 kg est suspendu à un mât horizontal long de 2 m et de masse linéique $\rho^{(\ell)} = 10$ kg/m. Trouver le centre de masse du cône tronqué, puis

1. La tension dans les câbles qui supportent le cône
2. Les éléments de réduction par rapport à A des forces exercées au point A sur le mât horizontal.

Caractéristiques du cône : hauteur=90 cm ; rayons des bases $R_1 = 20$ cm, $R_2 = 60$ cm. Distance A-C = 0.5 m.



1) mât encastré 2) mât suspendu

Mécanique générale

Corrigé des exercices

Problème 1 :

Écrivons les composantes des vecteurs $\mathbf{OP}_1$ et $\mathbf{OP}_2$ dans un repère cartésien, et ces composantes en coordonnées polaires :

$$\begin{aligned}
\mathbf{OP}_1 = (x_1, y_1, z_1) \quad &; \quad \mathbf{OP}_2 = (x_2, y_2, z_2) \\
x_1 = r_1 \sin\theta_1 \cos\phi_1 \quad &; \quad x_2 = r_2 \sin\theta_2 \cos\phi_2 \\
y_1 = r_1 \sin\theta_1 \sin\phi_1 \quad &; \quad y_2 = r_2 \sin\theta_2 \sin\phi_2 \\
z_1 = r_1 \cos\theta_1 \quad &; \quad z_2 = r_2 \cos\theta_2
\end{aligned}$$

Nous savons que le produit scalaire peut s'écrire de deux manières :

$$\mathbf{OP}_1 \cdot \mathbf{OP}_2 = |\mathbf{OP}_1|\,|\mathbf{OP}_2| \cos\theta = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

où θ est l'angle entre $\mathbf{OP}_1$ et $\mathbf{OP}_2$. En égalant les deux termes de droite, il vient :

$$\begin{aligned}
r_1r_2\cos\theta &= r_1r_2\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\phi_1\cos\phi_2 \\
&+ r_1r_2\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\phi_1\sin\phi_2 \\
&+ r_1r_2\cos\theta_1\cos\theta_2 \\
\Rightarrow \cos\theta &= \sin\theta_1\sin\theta_2(\cos\phi_1\cos\phi_2 + \sin\phi_1\sin\phi_2) + \cos\theta_1\cos\theta_2 \\
&= \sin\theta_1\sin\theta_2\cos(\phi_1 - \phi_2) + \cos\theta_1\cos\theta_2
\end{aligned}$$

Problème 2 :

Les coordonnées cartésiennes du déplacement sont $\mathbf{D} = \mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 = (x_2 - x_1,\, y_2 - y_1)$ et ses composantes dans le repère $P_1\mathbf{e}_r\mathbf{e}_\theta$ sont données par les produits scalaires :

$$D_r = \mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{e}_r \quad \text{et} \quad D_\theta = \mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{e}_\theta$$

$$\mathbf{e}_r = \frac{\mathbf{OP}_1}{|\mathbf{OP}_1|} = \begin{pmatrix} \frac{x_1}{(x_1^2+y_1^2)^{1/2}} \\ \frac{y_1}{(x_1^2+y_1^2)^{1/2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{e}_\theta = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
\underline{D_r} &= (x_2 - x_1,\, y_2 - y_1) \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \underline{= (x_2 - x_1)\cos\theta + (y_2 - y_1)\sin\theta} \\
\underline{D_\theta} &= (x_2 - x_1,\, y_2 - y_1) \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} \underline{= -(x_2 - x_1)\sin\theta + (y_2 - y_1)\cos\theta}
\end{aligned}$$

Problème 3 :

Les forces en présence sont : le poids $\mathbf{P}$ du cylindre, la force de réaction $\mathbf{F}_s$ exercée par le sol, la force $\mathbf{F}$ tangente au cylindre et s'exerçant au point T, et la force $\mathbf{F}_A$ de réaction exercée au point A par l'angle de la marche. Supposons que la force $\mathbf{F}$ soit juste suffisante pour que la force $\mathbf{F}_s$ s'annule (le cylindre est donc sur le point d'être soulevé) : l'équilibre statique impose alors les conditions

$$\begin{aligned} \mathbf{F} + \mathbf{P} + \mathbf{F}_A &= 0 \\ \mathbf{AT} \wedge \mathbf{F} + \mathbf{AP} \wedge \mathbf{P} + 0 &= 0 \end{aligned}$$

où le point P est le centre de masse du cylindre (qui se confond ici avec son centre géométrique car le cylindre est de densité homogène). Si h est la hauteur de la marche et R le rayon du cylindre, on a dans le repère $A\mathbf{e}_x\mathbf{e}_y\mathbf{e}_z$:

$$\mathbf{AP} = \left(\sqrt{R^2 - (R-h)^2} = \sqrt{h(2R-h)},\, 0,\, R-h\right) \;\; ; \;\; \mathbf{AT} = \left(\sqrt{h(2R-h)},\, 0,\, 2R-h\right)$$

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} -F \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \;\; ; \;\; \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{pmatrix} \;\; ;$$

où m est la masse du cylindre et g l'accélération de la pesanteur. La seconde condition nous donne alors :

$$\begin{pmatrix} \sqrt{h(2R-h)} \\ 0 \\ 2R-h \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -F \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sqrt{h(2R-h)} \\ 0 \\ R-h \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La deuxième composante étant nulle partout, le produit vectoriel donne un vecteur dont seule la deuxième composante est non nulle, si bien que l'on a :

$$-F \cdot (2R-h) - \sqrt{h(2R-h)}\, mg = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{-F = \left(\frac{h}{2R-h}\right)^{1/2} mg}$$

On voit bien que, si $h = R$, alors $|F| = mg$ et que si $h = 0$, $|F| = 0$.

Application numérique : Si $m = 200$ kg, $R = 0.5$ m et $h = 0.2$ m, on trouve $\underline{|F| = 100 \text{ kgf} = 980 \text{ N}}$.

Problème 4 :

Système Soleil-Jupiter : Mettons l'origine sur le centre du Soleil. La position OG du centre de masse sera, en désignant OJ est la position de Jupiter et $M_\odot$, M_J les masses du Soleil et de Jupiter respectivement :

$$OG = \frac{M_J \cdot OJ}{M_\odot + M_J} = \frac{317.9}{322318} \cdot 5.2 \cdot 1.496 \cdot 10^8 = 7.67 \cdot 10^5 \text{ km} \simeq 1.1 \text{ R}_\odot$$

Molécule d'eau : Le centre de masse sera sur l'axe de symétrie de la molécule, qui fait avec chaque axe $|OH|$ un angle $\theta = 105.05^o/2 = 52.025^o$. En mettant l'origine sur l'atome d'oxygène, on a :

$$(OG)_x = \frac{2\, m_H\, |OH|\, \cos\theta}{18\, m_H} = 0.068\, |OH|$$

Molécule d'azote : Le plus simple est de définir d'abord le centre de masse G_H des 3 atomes d'H, qui occupent les sommets d'un triangle équilatéral. Chaque côté de ce triangle HHH a pour longueur $|HH| = 2|NH|\cos(36^o)$, qui est celle du grand côté de l'un des triangles NHH. Le problème est maintenant de connaître la hauteur de la pyramide, car le centre de masse de la molécule entière se trouve le long de cette hauteur $|NG_H|$.

Pour déterminer la distance $|HG_H|$ entre le centre G_H du triangle équilatéral HHH, on remarque que la demi-longueur d'un côté, $|NH|\cos(36^o)$, est la projection de la distance $|HG_H|$ cherchée :

$$|NH|\cos(36^o) = |HG_H|\cos(30^o) \;\Rightarrow\; |HG_H| = \frac{\cos(36^o)}{\cos(30^o)}\,|NH|$$

Comme la hauteur $|NG_H|$ forme un triangle rectangle avec $|HG_H|$ et l'arête $|NH|$, on a

$$|NG_H| = \sqrt{|NH|^2 - |HG_H|^2} = |NH|\sqrt{1 - \left(\frac{\cos(36^o)}{\cos(30^o)}\right)} = 0.357\,|NH|$$

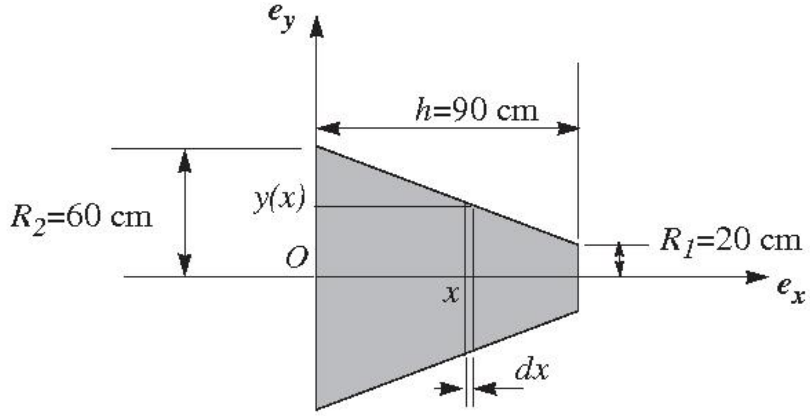
Finalement, on a

$$\underline{|NG|} = \frac{3\,m_H\,|NG_H|}{14\,m_H\,+\,3\,m_H} = \frac{3}{17}\cdot 0.357\,|NH|\underline{= 6.3\cdot 10^{-2}\,|NH|}$$

<u>Problème 5</u> :

Il faut calculer d'abord le centre de masse G du cône tronqué, sachant que l'axe central contient G puisqu'il est l'élément de symétrie.

L'élément d'intégration est un disque d'épaisseur dx et de rayon $y(x) = R_2 - (R_2 - R_1)x/h$ où R_2 et R_1 sont les rayons resp. de la base et du sommet du cône tronqué, et h sa hauteur (voir figure). La position du centre de masse s'écrit :



$$\begin{aligned}
(\mathbf{OG})_x &= \frac{1}{M}\cdot\int_0^h x\,\rho\,\pi\,y(x)^2\,dx = \frac{\rho}{M}\pi\int_0^h \left(R_2\frac{R_2 - R_1}{h}x\right)^2 dx \\
&= \frac{\pi}{V}\cdot\int_0^h \left(R_2^2\,x - \frac{2R_2(R_2 - R_1)}{h}\,x^2 + \frac{(R_2 - R_1)^2}{h^2}\,x^3\right) dx \\
&= \frac{\pi}{12\,V}h^2(3R_1^2 + R_2^2 + 2R_1R_2)
\end{aligned}$$

Le volume du cône tronqué se calcule de même :

$$V = \int_0^h \pi\, y(x)^2\, dx = \int_0^h \pi\, \left(R_2 - \frac{R_2 - R_1}{h}\right)^2 dx = \frac{\pi\, h}{3}\, \left(R_1^2 + R_2^2 + R_1 R_2\right)$$

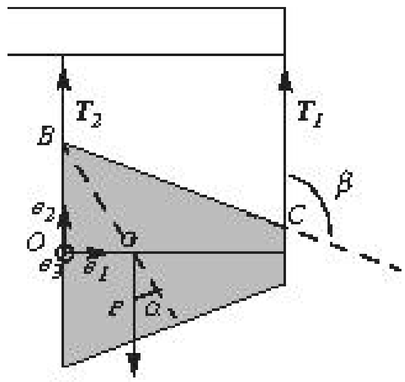
Finalement, la position du centre de masse est :

$$\underline{(\mathbf{OG})_x = \frac{h\,(3R_1^2 + R_2^2 + 2R_1R_2)}{4\,(R_1^2 + R_2^2 + R_1R_2)}}$$

Application numérique : avec les caractéristiques du cône fournies dans l'énoncé, on obtient $(\mathbf{OG})_x = 31.15$ cm.

Nous sommes équipés maintenant pour aborder les deux points principaux, dans chacune des deux configurations présentées sur la figure de l'énoncé.

1. La tension des deux câbles vaut pour les deux configurations. Le torseur des



forces qui s'appliquent sur le cône tronqué doit être équivalent à zéro car on est à l'équilibre. Les forces en présence sont le poids $\mathbf{P}$ du cône (qui s'applique sur le centre de masse, G) et les forces T_1 et T_2 exercées par les câbles. En choisissant de calculer les moments par rapport au point B (figure), on a les deux conditions :

$$\mathbf{P} + \mathbf{T_1} + \mathbf{T_2} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{BG} \wedge \mathbf{P} + \mathbf{BC} \wedge \mathbf{T_1} = [(BC)\, T_1\, \sin\beta - (BG)\, P\, \sin\alpha]\ \mathbf{e}_3\ =\ \mathbf{0}$$

Or on a $\sin\alpha = OG/BG$ et $\sin\beta = h/BC$, donc l'équation ci-dessus implique

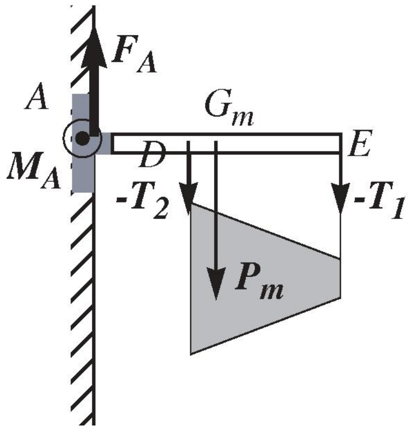
$$T_1 = \frac{(BG)\, P\, \sin\alpha}{(BC)\, \sin\beta} = \frac{(OG)\, P}{h} = \frac{M\, g\,(3R_1^2 + R_2^2 + 2R_1R_2)}{4\,(R_1^2 + R_2^2 + R_1R_2)}$$

De plus, la première condition implique $\mathbf{T_2} = -(\mathbf{T_1} + \mathbf{P})$, donc le module de $\mathbf{T_2}$ vaut

$$T_2 = \frac{M\, g\,(R_1^2 + 3R_2^2 + 2R_1R_2)}{4\,(R_1^2 + R_2^2 + R_1R_2)}$$

Application numérique : $T_1 = 139.5$ kgf, $T_2 = 261.5$ kgf. (On voit bien que $T_1 + T_2 = P = 400$ kgf).

2. Éléments de réduction par rapport à A des forces exercées au point A sur le mât, ce dernier étant le système considéré désormais.
Cas du mât encastré :
L'ensemble des forces s'exerçant sur le mât peut être remplacé par une force verticale $\mathbf{F_A}$ et un couple de forces de moment $\mathbf{M_A}$.
La résultante des forces en A doit être nulle. Si G_m est le centre de masse du mât horizontal et $\mathbf{P_m}$ le poids de ce mât, alors la force verticale que doit exercer le mur pour annuler le poids du mât et de sa charge est $\mathbf{F_A} = -(\mathbf{P_m} - \mathbf{T_1} - \mathbf{T_2}) = -(\mathbf{P_m} + \mathbf{P})$. Le moment par rapport à A, dû au poids du mât et de sa charge,



est simple à calculer puisque tous les angles sont droits. Son module est

$$|\mathbf{M_A}| = (AE)T_1 + (AD)T_2 + (AG_m)P_m = (AD + OG)P + (AG_m)P_m$$

et comme le mât est homogène, on a $AG_m = \frac{1}{2}AE$. $\mathbf{M_A}$ est un vecteur perpendiculaire à la page et "s'enfonçant" dedans (règle du tire-bouchon). Le mur doit donc exercer un moment égal et opposé à $\mathbf{M_A}$ (vecteur perpendiculaire à la page et dirigé vers le haut) pour que l'ensemble reste statique.

Application numérique : La force exercée par le mât au point A est $-\mathbf{F_A} = \mathbf{e}_2\,420$ kgf, puisque la masse du mât est $2 \times \rho^{(\ell)} = 20$ kg.
La position du centre de masse du mât est évidemment à mi-longueur de celui-ci, on a donc $AG_m = 1$ m. Le moment exercé par le mât et sa charge au point A est donc $\mathbf{M_A} = -\left[(1.1 + 0.3115) \cdot 400 + 1 \cdot 20\right] \mathbf{e}_3 = -584.6\,\mathbf{e}_3$ (le signe $-$ se justifie par le fait que $\mathbf{e}_3$ sort verticalement de la feuille, c'est-à-dire qu'il est dirigé vers le haut).

Cas du mât suspendu :
La tension $\mathbf{T}$ du câble de soutien s'ajoute maintenant aux autres forces. La condition du moment résultant nul permet de calculer $\mathbf{T}$:

$$(AE)T_1 + (AD)T_2 + (AG_m)P_m - (AE)T\sin\alpha = 0$$

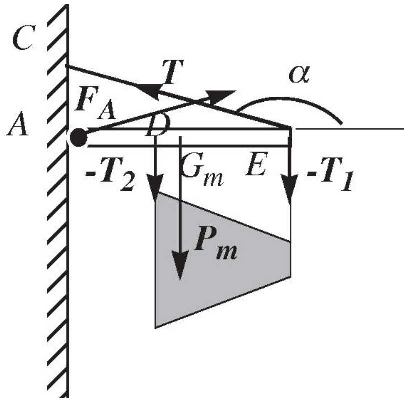
Or $\sin\alpha = \frac{AC}{(AC^2+AE^2)^{1/2}}$ et l'on en tire

$$\begin{aligned} T &= \frac{\sqrt{AC^2 + AE^2}}{AC \cdot AE} \cdot \left[(AE)T_1 + (AD)T_2 + (AG_m)P_m\right] \\ &= \frac{\sqrt{AC^2 + AE^2}}{AC \cdot AE} \cdot \left[(AD + OG)P + (AG_m)P_m\right] \end{aligned}$$

On peut de même calculer directement la 2e composante de $\mathbf{T}$:

$$T_y = T \sin\alpha = (AD + OG)P + (AG_m)P_m$$

On en déduit la force $\mathbf{F_A} = -(\mathbf{P_m} - \mathbf{T_1} - \mathbf{T_2} + \mathbf{T}) = -\mathbf{P_m} - \mathbf{P} - \mathbf{T}$.



Remarque : Ici, le couple fourni par le mur pour équilibrer celui dû au poids de l'enseigne se traduit par une traction au point C et une poussée au point A. Dans le cas précédent, le mât et sa charge exerçaient un couple au point A, qui dans le cas présent n'existe plus.

Application numérique : La force de tension T du câble a pour module $T =$ 1205.2 kgf. Comme $AC = 0.5$ m et $AE = 2$ m, $\sin\alpha = 0.2425 \Rightarrow \alpha = 166^o$. Les composantes de $\mathbf{T}$ sont donc $\mathbf{T} = -1169.2 \cdot \mathbf{e}_x + 292.3 \cdot \mathbf{e}_y + 0 \cdot \mathbf{e}_z$, et ainsi,

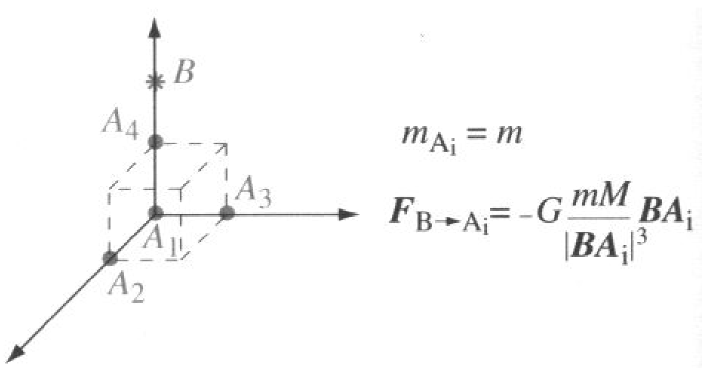
$$\mathbf{F_A} = -\mathbf{P_m} - \mathbf{P} - \mathbf{T} = -\begin{pmatrix} 0 \\ -20 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -400 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1169.2 \\ 292.3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1169.2 \\ 127.7 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ kgf}$$

Mécanique générale

Énoncé des exercices

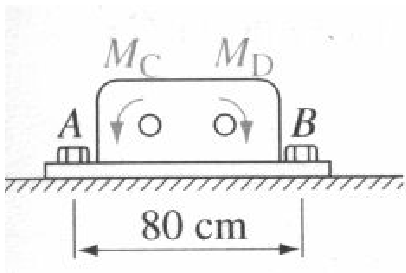
Problème 1 :

Un système rigide est constitué de quatre masses ponctuelles identiques situées sur les sommets d'un cube. Ces masses sont soumises aux forces de gravitation dues à une masse extérieure M située au point B, à une distance de A_4 égale à l'arête du cube (voir figure). Trouver les éléments de réduction du torseur de ces forces par rapport au point A_1 ; trouver l'axe central. Est-ce que ce torseur est équivalent à un vecteur ? Si oui, est-il lié au centre de masse G du système ? Trouver les éléments de réduction du torseur par rapport à G.



Problème 2 :

Une boîte à vitesse est soumise à 2 couples opposés, de moment $M_C = 200$ Nm et $M_D = 100$ Nm (voir figure). Calculer les forces verticales aux points A et B pour résister aux couples en question.



<u>Problème 3</u> :

Pour chacun des mouvements rectilignes ci-dessous, esquisser la ligne d'univers dans l'espace (x, t) et l'orbite dans l'espace de phase (x, v).

1. Mouvement de vitesse constante sur l'intervalle $[O, L]$; aux extrémités O et L il y a un choc et la vitesse $\mathbf{v}$ devient $\mathbf{v}' = -e\mathbf{v}$ avec $0 < e < 1$.
2. $x(t) = x_0 \cos(\omega t)$ où ω est une constante.
3. $x(t) = x_0 \, e^{-\lambda t}$ où λ est une constante positive.

<u>Problème 4</u> :

L'accéléromètre d'un véhicule parti d'un point A a enregistré l'évolution suivante : $a(t) = 0.2\, t(10-t)$ ms^{-2} pour $0 \leq t \leq 10$; $a(t) = 0$ pour $10 \leq t \leq 70$; $a(t) = -7.5$ ms^{-2} pour $70 \leq t \leq 72$. Trouver l'abscisse curviligne et la vitesse en fonction du temps.

