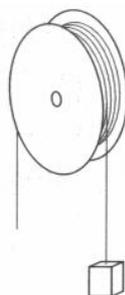


Mécanique générale

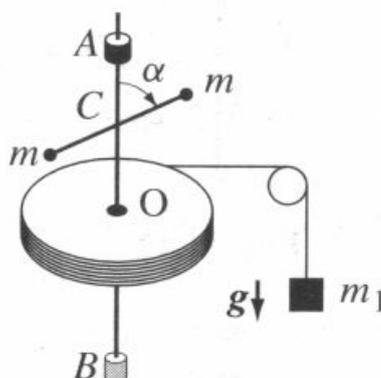
Énoncé des exercices**Problème 1 :**

Une masse m est retenue par une corde enroulée sur la poulie d'un puits (voir figure). On lâche la corde, dont la masse est négligeable. Trouver l'évolution du système et la tension dans la corde. On admettra que la poulie, de masse M et de rayon R , tourne sans frottement autour de son axe et qu'il n'y a pas de glissement de la corde sur la poulie.

**Problème 2 :**

Trouver l'évolution du système représenté sur la figure, sachant que la masse m_1 est lâchée sans vitesse initiale. La barre mCm est solidaire de l'axe AB et tourne avec celui-ci. C'est donc le tambour de centre O et les masselottes m qui tournent comme un solide unique. Calculer la force de réaction au palier A et la tension du fil. On suppose qu'il n'y a pas de frottement et que les masses du tambour, des axes et du fil sont négligeables.

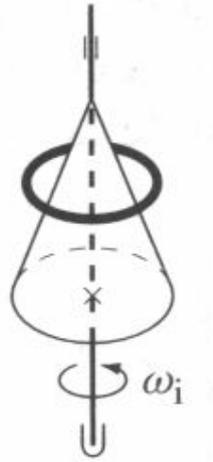
Le tambour a un rayon R , l'angle α est constant, la tige portant les masselottes de masse m a une longueur ℓ et est fixée à l'axe AB en son milieu, au point C.



Problème 3 :

Un anneau (sans rotation initiale) est posé sur un cône plein initialement en rotation avec une vitesse ω_i autour de son axe (voir figure). Quelle est la vitesse de rotation finale ω_f du système? Le résultat dépend-il des frottements qui ont mis l'anneau en rotation?

L'anneau a une masse m et un rayon r ; le cône a une masse M , un rayon R et une hauteur H .

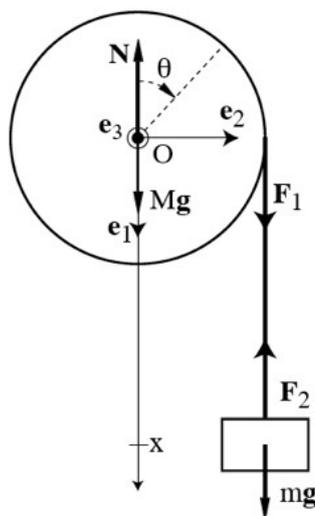


Mécanique générale

Corrigé des exercices

Problème 1 :

Définissons un système de coordonnées $Oe_1e_2e_3$ avec e_1 pointant vers le bas, e_2 vers la droite et e_3 vers nous (voir figure). Soit $x(t)$ la position de la masse m selon e_1 .



Le moment cinétique du système entier par rapport à O peut alors s'écrire

$$\mathbf{L}_0 = \sum_{\alpha} \mathbf{x}_{\alpha} \wedge M_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha} + R \mathbf{e}_2 \wedge m \dot{x}(t) \mathbf{e}_1$$

où M_{α} et \mathbf{v}_{α} sont respectivement la masse et la vitesse d'un élément α de la poulie, vitesse qui peut aussi s'écrire

$$v_{\alpha} = \omega(t) r_{\alpha} \quad \text{où} \quad 0 \leq r \leq R$$

On va alors pouvoir remplacer la somme par une intégrale. La densité surfacique de la poulie s'écrit

$$\rho^{(s)} = \frac{M}{\pi R^2}$$

et l'élément de masse correspondant à l'anneau de rayon r et d'épaisseur dr vaut

$$dm = 2\pi r dr \cdot \rho^{(s)} = \frac{2M}{R^2} r dr$$

La composante du moment cinétique selon e_3 (les deux autres composantes sont nulles) devient alors :

$$L_0 = -\frac{2M}{R^2} \omega(t) \int_0^R r^3 dr - R m \dot{x}(t) = -\frac{1}{2} M R^2 \underbrace{\omega(t)}_{\dot{x}/R} - R m \dot{x}(t) = -\left(\frac{1}{2} M + m\right) R \dot{x}(t)$$

On peut à présent appliquer le théorème du moment cinétique

$$\frac{d}{dt} \mathbf{L}_0 = \mathbf{M}_0^{ext} = \mathbf{x} \wedge \mathbf{F}_{totale}^{ext}$$

soit

$$-\left(\frac{1}{2}M + m\right) R \ddot{x} = -R m g \quad \Rightarrow \quad a = \ddot{x} = \frac{1}{1 + \frac{M}{2m}} g$$

On voit que, quelles que soient les masses m et M , on a toujours $a < g$. Par conséquent, la masse m a toujours une accélération inférieure à celle qu'elle aurait en chute libre, donc la corde reste toujours tendue.

Il reste à calculer la tension \mathbf{T} de la corde. Pour cela, considérons le système constitué par le seul poids m : ce corps subit une accélération \mathbf{a} qui résulte, selon la loi de Newton, de la somme des forces exercées sur lui. On a donc, en identifiant \mathbf{T} à la force $\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2$ de la figure

$$m\mathbf{a} = \sum \mathbf{F}^{ext} = m\mathbf{g} + \mathbf{F}_2 = m\mathbf{g} - \mathbf{T} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{T} = m(\mathbf{g} - \mathbf{a})$$

Les vecteurs \mathbf{T} , \mathbf{g} et \mathbf{a} étant parallèles à \mathbf{e}_1 , on peut ne considérer que les composantes selon \mathbf{e}_1 . En posant

$$C = \frac{M}{2m}$$

on obtient

$$\underline{T} = m(g - a) = \left(1 - \frac{1}{1 + C}\right) m g = \frac{C}{1 + C} m g$$

Problème 2 :

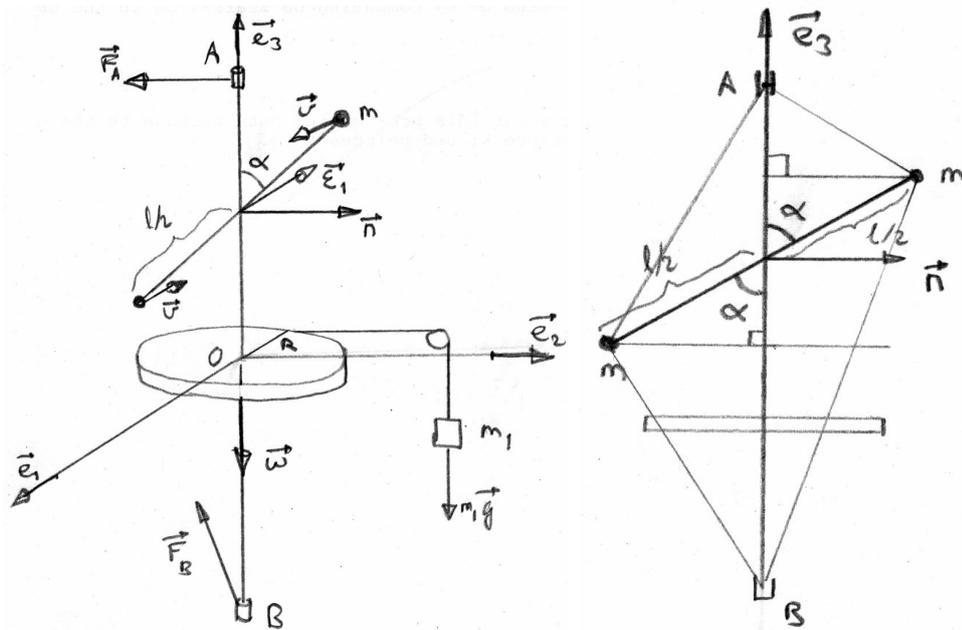
Comme dans l'exercice 1, on va considérer le système entier, i.e. l'objet qui est en rotation et la masse m_1 . En effet, on voit que si la masse m_1 se déplaçait horizontalement à vitesse constante, son moment cinétique par rapport à O ou à n'importe quel point de l'axe AB resterait constant. Donc, tant que le fil reste tendu, on peut considérer cette masse comme solidaire du reste, et son moment cinétique contribue donc au moment du système entier.

Référentiels : 1) Le laboratoire, pour le calcul de l'évolution du système. 2) Le solide en rotation, pour le calcul de la force de réaction en A.

Systèmes de coordonnées : 1) Laboratoire : repère $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ avec \mathbf{e}_1 pointant vers nous, \mathbf{e}_2 parallèle au fil horizontal et pointant vers la droite, et \mathbf{e}_3 dans la direction de l'axe BA. 2) Solide en rotation : vecteur unité $\boldsymbol{\varepsilon}_1$ perpendiculaire au plan ACm (pointant par exemple loin de nous), et vecteur \mathbf{n} dans le plan ACm, perpendiculaire à l'axe \mathbf{e}_3 et pointant à droite, tel que $\mathbf{n} \wedge \boldsymbol{\varepsilon}_1 = \mathbf{e}_3$. Voir la géométrie du problème sur les deux figures.

Évolution du système : Considérons la troisième composante du moment cinétique du système total. Comme les deux masses m sont à distance $(\ell/2) \sin \alpha$ de l'axe de rotation et que la vitesse de la masse m_1 correspond à celle d'un point situé à distance R du même axe, on peut écrire L_{O3} en fonction de la vitesse de rotation ω :

$$\begin{aligned} L_{O3} &= -2 \left(\frac{\ell}{2} \sin \alpha\right) \cdot \left(m\omega \frac{\ell}{2} \sin \alpha\right) - R(m_1\omega R) \\ &= -\frac{m\ell^2}{2} \omega \sin^2 \alpha - R^2 m_1 \omega \\ \omega = \frac{\dot{y}}{R} &\Rightarrow L_{O3} = -\left(\frac{m\ell^2}{2R} \sin^2 \alpha + m_1 R\right) \dot{y} \end{aligned}$$



Appliquons maintenant le théorème du moment cinétique $\frac{d}{dt}L_O = M_O^{ext}$:

$$\frac{d}{dt}L_{O3} = -R m_1 g \Rightarrow -\left(\frac{m\ell^2}{2R} \sin^2 \alpha + m_1 R\right) \ddot{y} = -R m_1 g$$

On voit donc que le système est uniformément accéléré, avec une accélération

$$a = \ddot{y} = \frac{g}{1 + \frac{m}{2m_1} \left(\frac{\ell}{R} \sin \alpha\right)^2} = \frac{1}{1+C} g \quad \text{où} \quad C = \frac{m}{2m_1} \left(\frac{\ell}{R} \sin \alpha\right)^2$$

La tension du fil T se calcule comme au problème 1 et vaut :

$$T = m_1 (g - a) = m_1 g \left(1 - \frac{1}{1+C}\right) = \frac{C}{1+C} m_1 g$$

Force de réaction du palier A : Pour la calculer, on ne peut plus se limiter à une seule composante du moment cinétique. En effet, on peut voir que, puisqu'il n'y a pas de frottement et que c'est le palier B qui supporte tout le poids du solide en rotation, la force de réaction \mathbf{F}_A ne comporte aucune composante selon \mathbf{e}_3 , de sorte que $\mathbf{F}_A \cdot \mathbf{e}_3 = 0$.