Mécanique générale

Corrigé des exercices

Problème 1 :

Calculons les éléments de réduction du torseur des forces par rapport au point A_1. La résultante des forces est un vecteur libre, elle est donnée par :

$$\mathbf{R} \doteq \sum_{i=1}^{4} F_{\mathrm{B}\to\mathrm{A}_i} = -GmM \sum_{i=1}^{4} \frac{\mathbf{BA}_i}{|\mathbf{BA}_i|^3}$$

Notons a l'arête du cube, on a alors : $\mathbf{BA}_1 = -a(0;\,0;\,2)$, $\mathbf{BA}_2 = -a(-1;\,0;\,2)$, $\mathbf{BA}_3 = -a(0;\,-1;\,2)$ et $\mathbf{BA}_4 = -a(0;\,0;\,1)$.

$$\mathbf{R} = \frac{GMm}{a^2}\left[\frac{1}{4}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{5\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix} + \frac{1}{5\sqrt{5}}\begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right] = \frac{GMm}{a^2}\frac{1}{5\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\4+\frac{25\sqrt{5}}{4}\end{pmatrix}$$

Le moment résultant $\mathbf{M}_{A_1}$ par rapport au point A_1 est donné par :

$$\mathbf{M}_{A_1} \doteq \sum_{i=1}^{4} \mathbf{A}_1\mathbf{A}_i \wedge F_{\mathrm{B}\to\mathrm{A}_i} = -GmM \sum_{i=1}^{4} \mathbf{A}_1\mathbf{A}_i \wedge \frac{\mathbf{BA}_i}{|\mathbf{BA}_i|^3}$$

Avec $\mathbf{A}_1\mathbf{A}_1 = (0;\,0;\,0)$, $\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 = a(1;\,0;\,0)$, $\mathbf{A}_1\mathbf{A}_3 = a(0;\,1;\,0)$ et $\mathbf{A}_1\mathbf{A}_4 = a(0;\,0;\,1)$, on obtient :

$$\mathbf{M}_{A_1} = \frac{GmM}{a}\frac{1}{5\sqrt{5}}\left[\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix}\right] = \frac{GMm}{a}\frac{2}{5\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$$

Du théorème de l'axe central, on sait que l'axe central est l'ensemble des points X tels que :

$$\mathbf{OX} = \frac{\mathbf{R}\wedge\mathbf{M}_{A_1}}{|\mathbf{R}|^2} + \lambda\frac{\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|} = \frac{1}{18.031}\left[\begin{pmatrix}-1\\-1\\4+\frac{25\sqrt{5}}{4}\end{pmatrix} \wedge \frac{2a}{18.031}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}-1\\-1\\4+\frac{25\sqrt{5}}{4}\end{pmatrix}\right]$$

où on a fixé l'origine en A_1, il vient :

$$\mathbf{OX} = a\begin{pmatrix}0.111\\0.111\\0.012\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}-0.055\\-0.055\\0.997\end{pmatrix}$$

Avec l'origine en A_1, on vérifie que $\mathbf{M}_{A_1} \cdot \mathbf{R} = 0$, ainsi le torseur $\{(A_i, F_{\mathrm{B}\to\mathrm{A}_i})\}$ est équivalent au vecteur lié $(X, \mathbf{R})$ où X est sur l'axe central. Et par conséquent X ne peut pas être G, car le centre de masse n'est pas situé sur cet axe. En effet $\mathbf{OG} = \frac{a}{4}\,(1;\,1;\,1)$.

Les éléments de réduction du torseur par rapport à G sont $\mathbf{R}$ et $\mathbf{M}_G$. Le moment de force résultant par rapport au point G se détermine à partir du théorème du transfert : $\mathbf{M}_G = \mathbf{M}_{A_1} - \mathbf{OG} \wedge \mathbf{R}$, ce qui donne :

$$\mathbf{M}_G = \frac{GMm}{a}\left[\frac{2}{5\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} - \frac{1}{4}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \wedge \frac{1}{5\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\4+\frac{25\sqrt{5}}{4}\end{pmatrix}\right] = \frac{GMm}{4a}\left(\frac{3}{5\sqrt{5}} - \frac{5}{4}\right)\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$$

<u>Problème 2</u> :

Par définition un couple est un torseur dont la résultante est nulle. En particulier, deux vecteurs liés et opposés $\{(P_1, \mathbf{F}), (P_2, -\mathbf{F})\}$ constituent un couple de moment $\mathbf{M} = \mathbf{P}_2\mathbf{P}_1 \wedge \mathbf{F}$. Réciproquement on peut considérer que le couple M_C exerce une force sur chacun des points de fixation A et B. Comme la résultante doit être nulle, on a $\mathbf{F}_{M_C\to\mathrm{A}} = -\mathbf{F}_{M_C\to\mathrm{B}}$. On a donc deux vecteurs liés et opposés qui constituent le couple de moment :

$$M_C = |\mathbf{BA} \wedge \mathbf{F}_{M_C\to\mathrm{A}}| = |\mathbf{BA}|\,|\mathbf{F}_{M_C\to\mathrm{A}}|\,\sin\theta = -|\mathbf{BA}|\,F_{M_C\to\mathrm{A},y}$$

Le même raisonnement appliqué au point B, puis au couple M_D permet d'obtenir (on prendra l'axe des y pointant vers le haut) :

$$\begin{aligned} F_{M_C\to\mathrm{A},y} &= -M_C/|\mathbf{BA}| \qquad \text{et} \qquad & F_{M_C\to\mathrm{B},y} &= M_C/|\mathbf{AB}| \\ F_{M_D\to\mathrm{A},y} &= M_D/|\mathbf{BA}| \qquad \text{et} \qquad & F_{M_D\to\mathrm{B},y} &= -M_D/|\mathbf{AB}| \end{aligned}$$

Les forces verticales qui s'exercent aux points A et B pour résister aux couples sont les forces de réaction aux forces mentionnées ci-dessus, ainsi :

$$\begin{aligned} F_{\mathrm{A},y} &= -\left(M_D - M_C\right)/|\mathbf{BA}| = 125\ \mathrm{N} \\ F_{\mathrm{B},y} &= -\left(M_C - M_D\right)/|\mathbf{BA}| = -125\ \mathrm{N} \end{aligned}$$

<u>Problème 3</u> :

1. Le premier mouvement est décrit par les équations du mouvement :
   - Pour $t \in [0; L/v]$: $x(t) = v\,t$ et $v(t) = v$
   - Pour $t \in [L/v; L/v + L/ev]$: $x(t) = L - ev\,(t - L/v)$ et $v(t) = -ev$
   - Pour $t \in [L/v + L/ev; L/v + L/ev + L/e^2v]$: $x(t) = e^2v\,(t - L/v - L/ev)$ et $v(t) = e^2v$
   - etc.
2. On a $x(t) = x_0\cos(\omega t)$ et donc $v(t) = -\omega x_0 \sin(\omega t)$
3. Ici $x(t) = x_0\,e^{-\lambda t}$ et $v(t) = -\lambda x_0\,e^{-\lambda t}$

Pour les figures voir les pages suivantes.

Problème 4 :

Pour $0 \leq t \leq 10$ s, on obtient par intégrations successives :

$$\begin{aligned} a(t) &= -(2/10)\, t^2 + 2\, t \\ v(t) &= -(2/30)\, t^3 + t^2 + v_0 \\ s(t) &= -(1/60)\, t^4 + (1/3)\, t^3 + v_0\, t + s_0 \end{aligned}$$

Supposons qu'en $t_0 = 0$ s, $v_0 = 0$ m/s et $s_0 = 0$ m. Ainsi en $t_1 = 10$ s, on obtient $v_1 = (100/3)$ m/s et $s_1 = (500/3)$ m. Pour $10 \leq t \leq 70$ s, on a :

$$\begin{aligned} a(t) &= 0 \\ v(t) &= v_1 \\ s(t) &= v_1\, (t - t_1) + s_1 \end{aligned}$$

Ce qui donne en $t_2 = 70$ s, $v_2 = (100/3)$ m/s et $s_2 = (6500/3)$ m. Pour $70 \leq t \leq 72$ s, on a :

$$\begin{aligned} a(t) &= -(15/2) \\ v(t) &= -(15/2)\, (t - t_2) + v_2 \\ s(t) &= -(15/4)\, (t - t_2)^2 + v_2\, (t - t_2) + s_2 \end{aligned}$$

Finalement en $t_3 = 72$ s, $v_3 = (55/3)$ m/s et $s_3 = (6655/3) \simeq 2218$ m.

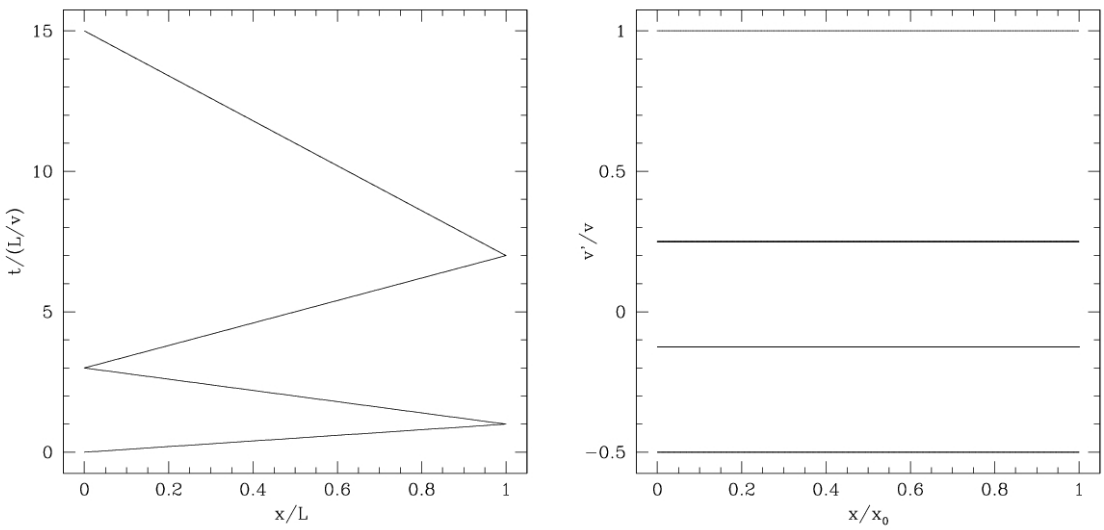


FIG. 1 – Résolution du problème 3, point 1.

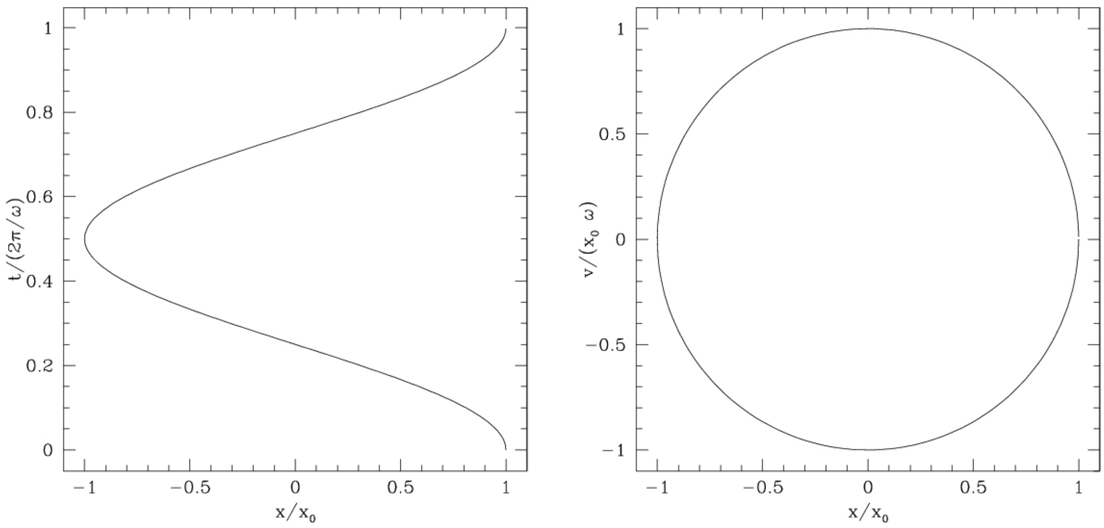


FIG. 2 – Résolution du problème 3, point 2.

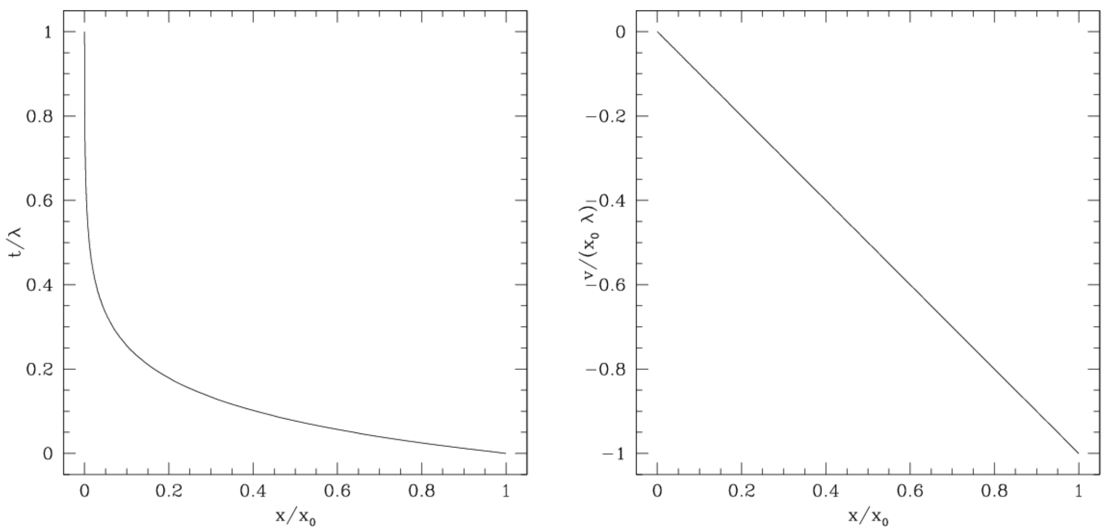


FIG. 3 – Résolution du problème 3, point 3.

Mécanique générale

Énoncé des exercices

Problème 1 :

Pour chacun des mouvements ci-dessous, esquisser 2 à 3 orbites typiques dans l'espace de phase $(x,\, v)$ pour différentes valeurs des conditions initiales $(x_0,\, v_0)$ à $t = 0$.

1. Mouvement oscillatoire harmonique : $x(t) = x_0 \cos(\omega t) + (v_0/\omega) \sin(\omega t)$, où ω est une constante. On vérifiera que $a(t) = -\omega^2 x(t)$ et que la fonction $G(x,\, v) = \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2}\omega^2 x^2$ est une *constante du mouvement*, c'est-à-dire :

   $$G(x(t),\, v(t)) = G(x_0,\, v_0) \qquad \forall\ t$$

   Trouver l'amplitude du mouvement $A = \frac{1}{2}(x_{max} - x_{min})$ et la vitesse maximale en fonction de $(x_0,\, v_0)$.

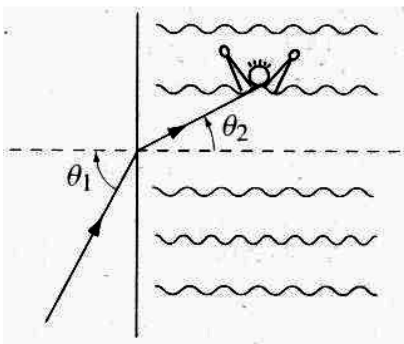
2. Mouvement uniformément accéléré : $a(t) = a_0$, où a_0 =cste. Vérifier que la fonction

   $$G(x,\, v) = \frac{1}{2}v^2 - a_0 x$$

   est une constante du mouvement.

Problème 2 :

Un promeneur aperçoit une jeune fille en train de se noyer dans le lac. Il peut courir à la vitesse v_1 et nager à la vitesse v_2. Vérifier que la trajectoire correspondant au temps minimal pour atteindre la jeune fille est telle que $\sin\theta_1 / \sin\theta_2 = v_1/v_2$ (voir figure). Indication : se souvenir que les angles θ_1 et θ_2 ne sont pas indépendants.



<u>Problème 3</u> :

Une Porsche atteint les 100 km/h en 5.4 s.

1. Quelle est l'accélération moyenne ?
2. A quelle vitesse v_0 constante doit rouler une 2 CV dans un virage de 40 m de rayon pour que son accélération soit égale à celle obtenue pour la Porsche ?
3. Dans le virage, les freins de la 2 CV sont mis en action, provoquant un freinage de décélération constante. Après un intervalle de temps Δt la vitesse est $\frac{1}{2}v_0$. Trouver l'accélération de freinage, le vecteur accélération $\mathbf{a}$ et son intensité $|\mathbf{a}|$.

<u>Problème 4</u> :

Estimer la vitesse $|\mathbf{v}|$ et l'accélération $|\mathbf{a}|$ d'un point immobile à l'équateur,

1. par rapport au référentiel géocentrique, et
2. par rapport au référentiel de Kepler – tel que défini en p. 64 du livre *Mécanique générale*, à savoir par le centre du Soleil et trois étoiles fixes. (Pour cette estimation, prendre l'axe des pôles perpendiculaire au plan de la trajectoire de la Terre autour du Soleil ; on admettra également que cette trajectoire est un cercle.)

Le rayon de la Terre vaut $R_T = 6.37 \cdot 10^6$ m et le rayon de l'orbite terrestre est $R_0 = 1.50 \cdot 10^{11}$ m.

Mécanique générale

Corrigé des exercices

Problème 1 :

1. L'orbite dans l'espace de phase est une ellipse de demi-axes A et ωA (voir ci-dessous et figure ; on aurait pu aussi remarquer que $G(x, v) = constante$ est l'équation d'une ellipse et en tirer A directement).

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 \cos(\omega t) + (v_0/\omega) \sin(\omega t) \\ v(t) = \dot{x}(t) &= -x_0\,\omega \sin(\omega t) + v_0 \cos(\omega t) \\ a(t) = \dot{v}(t) = \ddot{x}(t) &= -x_0\,\omega^2 \cos(\omega t) - v_0\,\omega \sin(\omega t) = -\omega^2 x(t) \end{aligned}$$

Montrons que $\frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2}\omega^2 x^2$ est une constante du mouvement, en substituant v et x par leurs expressions respectives :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2}\omega^2 x^2 &= \frac{1}{2}\left[-x_0\,\omega \sin(\omega t) + v_0 \cos(\omega t)\right]^2 + \frac{\omega^2}{2}\left[x_0 \cos(\omega t) + (v_0/\omega) \sin(\omega t)\right]^2 \\ &= \frac{1}{2}\,v_0^2 + \frac{1}{2}\,\omega^2 x_0^2 \end{aligned}$$

Aux points x_{min} et x_{max}, on vérifie $\dot{x} = 0$, ce qui implique $x_0\,\omega \sin(\omega t) = v_0 \cos(\omega t)$, soit $\tan(\omega t) = \frac{v_0}{x_0\omega}$. On a donc $\omega t = \arctan\left(\frac{v_0}{x_0\omega}\right)$ à un nombre entier de π près. Par conséquent,

$$x_{max} = -x_{min} = x_0 \cos\left[\arctan\left(\frac{v_0}{x_0\omega}\right)\right] + \frac{v_0}{\omega} \sin\left[\arctan\left(\frac{v_0}{x_0\omega}\right)\right]$$

Et $A = \frac{1}{2}(x_{max} - x_{min}) = x_{max}$. Rappelons ici que

$$\sin x = \frac{\tan x}{\sqrt{1+\tan^2 x}} \quad ; \quad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$$

On obtient alors

$$A = \frac{x_0}{\sqrt{1+\left(\frac{v_0}{x_0\omega}\right)^2}} + \frac{v_0}{\omega}\frac{\frac{v_0}{x_0\omega}}{\sqrt{1+\left(\frac{v_0}{x_0\omega}\right)^2}} = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}$$

La vitesse maximale se calcule de manière semblable. On pose $\ddot{x} = -\omega^2 x = 0$, qui implique $x_0 \cos(\omega t) = -\frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t)$, soit $\tan(\omega t) = -\frac{x_0\omega}{v_0}$. A un nombre entier de π près, on a donc $\omega t = \arctan\left(\frac{x_0\omega}{v_0}\right)$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} v_{max} &= -v_{min} = x_0\omega \sin\left[\arctan\left(\frac{x_0\omega}{v_0}\right)\right] + v_0 \cos\left[\arctan\left(\frac{x_0\omega}{v_0}\right)\right] \\ &= \frac{\frac{x_0^2\omega^2}{v_0} + v_0}{\sqrt{1+\frac{x_0^2\omega^2}{v_0^2}}} = \sqrt{x_0^2\omega^2 + v_0^2} = \omega A \end{aligned}$$

2. L'accélération est uniforme, ce qui implique $v = a_0\, t + v_0$ et $x = \frac{1}{2}\, a_0 t^2 + v_0 t + x_0$, et ainsi :

$$x = \frac{1}{2a_0}\, v^2 - \frac{v_0^2}{2a_0} + x_0 \qquad \Leftrightarrow \qquad v = \sqrt{2a_0(x - x_0) + v_0^2}$$

Montrons que $\frac{1}{2}v^2 - a_0 x$ est une constante du mouvement. Par substitution :

$$\frac{1}{2}v^2 - a_0 x = \frac{1}{2}a_0^2 t^2 + \frac{1}{2}v_0^2 + a_0 v_0 t - a_0 \left(\frac{1}{2}a_0 t^2 + v_0 t + x_0\right) = \frac{1}{2}v_0^2 - a_0 x_0$$

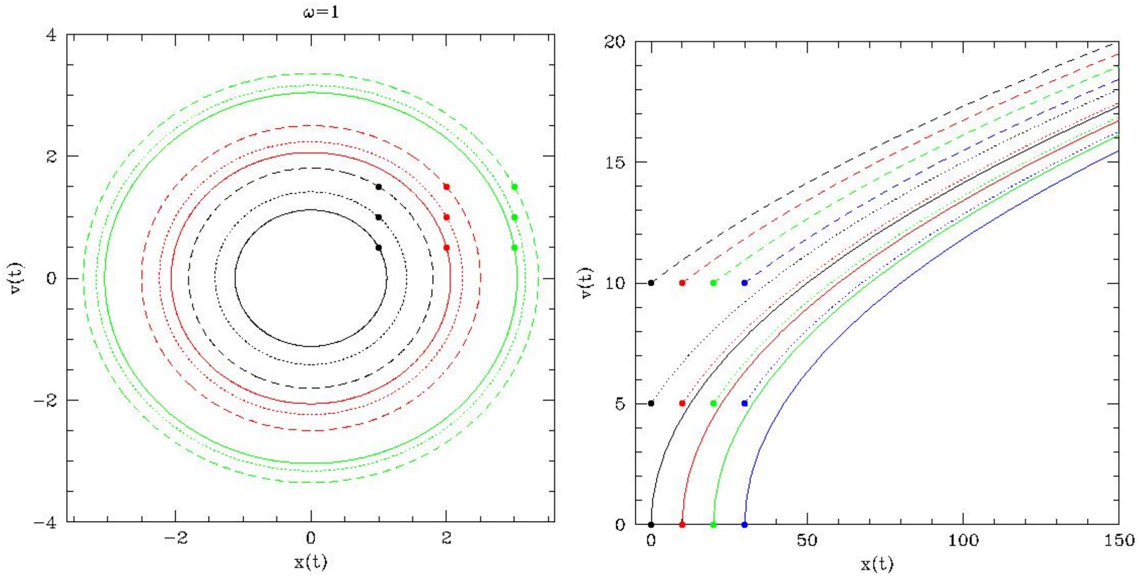


FIG. 1 – Résolution du problème 1, point 1 (à gauche) et point 2 (à droite).

Problème 2 :

Soit un repère orthonormé centré sur la position initiale du promeneur, avec l'axe x perpendiculaire à la berge et dirigé vers l'eau, et l'axe y parallèle à la berge. La berge se trouve à la distance x_b de ce dernier ; la position initiale du promeneur est (0, 0) et la position de la jeune fille est (x_2, y_2) ; la vitesse du promeneur sur la terre et v_1, et v_2 dans l'eau ; le point de la berge où le promeneur saute dans l'eau est (x_b, y). y est donc variable, puisque θ_1 et θ_2 sont variables.

Nous allons écrire l'expression du temps de parcours en fonction des distances connues et des angles θ_1 et θ_2, puis en fonction de θ_1 seul après avoir établi la relation entre les deux angles. Ensuite on dérivera le temps de parcours par rapport à l'unique variable θ_1 et, en l'égalant à 0, on trouvera la relation cherchée.

Comme on a deux segments parcourus chacun à une vitesse différente, le temps de parcours total s'écrit :

$$\begin{aligned} t &= \frac{\left(x_b^2 + x_b^2 \tan^2\theta_1\right)^{1/2}}{v_1} + \frac{\left[(x_2 - x_b)^2 + (x_2 - x_b)^2 \tan^2\theta_2\right]^{1/2}}{v_2} \\ &= \frac{x_b \left(1 + \tan^2\theta_1\right)^{1/2}}{v_1} + \frac{(x_2 - x_b)\left(1 + \tan^2\theta_2\right)^{1/2}}{v_2} \end{aligned}$$

Or on voit que

$$y_2 = x_b \tan\theta_1 + (x_2 - x_b)\tan\theta_2 \quad \Rightarrow \quad \tan\theta_2 = \frac{y_2 - x_b\tan\theta_1}{x_2 - x_b}$$

Ainsi, le temps devient :

$$t = \frac{x_b}{v_1}\left(1+\tan^2\theta_1\right)^{1/2} + \frac{x_2 - x_b}{v_2}\left[1+\left(\frac{y_2 - x_b\tan\theta_1}{x_2 - x_b}\right)^2\right]^{1/2}$$

La dérivée par rapport à θ_1 donne alors :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\theta_1} = 0 \quad &= \quad \frac{x_b}{v_1}\frac{\tan\theta_1(1+\tan^2\theta_1)}{\sqrt{1+\tan^2\theta_1}} - \frac{x_B}{v_2}\,\frac{y_2 - x_b\tan\theta_1}{x_2 - x_b}\,\frac{1+\tan^2\theta_1}{\sqrt{1+\left(\frac{y_2 - x_b\tan\theta_1}{x_2 - x_b}\right)^2}} \\ &= \quad \frac{x_b}{v_1}\tan\theta_1\sqrt{1+\tan^2\theta_1} - \frac{x_b}{v_2}\,\tan\theta_2\,\frac{1+\tan^2\theta_1}{\sqrt{1+\tan^2\theta_2}}\end{aligned}$$

D'où on déduit, puisque $1+\tan^2\theta_i = 1/\cos^2\theta_i$:

$$\frac{\tan\theta_1}{v_1}\frac{1}{\cos\theta_1} = \frac{\tan\theta_2}{v_2}\frac{1}{\cos^2\theta_1}\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta_2}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\sin\theta_1}{v_1} = \frac{\sin\theta_2}{v_2}$$

Remarquons que cette expression est identique à la loi de Snell $n_1\sin\theta_1 = n_2\sin\theta_2$ qui décrit la réfraction de la lumière entre deux milieux d'indice de réfraction $n_i = \mathrm{c}/v_i$. La lumière suit donc le trajet qui minimise son temps de parcours.

Problème 3 :

1. L'accélération moyenne est donnée par

$$< a >= \frac{100 \text{ km/h} \cdot 1000 \text{ m/km}}{5.4 \text{ s} \cdot 3600 \text{ s/h}} = 5.14 \text{ m/s}^2$$

2. On considère un mouvement circulaire uniforme. Paramétrisons la trajectoire par un paramètre s tel que :

$$\mathbf{x} = R\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad s = R\theta = \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{R}$$

Le vecteur $\boldsymbol{\tau}$ est tangentiel à la trajectoire et $\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}/\mathrm{d}s$ est le vecteur perpendiculaire à $\boldsymbol{\tau}$ dirigé vers le centre du cercle. Ces vecteurs sont donnés par :

$$\boldsymbol{\tau}(s) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s} = \begin{pmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s} = -\frac{1}{R}\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}$$

L'accélération normale $|\mathbf{a}_n| =< a >$ et la vitesse v_0 sont données par :

$$\mathbf{a}_n = v^2\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}s} = -\frac{v^2}{R}\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad v_0 = \sqrt{R\,|\mathbf{a}_n|} = 14.34 \text{ m/s} = 51.6 \text{ km/h}$$

3. Le freinage est de décélération constante $v(t) = \dot{v}t + v_0$, et après un intervalle de temps Δt, on a $v(\Delta t) = v_0/2$, ainsi l'accélération de freinage est $\dot{v} = -v_0/(2\Delta t)$. Ce qui donne pour les accélérations tangentielle et normale :

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_\tau &= \dot{v}\,\boldsymbol{\tau} = -\frac{v_0}{2\Delta t}\begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} = -\frac{v_0}{2\Delta t}\,\mathbf{e}_\tau \qquad \text{et soit} \;\; a_\tau = -|\mathbf{a}_\tau| = -\frac{v_0}{2\Delta t} \\ \mathbf{a}_n(t) &= -\frac{v^2(t)}{R}\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} = -\frac{1}{R}\,(v_0 + a_\tau t)^2 \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} = -\frac{1}{R}\,(v_0 + a_\tau t)^2\;\mathbf{e}_r \end{aligned}$$

Le vecteur accélération et sa norme s'obtiennent (puisque $\mathbf{e}_r \perp \mathbf{e}_\tau$) par :

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_n + \mathbf{a}_\tau \quad\Rightarrow\quad |\mathbf{a}|^2 = \mathbf{a}_n^2 + \mathbf{a}_\tau^2 = \frac{1}{R^2}\,(v_0 + a_\tau t)^4 + a_\tau^2$$

<u>Problème 4</u> :

1. Notons R_T le rayon de la Terre. Le mouvement est circulaire uniforme, la vitesse et l'accélération sont donc :

$$|\mathbf{v}| = \frac{2\pi R_T}{24\cdot 60\cdot 60\ \text{s}} = 0.47\ \text{km/s} \;\;\text{et}\;\; |\mathbf{a}| = \frac{v^2}{R_T} = 3.37\cdot 10^{-2}\ \text{m/s}^2$$

2. Notons R_0 le rayon de l'orbite que décrit la Terre autour du Soleil, et R_T le rayon de la Terre. Choisissons alors le Soleil comme origine O du référentiel et supposons la position initiale du point P à l'équateur de sorte que :

$$\mathbf{OP} = \begin{pmatrix} R_0\cos(\Omega t) & -R_T\sin(\omega t) \\ R_0\sin(\Omega t) & +R_T\cos(\omega t) \end{pmatrix}$$

où $\Omega = 2\pi/(365\cdot 24\cdot 60\cdot 60)$ rad/s et $\omega = 2\pi/(24\cdot 60\cdot 60)$ rad/s. De là, on déduit la vitesse et l'accélération en dérivant par rapport à t :

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -R_0\Omega\sin(\Omega t) & -R_T\omega\cos(\omega t) \\ R_0\Omega\cos(\Omega t) & -R_T\omega\sin(\omega t) \end{pmatrix} \;\text{et}\; \mathbf{a} = \begin{pmatrix} -R_0\Omega^2\cos(\Omega t) & +R_T\omega^2\sin(\omega t) \\ -R_0\Omega^2\sin(\Omega t) & -R_T\omega^2\cos(\omega t) \end{pmatrix}$$

La norme de la vitesse vaut :

$$|\mathbf{v}|^2 = R_0^2\Omega^2 + R_T^2\omega^2 + 2R_0\Omega R_T\omega\,[\sin(\Omega t)\cos(\omega t) - \cos(\Omega t)\sin(\omega t)]$$

Le premier terme du membre de droite est nettement plus grand que les deux autres, si bien que : $|\mathbf{v}| \simeq R_0\Omega \simeq 30$ km/s. Enfin la norme de l'accélération vaut :

$$|\mathbf{a}|^2 = R_0^2\Omega^4 + R_T^2\omega^4 + 2R_0\Omega^2 R_T\omega^2\,[\sin(\Omega t)\cos(\omega t) - \cos(\Omega t)\sin(\omega t)]$$

Rappelons que $\cos\alpha\sin\beta = [\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)]/2$, et que $\Omega \ll \omega$, ce qui implique $(\omega+\Omega) \simeq (\omega-\Omega) \simeq \omega$, d'où :

$$|\mathbf{a}|^2 \simeq \left(R_0^2\Omega^4 + R_T^2\omega^4\right)\left(1 - \frac{2R_0\Omega^2 R_T\omega^2}{R_0^2\Omega^4 + R_T^2\omega^4}\sin(\omega t)\right)$$

Or $\sqrt{1-x} \simeq 1 - x/2$ pour $x \ll 1$, ainsi

$$|\mathbf{a}| \simeq 3.45\cdot 10^{-2}\;\;(1 - 0.17\,\sin(\omega t))\;\;\text{m/s}^2$$

Mécanique générale

Énoncé des exercices

Problème 1 :

Un archer vise une cible à 50 m. La vitesse initiale de la flèche étant 65 m/s, à quelle hauteur au-dessus de la cible faut-il viser ? (La position initiale de la flèche est à la hauteur du centre de la cible.)

Problème 2 :

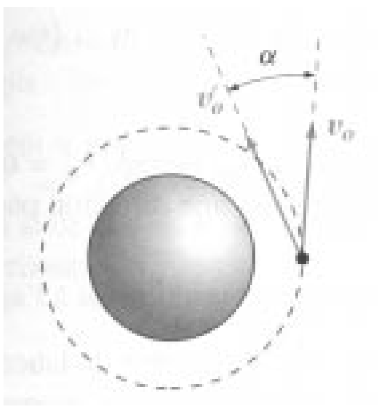
Une voiture ayant renversé un piéton, l'agent fait les constations suivantes :
- deux traces de freinage parallèles d'une longueur de 60 m, commençant 13 m avant le passage pour piétons dont la largeur est de 4 m,
- des débris de phares 13 m après le passage pour piétons,
- les phares de la voiture se trouvent à 1 m de hauteur,
- la voiture peut avoir une accélération de freinage de 5.2 m/s^2.

Attribuer les responsabilités sachant que la vitesse maximale autorisée est de 50 km/h. En particulier, est-ce que la voiture était en excès de vitesse ? Et le piéton traversait-il sur le passage pour piétons ?

Problème 3 :

Un satellite se trouve sur une orbite circulaire autour de la Terre lorsqu'un accident se produit, modifiant la direction de la vitesse sans changer son intensité (voir figure). On admet que le mouvement du satellite par rapport au référentiel géocentrique est décrit par

$$\mathbf{a} = -\kappa_T \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} \qquad \text{où} \qquad \kappa_T = 3.98 \cdot 10^{14}\ \mathrm{m^3 s^{-2}}$$



Montrer que la nouvelle trajectoire est une ellipse de demi-grand axe égal au rayon de la trajectoire circulaire, d'excentricité $e = \sin\alpha$. Calculer l'apogée et le périgée. Le satellite se trouvant initialement à 700 km d'altitude, pour quelles valeurs de l'angle α le satellite s'écrasera-t-il sur la Terre ? Le rayon de la Terre vaut $R_T = 6.37 \cdot 10^6$ m.

<u>Problème 4</u> :

Une comète est observée à 100 millions de km du Soleil avec une vitesse de 50 km/s. Sachant qu'à cet instant la vitesse de la comète fait un angle de 45^o avec le vecteur comète-Soleil, quelle sera la nature de la trajectoire ? Calculer le périhélie.

Mécanique générale

Corrigé des exercices

Problème 1 :

Soit un repère orthonormé centré sur la position initiale de la flèche avec l'axe x horizontal dans le sens de la trajectoire et l'axe y vertical pointant vers le haut. Soit α l'angle entre l'axe des x et le vecteur vitesse initiale $\mathbf{v}_0$, de norme $v_0 = 65$ m/s. Le mouvement de la flèche est décrit par :

$$\begin{cases} x(t) & = v_0 \cos\alpha \; t \\ y(t) & = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin\alpha \; t \end{cases}$$

L'impact de la flèche se produit en t_1 lorsque $x(t_1) = x_1 = 50$ m et $y(t_1) = 0$ m, ainsi :

$$0 = y(t_1) = -\frac{1}{2}gt_1^2 + v_0 \sin\alpha \; t_1 = -\frac{1}{2}g\left(\frac{x_1}{v_0\cos\alpha}\right)^2 + x_1 \tan\alpha$$

D'où $\sin(2\alpha) = x_1\, g/v_0^2 \;\Rightarrow\; \alpha = 3.3^o$. Il faut donc viser une hauteur $h = x_1 \tan\alpha = 2.9$ m au-dessus de la cible.

Problème 2 :

Soit un repère orthonormé centré sur la position de la voiture au commencement du freinage, avec l'axe x horizontal dans le sens de la trajectoire de la voiture, et l'axe y vertical pointant vers le haut. La voiture suit les équations du mouvement :

$$\begin{cases} x(t) & = \frac{1}{2}a_0t^2 + v_0t + x_0 \\ v(t) & = a_0t + v_0 \end{cases}$$

avec $x_0 = 0$ m et $a_0 = -5.2$ m/s^2. A l'instant t_1 où la voiture s'arrête, $x(t_1) = x_1 = 60$ m et $v(t_1) = v_1 = 0$ m/s. Ainsi $t_1 = -v_0/a_0$, et $v_0 = \sqrt{-2a_0x_1} \simeq 90$ km/h. La voiture était donc largement en excès de vitesse.

Soient (x_2, y_2) les coordonnées des débris de phares à l'instant t_2 de la collision, avec $y_2 = 1$ m. Et soient (x_3, y_3) les coordonnées où l'agent a retrouvé ces débris. On sait que $(x_3, y_3) = (30, 0)$ m. Au moment de la collision, les débris ont une vitesse horizontale v_2. Ils parcourent ensuite en chute libre une distance horizontale $\Delta x = x_3 - x_2$ et une hauteur $-\Delta y = y_3 - y_2$, telles que :

$$\begin{cases} x_3 & = v_2(t_3 - t_2) + x_2 = (a_0t_2 + v_0)(t_3 - t_2) + \frac{1}{2}a_0t_2^2 + v_0t_2 \\ \\ y_3 & = -\frac{1}{2}g(t_3 - t_2)^2 + y_2 \qquad \Rightarrow \qquad t_3 - t_2 = \sqrt{2\Delta y/g} \end{cases}$$

Ce qui donne

$$\frac{a_0}{2}t_2^2 + \left[a_0\sqrt{\frac{2\Delta y}{g}} + v_0\right]t_2 + \left[v_0\sqrt{\frac{2\Delta y}{g}} - x_3\right] = 0$$

Cette équation en t_2 a deux solutions, mais l'une d'entre elles n'est pas physique puisqu'elle donne $t_2 > t_1$. Il ne reste donc que :

$$t_2 = \frac{1}{a_0}\left(-\left[a_0\sqrt{\frac{2\Delta y}{g}} + v_0\right] + \sqrt{\left[a_0\sqrt{\frac{2\Delta y}{g}} + v_0\right]^2 - 2a_0\left[v_0\sqrt{\frac{2\Delta y}{g}} - x_3\right]}\right) = 0.93 \text{ s}$$

Ainsi au moment de la collision, le piéton se trouvait en $x_2 = \frac{1}{2}a_0t_2^2 + v_0t_2 = 21.0$ m, c'est-à-dire à 4.0 m du passage pour piétons.

Problème 3 :

Sur l'orbite circulaire de rayon $r_0 = R_T + h$, le satellite avait une vitesse $\mathbf{v}_0$ telle que :

$$|\mathbf{v}_0|^2/r_0 = |\mathbf{a}_n| = |\mathbf{a}| = \kappa_T/r_0^2 \qquad \Rightarrow \qquad v_0 = |\mathbf{v}_0| = \sqrt{\kappa_T/r_0}$$

L'accélération est en r^{-2}, il existe donc 2 constantes du mouvement $\mathbf{C}'$ et K'. Déterminons ces constantes immédiatement après l'accident, sachant que $|\mathbf{v}_0'| = v_0$:

$$C' = |\mathbf{C}'| = |\mathbf{r_0} \wedge \mathbf{v}_0'| = r_0v_0\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = r_0v_0\cos\alpha \quad \text{et} \quad K' = \frac{1}{2}v_0^2 - \frac{\kappa_T}{r_0} = -\frac{1}{2}\frac{\kappa_T}{r_0}$$

On sait que le demi-grand axe a de la nouvelle orbite vérifie $|K'| = |\kappa_T|/(2a)$ et donc $a = |\kappa_T/(2K')| = r_0$. En outre :

$$|\kappa_T| = C'^2\frac{a}{b^2} \qquad \Rightarrow \qquad e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \frac{C'^2}{|\kappa_T|a}} = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \sin\alpha$$

On calcule le périgée $r_{min} = a(1-e) = r_0(1-\sin\alpha)$ et l'apogée $r_{max} = a(1+e) = r_0(1+\sin\alpha)$. Le satellite s'écrase sur la Terre si :

$$r_{min} \leq R_T \qquad \Leftrightarrow \qquad \sin\alpha \geq 1 - \frac{R_T}{r_0} \qquad \Rightarrow \qquad \alpha \geq 5.7^o$$

Problème 4 :

La comète est située en $r_0 = 10^{11}$ m avec une vitesse $v_0 = 5 \cdot 10^4$ m/s. L'accélération est :

$$\mathbf{a} = -\kappa_S\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} \qquad \text{où} \qquad \kappa_S = 1.327 \cdot 10^{20} \text{ m}^3\text{s}^{-2}$$

Et les constantes du mouvement sont :

$$\begin{aligned} C &= |\mathbf{C}| = |\mathbf{r_0} \wedge \mathbf{v}_0| = r_0v_0\sin\left(\tfrac{\pi}{2} + \alpha\right) = r_0v_0\cos\alpha = 3.5 \cdot 10^{15} \text{ m}^2\text{s}^{-1} \\ K &= \tfrac{1}{2}v_0^2 - \tfrac{\kappa_S}{r_0} = -7.7 \cdot 10^7 \text{ m}^2\text{s}^{-2} \end{aligned}$$

Dans le cas présent $K < 0$, la trajectoire est donc une ellipse. De plus le demi-grand axe a vérifie $|K| = |\kappa_S|/(2a)$, ainsi $a = 8.6 \cdot 10^{11}$ m. En outre :

$$|\kappa_S| = C^2\frac{a}{b^2} \qquad \Rightarrow \qquad e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \frac{C^2}{|\kappa_S|a}} = 0.94$$

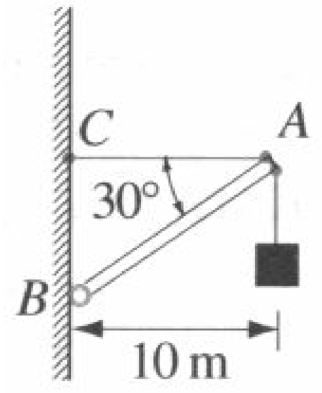
Le périhélie vaut $r_{min} = a(1-e) = 0.5 \cdot 10^{11}$ m.

Mécanique générale

Énoncé du test

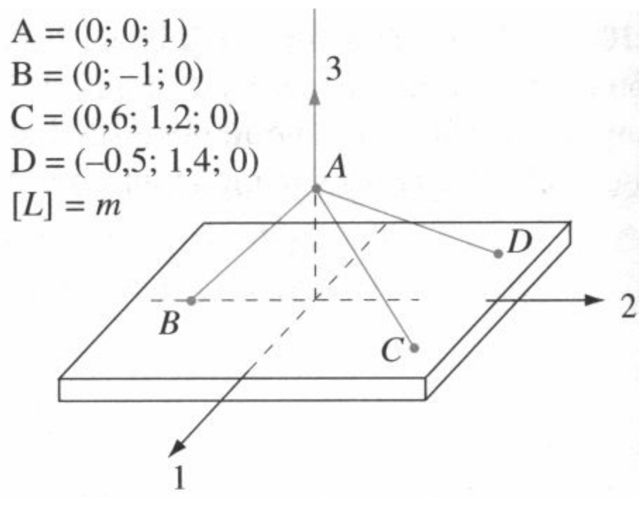
Problème 1 :

Après examen de la figure ci-dessous, trouvez les forces $\mathbf{F}_\mathrm{B}$ et $\mathbf{F}_\mathrm{C}$ exercés par le mur. Le câble est de poids négligeable et les poids de la poutre et du corps suspendu sont 15 et 300 kg. Au point B il y a un pivot, c'est-à-dire que le moment des forces agissant sur B est nul.

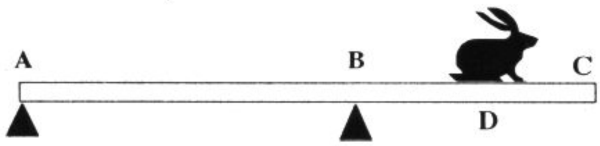


Problème 2 :

Un hélicoptère doit soulever une dalle de 900 kg. Les câbles sont attachés selon le schéma de la figure ci-dessous. Déterminer la force de tension dans chaque câble.



Problème 3 : Calculer les forces qui s'exercent sur la poutre, sachant que AB=3 m, AC=5 m, AD=4 m, masse de la poutre M=6 kg et masse du lapin m=1.5 kg.



Problème 4 :

Un corps se déplace sur le diamètre d'un disque tournant à vitesse angulaire $\dot{\theta} = \omega_0$ constante autour de son axe, qui est perpendiculaire au plan du disque. Trouver la trajectoire, la vitesse $\mathbf{v}$ et l'accélération $\mathbf{a}$ du corps (en fonction de θ), sachant qu'il s'éloigne du centre à vitesse $\dot{r} = v_0$ constante, et que $r = 0$ et $\theta = 0$ à $t = 0$. Calculer les accélérations tangentielle et normale. Quel est le rayon de courbure de la trajectoire ?

Indications :

- On utilisera les coordonnées polaires.
- Pour le calcul des composantes tangentielle et normale de l'accélération, il est utile de se souvenir que le vecteur unité dans la direction tangentielle est $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{v}/|\mathbf{v}|$

Problème 5 :

Un village situé à une altitude de 1400 m est ravitaillé par un avion volant à 250 km/h et 1700 m d'altitude. A quelle distance horizontale du village le pilote doit-il lâcher sa cargaison ? On néglige les frottements (la cargaison n'a pas de parachute, seulement des airbags).

Mécanique générale

Corrigé du test

Problème 1 :

Ecrivons les deux critères de stabilité statique, en appelant $\mathbf{F}_A$, $\mathbf{F}_B$, $\mathbf{F}_C$ les forces qui s'appliquent aux points respectifs A, B et C, et $\mathbf{F}_D$ le poids de la poutre qui s'applique en son centre de gravité, au point D situé à mi-chemin de B et de A. On place l'origine O au point B, et on définit un axe x horizontal et un axe y vertical.