Rappelons les définitions du moment cinétique, du moment de force et de la vitesse d'un point sur un solide en rotation :

$$\mathbf{L}_B = \sum_{\alpha} \mathbf{x}_{\alpha} \wedge m_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha} \quad ; \quad \mathbf{M}_B = \sum_{\alpha} \mathbf{x}_{\alpha} \wedge \mathbf{F}_{\alpha} \quad ; \quad \mathbf{v}_{\alpha} = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{x}_{\alpha}$$

Calculons le moment cinétique du système entier par rapport au point B, en se rappo-

lant que C est le point où la barre oblique est fixée à l'axe AB :

$$\begin{aligned}
\mathbf{L}_B &= \underbrace{\left[\left(|\mathbf{BC}| - \frac{\ell}{2} \cos \alpha \right) \mathbf{e}_3 - \frac{\ell}{2} \sin \alpha \mathbf{n} \right]}_{\text{position de la première masselotte } m} \wedge m \left[\omega \frac{\ell}{2} \sin \alpha \boldsymbol{\varepsilon}_1 \right] \\
&+ \underbrace{\left[\left(|\mathbf{BC}| + \frac{\ell}{2} \cos \alpha \right) \mathbf{e}_3 + \frac{\ell}{2} \sin \alpha \mathbf{n} \right]}_{\text{position de la seconde masselotte } m} \wedge m \left[-\omega \frac{\ell}{2} \sin \alpha \boldsymbol{\varepsilon}_1 \right] \\
&+ \underbrace{[|\mathbf{BO}| \mathbf{e}_3 - R \mathbf{e}_1]}_{\text{point tangent fil relié à } m_1} \wedge m_1 [\omega R \mathbf{e}_2] \\
&= \left(|\mathbf{BC}| - \frac{\ell}{2} \cos \alpha \right) m \omega \frac{\ell}{2} \sin \alpha \underbrace{\mathbf{e}_3 \wedge \boldsymbol{\varepsilon}_1}_{-\mathbf{n}} - \left(\frac{\ell}{2} \right)^2 \sin^2 \alpha \cdot m \omega \underbrace{\mathbf{n} \wedge \boldsymbol{\varepsilon}_1}_{\mathbf{e}_3} \\
&- \left(|\mathbf{BC}| + \frac{\ell}{2} \cos \alpha \right) \cdot m \omega \frac{\ell}{2} \sin \alpha \underbrace{\mathbf{e}_3 \wedge \boldsymbol{\varepsilon}_1}_{-\mathbf{n}} - \left(\frac{\ell}{2} \right)^2 \sin^2 \alpha \cdot m \omega \underbrace{\mathbf{n} \wedge \boldsymbol{\varepsilon}_1}_{\mathbf{e}_3} \\
&+ |\mathbf{BO}| m_1 \omega R \underbrace{\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_2}_{-\mathbf{e}_1} - R^2 m_1 \omega \underbrace{\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2}_{\mathbf{e}_3} \\
&= \left[-|\mathbf{BC}| + \frac{\ell}{2} \cos \alpha + |\mathbf{BC}| + \frac{\ell}{2} \cos \alpha \right] m \omega \frac{\ell}{2} \sin \alpha \mathbf{n} \\
&- \left[2 \left(\frac{\ell}{2} \right)^2 m \omega \sin^2 \alpha + R^2 m_1 \omega \right] \mathbf{e}_3 - |\mathbf{BO}| m_1 \omega R \mathbf{e}_1 \\
&= m \omega \frac{\ell^2}{2} \underbrace{\cos \alpha \sin \alpha}_{\frac{1}{2} \sin 2\alpha} \mathbf{n} - \left(m \omega \frac{\ell^2}{2} \sin^2 \alpha + m_1 \omega R^2 \right) \mathbf{e}_3 - |\mathbf{BO}| m_1 \omega R \mathbf{e}_1
\end{aligned}$$

On peut maintenant calculer la dérivée par rapport au temps, en constatant que

$$\dot{\mathbf{n}} = -\omega \boldsymbol{\varepsilon}_1$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \mathbf{L}_B &= m \dot{\omega} \frac{\ell^2}{4} \sin 2\alpha \mathbf{n} - m \omega^2 \frac{\ell^2}{4} \sin 2\alpha \boldsymbol{\varepsilon}_1 \\
&- \dot{\omega} \left(\frac{\ell^2}{2} m \sin^2 \alpha + m_1 R^2 \right) \mathbf{e}_3 - |\mathbf{BO}| m_1 \dot{\omega} R \mathbf{e}_1
\end{aligned} \tag{1}$$

Avant d'appliquer le théorème du moment cinétique, calculons le moment des forces extérieures par rapport au point B :

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_B &= |\mathbf{BA}| \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{F}_A + (|\mathbf{BO}| \mathbf{e}_3 - R \mathbf{e}_1) \wedge m_1 g \mathbf{e}_2 \\
&= |\mathbf{BA}| \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{F}_A + |\mathbf{BO}| m_1 g \underbrace{\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_2}_{-\mathbf{e}_1} - R m_1 g \underbrace{\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2}_{\mathbf{e}_3}
\end{aligned} \tag{2}$$

En égalant (1) et (2), on a

$$\begin{aligned}
|\mathbf{BA}| \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{F}_A &= |\mathbf{BO}| m_1 g \mathbf{e}_1 + R m_1 g \mathbf{e}_3 - m_1 \dot{\omega} R^2 \mathbf{e}_3 - m \dot{\omega} \frac{\ell^2}{2} \sin^2 \alpha \mathbf{e}_3 \\
&\quad - m_1 \dot{\omega} |\mathbf{BO}| R \mathbf{e}_1 + m \frac{\ell^2}{4} \sin 2\alpha (\dot{\omega} \mathbf{n} - \omega^2 \boldsymbol{\varepsilon}_1) \\
\Rightarrow \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{F}_A &= \frac{|\mathbf{BO}|}{|\mathbf{BA}|} (m_1 g - m_1 \dot{\omega} R) \mathbf{e}_1 + \frac{1}{|\mathbf{BA}|} m \frac{\ell^2}{4} \sin 2\alpha (-\dot{\omega} \mathbf{n} + \omega^2 \boldsymbol{\varepsilon}_1) \\
&\quad - \left(m_1 \dot{\omega} R^2 + m \dot{\omega} \frac{\ell^2}{2} \sin^2 \alpha \right) \mathbf{e}_3 + \frac{R m_1}{|\mathbf{BA}|} g \mathbf{e}_3
\end{aligned}$$

Ici, on use du fait que $\mathbf{F}_A \cdot \mathbf{e}_3 = 0$, imposé par l'absence de frottements; cela nous permet de retrouver \mathbf{F}_A :

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_A &= (\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{F}_A) \wedge \mathbf{e}_3 = \frac{|\mathbf{BO}|}{|\mathbf{BA}|} (m_1 g - m_1 \dot{\omega} R) \underbrace{\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3}_{-\mathbf{e}_2} \\
&\quad + \frac{1}{|\mathbf{BA}|} m \frac{\ell^2}{4} \sin 2\alpha (\dot{\omega} \underbrace{\mathbf{n} \wedge \mathbf{e}_3}_{-\boldsymbol{\varepsilon}_1} - \omega^2 \underbrace{\boldsymbol{\varepsilon}_1 \wedge \mathbf{e}_3}_{\mathbf{n}}) - \left(\frac{1}{|\mathbf{BA}|} - \frac{R m_1}{|\mathbf{BA}|} g \right) (\dots) \underbrace{\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_3}_0 \\
&= -\frac{|\mathbf{BO}|}{|\mathbf{BA}|} \underbrace{(m_1 g - m_1 \dot{\omega} R)}_T \mathbf{e}_2 + \frac{1}{|\mathbf{BA}|} m \frac{\ell^2}{4} \sin 2\alpha (-\dot{\omega} \boldsymbol{\varepsilon}_1 - \omega^2 \mathbf{n}) \\
\mathbf{F}_A &= -\frac{|\mathbf{BO}|}{|\mathbf{BA}|} T \mathbf{e}_2 - \frac{1}{|\mathbf{BA}|} \frac{m \ell^2}{4} \sin 2\alpha (\dot{\omega} \boldsymbol{\varepsilon}_1 + \omega^2 \mathbf{n})
\end{aligned}$$

Problème 3 :

Aucune force extérieure ne s'exerce sur le système, seule l'inertie de l'anneau est à vaincre et provoque un ralentissement du cône. On fait donc appel à la conservation du moment cinétique :

$$\frac{d}{dt} \mathbf{L} = 0$$

Le moment cinétique final doit être égal au moment cinétique initial.

Moment cinétique initial :

$$\mathbf{L}_i = \mathbf{L}_{\text{cône}} = I_{\text{cône}} \boldsymbol{\omega}_i$$

avec le moment d'inertie $I \equiv \sum_{\alpha} m_{\alpha} d_{\alpha}^2$, et, plus spécifiquement pour le cône,

$$I_{\text{cône}} = \int_{\text{cône}} dm d^2.$$

Moment cinétique final :

$$\mathbf{L}_f = \mathbf{L}_{\text{cône}} + \mathbf{L}_{\text{anneau}} = (I_{\text{cône}} + I_{\text{anneau}}) \boldsymbol{\omega}_f$$

Comme la direction de $\boldsymbol{\omega}$ et de \mathbf{L} n'a pas changé, on peut ne considérer que la composante de L le long de l'axe de rotation :

$$\omega_f = \frac{I_{\text{cône}}}{I_{\text{cône}} + I_{\text{anneau}}} \omega_i$$

avec

$$I_{anneau} = m r^2 \quad \text{et} \quad I_{c\hat{o}ne} = \int_0^H \int_0^{R(y)} 2\pi \rho r^3 dr dy$$

Pour calculer le moment d'inertie $I_{c\hat{o}ne}$, calculons d'abord la masse et le volume de celui-ci, en définissant $R'(y)$ comme le rayon d'une section horizontale du cône à une hauteur y variant de 0 à H :

$$\begin{aligned} R'(y) &= R - \frac{R}{H}y = R \left(1 - \frac{y}{H}\right) \\ M = \rho V &= 2\pi\rho \int_0^H dy \int_0^{R(1-\frac{y}{H})} r dr \\ &= 2\pi\rho \frac{R^2}{2} \int_0^H \left(1 - \frac{y}{H}\right)^2 dy = 2\pi\rho \frac{R^2 H}{6} \\ \Rightarrow V &= \frac{\pi R^2 H}{3} \end{aligned}$$

Le calcul du moment d'inertie est très semblable :

$$\begin{aligned} I_{c\hat{o}ne} &= 2\pi\rho \int_0^H dy \int_0^{R(1-\frac{y}{H})} r^3 dr \\ &= \frac{\pi}{2}\rho R^4 \int_0^H \left(1 - \frac{y}{H}\right)^4 dy \\ &= \frac{\pi}{10}\rho R^4 H = \frac{3}{10} M R^2 \end{aligned}$$

En fin de compte, on obtient

$$\omega_f = \frac{1}{1 + \frac{10}{3} \frac{m}{M} \left(\frac{r}{R}\right)^2} \omega_i$$

Le résultat ne dépend pas des frottements. Le ralentissement du cône ne sera complet que lorsque l'anneau sera parfaitement solidaire de celui-ci, et cela arrivera d'autant plus tôt que le frottement sera efficace.

Mécanique générale

Énoncé des exercices**Problème 1 :**

1. Évaluer la masse de notre Galaxie, la Voie Lactée, sachant que la période de révolution du Soleil autour du centre de la Voie Lactée est 250 millions d'années, que l'orbite du Soleil est circulaire avec un rayon de 8 kpc. On admettra que toute la masse de la Galaxie est répartie de manière homogène à l'intérieur d'une sphère dont le rayon est inférieur à celui de l'orbite solaire. On estimera finalement la masse de la Galaxie en masses solaires.
2. A quelle vitesse (par rapport à la Terre) doit-on lancer un satellite pour qu'il puisse s'échapper de notre Galaxie ? On admettra la configuration la plus favorable possible.

Rappel :

$$G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2} ; 1 \text{ kpc} = 1000 \text{ pc} = 3.086 \cdot 10^{19} \text{ m} ; 1 M_{\odot} = 1.99 \cdot 10^{30} \text{ kg}$$

Problème 2 :

Un tunnel rectiligne est creusé entre deux villes. Sous l'hypothèse que la Terre est une sphère de densité homogène, calculer le temps mis par un corps pour aller d'une ville à l'autre, sous l'action du seul champ de gravitation, donc sans aucun frottement :

1. s'il se déplace dans le tunnel ;
2. s'il se déplace sur une orbite circulaire rasante (c'est-à-dire à une altitude négligeable) autour de la Terre.

Vérifier que, si les villes sont diamétralement opposées, les temps de parcours sont les mêmes dans les deux cas.

Rappel du rayon et de la masse de la Terre (symbole \oplus) :

$$R_{\oplus} = 6.370 \cdot 10^6 \text{ m} ; M_{\oplus} = 5.98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

Problème 3 :

Une balle de fusil a une vitesse initiale de 430 m/s. Quelle est la vitesse de la balle lorsqu'elle atteint une cible située à 300 m ?

On prendra

$$\mathbf{F}^{\text{fr}} = -\lambda v^2 \hat{\mathbf{v}} \text{ avec } \lambda = 2 \cdot 10^{-6} \text{ N m}^{-2} \text{ s}^2 \text{ et } m = 5 \text{ g}$$

et on négligera la force de gravitation.

Problème 4 :

Un parachutiste pesant 80 kg, en chute libre, est soumis à une force de frottement $\mathbf{F}^{fr} = -\lambda v^2 \hat{\mathbf{v}}$. Trouver λ et le coefficient C_x sachant que la vitesse maximale qu'il est possible d'atteindre est 190 km/h (la section horizontale du parachutiste vaut $\approx 0.7 \text{ m}^2$). Le parachutiste saute d'un hélicoptère immobile et décide d'ouvrir son parachute après 1000 m de chute. Calculer le temps de chute et la vitesse atteinte.

Mécanique générale

Corrigé des exercices**Problème 1 :**

Soient M_G la masse cherchée de la Galaxie, M_\odot la masse du Soleil et $R_G = 8$ kpc la distance du Soleil au centre Galactique.

1. De la formule de Newton

$$\mathbf{F}_{CG \rightarrow \odot} = -G \frac{M_G M_\odot}{R_G^3} \mathbf{R}_G$$

on avait tiré l'expression de la vitesse orbitale (chap. 6)

$$v = \sqrt{\frac{G M_G}{R_G}} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2\pi R_G}{v} = 2\pi \sqrt{\frac{R_G^3}{G M_G}}$$

Il faut calculer les valeurs de R_G et de T dans les unités appropriées (SI) :

$$R_G = 8 \text{ kpc} = 8 \cdot 3.086 \cdot 10^{19} \text{ m} = 2.469 \cdot 10^{20} \text{ m}$$

$$T = 250 \cdot 10^6 \text{ ans} = 250 \cdot 10^6 \cdot 365.25 \cdot 86400 = 7.889 \cdot 10^{15} \text{ s}$$

$$\Rightarrow M_G = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \frac{R_G^3}{G} = \frac{4\pi^2}{G} \frac{R_G^3}{T^2} = 1.43 \cdot 10^{45} \text{ kg} = 7.2 \cdot 10^{10} M_\odot$$

2. Le chap. 6 nous a aussi appris que

$$v_{\text{évasion}} = \sqrt{2} v = \sqrt{\frac{2 G M_G}{R_G}} = 2.78 \cdot 10^5 \text{ m/s} = 278 \text{ km/s}$$

Problème 2 :

Soient la Terre de masse M et de rayon R , et un corps de masse m . Soit aussi un référentiel Oxy avec O au centre de la Terre, l'axe x passant par O et parallèle au tunnel et l'axe y coupant le tunnel en son milieu et perpendiculairement.