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_A + \mathbf{F}_B + \mathbf{F}_C + \mathbf{F}_D &= \mathbf{0} \qquad (1) \\ \mathbf{OA} \wedge \mathbf{F}_A + \mathbf{OC} \wedge \mathbf{F}_C + \mathbf{OD} \wedge \mathbf{F}_D &= \mathbf{0} \qquad (2) \end{aligned}$$

Soit $M = 300$ kg la masse du corps suspendu, $m = 15$ kg la masse de la poutre, la longueur $CA = 10$ m et l'angle $\alpha = 30$ degrés. Les conditions 1 et 2 s'écrivent plus explicitement :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -M\,g \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_B^x \\ F_B^y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_C \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -m\,g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{CA}{\cos\alpha}\,M\,g \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \frac{CA}{\cos\alpha}\,F_C \cdot \sin\alpha + \frac{CA}{2\cos\alpha}\,m\,g \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = 0$$

La condition 1 nous donne immédiatement

$$\begin{aligned} F_B^x &= -F_C \\ F_B^y &= (M + m)\,g = 315\,g \end{aligned}$$

et la condition 2 fournit :

$$F_C = g\,(M + \frac{1}{2}m)\,\cot\alpha$$

Avec $\alpha = 30°$, $M = 300$ kg et $m = 15$ kg,

$$\begin{aligned} F_C = g \cdot 532.6 \text{ N} = 532.6 \text{ kgf} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{F}_C &= \begin{pmatrix} -532.6 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ kgf} \quad \Rightarrow \quad |\mathbf{F}_C| = 532.6 \text{ kgf} \\ \mathbf{F}_B &= \begin{pmatrix} 532.6 \\ 315 \end{pmatrix} \text{ kgf} \quad \Rightarrow \quad |\mathbf{F}_B| = 619 \text{ kgf} \end{aligned}$$

Problème 2 :

Ecrivons les deux conditions d'équilibre, en désignant les forces de tension dans les trois câbles par $\mathbf{F}^A$, $\mathbf{F}^B$ et $\mathbf{F}^C$:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^B + \mathbf{F}^C + \mathbf{F}^D + m\mathbf{g} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{OB} \wedge \mathbf{F}^B + \mathbf{OC} \wedge \mathbf{F}^C + \mathbf{OD} \wedge \mathbf{F}^D &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

La première condition s'écrit explicitement

$$\begin{pmatrix} 0 \\ F_y^B \\ F_z^B \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_x^C \\ F_y^C \\ F_z^C \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_x^D \\ F_y^D \\ F_z^D \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -m\mathbf{g} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et la seconde

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ F_y^B \\ F_z^B \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.6 \\ 1.2 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} F_x^C \\ F_y^C \\ F_z^C \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0.5 \\ 1.4 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} F_x^D \\ F_y^D \\ F_z^D \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} -F_z^B \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1.2F_z^C \\ -0.6F_z^C \\ 0.6F_y^C - 1.2F_x^C \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1.4F_z^D \\ 0.5F_z^D \\ -0.5F_y^D - 1.4F_x^D \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

La première condition implique :

$$\begin{aligned}
F_x^C &= -F_x^D && (3) \\
F_y^B &= -(F_y^C + F_y^D) && (4) \\
F_z^B + F_z^C + F_z^D &= m\,g && (5)
\end{aligned}$$

et la seconde :

$$\begin{aligned}
F_z^B &= 1.2F_z^C + 1.4F_z^D \underline{= 2.4F_z^D} && (6) \\
F_z^C &= \frac{5}{6}F_z^D && (7) \\
F_y^C &= 2F_x^C + \frac{5}{6}F_y^D + \frac{7}{3}F_x^D && (8)
\end{aligned}$$

A ces six équations s'ajoutent les coordonnées des points A, B, C et D, qui permettent en particulier d'écrire

$$F_y^B = F_z^B$$

puisque le segment BA est incliné de 45° sur le plan BCD, et

$$F_x^B = 0$$

Partant de (3) et y substituant (4) et (5), on obtient $(2.4 + \frac{5}{6} + 1)F_z^D = mg$, donc

$$\begin{aligned}
F_z^D &= 0.23622\,m\,g \\
F_z^B &= 2.4\,F_z^D = 0.56693\,m\,g = F_y^B \\
F_z^C &= \frac{5}{6}F_z^D = 0.19685\,m\,g
\end{aligned}$$

Comme $F_x^B = 0$, on peut déjà trouver le module de $\mathbf{F}^B$:

$$\underline{F^B} = \sqrt{2} \cdot 0.56693\,m\,g = 0.80176\,m\,g \underline{= 721.6 \text{ kgf} = 7078.7 \text{ N}}$$

Utilisons à présent la géométrie de la situation :

$$\begin{aligned}
\frac{OA}{CA} = \frac{F_z^C}{F^C} \quad \Rightarrow \quad \underline{F^C} &= \frac{CA}{OA} F_z^C = \sqrt{0.6^2 + 1.2^2 + 1}\, F_z^C = \sqrt{2.8}\, F_z^C \\
&= \underline{0.3294\, m\, g = 296.45 \text{ kgf} = 2908.2 \text{ N}} \\
\frac{OA}{DA} = \frac{F_z^D}{F^D} \quad \Rightarrow \quad \underline{F^D} &= \frac{DA}{OA} F_z^D = \sqrt{0.5^2 + 1.4^2 + 1}\, F_z^D = \sqrt{3.21}\, F_z^D \\
&= \underline{0.4232\, m\, g = 380.90 \text{ kgf} = 3736.6 \text{ N}}
\end{aligned}$$

Problème 3 :

En premier lieu, il s'agit de déterminer le centre de masse (CDM) de la poutre : on a une masse linéique

$$\rho^{(\ell)} = \frac{M}{AC} = \frac{6}{5} \text{ kg m}^{-1}$$

et, en plaçant l'origine O en A, on obtient formellement

$$\underline{OG} = M^{-1} \int_0^6 d\ell\, \rho^{(\ell)}(x)\, x = \frac{1}{6}\frac{6}{5} \int_0^6 x\, dx \underline{= 2.5 \text{ m}}$$

A présent, on peut appliquer les deux criteres de stabilité, à savoir que la résultante des forces est nulle, ainsi que la somme des moments. Avec un axe x horizontal et un axe y vertical, l'origine étant en A, on a deux forces de réaction fournie par les supports, $\mathbf{F}_A$ et $\mathbf{F}_B$; toutes les forces n'ont qu'une composante selon y :

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_A + \mathbf{P}_{poutre} + \mathbf{F}_B + \mathbf{P}_{lapin} &= \mathbf{0} \\
F_A + F_B - 6 \cdot g - 1.5 \cdot g &= 0 \\
\Rightarrow \quad F_A + F_B &= 7.5\, g \\
2.5 \cdot P_{poutre} - 3 \cdot F_B + 4 \cdot P_{lapin} &= 0 \\
\Rightarrow \quad 2.5 \cdot 6\, g - 3 \cdot F_B + 4 \cdot 1.5\, g &= 0 \\
\Rightarrow \quad F_B &= 7\, g
\end{aligned}$$

On trouve donc finalement

$$\underline{F_A = 0.5 \text{ kgf}}, \quad \underline{F_B = 7.0 \text{ kgf}}$$

Problème 4 :

On choisit les coordonnées polaires qui sont naturelles ici. En admettant pour simplifier que $\theta = 0$ en $t = 0$, on a la trajectoire paramétrique

$$\begin{aligned}
r(t) &= v_0 t \\
\theta(t) &= \omega_0 t
\end{aligned}$$

La trajectoire $r(\theta)$ s'écrit donc

$$r = \frac{v_0}{\omega_0}\, \theta$$

Il s'agit d'une spirale d'Archimède. En coordonnées polaires, la vitesse s'écrit

$$\underline{\mathbf{v}} = \dot{r}\, \mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\, \mathbf{e}_\theta = v_0\, \mathbf{e}_r + r\omega_0\, \mathbf{e}_\theta = \underline{v_0\, \mathbf{e}_r + v_0\, \theta\, \mathbf{e}_\theta}$$

et l'accélération prend la forme

$$\begin{aligned}
\mathbf{a} &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,\mathbf{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\,\mathbf{e}_\theta \\
\underline{\mathbf{a}} &= -r\omega_0^2\,\mathbf{e}_r + 2\,v_0\,\omega_0\,\mathbf{e}_\theta \underline{= -v_0\,\omega_0\,\theta\,\mathbf{e}_r + 2\,v_0\,\omega_0\,\mathbf{e}_\theta}
\end{aligned}$$

L'accélération tangentielle est donnée par la dérivée temporelle du module de la vitesse :

$$v = \sqrt{v_0^2 + v_0^2\theta^2} = v_0\sqrt{1+\theta^2} \quad \Rightarrow \quad a_\tau = \dot{v} = \frac{v_0}{2\sqrt{1+\theta^2}}\,2\theta\dot{\theta} = \frac{\omega_0\,v_0\,\theta}{\sqrt{1+\theta^2}}$$

Il est également possible de la calculer par le produit scalaire de $\mathbf{a}$ et de $\boldsymbol{\tau}$:

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{v_0\,\mathbf{e}_r + v_0\,\theta\,\mathbf{e}_\theta}{v_0\,\sqrt{1+\theta^2}} = \frac{\mathbf{e}_r + \theta\,\mathbf{e}_\theta}{\sqrt{1+\theta^2}}$$

$$a_\tau = \mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\tau} = (-v_0\omega_0\theta \ \ 2v_0\omega_0)\begin{pmatrix}1\\ \theta\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\theta^2}} = \frac{v_0\omega_0\theta}{\sqrt{1+\theta^2}}$$

Pour obtenir l'accélération tangentielle, il faut définir les composantes du vecteur unité $\mathbf{n}$. On voit facilement que $n_x = -\tau_y$ et que $n_y = \tau_x$, donc

$$a_n = \mathbf{a}\cdot\mathbf{n} = (-v_0\omega_0\theta \ \ 2v_0\omega_0)\begin{pmatrix}-\theta\\ 1\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\theta^2}} = v_0\omega_0\frac{2+\theta^2}{\sqrt{1+\theta^2}}$$

Pour obtenir le rayon de courbure ρ, il faut se souvenir que

$$\mathbf{a}_n = v^2\cdot\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = v^2\cdot\frac{\mathbf{n}}{\rho}$$

On a donc

$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{v_0^2(1+\theta^2)\sqrt{1+\theta^2}}{v_0\omega_0(2+\theta^2)} = \frac{v_0(1+\theta^2)^{3/2}}{\omega_0(2+\theta^2)}$$

<u>Problème 5</u> :

La cargaison tombe en chute libre sur une hauteur $h = 300$ m et est animée de la même vitesse horizontale que l'avion, à savoir 250 km/h ou 69.444 m/s. L'accélération verticale est celle de la pesanteur, $g = 9.81$ m/s^2. On a $h = \frac{1}{2}\,g\,t^2$, où t est le temps de chute qui vaut donc

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 7.82 \text{ s} \quad \Rightarrow \quad d = v_0\,t = 69.44\cdot t = 543 \text{ m}$$

Mécanique générale

Énoncé des exercices

Problème 1 :

La fréquence de vibration d'une molécule HCl est $\nu = 8.5 \cdot 10^{13}\,\mathrm{s}^{-1}$. En admettant que le Cl est immobile et que le mouvement de H est oscillatoire harmonique d'amplitude 0.1 Å, quelle est la vitesse maximale et quelle est l'accélération maximale ?

Problème 2 :

Un satellite se trouve sur une orbite circulaire à 400 km de la Terre. Quelle est la vitesse tangentielle de lancement nécessaire pour atteindre la planète Neptune et quelle sera la durée du voyage ? On négligera l'excentricité des orbites planétaires, et on admettra pour ce calcul que que le mouvement du satellite par rapport au référentiel de Kepler est décrit par l'équation

$$\mathbf{a} = -\varkappa_s \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} \quad \text{avec} \quad \varkappa_s = 1.327 \cdot 10^{20}\ \mathrm{m^3 s^{-2}}$$

Quelle sera la vitesse de lancement par rapport à la Terre si le satellite est lancé dans le sens de la rotation de la Terre autour du Soleil ?

Rappel :
- Rayon de la Terre : $R_T = 6.38 \cdot 10^6$ m
- Rayon de l'orbite terrestre : $a_T = 1.496 \cdot 10^{11}$ m
- Rayon de l'orbite de Neptune : $a_N = 4.497 \cdot 10^{12}$ m

Problème 3 :

1. En admettant que le mouvement de la Terre autour du Soleil est circulaire uniforme, évaluer la période de rotation T de la Terre autour de l'axe des pôles par rapport au référentiel de Képler. T est en fait la durée du jour sidéral à mieux que 10^{-2} s près.
2. Sachant que l'orbite de la Terre est en réalité une ellipse d'excentricité 0.017, évaluer la différence entre la durée du jour solaire au périhélie et à l'aphélie.

Pour ces estimations, on prendra l'axe des pôles perpendiculaire au plan de la trajectoire.

Problème 4 :

Soit r_p et v_p le périhélie et la vitesse correspondante d'une comète dont l'orbite est une parabole. Établir les résultats suivants :

1. l'équation différentielle du mouvement est

$$\dot{\theta} = \frac{v_p}{r_p} \cos^4 \frac{\theta}{2}$$

2. l'intervalle de temps pendant lequel la distance de la comète au Soleil est inférieure à $r_T = 1$ UA est, en années,

$$\frac{\sqrt{2}}{3\pi} \sqrt{1 - \frac{r_p}{r_T}} \cdot \left(1 + 2\frac{r_p}{r_T}\right)$$

   On tiendra compte des relations

$$\int \frac{d\theta}{\cos^4 \frac{\theta}{2}} = 2\left(\tan\frac{\theta}{2} + \frac{1}{3}\tan^3\frac{\theta}{2}\right) \qquad \text{et} \qquad \left(\tan\frac{\theta}{2}\right)^2 = \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$$

Problème 5 :

Un électron de vitesse $v_0 = 4 \cdot 10^3$ m/s se trouve à une distance de 100 Å d'un proton. En admettant que le proton reste immobile et que le mouvement de l'électron est tel que

$$\mathbf{a} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{m_e}\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3}$$

où O est la position du proton et m_e, $-e$ la masse et la charge de l'électron, y aura-t-il formation d'un atome d'hydrogène ?

Rappel :

- $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8.9876 \cdot 10^9 \text{ N m}^2\text{ C}^{-2}$
- $e = 1.602 \cdot 10^{-19}$ C
- $m_e = 9.109 \cdot 10^{-31}$ kg

Mécanique générale

Corrigé des exercices

Problème 1 :

Le mouvement oscillatoire harmonique est de la forme (eq. 6.21, p. 147 du livre de Gruber & Benoit)

$$\begin{aligned} x(t) &= A\cos(\omega t+\delta) \\ \Rightarrow \dot{x}(t) &= -A\omega\sin(\omega t+\delta) \Rightarrow v_{max} = A\omega = 5.341\ \mathrm{km\,s^{-1}} \\ \Rightarrow \ddot{x}(t) &= -A\omega^2\cos(\omega t+\delta) \Rightarrow a_{max} = A\omega^2 = 2.852\cdot 10^{18}\ \mathrm{m\,s^{-2}} \end{aligned}$$

Avec

$$\nu = 8.5\cdot 10^{13}\ \mathrm{s^{-1}} \quad \Rightarrow \quad \omega = 2\pi\nu = 5.341\cdot 10^{14}\ \mathrm{radian\,s^{-1}}$$

et $A = 0.1$ Å $= 10^{-11}$ m.

Problème 2 :

Avec ce type de mouvement central, on a la constante du mouvement

$$\frac{1}{2}\mathbf{v}^2 - \frac{\varkappa_s}{|\mathbf{x}|} = K \quad \text{avec} \quad |K| = \frac{|\varkappa_s|}{2\,a}$$

où a est le demi-grand axe de l'orbite de transfert (appelée aussi orbite de Hohmann). On suppose en effet que le satellite est propulsé de sorte que son trajet de la Terre à Neptune soit une demi-ellipse tangente à l'orbite terrestre à son périhélie (au point T), et tangente à l'orbite de Neptune à son aphélie (point N). Si a_T et a_N sont les rayons des orbites de la Terre et de Neptune respectivement, alors le demi-grand axe de l'orbite de transfert vaudra (en négligeant le rayon de la Terre et l'altitude h du satellite)

$$a = \frac{1}{2}(a_T + a_N) = 2.3233\cdot 10^{12}\ \mathrm{m}$$

La durée du voyage sera égale à la moitié de la période orbitale :

$$\frac{1}{2}T_{orb} = \pi\sqrt{\frac{a^3}{\varkappa_s}} = 9.658\cdot 10^8\ \mathrm{s} = 30.6\ \text{ans}$$

La vitesse en T vaudra

$$\frac{1}{2}v_T^2 = K + \frac{\varkappa_s}{a_T} = \varkappa_s\left(\frac{1}{a_T} - \frac{1}{2a}\right)$$

car $K = -\frac{\varkappa_s}{2a}$

$$\Rightarrow \quad v_T = \sqrt{2\,\varkappa_s\left(\frac{1}{a_T} - \frac{1}{2a}\right)} = 41436\ \mathrm{m\,s^{-1}} = 41.4\ \mathrm{km\,s^{-1}}$$

Il s'agit de la vitesse dans le référentiel de Kepler, donc de la vitesse "absolue". Pour connaître le supplément de vitesse qu'il faut fournir, et donc la quantité de carburant nécessaire, on doit soustraire la vitesse du satellite sur son orbite autour de la Terre et la vitesse orbitale de la Terre autour du Soleil :

1. Vitesse du satellite sur son orbite autour de la Terre :

$$v_{sat} = \sqrt{\frac{\varkappa_T}{a_{sat}}} = \sqrt{\frac{\varkappa_T}{R_T + h}}$$

   Avec $\varkappa_T = 3.98 \cdot 10^{14}$ m^3 s^{-2}, $R_T = 6.38 \cdot 10^{38}$ m et $h = 400$ km $= 4 \cdot 10^5$ m, on trouve

$$v_{sat} = 7.66 \text{ km}\,\text{s}^{-1}$$

   Le supplément de vitesse nécessaire par rapport à la vitesse orbitale du satellite est donc $v_T - 7.66 = 33.68$ km s^{-1}, dont une grande partie est fournie par la vitesse orbitale de la Terre calculée ci-dessous.

2. Vitesse orbitale de la Terre autour du Soleil :

$$v_{Torb} = \sqrt{\frac{\varkappa_s}{a_T}} = 29.78 \text{ km}\,\text{s}^{-1}$$

La vitesse de lancement (à partir de l'orbite du satellite autour de la Terre) vaudra donc seulement :

$$v_{lancement} = 33.68 - 29.78 = 3.9 \text{ km}\,\text{s}^{-1}$$

Problème 3 :

1. Si l'année compte 365.25 jours *solaires*, elle compte 366.25 jours *sidéraux*. En effet, par rapport à une direction fixe dans le référentiel de Kepler, une rotation de la Terre sur elle-même s'accomplit en un peu moins d'un jour solaire. Cela est dû au mouvement orbital de la Terre, qui oblige celle-ci à tourner d'un petit angle supplémentaire pour retrouver le Soleil au méridien, ce petit angle correspondant au parcours orbital angulaire $\Delta\theta$ effectué en un jour. Donc un jour sidéral dure

$$T = 24 \cdot 3600 \frac{365.25}{366.25} = 86400 \cdot 0.997270 = 86164.1 \text{ s} = 23\,\text{h}\,56\,\text{min}\,04.1\,\text{s}$$

   et l'angle diurne moyen, exprimé en secondes de temps, vaut donc :

$$< \Delta\theta >= 235.9 \text{ s} = 3\,\text{min}\,55.9\,\text{s}$$

2. Pour tout mouvement central, on a $r^2\,\dot{\theta} = C$ qui n'est autre que la loi des aires de Kepler. Par conséquent, on peut écrire pour l'angle diurne au périhélie, à l'aphélie et moyen respectivement :

$$\Delta\theta_{per} = \frac{C}{r_{min}^2}\Delta t \;;\; \Delta\theta_{ap} = \frac{C}{r_{max}^2}\Delta t \;;\; < \Delta\theta >= \frac{C}{a_T^2}\Delta t$$

   On a donc

$$\frac{\Delta\theta_{per}}{< \Delta\theta >} = \left(\frac{a_T}{r_{min}}\right)^2 \quad ; \quad \frac{\Delta\theta_{ap}}{< \Delta\theta >} = \left(\frac{a_T}{r_{max}}\right)^2$$

La formule 6.63, p. 161 du livre de Gruber & Benoit donnent $r_{min} = a(1-e)$ et $r_{max} = a(1+e)$. Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta\theta_{per}}{<\Delta\theta>} &= \left(\frac{1}{1-e}\right)^2 = 1.03489 \\
\Rightarrow \quad \Delta\theta_{per} &= 1.03489 \cdot 235.9 = 244.1 =<\Delta\theta> +8.2 \text{ s} \\
\frac{\Delta\theta_{ap}}{<\Delta\theta>} &= \left(\frac{1}{1+e}\right)^2 = 0.966848 \\
\Rightarrow \quad \Delta\theta_{ap} &= 0.966848 \cdot 235.9 = 228.1 =<\Delta\theta> -7.8 \text{ s}
\end{aligned}$$

En un jour, la Terre doit faire en moyenne un complément de tour $<\Delta\theta>=$ 235.9 s (en plus d'une rotation sidérale) pour retrouver le Soleil au méridien. Mais au périhélie, elle doit faire un complément de tour $\Delta\theta_{per} = 244.1$ s, soit 8.2 s de plus que la moyenne. A l'aphélie, ce complément se réduit à $\Delta\theta_{ap} = 228.1$ s, soit 7.8 s de moins que la moyenne.