1. Le théorème de Newton nous dit que

$$\mathbf{F} = -\frac{GMm}{R^3} \mathbf{Om} \quad \text{avec} \quad |\mathbf{Om}| = (x^2 + y^2)^{1/2}$$

avec (x, y) la position de la masse m , et α l'angle entre \mathbf{Om} et \mathbf{Ox} . Seule compte ici la composante de \mathbf{F} selon x :

$$F_x = -\frac{GMm}{R^3} |\mathbf{Om}| \cos \alpha = -\frac{GMm}{R^3} (x^2 + y^2)^{1/2} \frac{x}{(x^2 + y^2)^{1/2}} = -\frac{GMm}{R^3} \cdot x$$

et l'on voit apparaître l'équation bien connue d'un oscillateur :

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad \text{avec} \quad \omega^2 = \frac{GM}{R^3} \quad \text{et} \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{R^3}{GM}}$$

Mais ici, T est la durée d'un aller-retour, alors que nous voulons connaître la durée d'un aller simple :

$$T_{\text{aller}} = \pi \sqrt{\frac{R^3}{GM}} = \pi \cdot 805 = 2529 \text{ s}$$

Il est intéressant de noter que cette durée ne dépend absolument pas de la longueur du trajet, mais seulement du rayon et de la masse de la Terre.

2. La durée de révolution d'un satellite rasant vaut exactement celle de l'aller-retour dans le tunnel ci-dessus. Mais la portion utile de l'orbite, si elle sous-tend l'angle θ , ne prendra que la fraction $\theta/(2\pi)$ de la durée d'une orbite entière :

$$T_{\text{aller}} = 2\pi \sqrt{\frac{R^3}{GM}} \cdot \frac{\theta}{2\pi} = \theta \sqrt{\frac{R^3}{GM}}$$

Le vol orbital sera donc toujours plus rapide pour joindre deux villes que le tunnel, sauf dans le cas de deux villes diamétralement opposées, où les temps seront les mêmes : on a toujours $\theta \leq \pi$.

Problème 3 :

Partant de la loi de Newton

$$m \mathbf{a} = \mathbf{F}^{\text{fr}}$$

on voit que le fait de négliger la force de gravitation nous mène à un problème à une dimension, l'équation du mouvement étant :

$$m \ddot{x} = -\lambda \dot{x}^2 \quad \text{ou} \quad \dot{v} = -\frac{\lambda}{m} v^2$$

Cette équation est facilement intégrable :

$$\frac{dv}{v^2} = -\frac{\lambda}{m} dt \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{v} = -\frac{\lambda}{m} v dt \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{v} = -\frac{\lambda}{m} dx \quad \Rightarrow \quad \ln v = -\frac{\lambda}{m} x + \text{Const.}$$

Compte tenu des conditions initiales, on obtient :

$$\Rightarrow \quad \underline{v(x) = v_0 e^{-\frac{\lambda}{m} x}}$$

La méthode ci-dessus est rapide, mais si l'on désire obtenir aussi la fonction $v(t)$ en plus de $v(x)$, on peut passer par le détour suivant :

$$\begin{aligned} \frac{dv}{v^2} &= -\frac{\lambda}{m} dt \quad \Rightarrow \quad -\int_{v_0}^v \frac{dv}{v^2} = \frac{\lambda}{m} t \\ \frac{1}{v} - \frac{1}{v_0} &= \frac{\lambda}{m} t \quad \Rightarrow \quad v(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{v_0 m}{m + \lambda v_0 t} = \frac{v_0}{1 + \frac{\lambda}{m} v_0 t} \\ \int dx &= \int \frac{v_0 dt}{1 + \frac{\lambda}{m} v_0 t} \end{aligned}$$

Posons

$$t' = 1 + \frac{\lambda}{m} v_0 t \quad ; \quad dt' = \frac{\lambda}{m} v_0 dt$$

On obtient

$$x - x_0 = \frac{m}{\lambda} \int \frac{dt'}{t'} = \frac{m}{\lambda} \ln \left(\underbrace{1 + \frac{\lambda}{m} v_0 t}_{v_0/v} \right) = -\frac{m}{\lambda} \ln \left(\frac{v}{v_0} \right)$$

Finalement, comme $x_0 = 0$, on a

$$\underline{v(x) = v_0 e^{-\frac{\lambda}{m} x}}$$

Application numérique : $v = 381$ m/s

Problème 4 :

La vitesse maximale de chute est $v_L = 190$ km/h = 52.8 m/s. Elle est atteinte lorsque la force de frottement \mathbf{F}_{fr} égale la force de pesanteur $m\mathbf{g}$, c'est-à-dire lorsque l'accélération devient nulle :

$$\sum \mathbf{F} = m\mathbf{g} + \mathbf{F}_{fr} = 0 \quad \Rightarrow \quad mg = \lambda v_L^2 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{mg}{v_L^2} = 0.28 \text{ kg/m}$$

La force de frottement peut également s'écrire :

$$\mathbf{F}_{fr} = -C_X \frac{1}{2} \rho_{air} v^2 S \hat{\mathbf{v}} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{1}{2} C_X \rho_{air} S \quad \Rightarrow \quad C_X = \frac{2\lambda}{\rho_{air} S} \simeq 0.62$$

où C_X est le coefficient de traînée, $\rho_{air} = 1.3$ kg/m³ est la masse spécifique de l'air, et $S \simeq 0.7$ m² est l'aire de la projection du parachutiste sur un plan perpendiculaire à \mathbf{v} .

Avant d'atteindre la vitesse maximale, le parachutiste subit une accélération selon :

$$\sum \mathbf{F} = m\mathbf{g} + \mathbf{F}_{fr} = m\mathbf{a} = m\dot{\mathbf{v}} \quad \Rightarrow \quad \dot{v} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx} v = g - \frac{\lambda}{m} v^2 = \frac{\lambda}{m} (v_L^2 - v^2)$$

Ce qui donne :

$$\frac{\lambda}{m} dx = \frac{v}{v_L^2 - v^2} dv \quad \Rightarrow \quad \int_{x_0}^x \frac{\lambda}{m} dx' = \int_{v_0}^v \frac{v'}{v_L^2 - v'^2} dv'$$

Il vient :

$$\frac{\lambda}{m} (x - x_0) = -\frac{1}{2} \{ \ln |v_L^2 - v^2| - \ln |v_L^2| \} \quad \Rightarrow \quad v^2 = v_L^2 \left(1 - \exp \left(-\frac{2\lambda}{m} (x - x_0) \right) \right)$$

Or on sait que $x - x_0 = 1000$ m et que la vitesse initiale $v_0 = 0$ m/s, ainsi $v = 189.9$ km/h. Selon un raisonnement analogue, on a :

$$\dot{v} = \frac{dv}{dt} = \frac{\lambda}{m} (v_L^2 - v^2) \quad \Rightarrow \quad \frac{\lambda}{m} dt = \frac{1}{v_L^2 - v^2} dv$$

Ce qui donne en intégrant :

$$\frac{\lambda}{m} (t - t_0) = \int_{t_0}^t \frac{\lambda}{m} dt' = \int_{v_0}^v \frac{1}{v_L^2 - v'^2} dv' = \frac{1}{2v_L} \ln \left| \frac{v_L + v}{v_L - v} \right|$$

D'où on détermine le temps de chute libre $(t - t_0) = 22.6$ s.

Mécanique générale

Énoncé des exercices**Problème 1 :**

Un cylindre homogène de rayon $R = 50$ mm est posé sur un plan faisant un angle θ avec l'horizontale. L'axe du cylindre est perpendiculaire à la direction de la pente.

On demande pour quels angles θ :

1. le cylindre reste immobile ;
2. le cylindre roule sans glisser ;
3. il y a toujours roulement avec glissement.

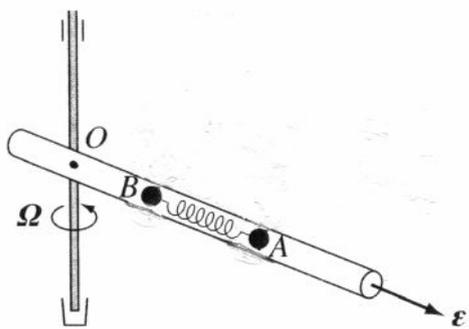
On a les paramètres suivants :

$$\delta_s = \delta_c = 0.5 \text{ mm} ; \mu_c = 0.3 ; \mu_s = 0.5$$

Problème 2 :

Etudier l'évolution d'un système formé de deux points matériels de masse m_A , m_B se déplaçant sans frottement dans un tube rectiligne et horizontal, tournant à vitesse angulaire Ω constante autour d'un axe vertical (voir figure). Les deux points matériels sont reliés par un ressort idéal, de longueur ℓ au repos, qui impose une force de liaison de la forme

$$\mathbf{F}^{B \rightarrow A} = -\mathbf{F}^{A \rightarrow B} = -k(|\mathbf{x}| - \ell) \hat{\mathbf{x}} \quad \text{où} \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}_A - \mathbf{x}_B$$



1. Identifier les forces extérieures et les forces intérieures ; écrire les équations de liaison et la condition d'absence de frottements.
2. Écrire l'équation du mouvement de chaque masse.

3. Écrire l'équation du mouvement pour la masse totale $M = m_A + m_B$ en fonction de la position du centre de masse $\mathbf{x}_G = \frac{1}{M}(m_A\mathbf{x}_A + m_B\mathbf{x}_B)$, ainsi que l'équation du mouvement pour la masse réduite $\mu = \frac{m_A m_B}{m_A + m_B}$ en fonction de la différence des positions $\mathbf{x} = \mathbf{x}_A - \mathbf{x}_B$.
4. Écrire les deux équations du mouvement dans le système tournant, en fonction des variables $\rho_G = |\mathbf{x}_G|$ et $\rho = |\mathbf{x}|$. Obtenir l'évolution du centre de masse en tenant compte de la condition initiale : au temps $t = 0$, les masses A et B sont immobiles par rapport au tube tournant.
5. Donner l'évolution de la variable relative $\rho = \rho_A - \rho_B$ pour les trois cas intéressants distingués par la valeur de Ω .

Problème 3 :

Calculer la vitesse de libération d'une particule à partir de la surface du Soleil (on négligera la vitesse de rotation propre du Soleil). En supposant que le Soleil s'effondre sur lui-même, quel doit être le rayon final du Soleil pour qu'aucune particule ne puisse s'en échapper, étant entendu qu'aucune particule ne peut dépasser la vitesse de la lumière ?

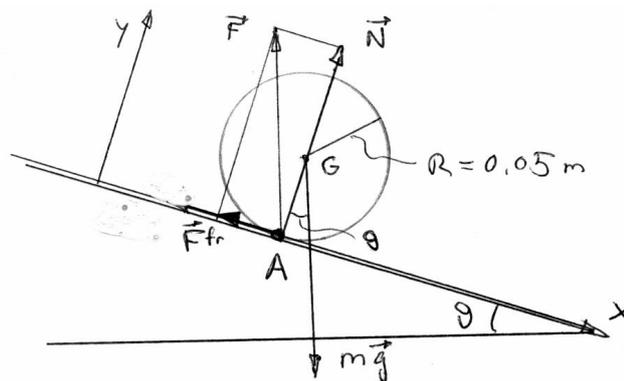
$$\begin{aligned}
 R_\odot &= 6.96 \cdot 10^8 \text{ m} \\
 M_\odot &= 1.99 \cdot 10^{30} \text{ kg} \\
 G &= 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2} \\
 c &= 3 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}
 \end{aligned}$$

Mécanique générale

Corrigé des exercices

Problème 1 :

La situation est décrite sur la figure ci-dessous. On place un référentiel $Oe_1e_2e_3$ avec l'axe Ox sur la pente.