Problème 4 :

1. La trajectoire est une parabole, donc $e = 1$ et $K = 0$, et l'équation de la trajectoire en coordonnées polaires se réduit à (6.59 p. 160) :

$$r\,(1+\cos\theta) = d$$

Dérivons par rapport au temps :

$$\begin{aligned}
\dot{r}\,(1+\cos\theta) - r\sin\theta\,\dot{\theta} &= 0 \\
\dot{\theta} &= \frac{\dot{r}}{r}\,\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta} = \dot{r}\,\frac{(1+\cos\theta)^2}{d\,\sin\theta} \\
\dot{r} = \frac{Ce}{p}\sin\theta \quad (\text{p.}165) \quad \Rightarrow \quad \dot{\theta} &= \frac{Ce}{ed}\,\sin\theta\,\frac{(1+\cos\theta)^2}{d\,\sin\theta} = \frac{C}{d^2}\,(1+\cos\theta)^2 \\
&= \frac{4C}{d^2}\,\cos^4\frac{\theta}{2} \\
C = r^2\dot{\theta} = r_p\,v_p \quad (\text{p.}159) \quad ; \quad d &= 2\,r_p \quad (\text{p.}161) \\
\Rightarrow \quad \underline{\dot{\theta}} &= \underline{\frac{v_p}{r_p}\,\cos^4\frac{\theta}{2}}
\end{aligned}$$

2. Intégrons l'élément de temps en tenant compte de l'équation du mouvement obtenue ci-dessus, entre les limites $-\theta_1$ et $+\theta_1$, qui sont les angles pour lesquels $r = r_T$.

$$\begin{aligned}
T &= \int_{-\theta_1}^{+\theta_1} \frac{dt}{d\theta}\,d\theta = \int_{-\theta_1}^{+\theta_1} \frac{d\theta}{\dot{\theta}} = \frac{r_p}{v_p}\int_{-\theta_1}^{+\theta_1} \frac{d\theta}{\cos^4\frac{\theta}{2}} \\
&= \frac{4\,r_p}{v_p}\left(\tan\frac{\theta_1}{2} + \frac{1}{3}\tan^3\frac{\theta_1}{2}\right) = \frac{4\,r_p}{v_p}\,\tan\frac{\theta_1}{2}\,\left(1+\frac{1}{3}\tan^2\frac{\theta_1}{2}\right) \\
&= \frac{4\,r_p}{v_p}\left(\frac{1-\cos\theta_1}{1+\cos\theta_1}\right)^{1/2}\left(1+\frac{1}{3}\,\frac{1-\cos\theta_1}{1+\cos\theta_1}\right)
\end{aligned}$$

Or θ_1 est défini par l'équation de la trajectoire en coordonnées polaires, et on se souvient que pour une parabole, $d = 2\,r_p$:

$$r_T\,(1+\cos\theta_1) = d \quad \Rightarrow \quad 1+\cos\theta_1 = 2\,\frac{r_p}{r_T} \;\Leftrightarrow\; 1-\cos\theta_1 = 2\left(1-\frac{r_p}{r_T}\right)$$

On obtient alors

$$\begin{aligned} T &= \frac{4\,r_p}{v_p}\left(\frac{1-\frac{r_p}{r_T}}{r_p/r_T}\right)^{1/2}\left(1+\frac{1}{3}\,\frac{1-\frac{r_p}{r_T}}{r_p/r_T}\right) \\ &= \frac{4\,r_p}{v_p}\left(\frac{r_T}{r_p}\right)^{1/2}\sqrt{1-\frac{r_p}{r_T}}\,\frac{r_T}{r_p}\left(\frac{r_p}{r_T}+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\,\frac{r_p}{r_T}\right) \\ &= \frac{4r_T^{3/2}}{3\,v_p\sqrt{r_p}}\sqrt{1-\frac{r_p}{r_T}}\left(1+2\,\frac{r_p}{r_T}\right) \end{aligned}$$

Cherchons maintenant la relation entre v_p et r_p. On a la constante du mouvement $K = 0$ pour une parabole :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\,v^2-\frac{\varkappa_s}{|\mathbf{x}|} &= 0 \\ \frac{1}{2}\,v_p^2 &= \frac{\varkappa_s}{r_p} \\ \Rightarrow \quad v_p\sqrt{r_p} &= \sqrt{2\,\varkappa_s} \end{aligned}$$

On a donc finalement

$$\underline{T = \frac{4\,r_T^{3/2}}{3\sqrt{2}\sqrt{\varkappa_s}}\sqrt{1-\frac{r_p}{r_T}}\left(1+2\,\frac{r_p}{r_T}\right)} \;\text{[s]}$$

où T est donné en secondes. Pour exprimer T en années, il faut se rappeler que 1 année $= T_T = 2\pi\,r_T^{3/2}/\sqrt{\varkappa_s}$ (cf. par ex. eq. 6.82 p. 168). En divisant T par T_T, on trouve bien

$$\underline{T = \frac{\sqrt{2}}{3\pi}\sqrt{1-\frac{r_p}{r_T}}\left(1+2\,\frac{r_p}{r_T}\right)} \;\text{[ans]}$$

Problème 5 :

Il s'agit de calculer la constante du mouvement K et de voir si elle est négative (système lié) ou positive (diffusion) :

$$\frac{1}{2}\,v^2-\frac{\varkappa}{|\mathbf{x}|} = K \quad \text{avec} \quad \varkappa = +\frac{1}{4\pi\epsilon_o}\,\frac{e^2}{m_e} \;>\; 0$$

Pour $v = v_0 = 4{\cdot}10^3\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\mathbf{x}| = 100$ Å$= 10^{-8}$ m, on obtient $\underline{K = -2.53\cdot 10^{10}\ \mathrm{m^2\,s^{-2}}}$. C'est donc un état lié : selon l'interprétation classique (i.e. non quantique), il se forme alors un atome d'hydrogène.

Mécanique générale

Énoncé des exercices

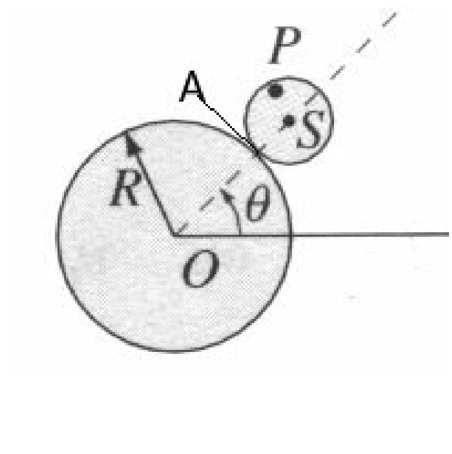
Problème 1 :

1. Quelle est la vitesse angulaire de rotation de la Lune par rapport au référentiel géocentrique, et où est le centre instantané de rotation ?
2. Même question pour la rotation axiale de la Terre dans le référentiel de Kepler.
3. Même question pour la rotation orbitale de la Terre considérée comme un point-masse.
4. Si, pour la première question, on se place dans le référentiel du centre de masse du système Terre-Lune, où est le centre de rotation ? Exprimer la position de ce centre en rayons terrestres.
5. De même, si on se place dans le référentiel du centre de masse du système Soleil-Terre pour la troisième question, quelle est la position du centre de rotation en rayons solaires ?

Indications :
- Période de révolution propre et orbitale de la Lune : 27.32 jours
- Rayon de la Terre : $R_T = 6.38 \cdot 10^6$ m
- Rayon de l'orbite lunaire : $a_L = 384 \cdot 10^6$ m
- Masses de la Terre et de la Lune : $M_T = 5.98 \cdot 10^{24}$ kg ; $M_L = 7.35 \cdot 10^{22}$ kg
- Rayon de l'orbite terrestre : $a_T = 1.496 \cdot 10^{11}$ m
- Rayon et masse du Soleil : $R_\odot = 6.96 \cdot 10^8$ m ; $M_\odot = 1.99 \cdot 10^{30}$ kg

Problème 2 :

Un disque de rayon r roule sans glisser sur un disque immobile de rayon R (voir figure). Exprimer la vitesse de rotation du disque de rayon r en fonction de $\dot{\theta}$. Dans le cas où $\dot{\theta}$ est constant, exprimer la vitesse et l'accélération d'un point P du disque mobile en fonction de $\dot{\theta}$. On considère qu'il n'y a pas de force de gravité.



<u>Problème 3</u> :

Le mouvement du point P de l'exercice précédent est analogue au mouvement d'une planète dans le modèle de Tycho Brahé : la Terre serait en O, le Soleil en S et la planète en P. Comment choisir les rayons r et R si l'on veut reproduire la période synodique de Vénus ?

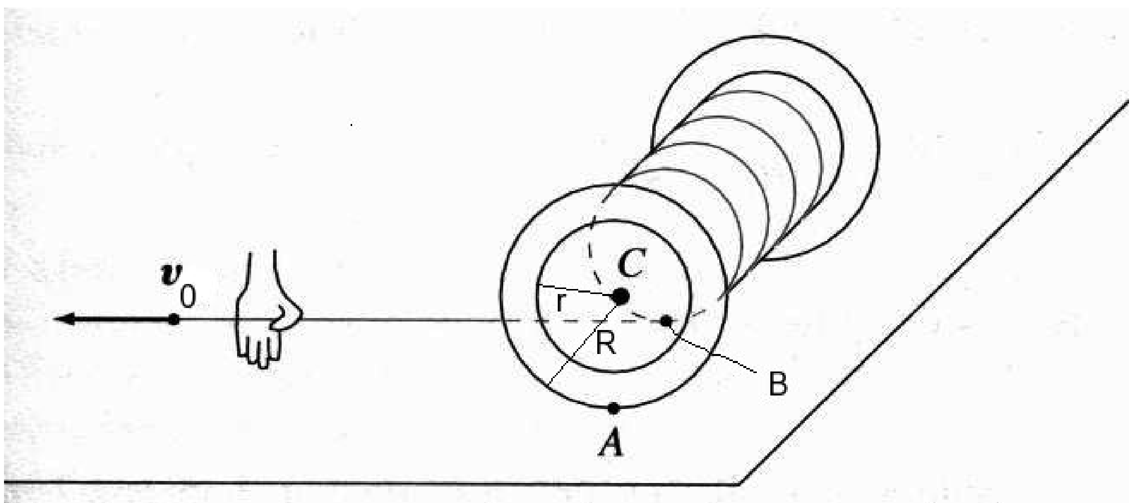
Indication : la période *synodique* est l'intervalle de temps qui sépare deux conjonctions inférieures de Vénus (c'est-à-dire deux passages de la planète entre la Terre et le Soleil), par exemple. Pour la Lune, la période synodique est celle des lunaisons (temps qui sépare deux pleines lunes).

On a bien "sauvé les apparences" quant à la période synodique de Vénus, mais le rayon de son orbite est-il correct ? Comment pourrait-on corriger le modèle pour situer Vénus à la bonne distance du Soleil ?

Indications :
- Période synodique de Vénus : $P_V = 1.599$ ans
- (Période de révolution sidérale de Vénus : $P_V = 0.615$ ans)
- Rayon de l'orbite de Vénus : $R_V = 1.083 \cdot 10^{11}$ m $= 0.724$ UA

<u>Problème 4</u> :

On tire sur le fil d'une bobine avec une vitesse horizontale $\mathbf{v}_0$ constante (voir figure). Déterminer la vitesse de rotation de la bobine et la vitesse du point C (centre de la bobine). Trouver l'accélération des points A, B (point où le fil est tangent à la bobine) et C de la bobine, sachant que celle-ci roule sans glisser sur le sol.



Cours de Physique Générale I, Prof. Georges Meylan — EPFL

Section de math 1ère année — Série No 10 – 12.01.2007

Mécanique générale

Corrigé des exercices

Problème 1 :

1. La Lune présente toujours la même face à la Terre, ce qui signifie que sa vitesse de rotation propre est égale (aux effets de l'excentricité orbitale près, que l'on néglige ici) à sa vitesse de rotation orbitale. La période de révolution étant $P = 27.32$ jours et un jour comportant 86400 secondes, on obtient

$$\omega_{Lune} = \frac{2\pi}{P} = 0.230 \text{ rad jour}^{-1} = 2.662 \cdot 10^{-6} \text{ rad s}^{-1}$$

   Le centre instantané de rotation est l'axe qui passe par le centre de la Terre et est perpendiculaire au plan de l'orbite lunaire (ou, approximativement, au plan de l'écliptique).

2. Un jour sidéral comporte 86164 secondes, si bien que

$$\omega_{diurne,Terre} = \frac{2\pi}{86164} = 7.292 \cdot 10^{-5} \text{ rad s}^{-1}$$

   Le centre instantané de rotation est l'axe du Monde (axe NS).

3. Une année comporte $365.25 \cdot 86400 = 3.156 \cdot 10^7$ secondes, donc

$$\omega_{orbite,Terre} = \frac{2\pi}{3.156 \cdot 10^7} = 1.991 \cdot 10^{-7} \text{ rad s}^{-1}$$

   Le centre instantané de rotation est l'axe passant par le centre du Soleil et perpendiculaire à l'écliptique (plan de l'orbite terrestre).

4. Dans le référentiel du centre de masse du système Terre-Lune, l'axe de rotation se confond avec le centre de gravité, et se trouve à une distance

$$d = \frac{M_L}{M_T + M_L} a_L = 0.73 \ R_T$$

   du centre de la Terre.

5. Dans le référentiel du centre de masse du système Soleil-Terre, la situation est la même que ci-dessus et l'axe de rotation se trouve à une distance

$$d = \frac{M_T}{M_\odot + M_T} a_T = 6.46 \cdot 10^{-4} \ R_\odot$$

   du centre du Soleil. On voit que l'axe passe quasiment par le centre du Soleil, alors que dans le cas du système Terre-Lune, il est plus près de la surface terrestre que du centre.

Problème 2 :

On peut écrire la vitesse du point S des deux façons : d'abord en considérant l'axe instantané de rotation en A, puis en O, ce qui donne les deux expressions suivantes :

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_s &= \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{AS} = \omega\, r\, \mathbf{e}_\theta \\ \mathbf{v}_s &= (R+r)\,\dot{\theta}\,\mathbf{e}_\theta\end{aligned}$$

ce qui permet de déduire

$$\boldsymbol{\omega} = \left(1 + \frac{R}{r}\right)\,\dot{\theta}\,\mathbf{e}_3$$

La vitesse du point P est l'addition de la vitesse du point S par rapport à A et de celle du point P par rapport à S :

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_P &= \mathbf{v}_S + \mathbf{v}_{SP} \\ &= \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{AS} + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{SP} \\ &= \left(1 + \frac{R}{r}\right)\,\dot{\theta}\, r\, \mathbf{e}_\theta + \left(1 + \frac{R}{r}\right)\,\dot{\theta}\,\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{SP} \\ &= (r+R)\,\dot{\theta}\,\mathbf{e}_\theta + \left(1 + \frac{R}{r}\right)\,\dot{\theta}\,\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{SP}\end{aligned}$$

Pour l'accélération, partons du théorème 8.19, en se souvenant que $\dot{\theta} = \text{constante} \Rightarrow \dot{\omega} = 0$:

$$\mathbf{a}_P = \mathbf{a}_S + \boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{SP})$$

où le premier terme représente l'accélération du centre du petit disque, tandis que le second terme représente l'accélération du point P par rapport au centre S du petit disque.

Le point S suit un mouvement circulaire uniforme ; de manière générale on a dans ce cas (formule 6.44 p. 153 du livre de Gruber & Benoit) :

$$\begin{aligned}\mathbf{a_S} &= \dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge \mathbf{x} - \omega^2 \mathbf{x} \\ &= \dot{\omega}\, R\, \mathbf{e}_\theta - \omega^2\, R\, \mathbf{e}_r \quad (\mathrm{R} = \text{dist. S} - \text{axe}) \\ \text{Ici, } \omega = \dot{\theta} \text{ et } \dot{\boldsymbol{\omega}} = 0 \;\Rightarrow\; \mathbf{a}_S &= -\dot{\theta}^2\,(R+r)\,\mathbf{e}_r \\ \boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{SP}) &= -\omega^2\,\mathbf{SP} \\ \Rightarrow\; \mathbf{a}_P &= -\dot{\theta}^2\,(R+r)\,\mathbf{e}_r - \omega^2\,\mathbf{SP} \quad \text{ici } \omega \text{ concerne le petit disque} \\ &= -(R+r)\,\dot{\theta}^2\,\mathbf{e}_r - \left(1 + \frac{R}{r}\right)^2 \dot{\theta}^2\,\mathbf{SP}\end{aligned}$$

Problème 3 :

Vénus se retrouvant entre la Terre et le Soleil tous les 1.599 ans, on peut écrire que la distance parcourue par Vénus au cours de ce cycle (équivalente à un tour du disque mobile) est égale à 1.599 fois la circonférence du disque fixe :

$$\begin{aligned}2\pi\, r &= 1.599 \cdot 2\pi\, R \\ \Rightarrow\; \frac{R}{r} &= \frac{1}{1.599} = 0.626 \\ R + r &= r\left(\frac{R}{r} + 1\right) = 1.626\, r = 1 \text{ UA} \\ r &= 0.615 \text{ UA} \quad ; \quad R = 0.385 \text{ UA}\end{aligned}$$

Une maquette basée sur ce mécanisme reproduirait bien la période synodique, mais pas la dimension de l'orbite de Vénus puisque le rayon de celle-ci est $r_V = 0.724$ UA. En fait, le modèle n'est pas pertinent, dans la mesure où il exige un contact sans frottement entre les deux disques ; par contre, il est utile pour un fabricant de maquette, qui ferait de ces disques des engrenages. Par conséquent, pour simuler correctement la position de Vénus, il faudrait superposer au disque (ou à l'engrenage) de rayon r, un disque un peu plus grand de rayon $r_V = 0.724$ UA. Mais les excentricités orbitales restent encore négligées.

Problème 4 :

Le centre instantané de rotation étant A, et le point B étant le point où le fil est tangent à la bobine, on peut écrire la vitesse de rotation de la bobine (dans un référentiel où $\mathbf{e}_1$ pointe vers nous, $\mathbf{e}_2$ est dans le plan de la feuille et pointe à droite, et $\mathbf{e}_3$ pointe vers le haut)

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_B &= \mathbf{v}_0 \\ \mathbf{v}_B &= \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{AB} = \omega\,(R-r)\,(-\mathbf{e}_2) \\ \Rightarrow\ \omega &= \frac{v_0}{R-r} = \text{constante} \end{aligned}$$

La vitesse du point C est donnée par

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_C &= \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{AC} = \omega\,R\,(-\mathbf{e}_2) \\ \mathbf{v}_C &= \frac{R}{R-r}\,\mathbf{v}_0 = \text{constante} \end{aligned}$$

On a donc $v_C > v_0$: la bobine rattrape la main qui tire le fil.

Considérons les accélérations : selon la formule 8.19 p. 208 du livre de Gruber & Benoit, l'accélération d'un point P d'un solide dont l'axe de rotation passe par un point A s'écrit

$$\mathbf{a}_P = \mathbf{a}_A + \dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge \mathbf{AP} + \boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{AP})$$

Ici, on choisit $A \to C$ et $P \to A$ ou B. On a $\mathbf{a}_C = 0$ (puisque $\mathbf{v}_C =$ constante) et $\dot{\boldsymbol{\omega}} = 0$, si bien que $\mathbf{a}_A$ et $\mathbf{a}_B$ deviennent :

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_A &= (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{CA})\,\boldsymbol{\omega} - \omega^2\,\mathbf{CA} = \omega^2\,R\,\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{a}_A &= \left(\frac{v_0}{R-r}\right)^2 R\,\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{a}_B &= \omega^2\,r\,\mathbf{e}_3 = \left(\frac{v_0}{R-r}\right)^2 r\,\mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

Mécanique générale

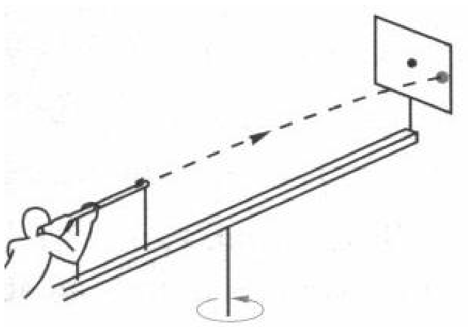
Énoncé des exercices

Problème 1 :

On considère l'expérience du fusil tournant (voir figure) réalisée avec les données suivantes :

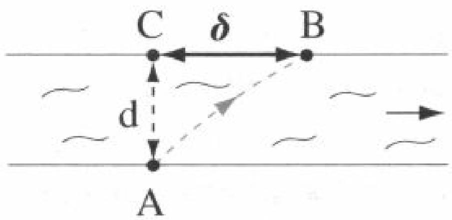
– la cible est à 1.1 m de l'axe de rotation,
– l'extrémité du fusil est à 0.4 m de l'axe,
– la vitesse de la balle est 250 m/s,
– le support tourne en faisant 1 tour en 2 secondes.

A quelle distance du centre la balle frappera-t-elle la cible ? On négligera l'effet de la gravité.



Problème 2 :

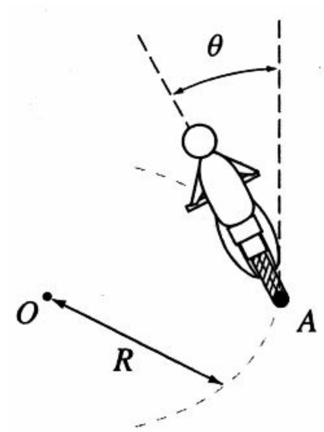
1. Un sportif nage avec une vitesse $v_0 = 1.5$ m/s en piscine. Quel est le temps minimal pour traverser une rivière large de 50 m coulant à la vitesse de 0.75 m/s ? Quel sera le déportement δ ?



2. Le même nageur veut traverser à nouveau la rivière en suivant la droite AC. Comment doit-il nager et quelle sera la durée de la traversée ?

<u>Problème 3</u> :

Une moto effectue un virage de rayon de courbure R à vitesse v_0 constante, et est inclinée d'un angle θ par rapport à la verticale. Trouver la vitesse de rotation propre $\boldsymbol{\omega}_\mathrm{p}$ de la roue de rayon r, ainsi que la vitesse de rotation $\boldsymbol{\omega}$ du point de la roue en contact avec le sol, et son accélération (notez que sur la figure, le motard est vu de dos).

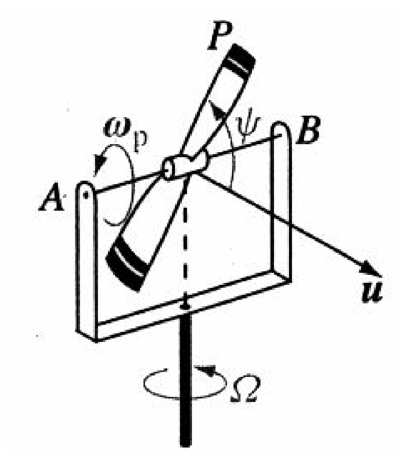


Indication : donner la réponse en écrivant les composantes des vitesses angulaires selon les vecteurs-unité $\mathbf{e}_3$ (vertical) et $\mathbf{e}'_3$ (axe de la roue), et l'accélération selon $\mathbf{e}_3$ et la direction OA, notée $\widehat{\boldsymbol{OA}}$.

<u>Problème 4</u> :

Une hélice tourne autour de son axe AB avec une vitesse de rotation propre ω_p constante ; la fourche supportant l'hélice tourne elle-même à la vitesse angulaire $\boldsymbol{\Omega}$ constante. Exprimer la vitesse et l'accélération de l'extrémité P de l'hélice en fonction de ψ (u est l'axe horizontal perpendiculaire à l'axe de l'hélice). On posera $R = |\mathbf{OP}|$, avec O au milieu de l'axe AB.

Application numérique : $R = 1$ m, $\Omega = 1$ Hz, $\omega_\mathrm{p} = 300$ Hz, $\psi = 0°$, $30°$, $90°$.



Mécanique générale

Corrigé des exercices

Problème 1 :

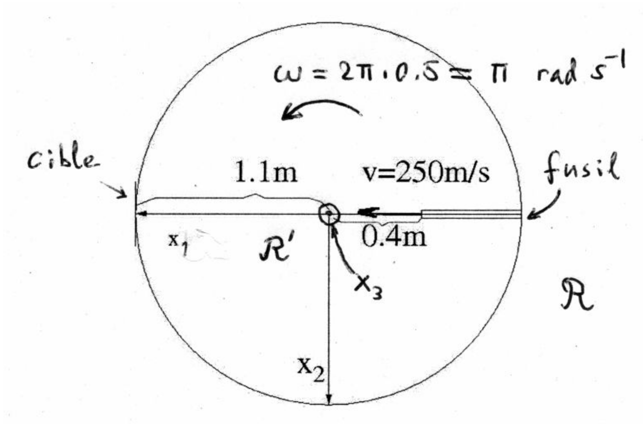
Rappelons la loi de composition des vitesses (9.12 et 9.13, page 226) :

$$\mathbf{v}_a^{(P)} = \mathbf{v}_r^{(P)} + \mathbf{v}_e^{(P)}$$

avec

$$\mathbf{v}_e^{(P)} = \mathbf{v}_{O'})_{\mathcal{R}} + \boldsymbol{\omega}_e \wedge \mathbf{O'P}$$

où $\mathbf{v}_a^{(P)}$ est la vitesse absolue du point P, c'est-à-dire sa vitesse mesurée dans le référentiel absolu $\mathcal{R}$, $\mathbf{v}_r^{(P)}$ est la vitesse relative (mesurée dans le référentiel $\mathcal{R}'$) du point P et $\mathbf{v}_e^{(P)}$ est la vitesse d'entraînement, c'est-à-dire celle due au mouvement de $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$.