1. Le cylindre reste immobile, si bien que

$$\begin{aligned}
 m \mathbf{a}_G &= 0 = \mathbf{F}^{fr} + \mathbf{N} + m \mathbf{g} \\
 \Rightarrow N &= m g \cos \theta \\
 F^{fr} &= -m g \sin \theta \\
 \frac{d}{dt} \mathbf{L}_A &= 0 = \mathbf{AG} \wedge m \mathbf{g} + \mathbf{M}_A \\
 \Rightarrow \mathbf{M}_A &= -\mathbf{AG} \wedge m \mathbf{g} = R m g \sin \theta \mathbf{e}_3
 \end{aligned}$$

De plus, on a la condition de résistance au roulement

$$|\mathbf{M}_A| \leq \delta_s |\mathbf{N}| = \delta_s m g \cos \theta$$

d'où

$$\tan \theta \leq \frac{\delta_s}{R} = \frac{0.5}{50} = 0.01 \Rightarrow \underline{\theta \leq 0.573^\circ}$$

2. Utilisons les équations du mouvement

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \sum \mathbf{F}^{ext} \quad \text{et} \quad \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum \mathbf{M}^{ext}$$

La première est décomposée selon les axes x et y, la seconde ne donne lieu qu'à une composante selon z :

$$\frac{d}{dt}(m v) = F^{fr} + m g \sin \theta \tag{1}$$

$$0 = N - m g \cos \theta \tag{2}$$

$$\left(\frac{d\mathbf{L}_G}{dt} \right)_z = -\frac{d}{dt}(I\omega) = -R F^{fr} \tag{3}$$

avec pour le cylindre

$$I = \frac{1}{2} m R^2$$

La première et la troisième équations permettent d'éliminer la force de frottement. En multipliant (1) par R et en se souvenant que la vitesse v_G du centre de gravité du cylindre peut s'écrire

$$v_G = (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{R})_x = -\omega R$$

on a en introduisant (3) dans (1) :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(m R v_G) &= R F^{fr} + m R g \sin \theta \\ &= -\frac{1}{2} m R \dot{v}_G + m R g \sin \theta \\ \Rightarrow \frac{3}{2} \frac{d}{dt} v_G &= g \sin \theta \\ \Rightarrow v_G &= \frac{2}{3} g \sin \theta \cdot t \end{aligned}$$

car la condition initiale est $v_G = 0$ au temps $t = 0$. L'équation (3) nous donne alors la force de frottement :

$$F^{fr} = -\frac{1}{2} m \frac{2}{3} g \sin \theta = -\frac{1}{3} m g \sin \theta$$

Pour qu'il y ait roulement sans glissement, il faut que

$$|F^{fr}| \leq \mu_s |N|$$

Or l'équation (2) nous donne la valeur de N , si bien que

$$|F^{fr}| = \frac{1}{3} m g \sin \theta \leq \mu_s m g \cos \theta \quad \Rightarrow \quad \tan \theta \leq 3 \mu_s = 1.5$$

et l'angle doit donc être

$$\theta \leq 56.3^\circ$$

Cependant, selon les conditions initiales, on peut avoir roulement avec glissement pour des angles θ inférieurs à cette valeur, comme on va le voir.

3. On a cette fois une force de frottement connue :

$$F^{fr} = -\mu_c |N| = -\mu_c M g \cos \theta$$

En reprenant les formules (1) et (3) du point 1., on a alors

$$\begin{aligned} M \dot{v}_G &= -\mu_c M g \cos \theta + M g \sin \theta \\ &= M g (-\mu_c \cos \theta + \sin \theta) \\ \Rightarrow \dot{v}_G &= g (\sin \theta - \mu_c \cos \theta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I \dot{\omega} &= R F^{fr} = -\mu_c R M g \cos \theta \\ \Rightarrow \dot{\omega} &= -\frac{2}{R} g \mu_c \cos \theta \end{aligned}$$

La vitesse du segment du solide en contact avec le plan est donnée par la différence entre la vitesse de translation v_G et la vitesse liée à la rotation du solide :

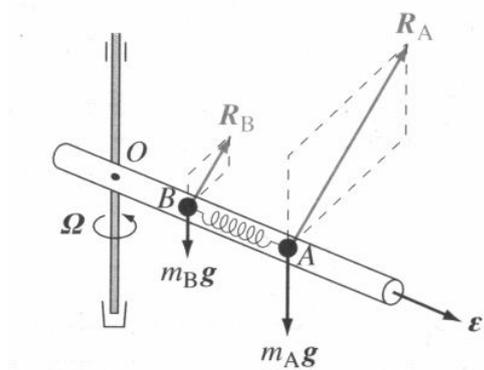
$$v_A = v_G + \omega R = g (\sin \theta - \mu_c \cos \theta) \cdot t - 2 g \mu_c \cos \theta \cdot t = g \sin \theta \left(1 - \frac{3\mu_c}{\tan \theta} \right) \cdot t$$

Pour qu'il y ait glissement, il faut que $v_A > 0$, donc $\tan \theta > 3\mu_c$: avec $\mu_c = 0.3$, cela donne

$$\theta > \arctan(3\mu_c) = 42^\circ$$

Problème 2 :

1. Les forces extérieures sont les poids des masses A et B, ainsi que les forces de liaison (ou de réaction) exercées par le tube sur les masses (voir figure).



Les forces intérieures sont $\mathbf{F}^{A \rightarrow B}$ et $\mathbf{F}^{B \rightarrow A}$. Dans un système de coordonnées $Oxyz$, les équations de liaison exprimant la contrainte que les masses A et B restent dans le plan horizontal sont simplement

$$z_A = z_B = 0$$

et la condition de vitesse de rotation constante s'exprime plus aisément à l'aide de la coordonnée polaire ϕ (angle azimutal) :

$$\dot{\phi}_A = \dot{\phi}_B = \Omega$$

L'absence de frottement implique que les forces de réaction du tube sont perpendiculaires à celui-ci ; soit $\boldsymbol{\varepsilon}_1$ le vecteur-unité solide du tube et orienté dans son axe :

$$\mathbf{R}_A \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_1 = \mathbf{R}_B \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_1 = 0$$

2. Les équations du mouvement de chaque masse sont :

$$m_A \ddot{\mathbf{x}}_A = m_A \mathbf{g} + \mathbf{R}_A + \mathbf{F}^{B \rightarrow A} \quad (4)$$

$$m_B \ddot{\mathbf{x}}_B = m_B \mathbf{g} + \mathbf{R}_B - \mathbf{F}^{B \rightarrow A} \quad (5)$$

3. En introduisant les grandeurs

$$\mathbf{x}_G = \frac{1}{M} (m_A \mathbf{x}_A + m_B \mathbf{x}_B) ; \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}_A - \mathbf{x}_B ; \quad M = m_A + m_B$$

et en additionnant (4) et (5), on obtient une équation du mouvement pour le centre de masse (6, ci-dessous). Après avoir multiplié (4) par m_B et (5) par m_A , on soustrait la seconde de la première et l'on obtient l'équation du mouvement relatif (7) :

$$M \ddot{\mathbf{x}}_G = M \mathbf{g} + \mathbf{R}_A + \mathbf{R}_B \quad (6)$$

$$\mu \ddot{\mathbf{x}} = \frac{m_B}{M} \mathbf{R}_A - \frac{m_A}{M} \mathbf{R}_B + \mathbf{F}^{B \rightarrow A} \quad (7)$$

avec

$$\mu = \frac{m_A m_B}{m_A + m_B}$$

4. Avec $\rho_G = |\mathbf{x}_G|$ et $\rho = |\mathbf{x}|$, on obtient en projetant les positions et les mouvements sur l'axe ε_1 (en tenant compte de l'expression de l'accélération en coordonnées cylindriques) :

$$\begin{aligned} M (\ddot{\rho}_G - \Omega^2 \rho_G) &= 0 \\ \mu (\ddot{\rho} - \Omega^2 \rho) &= -k(\rho - \ell) \\ \Rightarrow \ddot{\rho} &= -\frac{k}{\mu}(\rho - \ell) + \Omega^2 \rho = -\rho \left(\frac{k}{\mu} - \Omega^2 \right) + \frac{k\ell}{\mu} \end{aligned}$$

où on a tenu compte de l'absence de frottement et des liaisons. On a les conditions initiales $\dot{\rho}_G(0) = \dot{\rho}(0) = 0$. On a donc

$$\begin{aligned} \ddot{\rho}_G &= \Omega^2 \rho_G \\ \ddot{\rho} &= -\left(\frac{k}{\mu} - \Omega^2 \right) \left(\rho - \frac{k\ell}{k - \mu\Omega^2} \right) \quad \text{si } k \neq \mu\Omega^2 \\ \ddot{\rho} &= \frac{k\ell}{\mu} \quad \text{si } k = \mu\Omega^2 \end{aligned}$$

La deuxième équation ne paraît pas complètement triviale, mais elle relève de la remarque p. 194 du livre "Mécanique générale" de Gruber & Benoit : une équation différentielle où subsiste une constante dans le membre de droite se transforme en équation homogène après un changement de variable approprié. Dans notre cas, si l'on ne se souvient plus comment opérer ce changement, on peut trouver la constante x à ajouter à ρ en posant

$$\begin{aligned} \ddot{\rho} &= -\rho \left(\frac{k}{\mu} - \Omega^2 \right) + \frac{k\ell}{\mu} = -(\rho + x) \left(\frac{k}{\mu} - \Omega^2 \right) \\ \Rightarrow \frac{k\ell}{\mu} &= -x \frac{k}{\mu} + x \Omega^2 \\ \Rightarrow x &= -\frac{k\ell}{(k - \mu\Omega^2)} \\ \tilde{\rho} &= \rho + x = \rho - \frac{k\ell}{(k - \mu\Omega^2)} \\ \Rightarrow \ddot{\tilde{\rho}} &= \ddot{\rho} = -\left(\frac{k}{\mu} - \Omega^2 \right) \tilde{\rho} \end{aligned}$$

pour autant qu'on aie $k \neq \mu\Omega^2$.

L'évolution du centre de masse est donnée alors par

$$\rho_G(t) = \rho_G(0) \cosh \Omega t$$

En effet, la solution la plus simple de l'équation pour ρ_G est $\rho_G(t) = e^{\Omega t}$, mais $\rho_G(t) = e^{-\Omega t}$ est aussi une solution. Comme les conditions initiales exigent $\dot{\rho}_G(0) = 0$, on voit que chacune de ces solutions donnerait une valeur non nulle ($\pm\Omega$), alors que l'addition des deux donnerait bien zéro. Comme le cosinus hyperbolique est défini par

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

la solution ci-dessus est pertinente.

5. Pour la variable relative ρ , il faut distinguer les trois cas :

(a) $\Omega^2 < \frac{k}{\mu}$: On pose le changement de variable

$$y = \rho - \frac{k\ell}{k - \mu\Omega^2} \Rightarrow \ddot{y} + \left(\frac{k}{\mu} - \Omega^2\right) y = 0$$

dont la solution générale est (Gruber & Benoit p. 149, équation 6.29)

$$y(t) = y_0 \cos \omega t + \frac{\dot{y}_0}{\omega} \sin \omega t = y_0 \cos \omega t \quad \text{car} \quad \dot{y}_0 = \dot{\rho}_0 = 0$$

En remplaçant y et $y_0 = y(t=0)$ par leur valeur, on obtient alors

$$\rho(t) = \ell' + (\rho_0 - \ell') \cos \omega t$$

$$\text{avec} \quad \ell' = \frac{k}{k - \mu\Omega^2} \ell \quad \text{et} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{\mu} - \Omega^2}$$

Notons qu'il faut aussi $\rho_0 \leq 2\ell'$, car autrement nous pourrions avoir $\rho(t) < 0$, comme si les masses A et B pouvaient s'interpénétrer. Il s'agit d'un mouvement oscillatoire harmonique de pulsation ω , centré en ℓ' et d'amplitude $|\rho_0 - \ell'|$. Si $\rho_0 = \ell'$, le système s'éloigne de l'axe de rotation sans se déformer.

(b) $\Omega^2 = \frac{k}{\mu}$:

$$\rho(t) = \rho_0 + \frac{k}{2\mu} \ell t^2$$

Il n'y a pas de terme proportionnel au temps à cause de la condition initiale $\dot{\rho}_0 = 0$. Le système se dissocie.

(c) $\Omega^2 > \frac{k}{\mu}$: On pose le même changement de variable que plus haut, à un signe près, ce qui donne

$$\begin{aligned} y &= \rho + \left| \frac{k\ell}{k - \mu\Omega^2} \right| = \rho + |\ell'| \\ \Rightarrow \ddot{y} &= \omega'^2 y \Rightarrow y = y(0) \cosh \omega' t \\ \Rightarrow \rho(t) &= -|\ell'| + (\rho_0 + |\ell'|) \cosh \omega' t \\ \text{avec} \quad \omega' &= \sqrt{\Omega^2 - \frac{k}{\mu}} \end{aligned}$$

Le système se dissocie également ici.

Il y a une vitesse de rotation critique : si Ω est inférieure à la pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{k/\mu}$, le système reste lié et oscille avec une pulsation ω inférieure à ω_0 . Par contre, si $\Omega > \omega_0$, le système se dissocie, c'est-à-dire que $\rho \rightarrow \infty$.

Problème 3 :

Le plus simple est de calculer l'énergie potentielle de la particule de masse m , en la considérant comme le travail qu'il faut fournir pour l'amener jusqu'à l'infini (pour l'extraire du puits de potentiel du Soleil). La conservation de l'énergie peut être alors invoquée pour déterminer la vitesse initiale que doit avoir la particule : son énergie cinétique est convertie en énergie potentielle lors de son parcours, jusqu'à s'annuler.

La force s'écrit

$$\mathbf{F} = -\frac{GMm}{|\mathbf{x}|^3}\mathbf{x}$$

et le travail équivalent à l'énergie potentielle se calcule par intégration :

$$\int_R^\infty F dx = -GMm \int_R^\infty \frac{dx}{x^2} = -GMm \frac{1}{x} \Big|_R^\infty = \frac{GMm}{R}$$

$$E_{pot} = E_{cin} \Rightarrow \frac{1}{2} m v^2 = \frac{GMm}{R} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = 6.18 \cdot 10^5 \text{ m/s} = 618 \text{ km/s}$$

Pour que v soit égale à la vitesse de la lumière c , il faudrait que le rayon critique R_s soit

$$R_s = \frac{2GM}{c^2} = 2950 \text{ m} \sim 3 \text{ km}$$

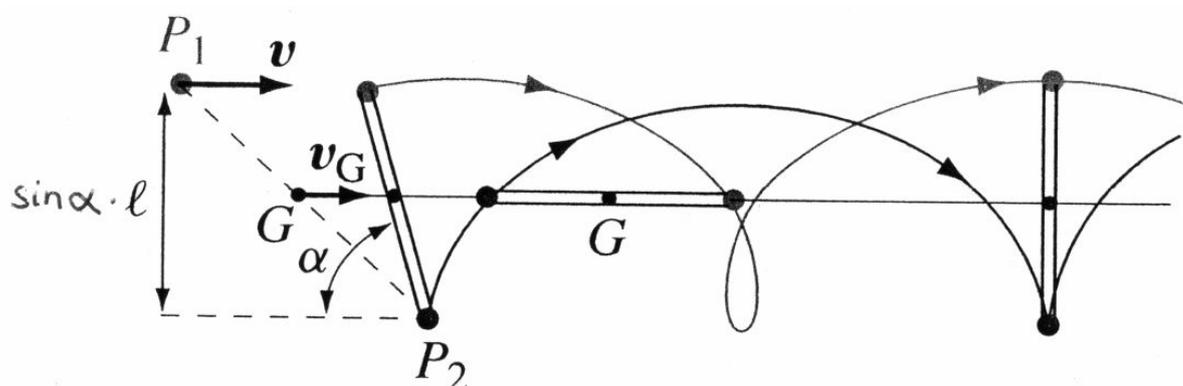
C'est le *rayon de Schwarzschild*.

Mécanique générale

Énoncé des exercices**Problème 1 :**

Un patineur de masse m_1 ayant une vitesse \mathbf{v} saisit la perche de longueur ℓ que lui tend un autre patineur initialement immobile et de masse m_2 (voir figure). On supposera que la masse de la perche est négligeable et que les patineurs peuvent être assimilés à des points matériels. On néglige également les frottements.

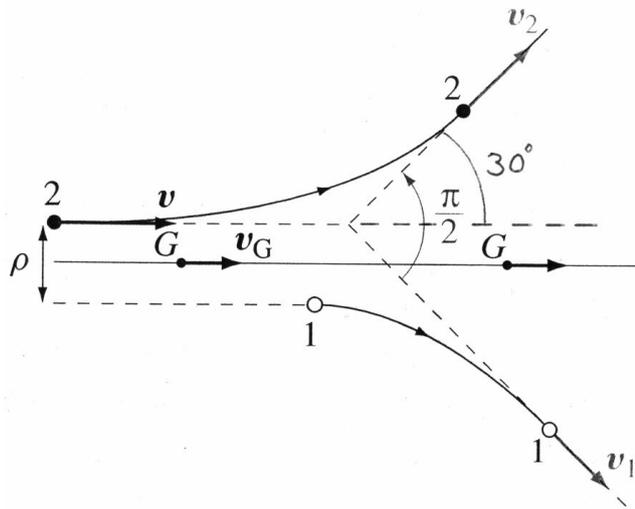
1. Chercher l'évolution du système et donner la vitesse \mathbf{v}_G du centre de masse, le moment cinétique \mathbf{L}_G par rapport au centre de masse et la vitesse angulaire ω' des deux patineurs autour de leur centre de gravité commun.
2. Quelle est l'énergie ΔE^{choc} dissipée lors du choc ? Sous quelle condition est-elle nulle ?
3. Les deux patineurs se tirent ensuite l'un vers l'autre, de sorte que la distance qui les sépare devient $\ell(t) < \ell$. Donner la vitesse angulaire $\omega(t)$ en fonction de ω' , ainsi que l'expression du travail effectué par les patineurs en fonction de $\ell(t)$.

**Problème 2 :**

1. Une particule effectue un mouvement périodique sous l'action d'une force centrale qui dérive du potentiel $U(r)$. Établir les résultats suivants :
 - (a) Si $U(r) = -Ar^{-1}$, alors $\langle E^{\text{cin}} \rangle = -\frac{1}{2} \langle E^{\text{pot}} \rangle$
 - (b) Si $U(r) = \frac{1}{2}kr^2$, alors $\langle E^{\text{cin}} \rangle = \langle E^{\text{pot}} \rangle$
 où $\langle E \rangle$ désigne la valeur moyenne de E sur une période.
2. Un satellite tourne autour de la Terre sur une trajectoire presque circulaire. Montrer qu'un frottement très faible de la forme $\mathbf{F}^{\text{fr}} = -\lambda(v) \hat{\mathbf{v}}$ conduit à l'équation du mouvement $m \frac{d}{dt} v = +\lambda v$ (le frottement accélère le satellite !). Calculer $v(t)$ et $r(t)$ dans le cas $\lambda(v) = \lambda v$ où λ est une constante.

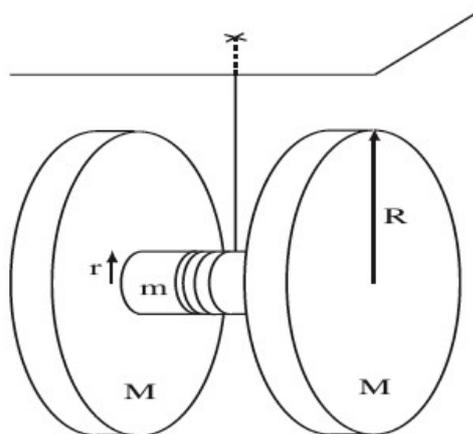
Problème 3 :

Un proton d'énergie $E = 4 \text{ MeV}$ est diffusé par un autre proton initialement immobile. Trouver l'énergie finale du proton incident (en MeV) sachant que l'angle de diffusion est 30° .



Problème 4 :

Un yo-yo est constitué de deux disques ayant chacun une masse M et un rayon R , reliés par un axe cylindrique de masse m et de rayon r . Trouver l'évolution temporelle et la tension dans le fil après qu'on ait lâché le yo-yo sans vitesse initiale (voir figure).



Mécanique générale

Corrigé des exercices**Problème 1 :**

Le référentiel absolu \mathcal{R} est la glace, et le système $\mathcal{R}' = \mathcal{R}_G$ des deux patineurs se déplace à vitesse constante \mathbf{v}_G tout en tournant autour du centre de gravité G .

1. Les frottements sont négligés, si bien qu'on a conservation de la quantité de mouvement et du moment cinétique. Calculons d'abord la distance du patineur P_1 au centre de gravité. Avec une origine O quelconque sur le plan de la glace, on a

$$\mathbf{OG} \equiv \frac{m_1 \mathbf{OP}_1 + m_2 \mathbf{OP}_2}{m_1 + m_2} = \mathbf{OP}_1 + \mathbf{P}_1 \mathbf{G}$$

$$\text{Or, } \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 = \ell \mathbf{P}_1 \hat{\mathbf{P}}_2$$

$$\text{et } \mathbf{OP}_2 = \mathbf{OP}_1 + \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 = \mathbf{OP}_1 + \ell \mathbf{P}_1 \hat{\mathbf{P}}_2$$

$$\Rightarrow \mathbf{OG} = \frac{m_1 \mathbf{OP}_1 + m_2 \mathbf{OP}_1 + m_2 \ell \mathbf{P}_1 \hat{\mathbf{P}}_2}{m_1 + m_2} = \mathbf{OP}_1 + \mathbf{P}_1 \mathbf{G}$$

$$\text{d'où } |\mathbf{P}_1 \mathbf{G}| = |\mathbf{GP}_1| = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \ell$$

$$\text{de même, } |\mathbf{GP}_2| = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \ell$$

La conservation de la quantité de mouvement dit :

$$m_1 \mathbf{v} = (m_1 + m_2) \mathbf{v}_G \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}_G = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{v}$$

Cette égalité est valable après comme avant le contact (souvenons-nous que \mathbf{v} est bien la vitesse *initiale* du patineur 1). Calculons le moment cinétique initial (i.e. avant le contact) par rapport à G , et cela dans le référentiel absolu \mathcal{R} . Notons que, si \mathcal{R}' a un mouvement de translation par rapport à \mathcal{R} , le moment cinétique calculé dans \mathcal{R} a la même valeur que celui calculé dans \mathcal{R}' (voir Propriété 2 du moment cinétique, 11.5.1, p. 296 du livre de Gruber & Benoît). Comme il y a conservation du moment cinétique, le moment final est égal au moment initial, et il est naturel de calculer le moment final dans le système $\mathcal{R}' = \mathcal{R}_G$:

$$\begin{aligned}
\text{moment initial : } \mathbf{L}_G^i &= \mathbf{GP}_1 \wedge m_1 \mathbf{v} \\
|\mathbf{L}_G^i| &= m_1 \frac{m_2}{m_1 + m_2} \ell v \sin \alpha \\
\text{moment final : } |\mathbf{L}_G^f| &= |\mathbf{L}_G^f)_{\mathcal{RG}}| = [I_1 + I_2] \omega' \\
&= [m_1 |\mathbf{GP}_1|^2 + m_2 |\mathbf{GP}_2|^2] \omega' \\
&= \left[m_1 \left(\frac{m_2 \ell}{m_1 + m_2} \right)^2 + m_2 \left(\frac{m_1 \ell}{m_1 + m_2} \right)^2 \right] \omega' \\
&= \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \ell^2 \omega' \\
\text{car } m_1 m_2^2 + m_2 m_1^2 &= m_1 m_2 (m_1 + m_2) \\
\Rightarrow \omega' &= \frac{v}{\ell} \sin \alpha
\end{aligned}$$

2. Pour calculer l'énergie dissipée lors du contact, il suffit de comparer les énergies finale et initiale :

(a) Énergie mécanique avant le choc :

$$T^i = \frac{1}{2} m_1 v^2$$

(b) Énergie mécanique après le choc : c'est la somme des énergies cinétiques des deux patineurs, mais il est plus facile d'utiliser le second théorème de König (13.2.3, p. 386) pour le système du centre de masse :

$$\begin{aligned}
T^f &= \frac{1}{2} M \mathbf{v}_G^2 + T'_G \\
&= \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \right)^2 v^2 + \frac{1}{2} m_1 (|\mathbf{GP}_1| \omega')^2 + \frac{1}{2} m_2 (|\mathbf{GP}_2| \omega')^2 \\
&= \frac{1}{2} \frac{m_1^2}{m_1 + m_2} v^2 + \frac{1}{2} m_1 \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} \ell \omega' \right)^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \ell \omega' \right)^2 \\
&= \frac{1}{2} \frac{m_1^2}{m_1 + m_2} v^2 + \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \ell^2 \omega'^2
\end{aligned}$$

En substituant ω' par $\frac{v}{\ell} \sin \alpha$, on obtient :

$$\begin{aligned}
T^f &= \frac{1}{2} \frac{m_1^2}{m_1 + m_2} v^2 + \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} v^2 \sin^2 \alpha = \frac{v^2}{2(m_1 + m_2)} (m_1^2 + m_1 m_2 \sin^2 \alpha) \\
&= \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} v^2 \left(\frac{m_1}{m_2} + \underbrace{\sin^2 \alpha}_{1 - \cos^2 \alpha} \right) = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} v^2 \left(\frac{m_1 + m_2}{m_2} - \cos^2 \alpha \right) \\
&= \frac{1}{2} m_1 v^2 \left(1 - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cos^2 \alpha \right) \\
T^f &= \frac{1}{2} m_1 v^2 - \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} v^2 \cos^2 \alpha = T^i + \Delta E^{choc}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \Delta E^{choc} = -\frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} v^2 \cos^2 \alpha$$

On voit qu'une partie de l'énergie cinétique initiale a été dissipée, sauf si $\alpha = 90^\circ$.

3. Si $\ell \rightarrow \ell(t)$, alors la conservation du moment cinétique impose

$$|\mathbf{L}_G| = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \ell^2 \omega' \rightarrow \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \ell^2(t) \omega(t) \Rightarrow \omega(t) = \omega' \left(\frac{\ell}{\ell(t)} \right)^2$$

L'énergie finale T^f obtenue au point précédent (pour une distance ℓ entre les patineurs) devient ici l'énergie initiale E_i à l'égard de la variation de ℓ :

$$\begin{aligned} E_i &= \frac{1}{2} \frac{m_1^2}{m_1 + m_2} v^2 + \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \ell^2 \omega'^2 \\ E(t) &= \frac{1}{2} \frac{m_1^2}{m_1 + m_2} v^2 + \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \ell^2(t) \omega^2(t) \\ \Rightarrow E(t) - E_i &= \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (\ell^2(t) \omega^2(t) - \ell^2 \omega'^2) \\ \text{Or, } \omega^2(t) &= \omega'^2 \left(\frac{\ell}{\ell(t)} \right)^4, \text{ donc } \frac{\omega^2(t)}{\omega'^2} = \left(\frac{\ell}{\ell(t)} \right)^4 \\ \Rightarrow E(t) - E_i &= \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \ell^2 \omega'^2 \left[\frac{\ell^2(t)}{\ell^2} \left(\frac{\ell}{\ell(t)} \right)^4 - 1 \right] \\ E(t) - E_i &= \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} v^2 \sin^2 \alpha \left[\left(\frac{\ell}{\ell(t)} \right)^2 - 1 \right] \end{aligned}$$

puisque $\ell \omega' = v \sin \alpha$.