Soit un référentiel absolu $\mathcal{R} = O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ dont l'origine est l'intersection entre l'axe de rotation et l'axe fusil-cible, et qui coïncide au temps $t = 0$ avec le repère tournant $\mathcal{R}' = O'\mathbf{e}_1'\mathbf{e}_2'\mathbf{e}_3'$. Le vecteur $\mathbf{e}_3$ est vertical, $\mathbf{e}_1'$ est dirigé vers la cible et $\mathbf{e}_2' = \mathbf{e}_3' \wedge \mathbf{e}_1'$.

Il faut calculer la position de la balle dans $\mathcal{R}$ après qu'elle ait parcouru la distance entre le fusil et la cible selon l'axe $\mathbf{e}_1$, puis on calcule sa position dans $\mathcal{R}'$ selon $\mathbf{e}_2'$. Tout d'abord, remarquons que la balle acquiert sa vitesse absolue $\mathbf{v}_a$ à l'instant où elle sort du canon du fusil, entraînée à la fois par son mouvement rectiligne $\mathbf{v}_r$ dans $\mathcal{R}$ et par le mouvement de rotation de $\mathcal{R}'$ relativement à $\mathcal{R}$.

On a ici $\mathbf{v}_{O'} = 0$ et $\boldsymbol{\omega}_e = \pi\ \mathbf{e}_3$ rad s^{-1}, donc la vitesse absolue de la balle à la sortie du fusil peut s'écrire

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_r + \pi\ \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{O'P}$$

La vitesse absolue est constante puisqu'il s'agit d'un mouvement rectiligne uniforme dans $\mathcal{R}$. Ecrivons plus explicitement son expression au temps $t = 0$, à l'instant où le coup part :

$$\mathbf{v}_a = \begin{pmatrix} 250 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \pi \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -0.4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 250 \\ -0.4\pi \\ 0 \end{pmatrix}$$

Mais dès que la balle est sortie du canon du fusil, elle n'a plus de lien avec le référentiel $\mathcal{R}'$. Sa position dans le référentiel absolu $\mathcal{R}$ est donnée en fonction du temps par

$$\mathbf{OP}(t) = \mathbf{OP}(t=0) + \mathbf{v}_a \cdot t$$

A l'instant t_c où la balle atteint la cible, la position de celle-ci est donc :

$$\mathbf{OP}(t_c) = \begin{pmatrix} -0.4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 250\, t_c \\ -0.4\pi\, t_c \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La grandeur x_2 représente la dérive de la balle due à la composante de sa vitesse selon l'axe $\mathbf{e}_2$, acquise grâce à la rotation du fusil. On obtient alors

$$\begin{aligned} t_c &= \frac{1.5 \text{ m}}{250 \text{ m/s}} = 6 \cdot 10^{-3} \text{ s} \\ \Rightarrow\ x_2 &= -0.4\,\pi\, t_c = -7.54 \cdot 10^{-3} \text{ m} \end{aligned}$$

Mais de plus, la cible s'est déplacée dans la direction $-\mathbf{e}'_2$ durant le trajet de la balle, à cause de la rotation de $\mathcal{R}'$ d'un angle $\psi(t_c) = \omega_e\, t_c = \pi \cdot t_c = 1.885 \cdot 10^{-2}$ rad. Le centre de la cible étant aux coordonnées $(1.1, 0, 0)$ dans $\mathcal{R}'$, répondre à la question revient à trouver la coordonnée x'_2 du point d'impact de la balle ; pour cela, on utilise la transformation (9.31, page 231)

$$\begin{aligned} x'_2 &= -x_1 \sin\psi(t_c) + x_2 \cos\psi(t_c) \\ &= -1.1 \cdot 1.885 \cdot 10^{-2} - 7.54 \cdot 10^{-3} \cdot 1.000 \\ x'_2 &= -2.83 \cdot 10^{-2} \text{ m} = -2.83 \text{ cm} \end{aligned}$$

Problème 2 :

1. Le référentiel absolu $\mathcal{R}$ est celui de la berge (origine O au point A, axe $\mathbf{e}_1$ le long de la berge et orienté à droite, axe $\mathbf{e}_2$ dans la direction AC), tandis que l'eau de la rivière en mouvement constitue le référentiel $\mathcal{R}'$. La transformation 9.23 (page 229) nous dit que (si l'on pose $\mathbf{s} = 0$)

$$\begin{aligned} \mathbf{x}' &= \mathbf{x} - \mathbf{u}\,t \ \Rightarrow\ \mathbf{x} = \mathbf{x}' + \mathbf{u}\,t \\ \mathbf{v}' &= \mathbf{v} - \mathbf{u} \ \Rightarrow\ \mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{u} \end{aligned}$$

   où $\mathbf{u}$, $\mathbf{x}$ et $\mathbf{v}$ sont respectivement la vitesse du courant, la position et la vitesse du nageur mesurés dans $\mathcal{R}$. Au temps $t = 0$, on a

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \forall \text{t}, \ \mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0.75 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{v}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1.5 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\mathbf{v} =} \begin{pmatrix} 0 \\ 1.5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.75 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 0.75 \\ 1.5 \end{pmatrix}}$$

   Au temps t_f où le nageur atteint l'autre rive, on a

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \delta \\ 50 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1.5 \cdot t_f \end{pmatrix}$$

donc $t_f = 50/1.5 = 33.3$ s. De plus,

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}' + \mathbf{u} \cdot t_f \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} \delta \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 50 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.75 \cdot t_f \\ 0 \end{pmatrix}$$

et l'on a finalement

$$\underline{\delta = 0.75 \cdot t_f = 25 \text{ m}}$$

2. Ici, le nageur doit remonter partiellement le courant. Il doit avoir une vitesse $\mathbf{v}$ dont la composante v_1 reste toujours nulle :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1' \\ v_2' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On a donc

$$\begin{aligned} v_1' &= -u_1 = -0.75 \text{ m/s} \\ v_2' &= v_2 \end{aligned}$$

Or,

$$|\mathbf{v}'| = \sqrt{v_1'^2 + v_2'^2} = 1.5 \text{ m/s}$$
$$\Rightarrow \; v_2' = 1.299 \text{ m/s}$$

La vitesse du nageur par rapport à l'eau doit donc être

$$\underline{\mathbf{v}' = \begin{pmatrix} 0.75 \\ 1.299 \end{pmatrix} \text{ m/s}}$$

Quant à la durée de la traversée, elle vaut

$$\underline{t_f =} \frac{d}{v_2'} = \frac{50 \text{ m}}{1.299 \text{ m/s}} = \underline{38.5 \text{ s}}$$

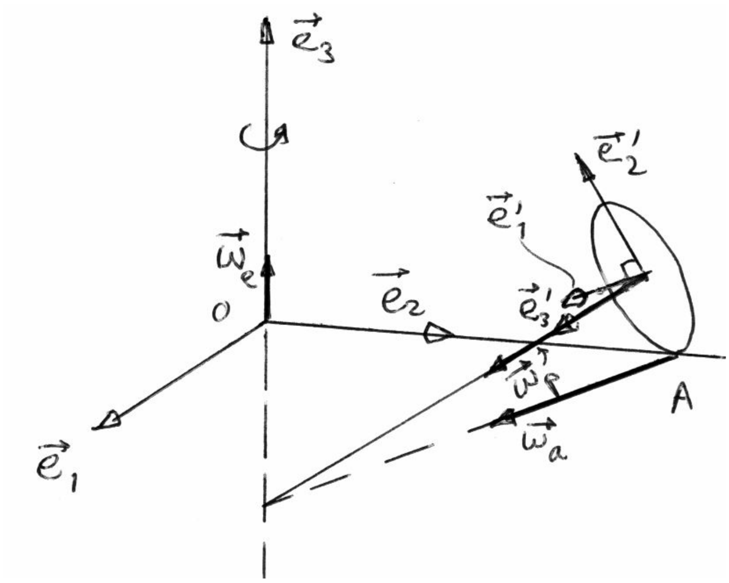
Problème 3 :

Soit $\widehat{\boldsymbol{OA}} = \boldsymbol{OA}/|\boldsymbol{OA}|$. On définit le référentiel $\mathcal{R}$ absolu $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ avec $\mathbf{e}_3$ dirigé vers le haut, $\mathbf{e}_2 = \widehat{\boldsymbol{OA}}$ et $\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3$. Le référentiel $\mathcal{R}'$ relatif $O'\mathbf{e}_1'\mathbf{e}_2'\mathbf{e}_3'$ est centré sur le moyeu de la roue de la moto, $\mathbf{e}_2'$ et $\mathbf{e}_3'$ sont dans le plan vertical passant par les points O et O', $\mathbf{e}_2'$ étant incliné de l'angle θ par rapport à la verticale et $\mathbf{e}_3'$ donnant la direction du vecteur $\boldsymbol{\omega}_p$ de la vitesse angulaire de la roue. D'après la composition des vitesses de rotation d'un solide (9.17, page 227), la vitesse de rotation absolue $\boldsymbol{\omega}_a$ de la roue par rapport à $\mathcal{R}$ est donnée par :

$$\boldsymbol{\omega}_a = \boldsymbol{\omega}_{S/\mathcal{R}} = \boldsymbol{\omega}_r + \boldsymbol{\omega}_e$$

où $\boldsymbol{\omega}_r$ est la vitesse de rotation relative de la roue dans le référentiel $\mathcal{R}'$ de la moto, c'est-à-dire la vitesse de rotation propre :

$$\boldsymbol{\omega}_r = \boldsymbol{\omega}_{S/\mathcal{R}'} = \boldsymbol{\omega}_p = \frac{v_0}{r}\, \boldsymbol{e}_3'$$



On en déduit la vitesse relative $\boldsymbol{v}_r^{(A)}$ du point A par rapport à $\mathcal{R}'$:

$$\boldsymbol{v}_r^{(A)} = \boldsymbol{\omega}_r \wedge \boldsymbol{O'A} = \frac{v_0}{r}\, \boldsymbol{e}_3' \wedge (-r\, \boldsymbol{e}_2') = v_0\, \boldsymbol{e}_1'$$

Par définition, $\boldsymbol{\omega}_e$ est la vitesse de rotation d'entraînement, c'est-à-dire la vitesse de rotation de $\mathcal{R}'$ par rapport $\mathcal{R}$:

$$\boldsymbol{\omega}_e = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} = \frac{v_0}{R}\, \boldsymbol{e}_3$$

Ce qui permet d'obtenir :

$$\boldsymbol{\omega}_a = \frac{v_0}{r}\, \boldsymbol{e}_3' + \frac{v_0}{R}\, \boldsymbol{e}_3$$

L'accélération absolue du point A est donnée par (9.19, page 228) :

$$\boldsymbol{a}_a^{(A)} = \boldsymbol{a}_r^{(A)} + \boldsymbol{a}_e^{(A)} + \boldsymbol{a}_c^{(A)}$$

où $\boldsymbol{a}_r^{(A)}$ est l'accélération du point A par rapport à $\mathcal{R}'$. Cette accélération est donnée dans $\mathcal{R}'$ par (8.19, page 208) :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}_r^{(A)} &= \boldsymbol{a}_{O'})_{\mathcal{R}'} + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{S/\mathcal{R}'} \wedge \boldsymbol{O'A} + \boldsymbol{\omega}_{S/\mathcal{R}'} \wedge \big(\boldsymbol{\omega}_{S/\mathcal{R}'} \wedge \boldsymbol{O'A}\big) \\
&= 0 + 0 + \boldsymbol{\omega}_r \wedge (\boldsymbol{\omega}_r \wedge \boldsymbol{O'A}) \\
&= \frac{v_0^2}{r^2} r\, \boldsymbol{e}_3' \wedge (\boldsymbol{e}_3' \wedge \boldsymbol{e}_2') = \frac{v_0^2}{r}\, \boldsymbol{e}_2' \\
&= -\frac{v_0^2}{r}\left(\sin\theta\, \widehat{\boldsymbol{OA}} - \cos\theta\, \boldsymbol{e}_3\right)
\end{aligned}$$

puisque $\dot{\boldsymbol{\omega}}_{S/\mathcal{R}'} = \dot{\boldsymbol{\omega}}_r = 0$ et $\boldsymbol{e}_2' = -\sin\theta\, \widehat{\boldsymbol{OA}} + \cos\theta \boldsymbol{e}_3$. Par définition, l'accélération d'entraînement $\boldsymbol{a}_e^{(A)}$ est l'accélération du point coïncident A_t' dans $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$, autrement dit l'accélération de $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$ au point considéré. On a (9.20, page 228) :

$$\boldsymbol{a}_e^{(A)} = \boldsymbol{a}_{O'})_{\mathcal{R}} + \dot{\boldsymbol{\omega}}_e \wedge \boldsymbol{O'A} + \boldsymbol{\omega}_e \wedge (\boldsymbol{\omega}_e \wedge \boldsymbol{O'A})$$

où $\boldsymbol{a}_{O'})_{\mathcal{R}}$ est l'accélération du point O' par rapport à $\mathcal{R}$. Cette accélération est donnée dans $\mathcal{R}$ par (à nouveau 8.19, page 208) :

$$\boldsymbol{a}_{O'})_{\mathcal{R}} = \boldsymbol{a}_{O})_{\mathcal{R}} + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \boldsymbol{OO'} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \left(\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \boldsymbol{OO'}\right) = 0 + 0 + \boldsymbol{\omega}_e \wedge (\boldsymbol{\omega}_e \wedge \boldsymbol{OO'})$$

puisque $\dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} = \dot{\boldsymbol{\omega}}_e = 0$. Ainsi :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}_e^{(A)} &= \boldsymbol{\omega}_e \wedge (\boldsymbol{\omega}_e \wedge \boldsymbol{OO'}) + 0 + \boldsymbol{\omega}_e \wedge (\boldsymbol{\omega}_e \wedge \boldsymbol{O'A}) \\ &= \boldsymbol{\omega}_e \wedge (\boldsymbol{\omega}_e \wedge \boldsymbol{OA}) = \frac{v_0^2}{R}\,\boldsymbol{e}_3 \wedge \left(\boldsymbol{e}_3 \wedge \widehat{\boldsymbol{OA}}\right) = -\frac{v_0^2}{R}\,\widehat{\boldsymbol{OA}} \end{aligned}$$

Remarquez que ceci n'est rien d'autre que l'expression de l'accélération normale d'un mouvement circulaire uniforme $\boldsymbol{a}_e^{(A)} = -\omega_e^2 R\,\widehat{\boldsymbol{OA}}$ qui décrit la rotation de $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$.

Il reste encore à déterminer l'accélération de Coriolis $\boldsymbol{a}_c^{(A)}$ (9.21, page 228) :

$$\boldsymbol{a}_c^{(A)} = 2\boldsymbol{\omega}_e \wedge \boldsymbol{v}_r^{(A)} = 2\frac{v_0}{R}\,\boldsymbol{e}_3 \wedge v_0\,\mathbf{e}_1' = 2\frac{v_0^2}{R}\,\widehat{\boldsymbol{OA}}$$

Finalement on obtient l'accélération absolue du point A :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}_a^{(A)} &= -\frac{v_0^2}{r}\left(\sin\theta\,\widehat{\boldsymbol{OA}} - \cos\theta\,\boldsymbol{e}_3\right) - \frac{v_0^2}{R}\,\widehat{\boldsymbol{OA}} + 2\frac{v_0^2}{R}\,\widehat{\boldsymbol{OA}} \\ &= \frac{v_0^2}{r}\cos\theta\,\boldsymbol{e}_3 + \frac{v_0^2}{r}\left[\frac{r}{R} - \sin\theta\right]\widehat{\boldsymbol{OA}} \end{aligned}$$

Problème 4 :

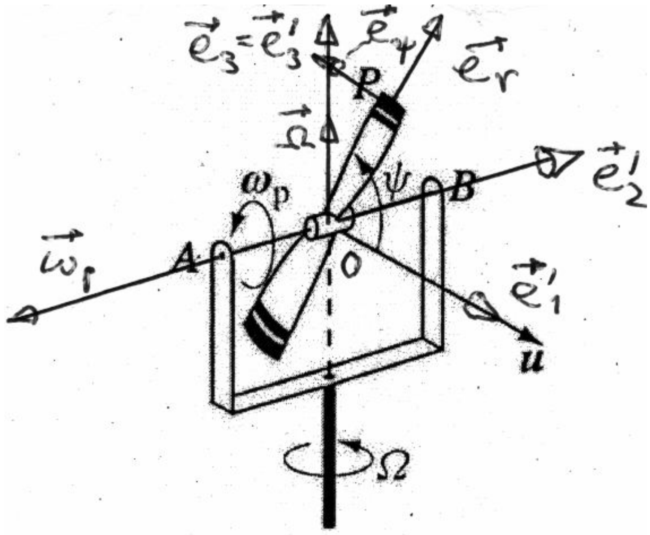
Définissons d'abord le référentiel absolu $\mathcal{R}$ par le système $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$, avec l'origine O au moyeu de l'hélice, $\mathbf{e}_3$ pointant vers le zénith, $\mathbf{e}_1$ dirigé selon l'axe u au temps $t = 0$ par exemple, et $\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1$.

Introduisons encore le référentiel $\mathcal{R}'$ de la fourche, défini par $O\mathbf{e}_1'\mathbf{e}_2'\mathbf{e}_3'$ et qui tourne à vitesse angulaire $\boldsymbol{\Omega} = \Omega\,\mathbf{e}_3' = \Omega\,\mathbf{e}_3$ par rapport au référentiel absolu $\mathcal{R}$: l'origine $O' = O$ se confond avec celle de $\mathcal{R}$, $\mathbf{e}_1'$ est orienté selon l'axe u, $\mathbf{e}_2'$ selon l'axe AB et $\mathbf{e}_3' = \mathbf{e}_3$ vers le zénith. On définit encore les coordonnées polaires $\mathbf{e}_r$ et $\mathbf{e}_\psi$ dans le plan $O\mathbf{e}_1'\mathbf{e}_3$, l'axe r étant contenu dans la pale de l'hélice qui porte le point P. On est dans le cas d'une composition de deux rotations d'axes concourants, où les deux vitesses angulaires s'ajoutent vectoriellement (paragraphe 9.5.3, pages 232-233) :

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_p + \boldsymbol{\Omega}$$

Écrivons d'abord la résultante des deux rotations, puis la vitesse du point P, qui n'est due à rien d'autre qu'à celle-ci :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} &= -\omega_p\,\mathbf{e}_2' + \Omega\,\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{v}_P &= \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{OP} \\ &= (-\omega_p\,\mathbf{e}_2' + \Omega\,\mathbf{e}_3) \wedge R\mathbf{e}_r \\ &= -\omega_p R\mathbf{e}_2' \wedge R\mathbf{e}_r + \Omega R\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_r \\ \mathbf{v}_P &= \omega_p R\mathbf{e}_\psi + \Omega R\cos\psi\mathbf{e}_2' \end{aligned}$$



Nous avons obtenu la vitesse du point P. Reste à calculer son accélération ; pour cela, on part de l'expression générale de l'accélération dans un référentiel en mouvement (9.19-9.21, page 228).

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}_a^{(P)} &= \mathbf{a}_r^{(P)} + \mathbf{a}_e^{(P)} + \mathbf{a}_c^{(P)} \quad \text{avec} \\
\mathbf{a}_r^{(P)} &= -R\,\omega_p^2\,\mathbf{e}_r \\
\mathbf{a}_e^{(P)} &= \underbrace{\mathbf{a}_{O'}}_{0} + \underbrace{\dot{\mathbf{\Omega}}}_{0} \wedge R\mathbf{e}_r + \mathbf{\Omega} \wedge (\mathbf{\Omega} \wedge R\mathbf{e}_r) \\
\mathbf{a}_c^{(P)} &= 2\mathbf{\Omega} \wedge \underbrace{(\omega_p \wedge R\mathbf{e}_r)}_{\omega_p\, R\,\mathbf{e}_\psi}
\end{aligned}$$

En additionnant les termes, on a en décomposant $\mathbf{e}_r$ selon $\mathbf{e}'_1$ et $\mathbf{e}_3$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}_a^{(P)} &= -R\,\omega_p^2\,\mathbf{e}_r + \mathbf{\Omega} \wedge (\mathbf{\Omega} \wedge R\,\mathbf{e}_r) + 2\,\Omega\,\omega_p\,R\,\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_\psi \\
&= -R\,\omega_p^2\,\mathbf{e}_r + \mathbf{\Omega} \wedge (\mathbf{\Omega} \wedge [R\cos\psi\,\mathbf{e}'_1 + R\sin\psi\,\mathbf{e}_3]) + 2\,\Omega\,\omega_p\,R\,\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_\psi \\
&= -R\,\omega_p^2\,\mathbf{e}_r + \Omega^2\,\mathbf{e}_3 \wedge (R\,\cos\psi\,\underbrace{\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}'_1}_{\mathbf{e}'_2} + R\,\sin\psi\,\underbrace{\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_3}_{0}) + 2\,\Omega\,\omega_p\,R \cdot (-\sin\psi\,\mathbf{e}'_2) \\
&= -R\,\omega_p^2\,\mathbf{e}_r + R\,\Omega^2\,\cos\psi\,\underbrace{\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}'_2}_{-\mathbf{e}'_1} - 2\,\Omega\,\omega_p\,R\,\sin\psi\,\mathbf{e}'_2
\end{aligned}$$

Par ailleurs, $\mathbf{e}'_1 = \cos\psi\mathbf{e}_r - \sin\psi\mathbf{e}_\psi$, ce qui donne en regroupant les termes :

$$\underline{\mathbf{a}_a^{(P)} = -(\omega_p^2 + \Omega^2\cos^2\psi)\,R\,\mathbf{e}_r + \Omega^2\,R\,\cos\psi\,\sin\psi\,\mathbf{e}_\psi - 2\,\Omega\,\omega_p\,R\,\sin\psi\,\mathbf{e}'_2}$$

Application numérique :

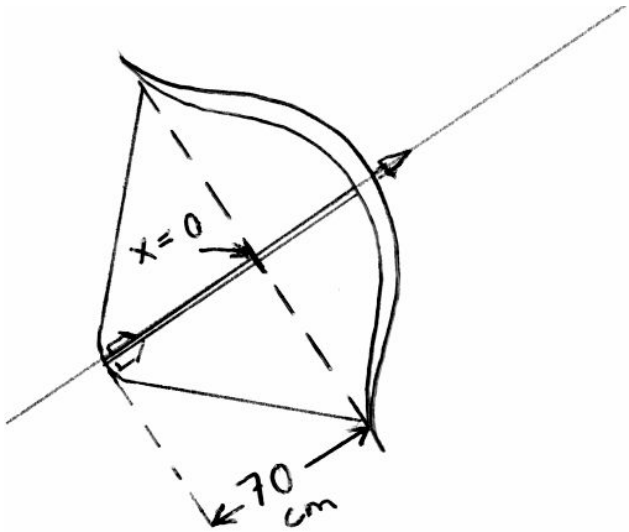
$$\begin{aligned}
\psi = 0^\circ : \mathbf{v}_P &= 300\,\mathbf{e}_\psi + \mathbf{e}'_2 \\
\mathbf{a}_P &= -90001\,\mathbf{e}_r \sim -9 \cdot 10^4\,\mathbf{e}_r \\
\psi = 30^\circ : \mathbf{v}_P &= 300\,\mathbf{e}_\psi + 0.866\,\mathbf{e}'_2 \\
\mathbf{a}_P &= -90000.75\,\mathbf{e}_r + 0.433\,\mathbf{e}_\psi \\
\psi = 90^\circ : \mathbf{v}_P &= 300\,\mathbf{e}_\psi \\
\mathbf{a}_P &= -90000\,\mathbf{e}_r - 600\,\mathbf{e}'_2
\end{aligned}$$

Mécanique générale

Énoncé des exercices

Problème 1 :

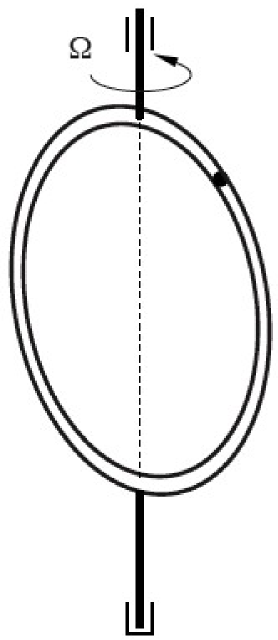
La corde d'un arc exerce une force de 147.15 N (15 kgf) lorsqu'elle est tendue de 70 cm (voir figure). En admettant que la force soit proportionnelle au déplacement, et en négligeant l'effet de la pesanteur, quelle sera la vitesse initiale d'une flèche de 25 g ? Quelle est la portée maximale de l'arc dans ces conditions ? On prendra évidemment en compte la pesanteur pour cette seconde question.