Problème 2 :

1. Partons, comme pour l'établissement du théorème du viriel, de la dérivée de la quantité $\mathbf{x} \cdot \mathbf{p}$:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{x} \cdot \mathbf{p}) = \dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{p} + \mathbf{x} \cdot \dot{\mathbf{p}} = m \dot{\mathbf{x}}^2 + \mathbf{x} \cdot m \ddot{\mathbf{x}} = 2T + \mathbf{x} \cdot \mathbf{F}$$

Prenons maintenant la moyenne sur une période P de la grandeur ci-dessus :

$$\left\langle \frac{d}{dt}(\mathbf{x} \cdot \mathbf{p}) \right\rangle = \frac{1}{P} \int_0^P \frac{d}{dt}(\mathbf{x} \cdot \mathbf{p}) dt = \frac{1}{P} [(\mathbf{x} \cdot \mathbf{p})(P) - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{p})(0)] = 0$$

puisque cette grandeur varie de manière périodique. On a donc

$$\left\langle \frac{d}{dt}(\mathbf{x} \cdot \mathbf{p}) \right\rangle = \langle 2T \rangle + \langle \mathbf{x} \cdot \mathbf{F} \rangle = 0 \Rightarrow T = -\frac{1}{2} \langle \mathbf{x} \cdot \mathbf{F} \rangle$$

On peut maintenant traiter les deux cas proposés.

(a)

$$U(r) = -Ar^{-1} \Rightarrow F(r) = -\frac{dU}{dr} = -Ar^{-2}$$

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{F} = r \cdot F(r) = -Ar^{-1} \Rightarrow \langle T \rangle = -\frac{1}{2} \langle \mathbf{x} \cdot \mathbf{F} \rangle = +\frac{1}{2} A \langle r^{-1} \rangle$$

Comme $\langle E^{\text{pot}} \rangle = \langle U \rangle = -A \langle r^{-1} \rangle$, on a bien

$$\langle E^{\text{cin}} \rangle = \langle T \rangle = -\frac{1}{2} \langle E^{\text{pot}} \rangle$$

(b)

$$U(r) = \frac{1}{2} k r^2 \Rightarrow F(r) = -\frac{dU}{dr} = -k r$$

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{F} = r \cdot F(r) = -k r^2 \Rightarrow \langle T \rangle = -\frac{1}{2} \langle \mathbf{x} \cdot \mathbf{F} \rangle = +\frac{1}{2} k \langle r^2 \rangle$$

Comme $\langle E^{\text{pot}} \rangle = \langle U \rangle = \frac{1}{2} k \langle r^2 \rangle$, on a bien

$$\langle E^{\text{cin}} \rangle = \langle T \rangle = \langle E^{\text{pot}} \rangle$$

2. Pour une force centrale dérivant d'un potentiel $U = -Ar^{-1}$, qui est le cas du satellite puisque le potentiel gravitationnel est $U = -GMm/r$, on a

$$\langle E^{\text{cin}} \rangle = -\frac{1}{2} \langle E^{\text{pot}} \rangle$$

$$\Rightarrow \langle E \rangle = \langle E^{\text{cin}} \rangle + \langle E^{\text{pot}} \rangle = \langle E^{\text{cin}} \rangle - 2 \langle E^{\text{cin}} \rangle = -\langle E^{\text{cin}} \rangle$$

Par ailleurs, la force de frottement n'est pas conservative et dans ce cas on a

$$\frac{d}{dt} \langle E \rangle = P^{(nc)} \text{ avec } \langle E \rangle = \left\langle \frac{1}{2} m v^2 - \frac{GMm}{r} \right\rangle \text{ et } P^{(nc)} = \langle \mathbf{F}^{fr} \cdot \mathbf{v} \rangle = \langle -\lambda v^2 \rangle$$

L'équation différentielle s'écrit donc

$$\frac{d}{dt} (-\langle E^{\text{cin}} \rangle) = -\lambda \langle v^2 \rangle \Rightarrow -\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle \right) = -\lambda \langle v^2 \rangle \Rightarrow \underline{m \dot{v} = \lambda v}$$

La variation de v est très lente, c'est-à-dire qu'elle se produit sur un temps caractéristique beaucoup plus long qu'une orbite. Par conséquent, on peut se permettre de laisser tomber la notation " $\langle \rangle$ " signifiant "en moyenne sur une période".

Il reste à calculer $v(t)$ et $r(t)$. Pour la vitesse, on a

$$\frac{dv}{v} = \frac{\lambda}{m} dt \Rightarrow v = v_0 e^{\frac{\lambda}{m} t} \text{ où } \frac{\lambda}{m} \ll 1$$

La vitesse augmente de manière exponentielle, au fur et à mesure que le satellite perd de l'altitude.

Pour trouver $r(t)$, on peut appliquer, en première approximation, la formule de la vitesse pour un satellite sur orbite circulaire :

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r(t)}} \Rightarrow \underline{r(t) = \frac{GM}{v_0^2} e^{-2\frac{\lambda}{m} t}}$$

Le rayon de l'orbite diminue deux fois plus vite que la vitesse n'augmente.

Problème 3 :

Il s'agit ici d'une interaction centrale conservative. On a donc la conservation de l'impulsion totale, du moment cinétique et de l'énergie. A l'infini, seule subsiste l'énergie cinétique, c'est donc elle dont il suffit d'écrire la conservation. Comme les deux particules en interaction sont identiques, leurs masses sont les mêmes. Si \mathbf{v} est la vitesse de la particule incidente, celle-ci étant numérotée 2 alors que la cible est numérotée 1, on a

$$m\mathbf{v} = m\mathbf{v}_1 + m\mathbf{v}_2 \quad (1)$$

$$\mathbf{x} \wedge m\mathbf{v} = \mathbf{x}_1 \wedge m\mathbf{v}_1 + \mathbf{x}_2 \wedge m\mathbf{v}_2 \quad (2)$$

$$\frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 = \frac{1}{2}m\mathbf{v}_1^2 + \frac{1}{2}m\mathbf{v}_2^2 \quad (3)$$

L'équation (1) montre que \mathbf{v} est la résultante de \mathbf{v}_1 et de \mathbf{v}_2 . On en conclut que ces trois vecteurs sont dans le même plan. L'équation (3) implique $(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)^2 = \mathbf{v}_1^2 + \mathbf{v}_2^2$, donc $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0$, ainsi \mathbf{v}_1 est perpendiculaire à \mathbf{v}_2 .

Les équations (1) et (3) impliquent aussi

$$\begin{aligned} v_2^2 &= v^2 - v_1^2 \\ v_{2x}^2 + v_{2y}^2 &= v^2 - (v_{1x}^2 + v_{1y}^2) \\ \text{Or, } v_{1x} &= v - v_{2x} \text{ et } v_{1y} = -v_{2y} \\ \Rightarrow v_2^2 &= v^2 - [(v - v_{2x})^2 + v_{2y}^2] \\ &= -v_{2x}^2 + 2vv_{2x} - v_{2y}^2 = 2vv_{2x} - v_2^2 \\ \Rightarrow 2v_2^2 &= 2vv_{2x} \Rightarrow v_2^2 = vv_{2x} \cos \alpha_2 \\ \Rightarrow v_2 &= v \cos \alpha_2 \end{aligned}$$

car $v_{2x} = v_2 \cos \alpha_2$, où $\alpha_2 = 30^\circ$ est l'angle de diffusion de la particule 2. Il reste à calculer l'énergie cinétique finale de la particule 2 :

$$\begin{aligned} E_2^{fin} &= \frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2}mv^2 \cos^2 \alpha_2 \\ &= E_2^{init} \cos^2 \alpha_2 \\ E_2^{fin} &= 0.75 \cdot 4 \text{ MeV} = 3 \text{ MeV} \end{aligned}$$

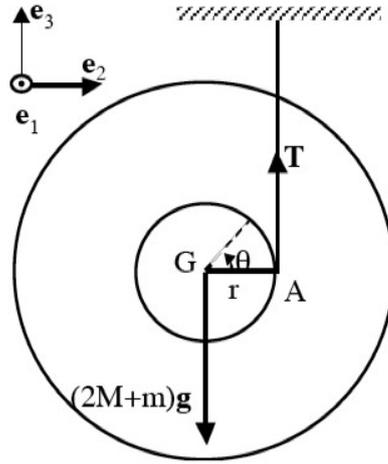
Problème 4 :

Le système est le yo-yo, le référentiel est le laboratoire, et on peut utiliser un repère cartésien $Oe_1e_2e_3$. Le système est holonôme à un degré de liberté, avec la coordonnée z comme paramètre (ou l'angle θ au centre du cylindre du yo-yo). Les forces sont la tension \mathbf{T} du fil et le poids du yo-yo $(m + 2M)\mathbf{g}$. On peut résoudre cet exercice de trois façons différentes :

1. Théorème du moment cinétique en \mathbf{G} :

La loi de Newton implique (les vecteurs n'ayant ici que des composantes verticales) :

$$(m + 2M) \ddot{z} = -(m + 2M)g + T$$



Le théorème du moment cinétique en G donne

$$\left(\frac{d}{dt} \mathbf{L}_G \right)_x = rT$$

Par ailleurs, le moment cinétique du yo-yo vaut par définition

$$L_G = I_G \omega = \left(\frac{1}{2} m r^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} M R^2 \right) \omega$$

car le moment d'inertie d'un cylindre de masse M et de rayon R vaut $\frac{1}{2} M R^2$. De plus, $\omega = -\dot{z}/r$ puisque la vitesse, dirigée vers le bas, est négative, alors que le vecteur ω pointe selon \mathbf{e}_1 , donc

$$L_G = - \left(\frac{1}{2} m r^2 + M R^2 \right) \frac{\dot{z}}{r} = -I_G \frac{\dot{z}}{r}$$

Le théorème du moment cinétique en G nous donne alors

$$-I_G \ddot{z} = r^2 T \Rightarrow T = -\frac{I_G}{r^2} \ddot{z}$$

Substituant cette valeur de T dans la première équation, on obtient une accélération constante :

$$\begin{aligned} (m + 2M) \ddot{z} &= -(m + 2M) g - \frac{I_G}{r^2} \ddot{z} \\ \ddot{z} \left(m + 2M + \frac{I_G}{r^2} \right) &= -(m + 2M) g \\ \Rightarrow \ddot{z} &= -\frac{(m + 2M) g}{m + 2M + \frac{I_G}{r^2}} \\ \text{ou encore } \ddot{z} &= -\frac{g}{1 + \frac{I_G}{(m+2M)r^2}} \end{aligned}$$

Il y a donc une accélération uniforme, mais plus faible en valeur absolue que pour une chute libre, à moins que le moment cinétique tende vers zéro. Si l'on place

l'origine du repère au centre du yo-yo au temps $t = 0$, la position du yo-yo sera simplement donnée par

$$z = -\frac{1}{2} \frac{g t^2}{1 + \frac{I_G}{(m+2M)r^2}}$$

Quant à la tension du fil, elle est donnée par

$$T = -\frac{I_G}{r^2} \ddot{z} = \frac{g I_G}{r^2 + \frac{I_G}{(m+2M)}}$$

On voit bien que, si $r \rightarrow 0$, $T \rightarrow (m + 2M)g$, c'est-à-dire vers le poids du yo-yo : $I_G \rightarrow MR^2$ et $\ddot{z} \rightarrow 0$.

2. Théorème du moment cinétique en A :

On applique le théorème du transfert :

$$\mathbf{L}_A = \mathbf{L}_G + \mathbf{AG} \wedge (m + 2M)\mathbf{v}_G = I_G \omega \mathbf{e}_1 + r(m + 2M)r\omega \mathbf{e}_1$$

et en dérivant par rapport au temps, on a

$$\frac{d}{dt} \mathbf{L}_A = [I_G + (m + 2M)r^2] \dot{\omega} \mathbf{e}_1$$

Comme le moment de force en A vaut

$$\mathbf{M}_A = \mathbf{AG} \wedge (m + 2M)\mathbf{g} = (m + 2M)gr \mathbf{e}_1$$

le théorème du moment cinétique en A donne

$$[I_G + (m + 2M)r^2] \dot{\omega} = (m + 2M)gr$$

Tenant compte du fait que $\dot{\omega} = -\ddot{z}/r$, on retrouve bien le résultat précédent pour \ddot{z} .

Notez que l'équation de Newton n'a pas été nécessaire ici.

3. Conservation de l'énergie :

Les forces étant conservatives, l'énergie mécanique est conservée :

$$E = T + V = \frac{1}{2} (m + 2M) \dot{z}^2 + \frac{1}{2} I_G \omega^2 + (m + 2M)gz = \text{constante}$$

Tenant compte de l'équation de liaison $\omega = -\dot{z}/r$, on obtient

$$E = \frac{1}{2} \left(m + 2M + \frac{I_G}{r^2} \right) \dot{z}^2 + (m + 2M)gz = \text{constante}$$

La dérivation par rapport au temps donne

$$\left(m + 2M + \frac{I_G}{r^2} \right) \dot{z} \ddot{z} = -(m + 2M)g \dot{z}$$

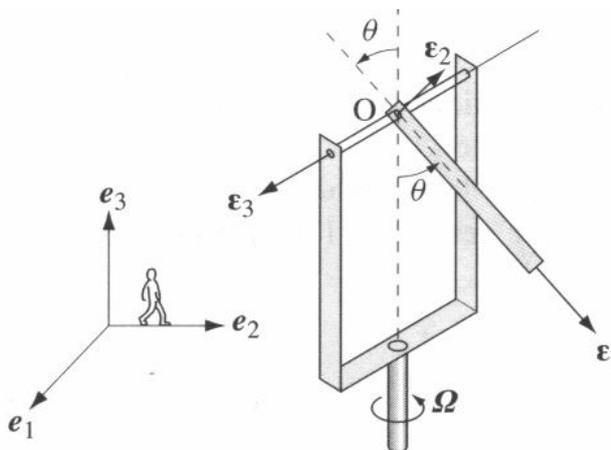
et l'on obtient bien le résultat précédent.