Problème 2 :

Un point matériel de masse m se déplace sans frottement à l'intérieur d'un anneau de rayon R tournant à vitesse $\mathbf{\Omega}$ constante autour d'un diamètre vertical (voir figure).

1. écrire les équations du mouvement du point matériel ;
2. en déduire les positions d'équilibre et esquisser le potentiel U associé au problème.

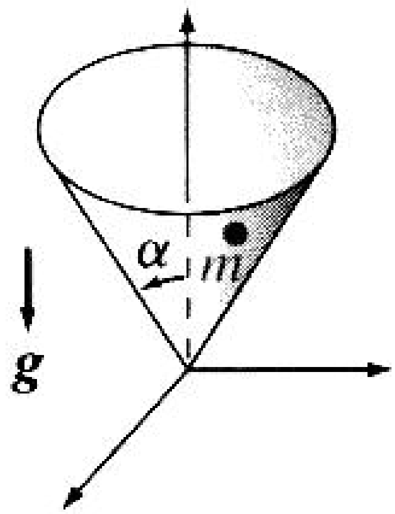


Problème 3 :

Un point matériel se déplace sur la paroi interne d'un cône immobile, sous l'effet de la pesanteur (voir figure). L'axe du cône est parallèle à **g** et l'angle au sommet du cône est 2α.

Faire une analyse qualitative du mouvement de condition initiale $\dot{\phi} \neq 0$ (coordonnées sphériques) :

1. écrire les équations du mouvement ;
2. esquisser les orbites dans l'espace de phase $(r, \dot{r})$;
3. déterminer la période T du mouvement circulaire uniforme de rayon R (où R est le rayon du cône à une certaine hauteur) ;
4. déterminer la période T_r de la fonction $r(t)$ pour les mouvements voisins du mouvement circulaire uniforme de rayon R.



Mécanique générale

Corrigé des exercices

Problème 1 :

Séparons le problème en deux parties, la première concernant le lancement de la flèche par l'arc, la seconde traitant du mouvement balistique de la flèche.

1. Soit un axe x solidaire de l'arc, coïncidant avec la flèche quand elle est sur l'arc, et dont l'origine est donnée par l'intersection de l'axe x avec la corde lorsqu'elle n'est plus tendue, c'est-à-dire à l'instant où la flèche la quitte. La force maximale exercée par la corde sur la flèche est 15 kgf, pour $x = -0.7$ m, et pour $-0.7 \leq x \leq 0$ m la force a une intensité

$$|\mathbf{F}| = -\frac{15 \text{ kgf} \cdot 9.81 \text{ m}\,\text{s}^{-1}}{0.7 \text{ m}}\, x = -210.2\, x = -k\, x \text{ N}$$

avec $k = 210.2$ N/m. L'équation du mouvement s'écrit alors

$$m\,\ddot{x} + k\,x = 0$$

et l'on reconnaît immédiatement l'équation d'un oscillateur harmonique, dont la solution est de la forme

$$\begin{aligned} x &= A\cos(\omega t + \delta) \\ \dot{x} &= -A\omega\sin(\omega t + \delta) \\ \ddot{x} &= -A\omega^2\cos(\omega t + \delta) = -\omega^2\, x \\ \text{avec}\quad \omega &= \sqrt{\frac{k}{m}} \end{aligned}$$

où $m = 0.025$ kg est la masse de la flèche.
Introduisons à présent les conditions initiales : en définissant l'origine des temps comme l'instant où la flèche quitte la corde de l'arc, on a, en $t = 0$, $x = 0$ et une vitesse positive et maximale $v_0 = \dot{x}(t = 0) = A\omega$. On a donc

$$\underline{v_0 =} A\,\omega = A\sqrt{\frac{k}{m}} = 0.7 \cdot \sqrt{\frac{210.2}{0.025}} = \underline{64.2 \text{ m/s}}$$

2. Pour le mouvement balistique, introduisons un nouveau référentiel (x,y) dont l'origine coïncide avec l'arc, avec cette fois l'axe x horizontal et dirigé vers la cible, et l'axe y vertical et dirigé vers le haut.
Les formules du mouvement balistique sont connues : si θ est l'angle entre la flèche et l'horizontale au moment du tir, on peut écrire

$$\begin{aligned} x &= v_0\cos\theta \cdot t \\ y &= -\frac{1}{2}\,g\,t^2 + v_0\sin\theta \cdot t \end{aligned}$$

(les constantes d'intégration en x et en y sont nulles car l'arc se trouve à l'origine du système d'axes et à la même hauteur que la cible).
De la première équation, on tire

$$t = \frac{x}{v_0 \cos\theta}$$

que l'on introduit dans la seconde équation, tout en posant $y = 0$ afin de calculer la position du point d'impact, c'est-à-dire la portée de l'arc :

$$\begin{aligned} y = -\frac{1}{2}\frac{g}{v_0^2 \cos^2\theta}\, x^2 + \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\, x &= 0 \\ \frac{g}{v_0^2}\, x^2 - \underbrace{2\,\sin\theta\cos\theta}_{\sin(2\theta)}\, x &= 0 \\ x^2 - \frac{v_0^2}{g}\sin(2\theta)\, x &= 0 \\ \Rightarrow\ \ x = 0 \text{ (position de départ) ou } \ x &= \frac{v_0^2}{g}\sin(2\theta) \end{aligned}$$

La valeur maximale de x est donc atteinte pour $\theta = \pi/4$, et l'on obtient alors

$$\underline{x_{max} = \frac{v_0^2}{g} = 420 \text{ m}}$$

Problème 2 :

Ici le système est le point matériel. Par ailleurs,
- Les forces sont le poids $m\mathbf{g}$ du point matériel et la réaction de l'anneau $\mathbf{F}$.
- On utilise les coordonnées sphériques.
- On a pour contraintes :
  - Le point matériel tourne à vitesse Ω constante $\Rightarrow\ \dot\varphi = \Omega = \text{cste}\ \Rightarrow\ \ddot\varphi = 0$
  - Il n'y a pas de frottement, donc la force de réaction reste toujours perpendiculaire à la tangente à l'anneau : $\mathbf{F} = F_r\,\mathbf{e_r} + F_\varphi\,\mathbf{e}_\varphi \ \Leftrightarrow\ F_\theta = 0$

1. **Équation du mouvement :** $m\mathbf{a} = m\mathbf{g} + \mathbf{F}$. En tenant compte des contraintes $r = R$, $\dot\varphi = \Omega$, l'équation de Newton devient en coordonnées sphériques (voir les équations 5.63 p. 131), selon les axes r, θ, φ respectivement :

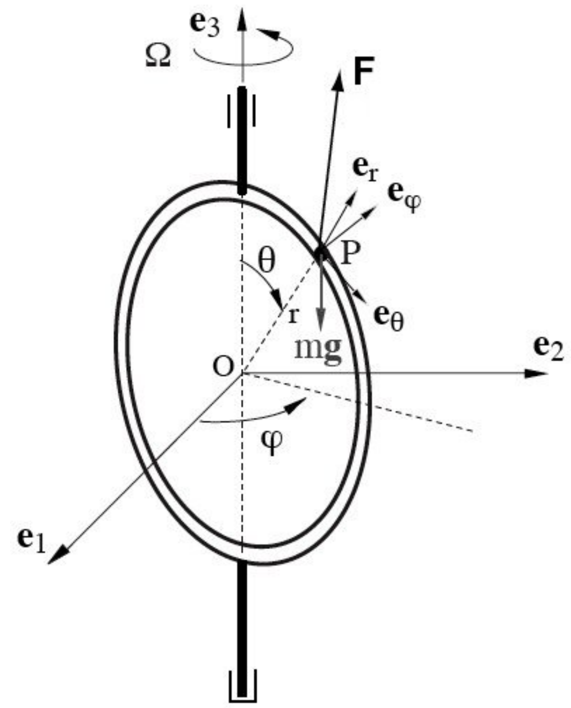
$$\begin{aligned} -m(R\dot\theta^2 + R\sin^2\theta\,\Omega^2) &= -mg\,\cos\theta + F_r && (1)\\ m(R\ddot\theta - R\sin\theta\cos\theta\,\Omega^2) &= mg\,\sin\theta && (2)\\ m(2R\cos\theta\,\dot\theta\,\Omega) &= F_\varphi && (3) \end{aligned}$$

2. **Constante du mouvement et points d'équilibre :** L'équation 2 est exactement de la forme souhaitée pour appliquer le lemme fondamental, puisqu'on en tire

$$\ddot\theta = \Omega^2\,\sin\theta\cos\theta + \frac{g}{R}\,\sin\theta = f(\theta) = -\frac{dU}{d\theta}$$

On a donc

$$U(\theta) = \frac{\Omega^2}{2}\,\cos^2\theta + \frac{g}{R}\,\cos\theta$$



et le lemme fondamental nous donne la constante du mouvement

$$K = \frac{1}{2}\,\dot{\theta}^2 + \frac{\Omega^2}{2}\,\cos^2\theta + \frac{g}{R}\,\cos\theta$$

On peut écrire

$$U'(\theta) = -\sin\theta\left(\Omega^2\,\cos\theta + \frac{g}{R}\right) = 0 \;\text{ si }\; \theta = 0,\,\pi,...$$

On voit tout de suite que $\theta = 0,\,\pi,...$ sont des points d'équilibre, et que ce sont les seuls tant que $\Omega^2 < g/R$. La seconde dérivée de U

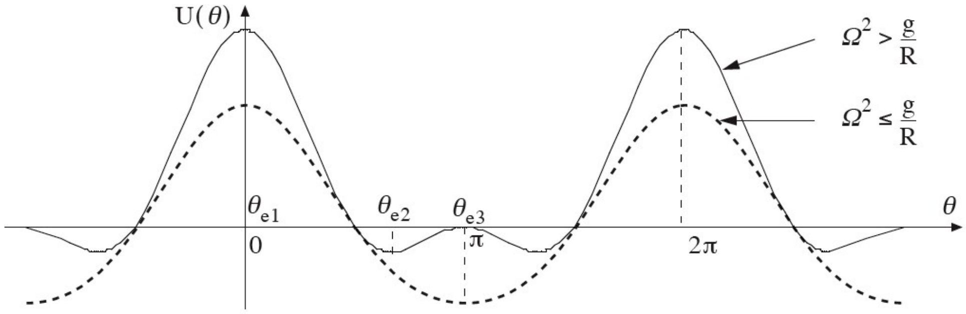
$$U''(\theta) = -\cos\theta\,\left(\Omega^2\,\cos\theta + \frac{g}{R}\right) + \Omega^2\,\sin^2\theta$$

permet de voir que **dans tous les cas**, $\theta = 0$ est un point d'équilibre instable, puisque $U''(0) = -\left(\Omega^2 + \frac{g}{R}\right) < 0$, tandis que $\theta = \pi$ est un point d'équilibre stable si et seulement si $\Omega^2 < g/R$, vu que $U''(0) = \Omega^2 - g/R < 0$. En conclusion, tant que la vitesse de rotation Ω reste suffisamment faible, la seule position d'équilibre stable est au bas de l'anneau.

Dans le cas $\Omega^2 > g/R$, non seulement $\theta = 0$, mais aussi $\theta = \pi$ sont des points d'équilibre instables. Un nouveau point d'équilibre apparaît en θ tel que $\Omega^2\,\cos\theta = -g/R$: $\cos\theta$ doit être négatif, donc $3\pi/2 > \theta > \pi/2$. Ce nouveau point représente un équilibre stable. Sa position est donnée par

$$\theta = \arccos\left(-\frac{g}{\Omega^2\,R}\right)$$

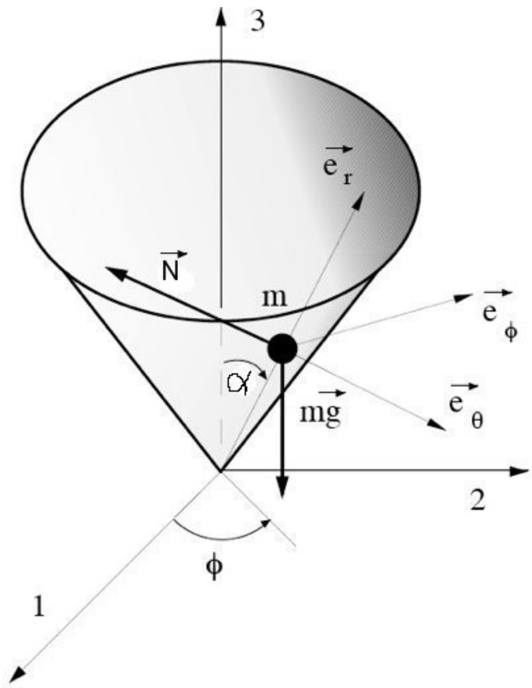
On voit que si $\Omega^2 \gg g/R$, $\theta \to \pi/2$. Ces résultats sont bien conformes à l'intuition : tant que la rotation est lente, le point matériel reste au voisinage du bas de l'anneau, mais pour une rotation rapide, la "force" centrifuge domine et le point s'approche de la mi-hauteur de l'anneau.



Problème 3 :

Le système étudié est le point matériel. Énumérons les quelques faits qui permettent de préciser le problème :

- Les forces sont le poids $m\mathbf{g}$ du point matériel et la réaction du cône $\mathbf{N}$.
- On repère la position du point à l'aide des coordonnées sphériques.
- On a pour contraintes :
  - Le point matériel reste toujours sur la surface du cône $\Rightarrow$ $\theta = \alpha = cste \ \Rightarrow \ \dot{\theta} = \ddot{\theta} = 0$
  - Il n'y a pas de frottement, donc la force de réaction reste toujours perpendiculaire à la surface : $\mathbf{N} = -N\,\mathbf{e}_\theta \ \Leftrightarrow \ N_r = N_\varphi = 0$ et $N = N_\theta$.



1. Équation du mouvement : $m\mathbf{a} = m\mathbf{g} + \mathbf{N}$. En appliquant les formules 5.63 p. 131 donnant l'accélération en coordonnées sphériques, on obtient, compte tenu des contraintes ci-dessus, les accélérations selon les axes $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$, $\mathbf{e}_\varphi$ respectivement :

$$\begin{aligned} m(\ddot{r} - r\sin^2\alpha\,\dot{\varphi}^2) &= -mg\cos\alpha & (4) \\ -mr\sin\alpha\cos\alpha\,\dot{\varphi}^2 &= mg\sin\alpha - N & (5) \\ r\sin\alpha\,\ddot{\varphi} + 2\sin\alpha\,\dot{r}\,\dot{\varphi} &= 0 & (6) \end{aligned}$$

car $m\mathbf{g} = mg\,\cos\alpha\,\mathbf{e}_r + mg\,\sin\alpha\,e_\theta$.

2. Orbites dans l'espace de phase $(r, \dot{r})$: Afin de pouvoir appliquer le lemme fondamental (paragraphe 6.3.4, pp. 150-151), il faudrait avoir une équation de type $\ddot{r} = f(r)$, alors que l'équation 1 nous donne $\ddot{r} = f(r, \dot{\varphi})$. Mais l'équation 3 permet d'écrire

$$r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\varphi}\right) = 0$$

donc

$$r^2\dot{\varphi} = C \quad \Leftrightarrow \quad \dot{\varphi} = \frac{C}{r^2}$$

relation qui permet d'éliminer $\dot{\varphi}$ de (1). On a ainsi

$$\ddot{r} = \frac{C^2}{r^3}\sin^2\alpha - g\cos\alpha = f(r)$$

qui permet de trouver, au travers du lemme fondamental, la relation cherchée entre r et $\dot{r}$:

$$G(r, \dot{r}) = \frac{1}{2}\dot{r}^2 + \frac{C^2}{2r^2}\sin^2\alpha + g\cos\alpha\, r = K$$

On a donc bien une constante du mouvement de la forme

$$K = \frac{1}{2}\dot{r}^2 + U(r) \quad \text{avec} \quad \frac{dU}{dr} = -f(r) \quad \text{et} \quad U(r) = g\cos\alpha\, r + \sin^2\alpha\frac{C^2}{2r^2}$$

ou encore

$$\dot{r} = \pm\left(2K - 2g\cos\alpha\, r - \sin^2\alpha\frac{C^2}{r^2}\right)^{1/2}$$

Les orbites seront donc symétriques d'axe r (voir figure). Celle qui se réduit à un point sur l'axe r correspond à un mouvement circulaire uniforme sur un cercle horizontal. C'est un point d'équilibre tel que $\ddot{r} = 0 \;\Leftrightarrow\; dU/dr = 0$, dont la valeur est

$$dU/dr = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{C^2}{r^3}\,\sin^2\alpha = g\,\cos\alpha \quad \Rightarrow \quad \bar{r}^3 = \frac{\sin^2\alpha\, C^2}{g\cos\alpha} \tag{7}$$

3. Mouvement circulaire uniforme : il a lieu pour $r_0 = \bar{r}$, $\dot{r_0} = 0$, avec un rayon du cercle $R = \bar{r}\sin\alpha$ et une vitesse angulaire $\bar{\omega} = \dot{\varphi}_0 = C/\bar{r}^2$. Introduite dans l'équation 7, cette relation nous donne

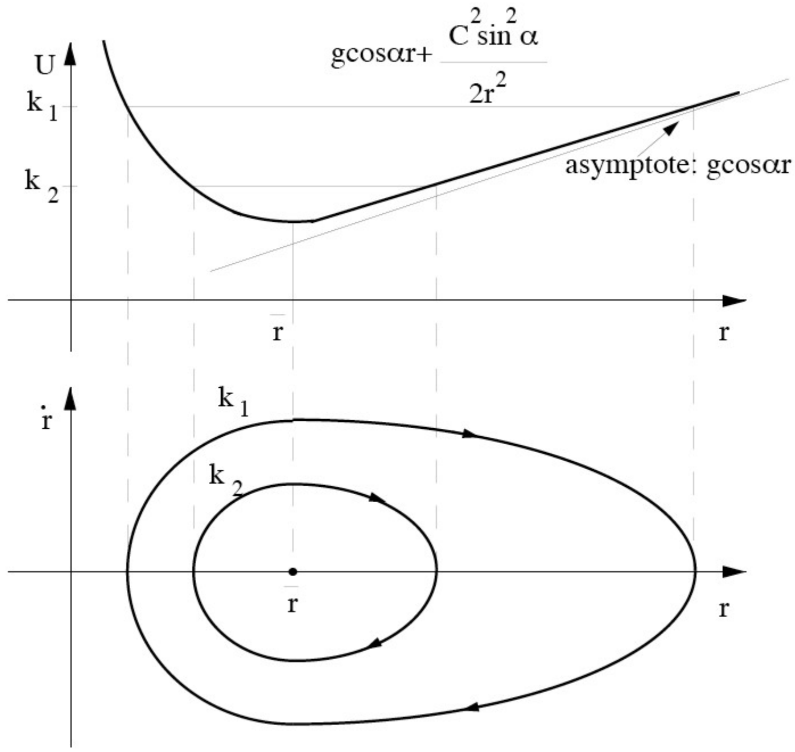
$$\bar{\omega}^2 = \frac{g}{R\tan\alpha}$$

ainsi que la période du mouvement circulaire

$$\underline{\bar{T} = \frac{2\pi}{\bar{\omega}} = 2\pi\sqrt{\frac{R\tan\alpha}{g}}}$$

4. Etude des petits mouvements autour de $r = \bar{r}$: $|r - \bar{r}| \ll \bar{r}$.
On linéarise le problème en développant la fonction $U(r)$ en série :

$$U(r) = U(\bar{r}) + \underbrace{U'(\bar{r})}_{0}(r - \bar{r}) + \frac{1}{2}U''(\bar{r})\,(r - \bar{r})^2 + ...$$



Ici,

$$
\begin{aligned}
U(r) &= g\,\cos\alpha\, r + \sin^2\alpha\,\frac{C^2}{2r^2}\\
U'(r) &= g\,\cos\alpha - \sin^2\alpha\,\frac{C^2}{r^3}\\
U''(r) &= 3\,\sin^2\alpha\,\frac{C^2}{r^4}\\
\Rightarrow\; U(r) &\simeq g\,\cos\alpha\,\bar{r} + \sin^2\alpha\,\frac{C^2}{2\bar{r}^2} + \frac{3}{2}\sin^2\alpha\,\frac{C^2}{\bar{r}^4}\,(r-\bar{r})^2\\
\underline{f(r)} &= \underline{-\frac{dU}{dr} = -3\,\sin^2\alpha\,\frac{C^2}{\bar{r}^4}\,(r-\bar{r})}
\end{aligned}
$$

Comme $\ddot{r} = f(r)$, on a une équation du type “oscillateur harmonique”

$$\ddot{r} + \omega^2(r-\bar{r}) = 0$$

avec

$$\omega^2 = 3\,\sin^2\alpha\,\underbrace{\frac{C^2}{\bar{r}^4}}_{\bar{\omega}^2} = 3\,\sin^2\alpha\,\bar{\omega}^2$$

On a donc un oscillateur harmonique de pulsation ω et de période

$$\underline{T =}\frac{2\pi}{\omega} = \underline{\frac{1}{\sqrt{3}\sin\alpha}\,\bar{T}}$$

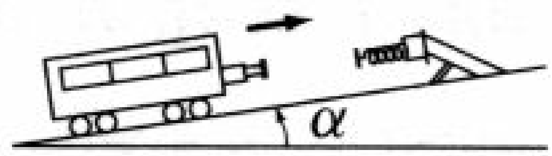
Mécanique générale

Énoncé des exercices

Problème 1 :

Un train de masse M arrive contre un butoir avec une vitesse v_0 (voir figure). Sachant que la voie fait un angle α avec l'horizontale et que le butoir exerce une force $|\mathbf{F}| = k\,x + q\,x^3$ lorsqu'il est comprimé d'une longueur x, quelle sera la compression maximale ? Autrement dit, de quelle longueur x_{max} va-t-il se rétrécir ? k et q sont des constantes positives.

Indication : On demande seulement l'équation dont x_{max} est la solution, et non la solution (analytique) x_{max}.



Problème 2 :

Deux étoiles de même masse M ont un mouvement circulaire de rayon R autour de leur centre de masse G. Quelle est la vitesse des étoiles ?

Étudier le mouvement d'un corps de masse m ($m \ll M$) se déplaçant sur la droite contenant G et perpendiculaire au plan de la trajectoire des étoiles :

1. Esquisser quelques orbites dans l'espace de phase (x, v).
2. Calculer la période des petites oscillations autour de la position d'équilibre.
3. Calculer la vitesse de libération à partir de la position d'équilibre.

   Indication : Le petit corps a une influence négligeable sur le mouvement des étoiles, et les forces de gravitation sont données par la loi

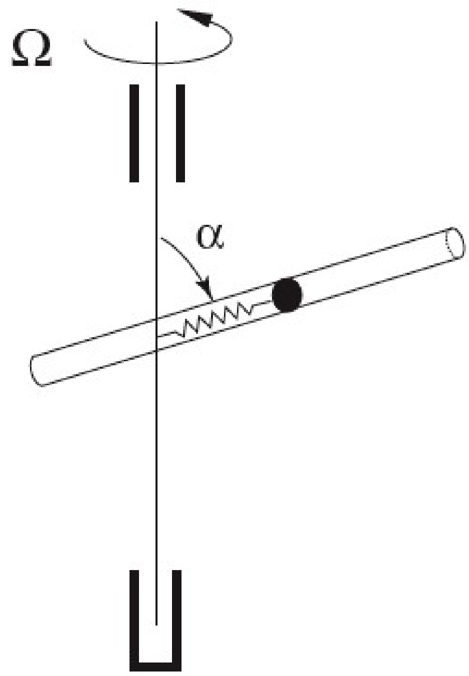
$$\mathbf{F}_{A\to B} = -G\frac{m_{\mathrm{A}}\, m_{\mathrm{B}}}{|\mathbf{x}|^2}\,\hat{\mathbf{x}}\,, \quad \text{avec} \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}_{\mathrm{B}} - \mathbf{x}_{\mathrm{A}}$$

<u>Problème 3</u> :

Une bille de masse m se déplace à l'intérieur d'un tube de longueur L tournant à une vitesse Ω constante autour d'un axe vertical. L'angle α entre le tube et l'axe de rotation est maintenu constant (voir figure). On suppose que la bille glisse sans frottement dans le tube, et qu'elle est retenue à l'axe de rotation du tube par un ressort de raideur k. Ecrire les équations du mouvement et esquisser les orbites dans l'espace de phase $(r, \dot{r})$.

<u>Facultatif</u> : Résoudre les équations du mouvement en prenant comme conditions initiales :

$r(0) = r_0$ et $\dot{r}(0) = 0$ à $t = 0$.



Mécanique générale

Corrigé des exercices

Problème 1 :

Définissons un repère Oxy avec O sur l'extrémité du butoir, l'axe x parallèle aux rails et l'axe y perpendiculaire à ceux-ci. La somme des forces selon x qui s'exercent sur le train sera due à la force de réaction du butoir et au poids du train. Écrivons l'équation du mouvement le long de l'axe parallèle à $\mathbf{v_0}$:

$$\ddot{x} = -g \sin\alpha - \frac{k}{M}\,x - \frac{q}{M}\,x^3$$

Cette équation est de la forme $\ddot{x} = f(x)$, on peut donc appliquer le lemme fondamental. Il est facile de voir que la primitive de $-f(x)$ est

$$U = g\,\sin\alpha\,x + \frac{k}{2M}\,x^2 + \frac{q}{4M}\,x^4 = x\,\left(g\,\sin\alpha + \frac{k}{2M}\,x + \frac{q}{4M}\,x^3\right)$$

Conditions initiales :
- en $x = 0$, on a $v = v_0$, et en $x = x_{max}$, on a $v = 0$

Par conséquent, comme $G(x, v) = \frac{1}{2}v^2 + U(x)$ est une constante du mouvement, on a $G(0, v_0) = G(x_{max}, 0)$ et x_{max} est solution de l'équation

$$\underline{\frac{1}{2}v_0^2 = x_{max}\,\left(g\,\sin\alpha + \frac{k}{2M}\,x_{max} + \frac{q}{4M}\,x_{max}^3\right)}$$

Problème 2 :

La loi de la gravitation (12.1 p. 314) nous dit que la force exercée par une masse m_{A} sur une masse m_{B} s'écrit

$$\mathbf{F}_{A\to B} = -G\,\frac{m_{\mathrm{A}}\,m_{\mathrm{B}}}{|\mathbf{x}|^2}\,\hat{\mathbf{x}}$$

Ici, le centre de masse est au milieu du segment défini par les centres des deux masses M, et la force ressentie par chaque étoile est (vu qu'elles sont distantes de $2R$) :

$$\mathbf{F} = -G\,\frac{M^2}{4\,R^2}\,\mathbf{e}_r \;\Rightarrow\; F_\theta = 0, \quad F_\varphi = 0$$

Les équations du mouvement des étoiles en coordonnées sphériques se simplifient beaucoup, compte tenu du fait que $\theta = \pi/2 \;\Rightarrow \dot{\theta} = \ddot{\theta} = 0$, $\sin\theta = 1$, $\cos\theta = 0$ et que $\dot{\varphi} = \Omega = \text{constante} \;\Rightarrow \ddot{\varphi} = 0$. Elles se réduisent à :

$$\begin{aligned} M\,a_r = M(\ddot{r} - r)\Omega^2 &= -G\,\frac{M^2}{4\,R^2} \\ M\,a_\varphi = 2\dot{r}\Omega &= 0 \;\Rightarrow\; \dot{r} = 0 \;\;\Rightarrow\;\; r = const = R \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} \ddot{r} &= R\,\Omega^2 - \frac{GM}{4\,R^2} = 0 \\ \Rightarrow R^2\,\Omega^2 &= \frac{GM}{4\,R} \\ v &= R\,\Omega = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{GM}{R}} \end{aligned}$$

Mouvement du troisième corps : On peut se placer en coordonnées cartésiennes $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$, où O se confond avec le centre de masse, $\mathbf{e}_1$ est – à un instant t donné, par exemple $t = 0$ – le long de l'axe AB qui passe par les centres des étoiles et $\mathbf{e}_3$ est vertical et dirigé vers le haut. Comme on se limite aux déplacements selon $\mathbf{e}_3$, la symétrie de la situation fait que la résultante des forces exercées par les deux étoiles sur ce corps est le long de l'axe 3. Si z est la position le long de l'axe 3, l'équation du mouvement s'écrit

$$m\ddot{z} = -\frac{2GMm}{R^2 + z^2}\cos\alpha$$

mais

$$\cos\alpha = \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}}$$

donc

$$\ddot{z} = -2G\,\frac{M\,z}{(R^2 + z^2)^{3/2}} = f(z)$$

Le point d'équilibre est en $\ddot{z} = -\frac{dU}{dz} = 0$, c'est-à-dire, selon l'équation ci-dessus, en $z = 0$. L'équation du mouvement permet d'appliquer le lemme fondamental :

$$\frac{dU}{dz} = \frac{2GMz}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \quad \Rightarrow \quad U = -\frac{2GM}{(R^2 + z^2)^{1/2}}$$

La constante K du mouvement vaut donc

$$K = \frac{1}{2}\dot{z}^2 - \frac{2GM}{(R^2 + z^2)^{1/2}}$$

et

$$\dot{z} = \pm\sqrt{2}\left(K + \frac{2\,GM}{(R^2 + z^2)^{1/2}}\right)^{1/2}$$

On peut maintenant aborder les trois points demandés.

1. On voit que $|\dot{z}|$ est maximum lorsque z est nul, et minimum ou nul lorsque z est grand. On voit aussi que, pour que $|\dot{z}|$ puisse s'annuler tout en gardant $|z|$ borné, il faut que K soit négatif : c'est effectivement le cas d'un système lié. Si K est positif, $|\dot{z}|$ reste non nul pour tout z et le système n'est pas lié. Si $K = 0$, $|\dot{z}|$ ne s'annule que pour $z \to \pm\infty$, et sa valeur en $z = 0$ est la vitesse de libération.
2. On développe U en série autour du point d'équilibre :

$$U(z) \simeq U(0) + \underbrace{U'(0)}_{0}\cdot z + \frac{1}{2}U''(0)\cdot z^2$$

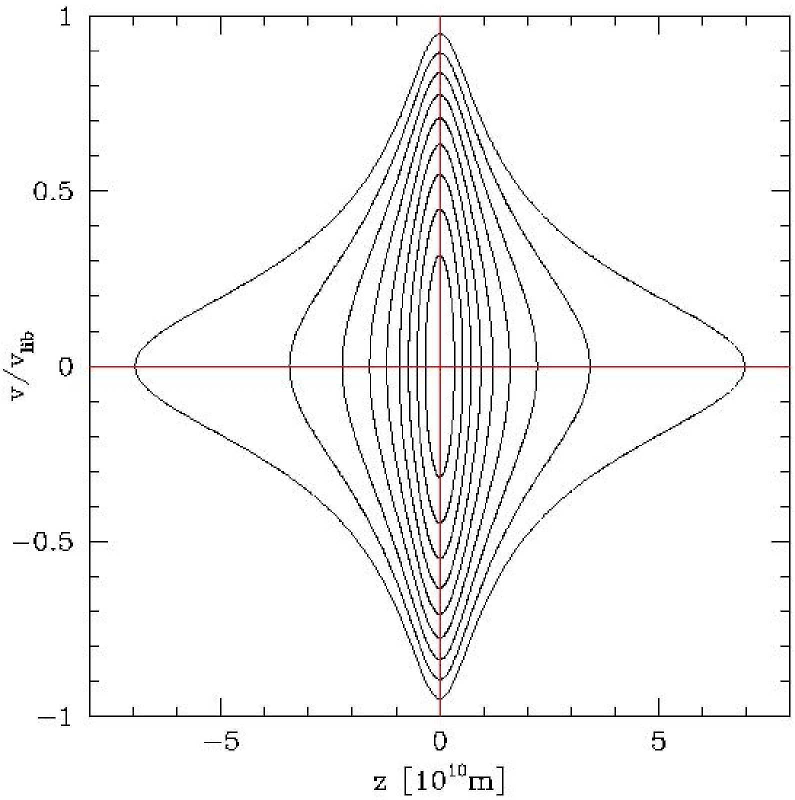


FIG. 1 – Orbites dans l'espace de phase. Les courbes correspondent aux valeurs de $K = -1.8\frac{GM}{R}$, $-1.6\frac{GM}{R}$ etc. jusqu'à $-0.2\frac{GM}{R}$. Les vitesses sont normalisées à la vitesse de libération.

$$\begin{aligned}
U &= -\frac{2GM}{(R^2+z^2)^{1/2}} \\
U' &= \frac{2GM\,z}{(R^2+z^2)^{3/2}} \\
U'' &= \frac{2GM\,(R^2+z^2)^{3/2} - 6GM\,z^2\,(R^2+z^2)^{1/2}}{(R^2+z^2)^3} \\
U''(0) &= \frac{2GM}{R^3}
\end{aligned}$$

On a $f(z) = -\frac{dU}{dz} = -\frac{d}{dz}(U(0) + \frac{1}{2}U''(0)\,z^2) = -U''(0)\cdot z$, donc on a une équation du type oscillateur harmonique :

$$\begin{aligned}
f(z) &= -\frac{2GM}{R^3}\cdot z \\
\ddot{z} + \frac{2GM}{R^3}\cdot z &= 0 \quad (\text{type} \;\; \ddot{x} + \omega^2\,x = 0) \\
\Rightarrow \;\; \omega^2 &= \frac{2GM}{R^3} \\
\Rightarrow \;\; T &= \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{2GM}}
\end{aligned}$$

3. On peut simplement rappeler ici la remarque faite au point 1 déjà, à savoir que

la vitesse de libération correspond à $K = 0$. Alors,

$$\dot{z} = v_{lib} = 2\sqrt{\frac{GM}{R}}$$

Une autre manière d'aborder la question est d'exprimer la constance de K ainsi :

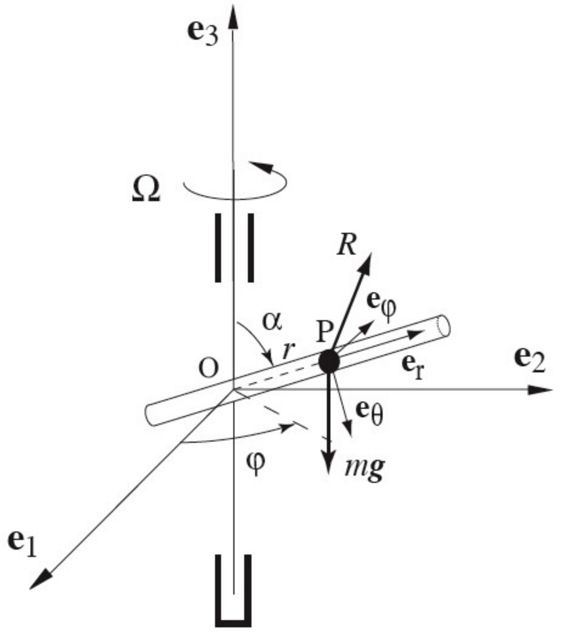
$$\frac{1}{2}\dot{z}_0^2 - \frac{2\,GM}{\sqrt{R^2 + z_0^2}} = \frac{1}{2}\dot{z}_1^2 - \frac{2\,GM}{\sqrt{R^2 + z_1^2}}$$

Soient $z_0 = 0$, $\dot{z}_0 = v_{lib}$ et $z_1 = \infty$, $\dot{z}_1 = 0$: on a

$$\frac{1}{2}\dot{z}_0^2 - \frac{2\,GM}{\sqrt{R^2 + z_0^2}} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \dot{z}_0 = v_{lib} = 2\sqrt{\frac{GM}{R}}$$

Problème 3 :

Le ressort n'exerce aucune force pour la position $r = r_0$, donc sa force de rappel peut s'écrire $\mathbf{F}_r = -k(r - r_0)\,\mathbf{e}_r$. L'équation de Newton en coordonnées sphériques devient :



$$\begin{aligned} m(\ddot{r} - r\Omega^2\sin^2\alpha) &= -mg\cos\alpha - k(r - r_0) && (1) \\ -mr\Omega^2\sin\alpha\cos\alpha &= mg\sin\alpha + R_\theta && (2) \\ 2m\dot{r}\Omega\sin\alpha &= R_\varphi && (3) \end{aligned}$$

La position d'équilibre est donnée par la condition $\ddot{r} = 0$ dans l'équation (1). On obtient

$$r_e = \frac{mg\cos\alpha - k\,r_0}{m\Omega^2\sin^2\alpha - k}$$

Pour esquisser les orbites, on peut appliquer le lemme fondamental puisque la première équation est de la forme $\ddot{r} = f(r)$. On a donc la constante du mouvement

$$K = \frac{1}{2}\,\dot{r}^2 + U(r)$$

avec

$$f(r) = r\,\Omega^2 \sin^2\alpha - \frac{k}{m}\,(r - r_0) - g\,\cos\alpha \;\;\Rightarrow\;\; U(r) = -\frac{1}{2}\,r^2\Omega^2\sin^2\alpha + \frac{k}{2m}\,(r - r_0)^2 + gr\,\cos\alpha$$

En regroupant les termes, il vient

$$U(r) = \left(g\,\cos\alpha - \frac{k\,r_0}{m}\right)\,r - \left(\Omega^2\sin^2\alpha - \frac{k}{m}\right)\,\frac{r^2}{2}$$

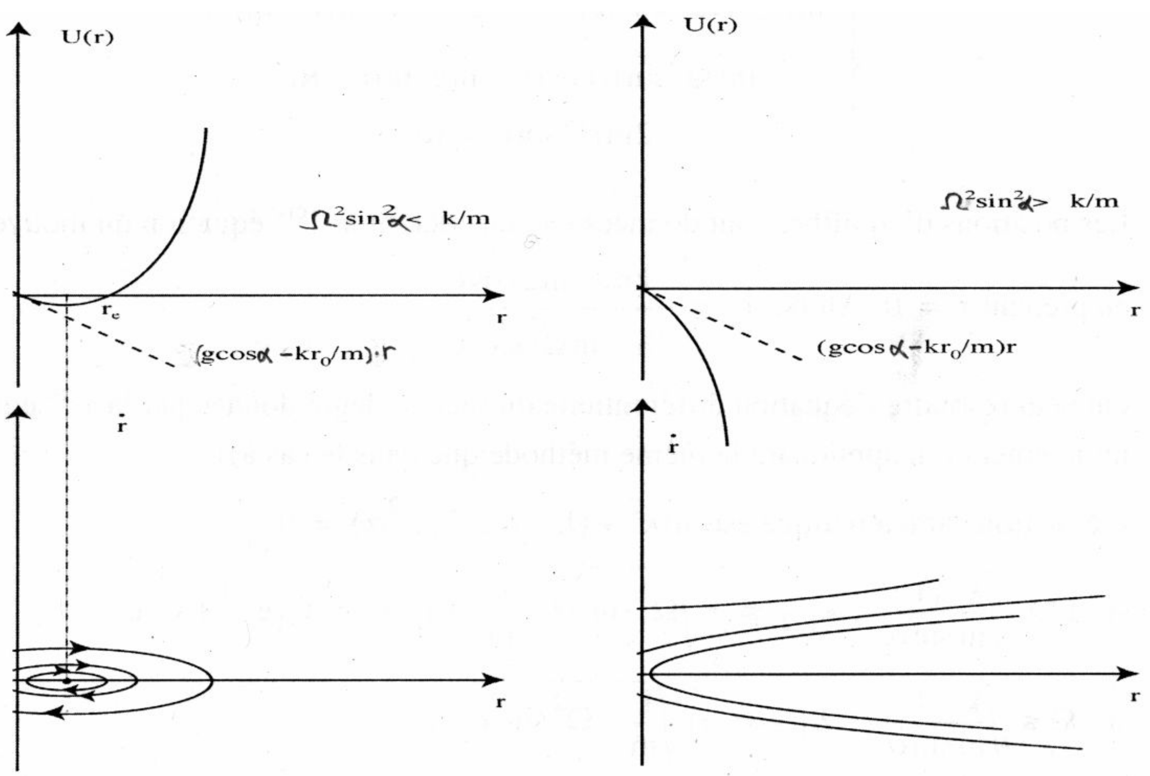
Supposons d'abord que le coefficient de r soit négatif, ce qui signifie que le ressort est capable de résister à la gravité :

$$g\,\cos\alpha - \frac{k\,r_0}{m} < 0$$

Ce cas est illustré dans la figure ci-dessous, et se divise encore en deux situations a) et b) :

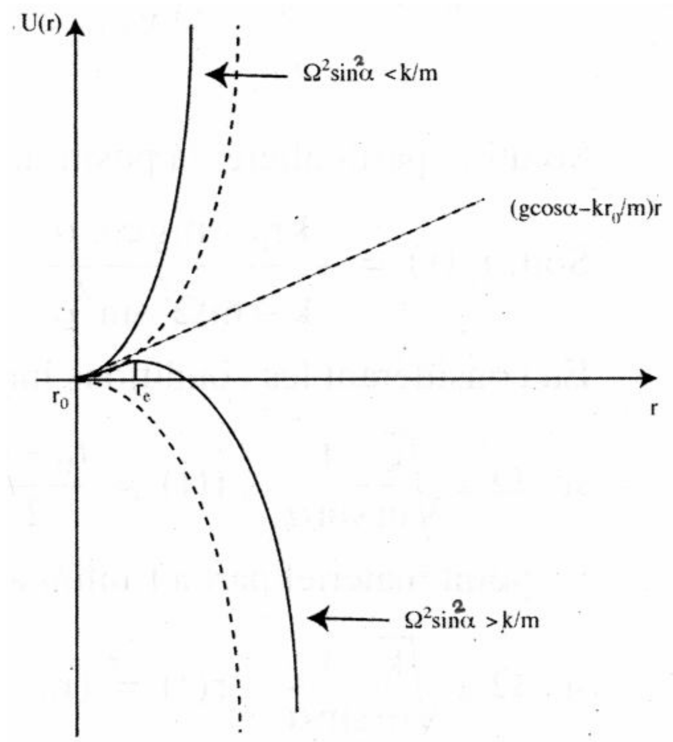
Cas a) : $\Omega \le \dfrac{1}{\sin\alpha}\sqrt{\dfrac{k}{m}}$ Cas b) : $\Omega \ge \dfrac{1}{\sin\alpha}\sqrt{\dfrac{k}{m}}$

On voit qu'on a un point d'équilibre stable seulement dans le cas a).



Si le coefficient de r est positif :

$$g\,\cos\alpha - \frac{k\,r_0}{m} > 0$$



alors il n'y a pas de point d'équilibre stable car le ressort est trop faible pour soutenir la masse. L'allure de $U(r)$ est esquissée ci-dessus.

Résolution de l'équation du mouvement :

On peut résoudre la première équation du mouvement en cherchant d'abord la solution de l'équation homogène (sans second membre). On obtient l'équation caractéristique $m\lambda^2 + (k - m\Omega^2 \sin^2\alpha) = 0$

si $\Omega \geq \dfrac{1}{\sin\alpha}\sqrt{\dfrac{k}{m}}$, $\lambda_{1,2} \;=\; \pm\sqrt{\Omega^2\sin^2\alpha - \dfrac{k}{m}}$ et $r_h(t) = C_1\, e^{\lambda_1 t} + C_2\, e^{\lambda_2 t}$

si $\Omega \leq \dfrac{1}{\sin\alpha}\sqrt{\dfrac{k}{m}}$, $\lambda_{1,2} \;=\; \pm i\sqrt{\dfrac{k}{m} - \Omega^2\sin^2\alpha}$ et $r_h(t) = C_1 \cos\left[\left(\sqrt{\dfrac{k}{m} - \Omega^2\sin^2\alpha}\right) t -\right.$

Ensuite, il faut considérer une solution particulière de l'équation inhomogène. Or la position d'équilibre r_e correspond justement à une solution particulière. On avait

$$r_e = \frac{mg\cos\alpha - k\,r_0}{m\Omega^2\sin^2\alpha - k}$$

qui s'ajoute à la solution de l'équation homogène. En tenant compte des conditions initiales, on peut écrire :

$$\text{si } \Omega \geq \frac{1}{\sin\alpha}\sqrt{\frac{k}{m}}\ ,\ r(t) = \frac{r_0 - r_e}{2}\left(e^{\lambda_1 t} + e^{\lambda_2 t}\right) + r_e$$

Le point matériel part à l'infini au bout d'un temps suffisamment long (et le ressort finit par casser).

$$\text{si } \Omega \leq \frac{1}{\sin\alpha}\sqrt{\frac{k}{m}}\ ,\ r(t) = (r_0 - r_e)\cos\left[\left(\sqrt{\frac{k}{m} - \Omega^2\sin^2\alpha}\right) t\right] + r_e$$

Le point matériel a un mouvement d'oscillation autour de la position d'équilibre.