Mécanique générale

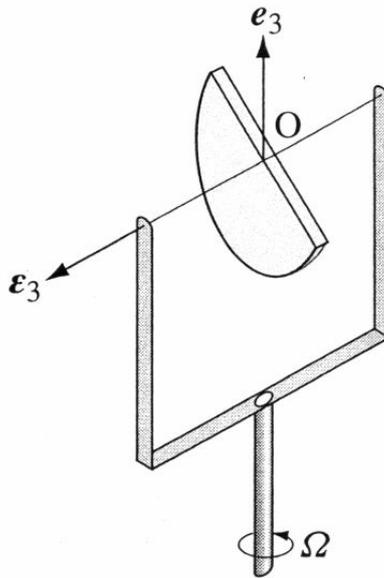
Énoncé des exercices**Problème 1 :**

Analyser le mouvement d'un pendule constitué d'une tige homogène de masse m , de longueur ℓ et dont l'axe de rotation horizontal passe par une extrémité. Le support de cet axe tourne à vitesse constante Ω . Le dispositif et les repères sont montrés sur la figure.

1. Établir l'équation du mouvement à partir du théorème du moment cinétique, en tenant compte de l'absence de frottement. On utilisera le théorème de Poisson (livre de Gruber & Benoit p. 207, formule 8.17).
2. Trouver la constante du mouvement, et faire l'analyse qualitative du mouvement en trouvant les points d'équilibre stable et instable pour les deux domaines pertinents de Ω .
3. Faire l'analyse quantitative du mouvement au voisinage des positions d'équilibre.

**Problème 2 :**

Analyser le mouvement pour une variante du pendule de l'exercice 1. On remplace la tige par un demi-disque (voir figure), et les frottements restent négligeables : que devient l'équation du mouvement ? Quelle conclusion importante peut-on en tirer ?

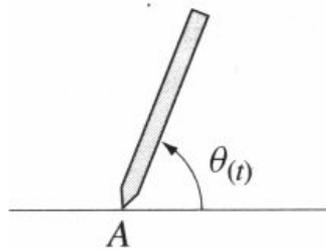


Problème 3 :

Un avion a une hélice à n pales ($n = 2$ ou 3) qui tourne à 2400 tours/minute. Calculer le moment des forces exercées par l'hélice sur l'avion quand celui-ci effectue un virage de 250 m de rayon à la vitesse de 180 km/h. On assimilera les pales à des tiges minces de longueur $\ell = 60$ cm et de masse $m = 5$ kg. Vérifier que dans le cas d'une hélice bipale ce moment conduit à des vibrations et que cet inconvénient disparaît avec une hélice tripale.

Problème 4 :

Une tige homogène est posée presque verticalement et sans vitesse initiale sur un plan horizontal (voir figure). On suppose qu'il n'y a pas de frottement. Exprimer la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ en fonction de θ lorsque l'extrémité A de la tige reste en contact avec le sol.



Mécanique générale

Corrigé des exercices

Problème 1 :

Le référentiel absolu \mathcal{R} est le laboratoire, avec le système d'axes $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$. La variable est l'angle θ de la tige avec la verticale. On définit un repère $O\boldsymbol{\varepsilon}_1\boldsymbol{\varepsilon}_2\boldsymbol{\varepsilon}_3$ lié à la tige, selon la figure de l'énoncé, avec $\boldsymbol{\varepsilon}_1$ le long de la tige et $\boldsymbol{\varepsilon}_3$ le long de l'axe horizontal.

1. Commençons par calculer le moment cinétique \mathbf{L}_O de la barre. La "propriété 2" du tenseur d'inertie (formule 14.46, p. 438 du livre de Gruber & Benoit) nous dit que, par rapport au repère d'inertie $O\boldsymbol{\varepsilon}_1\boldsymbol{\varepsilon}_2\boldsymbol{\varepsilon}_3$, le moment cinétique peut s'écrire

$$\mathbf{L}_O = \sum_{i=1}^3 I_{O,i} \omega_i \boldsymbol{\varepsilon}_i \quad \text{avec} \quad \omega_i = \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_i$$

et où $I_{O,i}$ est le moment d'inertie par rapport à l'axe $\boldsymbol{\varepsilon}_i$. Ici, la vitesse de rotation du solide est l'addition de deux vitesses de rotation : $\boldsymbol{\omega} = \dot{\theta} \boldsymbol{\varepsilon}_3 + \Omega \mathbf{e}_3$.

Le moment d'inertie de la barre par rapport à son extrémité O est, compte tenu du fait que l'on néglige son épaisseur (i.e. son rayon R), et en appliquant le corollaire du théorème de Huygens (formule 14.50 p. 440) :

$$\begin{aligned} I_{0,1} &= 0 \\ I_{0,2} &= I_G + m \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = m \left(\underbrace{\frac{R^2}{4}}_{\sim 0} + \frac{\ell^2}{12}\right) + m \frac{\ell^2}{4} = \frac{1}{3} m \ell^2 \\ I_{0,3} &= I_{0,2} = \frac{1}{3} m \ell^2 \end{aligned}$$

Par conséquent, le moment cinétique de la barre s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_O &= \sum_{i=2}^3 I_{O,i} (\Omega \mathbf{e}_3 \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_i \boldsymbol{\varepsilon}_i + \dot{\theta} \boldsymbol{\varepsilon}_3 \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_i \boldsymbol{\varepsilon}_i) \\ &= I_{O,2} (\Omega \sin \theta \boldsymbol{\varepsilon}_2 + \dot{\theta} \boldsymbol{\varepsilon}_3) = \frac{1}{3} m \ell^2 (\Omega \sin \theta \boldsymbol{\varepsilon}_2 + \dot{\theta} \boldsymbol{\varepsilon}_3) \end{aligned}$$

Le théorème du moment cinétique donne donc

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{L}_O &= \frac{1}{3} m \ell^2 \frac{d}{dt} [\Omega \sin \theta \boldsymbol{\varepsilon}_2 + \dot{\theta} \boldsymbol{\varepsilon}_3] = \mathbf{OG} \wedge m \mathbf{g} + \mathbf{M}_O^{ext} \\ &= \frac{1}{3} m \ell^2 [\Omega \cos \theta \dot{\theta} \boldsymbol{\varepsilon}_2 + \Omega \sin \theta \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_2 + \ddot{\theta} \boldsymbol{\varepsilon}_3 + \dot{\theta} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_3] \\ &= \frac{1}{3} m \ell^2 [\Omega \cos \theta \dot{\theta} \boldsymbol{\varepsilon}_2 + \Omega \sin \theta (-\dot{\theta} \boldsymbol{\varepsilon}_1 - \Omega \cos \theta \boldsymbol{\varepsilon}_3) + \ddot{\theta} \boldsymbol{\varepsilon}_3 + \dot{\theta} \Omega (\cos \theta \boldsymbol{\varepsilon}_2 + \sin \theta \boldsymbol{\varepsilon}_3)] \\ &= \frac{1}{3} m \ell^2 [\Omega \cos \theta (\dot{\theta} + \dot{\theta}) \boldsymbol{\varepsilon}_2 + (-\Omega^2 \sin \theta \cos \theta + \ddot{\theta}) \boldsymbol{\varepsilon}_3] \end{aligned}$$

car le théorème de Poisson, qui permet d'obtenir la troisième équation ci-dessus, dit :

$$\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_i &= \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{\varepsilon}_i \\
\Rightarrow \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_2 = \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{\varepsilon}_2 &= \dot{\theta} \boldsymbol{\varepsilon}_3 \wedge \boldsymbol{\varepsilon}_2 + \Omega \boldsymbol{e}_3 \wedge \boldsymbol{\varepsilon}_2 \\
&= -\dot{\theta} \boldsymbol{\varepsilon}_1 + \Omega \left[-\sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) \right] \boldsymbol{\varepsilon}_3 \\
&= -\dot{\theta} \boldsymbol{\varepsilon}_1 - \Omega \cos \theta \boldsymbol{\varepsilon}_3 \\
\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_3 = \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{\varepsilon}_3 &= \Omega \boldsymbol{e}_3 \wedge \boldsymbol{\varepsilon}_3 = \Omega (\cos \theta \boldsymbol{\varepsilon}_2 + \sin \theta \boldsymbol{\varepsilon}_1)
\end{aligned}$$

\mathbf{M}_O^{ext} , dans l'équation (1), est imposé par le moteur qui fait tourner l'axe vertical à la vitesse angulaire constante Ω .

En projetant les deux membres du théorème du moment cinétique sur l'axe $\boldsymbol{\varepsilon}_3$, on obtient, sachant que l'absence de frottement implique $\mathbf{M}_O^{ext} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_3 = 0$:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d}{dt} \mathbf{L}_O \right) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_3 &= \frac{1}{3} m \ell^2 \left(\ddot{\theta} - \Omega^2 \cos \theta \sin \theta \right) \quad \text{car } \boldsymbol{\varepsilon}_i \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_j = \delta_{ij} \\
(\mathbf{OG} \wedge m \mathbf{g} + \mathbf{M}_O^{ext}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_3 &= -\frac{\ell}{2} m g \sin \theta \boldsymbol{\varepsilon}_3 \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_3 + \underbrace{\mathbf{M}_O^{ext} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_3}_{=0} \\
\Rightarrow \frac{1}{3} m \ell^2 \left(\ddot{\theta} - \Omega^2 \cos \theta \sin \theta \right) &= -\frac{1}{2} m g \ell \sin \theta \\
\Rightarrow \ddot{\theta} &= -\frac{3}{2} \frac{g}{\ell} \sin \theta + \Omega^2 \cos \theta \sin \theta = f(\theta) \quad (3)
\end{aligned}$$

2. Puis, en utilisant le lemme fondamental, on obtient la constante du mouvement :

$$\begin{aligned}
\frac{dU^{eff}}{d\theta} = -f(\theta) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 - \frac{3}{2} \frac{g}{\ell} \cos \theta + \frac{1}{2} \Omega^2 \cos^2 \theta &= K \quad \Rightarrow \quad K = \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 - U^{eff} \\
\text{avec } U^{eff}(\theta) &= \frac{3}{2} \frac{g}{\ell} \cos \theta - \frac{1}{2} \Omega^2 \cos^2 \theta
\end{aligned}$$

On a donc

$$\frac{1}{2} \dot{\theta}^2 = K - U^{eff}(\theta) \geq 0$$

Cherchons les extrema de $U^{eff}(\theta)$:

$$\frac{dU^{eff}}{d\theta} = -f(\theta_{extr}) = -\ddot{\theta} = \frac{3g}{2\ell} \sin \theta_{extr} - \Omega^2 \cos \theta_{extr} \sin \theta_{extr} = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta_{extr} = 0, \pi, 2\pi \dots$$

Cependant, on voit qu'il existe une autre solution, dans le cas où θ est non nul :

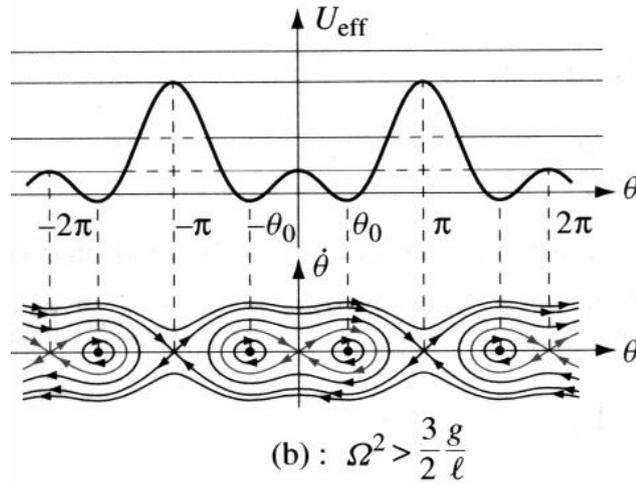
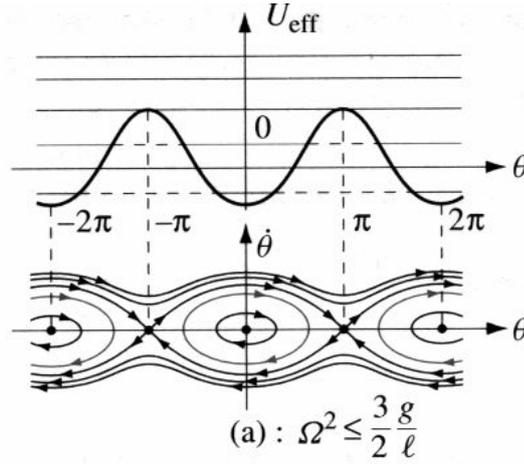
$$\cos \theta_0 = \frac{3g}{2\ell \Omega^2} \quad \text{si et seulement si } \Omega^2 > \frac{3g}{2\ell}$$

En effet, cette solution ne peut exister si $|\cos \theta_0| > 1$, et le cas $|\cos \theta_0| = 1$ nous ramène aux solutions précédentes.

Cherchons les points d'équilibre stable et instable en prenant la seconde dérivée de U^{eff} (on utilise le fait que $\cos \theta \sin \theta = \frac{1}{2} \sin 2\theta$) :

$$\frac{d^2 U^{eff}}{d\theta^2} = \frac{3g}{2\ell} \cos \theta - \Omega^2 \cos 2\theta$$

- (a) Si $\Omega^2 \leq \frac{3g}{2\ell}$, on a $\frac{d^2U^{\text{eff}}}{d\theta^2} > 0$ pour $\theta = 0, \pm 2\pi$, et $\frac{d^2U^{\text{eff}}}{d\theta^2} < 0$ pour $\theta = \pm\pi$. Autrement dit, $\theta = 0$ (et $\dot{\theta} = 0$, par définition d'un point d'équilibre) est un point d'équilibre stable, tandis que $\theta = \pm\pi$ sont des points d'équilibre instable. Ces points d'équilibre sont définis par rapport au référentiel tournant.
- (b) Si $\Omega^2 > \frac{3g}{2\ell}$, le point $\theta = 0$ devient instable, comme on le voit d'après la deuxième dérivée de U^{eff} , de même que les points $\theta = \pm k\pi$ avec k entier. Les points d'équilibre stable sont $\pm\theta_0$, avec, comme on l'a vu ci-dessus, $\cos\theta_0 = \frac{3g}{2\ell\Omega^2}$. On appelle cela l'effet centrifuge. On voit par ailleurs que, selon cette dernière formule, $\theta_0 \rightarrow 0$ quand $\Omega^2 \rightarrow \frac{3g}{2\ell}$.



3. Il s'agit de linéariser l'équation (3) de manière appropriée pour chaque classe de points d'équilibre.

- (a) Au voisinage de $\theta = 0$, on a $\sin\theta \sim \theta$ et $\cos\theta \sim 1$, donc l'équation (3) devient

$$\ddot{\theta} = - \left(\frac{3g}{2\ell} - \Omega^2 \right) \theta$$

qui est l'équation d'un oscillateur si $\Omega^2 < \frac{3g}{2\ell}$:

$$\begin{aligned}\theta(t) &= A \cos(\omega t + \delta) \\ \omega^2 &= \frac{3g}{2\ell} - \Omega^2\end{aligned}$$

La période de l'oscillateur est $T = 2\pi/\omega$.

Par contre, si $\Omega^2 > \frac{3g}{2\ell}$, on a

$$\begin{aligned}\theta(t) &= A \cosh(\tilde{\omega} t + \delta) \\ \tilde{\omega}^2 &= \Omega^2 - \frac{3g}{2\ell}\end{aligned}$$

et la tige s'éloigne de manière exponentielle de sa position d'équilibre.

- (b) Au voisinage de $\theta = \pi$, on pose $\psi = \theta - \pi$. On a alors $\sin(\theta - \pi) = -\sin \theta$ et $\cos(\theta - \pi) = \cos \theta$, ainsi que, comme ci-dessus, $\cos \psi \sim 1$ et $\sin \psi \sim \psi$:

$$\psi = \left(\frac{3g}{2\ell} + \Omega^2 \right) \psi$$

donc la tige s'éloigne exponentiellement de la position d'équilibre :

$$\begin{aligned}\theta(t) &= \pi + A \cosh(\tilde{\omega} t + \delta) \\ \tilde{\omega}^2 &= \Omega^2 + \frac{3g}{2\ell}\end{aligned}$$

- (c) Au voisinage de θ_0 , il faut développer en série de Taylor au premier ordre :

$$\begin{aligned}\sin \theta &\simeq \sin \theta_0 + \cos \theta_0 (\theta - \theta_0) \\ \cos \theta &\simeq \cos \theta_0 - \sin \theta_0 (\theta - \theta_0) \\ \Rightarrow \ddot{\theta} &\simeq -\frac{3g}{2\ell} \left(\sin \theta_0 + \frac{3g}{2\ell \Omega^2} \right) (\theta - \theta_0) \\ &\quad + \Omega^2 \left[\left(\frac{3g}{2\ell \Omega^2} - \sin \theta_0 (\theta - \theta_0) \right) \cdot \left(\sin \theta_0 + \frac{3g}{2\ell \Omega^2} (\theta - \theta_0) \right) \right] \\ &= -\frac{3g}{2\ell} \sin \theta_0 - \left(\frac{3g}{2\ell} \right)^2 \frac{1}{\Omega^2} (\theta - \theta_0) + \frac{3g}{2\ell} \sin \theta_0 + \left(\frac{3g}{2\ell} \right)^2 \frac{1}{\Omega^2} (\theta - \theta_0) \\ &\quad - \underbrace{\Omega^2 \sin^2 \theta_0 (\theta - \theta_0) - \frac{3g}{2\ell} \sin \theta_0 (\theta - \theta_0)^2}_{\text{ordre } 2 \rightarrow \text{négligeable}} \\ \Rightarrow \ddot{\theta} &\simeq \left[\Omega^2 - \left(\frac{3g}{2\ell} \right)^2 \frac{1}{\Omega^2} \right] (\theta - \theta_0)\end{aligned}$$

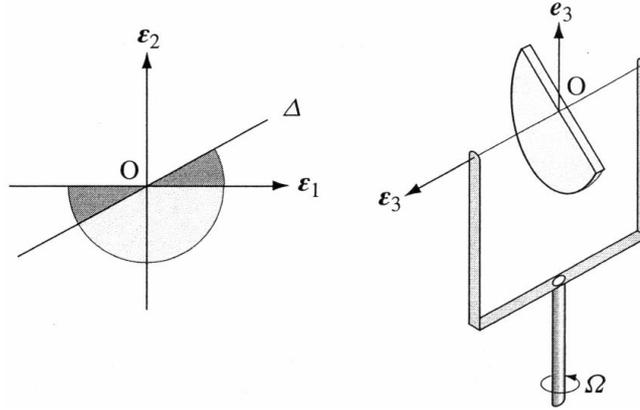
On a donc finalement un mouvement oscillatoire harmonique de période $T = 2\pi/\omega$:

$$\begin{aligned}\theta(t) &= \theta_0 + A \cos(\omega t + \delta) \\ \omega^2 &= \Omega^2 - \left(\frac{3g}{2\ell} \right)^2 \frac{1}{\Omega^2}\end{aligned}$$

Notons encore que la vitesse de rotation critique $\Omega_{crit} = \sqrt{3g/2\ell}$ correspond à la pulsation propre, i.e. à la pulsation du pendule quand le support est immobile.

Problème 2 :

Les propriétés du demi-disque sont intéressantes dans ce contexte, car le tenseur d'inertie est tel que $I_{\varepsilon_1} = I_{\varepsilon_2} = I_{\Delta} = \frac{1}{4}m R^2$. En effet, la figure montre que la symétrie de la situation, couplée avec la nature extensive du moment d'inertie, fait que la somme des moments d'inertie partiels (par exemple : quart de disque+quart de disque) reste toujours la même quelle que soit la position du demi-disque. On a donc



$$\begin{aligned} \mathbf{L}_O &= \frac{1}{4}m R^2 (\dot{\theta}\boldsymbol{\varepsilon}_3 + \Omega \mathbf{e}_3) \\ \Rightarrow \frac{d}{dt}\mathbf{L}_O &= \frac{1}{4}m R^2 (\ddot{\theta}\boldsymbol{\varepsilon}_3 + \dot{\theta}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_3) \\ &= \frac{1}{4}m R^2 (\ddot{\theta}\boldsymbol{\varepsilon}_3 + \dot{\theta}\Omega[\cos \theta \boldsymbol{\varepsilon}_2 + \sin \theta \boldsymbol{\varepsilon}_1]) \end{aligned}$$

En projetant sur $\boldsymbol{\varepsilon}_3$, on a finalement, sachant que la distance à l'axe du centre de gravité est $\frac{4R}{3\pi}$:

$$\frac{1}{4}m R^2 \ddot{\theta} = -\frac{4R}{3\pi} m g \sin \theta \Rightarrow \ddot{\theta} = -\frac{16}{3\pi} g R \sin \theta$$

Le mouvement ne dépend pas de la rotation Ω de l'axe vertical !

Problème 3 :

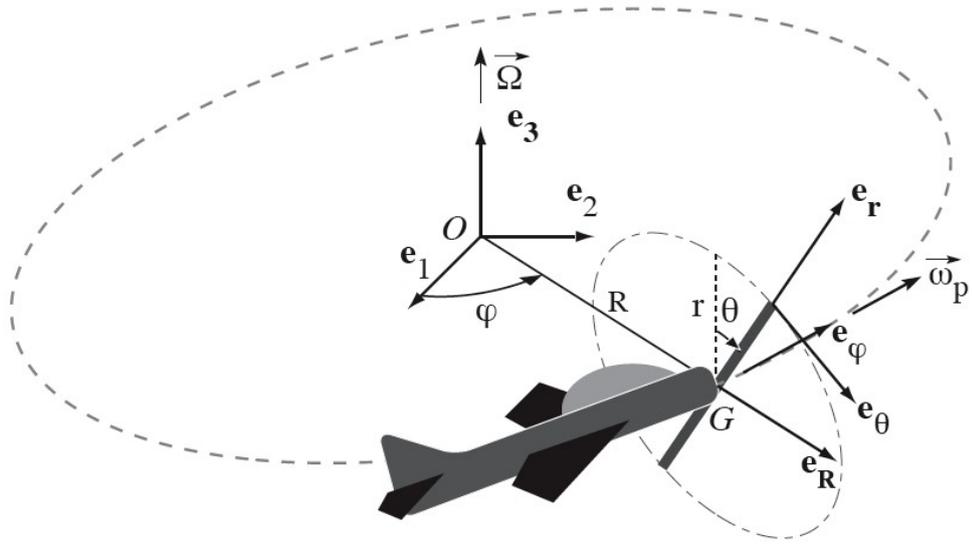
Le référentiel \mathcal{R} est la terre, avec un système d'axes $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$. Dans ce repère, la coordonnée polaire φ donne la position de l'avion, avec le rayon R qui est constant. $\mathbf{e}_R\mathbf{e}_\varphi\mathbf{e}_3$ définissent le repère de l'avion, et il faut encore définir un repère $\mathbf{e}_r\mathbf{e}_\theta\mathbf{e}_\varphi$ solidaire de l'hélice (voir figure).

Si $\boldsymbol{\Omega} = \Omega \mathbf{e}_3 = \dot{\varphi} \mathbf{e}_3$ est la vitesse angulaire de l'avion et $\boldsymbol{\omega}_p = \omega_p \mathbf{e}_\varphi = \dot{\theta} \mathbf{e}_\varphi$ la vitesse angulaire de l'hélice, la vitesse de rotation totale de l'hélice dans \mathcal{R} est

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\omega}_p = \omega_p \mathbf{e}_\varphi + \Omega (\cos \theta \mathbf{e}_r - \sin \theta \mathbf{e}_\theta)$$

Appliquons le théorème du moment cinétique

$$\frac{d\mathbf{L}_G}{dt} = \mathbf{M}_G^{ext} = -\mathbf{M}_G^{hélice \rightarrow avion}$$



où $\mathbf{M}_G^{hélice \rightarrow avion}$ est le couple exercé par l'hélice sur l'avion, en partant directement par les équations d'Euler en composantes (p. 461) :

$$\begin{aligned}
 I_r \dot{\omega}_r - (I_\theta - I_\varphi) \omega_\theta \omega_\varphi &= M_r^{ext} \\
 I_\theta \dot{\omega}_\theta - (I_\varphi - I_r) \omega_\varphi \omega_r &= M_\theta^{ext} \\
 I_\varphi \dot{\omega}_\varphi - (I_r - I_\theta) \omega_r \omega_\theta &= M_\varphi^{ext} \\
 \text{avec, ici, } \omega_r &= \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}_r = \Omega \cos \theta \\
 \omega_\theta &= \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}_\theta = -\Omega \sin \theta \\
 \omega_\varphi &= \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}_\varphi = \omega_p
 \end{aligned}$$

Dans le repère lié à l'hélice, on a donc

$$\begin{aligned}
 I_r (-\sin \theta \dot{\theta} \Omega) + (I_\theta - I_\varphi) \Omega \omega_p \sin \theta &= M_r^{ext} \\
 I_\theta (-\Omega \cos \theta \dot{\theta}) - (I_\varphi - I_r) \Omega \omega_p \cos \theta &= M_\theta^{ext} \\
 \underbrace{I_\varphi \dot{\omega}_p}_0 + (I_r - I_\theta) \Omega^2 \cos \theta \sin \theta &= M_\varphi^{ext} \\
 \Rightarrow (-I_r + I_\theta - I_\varphi) \Omega \omega_p \sin \theta &= M_r^{ext} \\
 (I_r - I_\theta - I_\varphi) \Omega \omega_p \cos \theta &= M_\theta^{ext} \\
 \frac{1}{2} (I_r - I_\theta) \Omega^2 \sin 2\theta &= M_\varphi^{ext}
 \end{aligned}$$

Projetons maintenant les composantes du moment de forces sur les axes du repère

$\mathbf{e}_R \mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_3$ lié à l'avion :

$$\begin{aligned}
M_R^{ext} &= M_r^{ext} \sin \theta + M_\theta^{ext} \cos \theta = [(-I_r + I_\theta - I_\varphi) \sin^2 \theta + (I_r - I_\theta - I_\varphi) \cos^2 \theta] \Omega \omega_p \\
&= -I_\varphi \Omega \omega_p + (I_r - I_\theta) \Omega \omega_p \underbrace{(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)}_{\cos 2\theta} \\
&= -I_\varphi \Omega \omega_p + (I_r - I_\theta) \Omega \omega_p \cos 2\theta \\
M_\varphi^{ext} &= \frac{1}{2} (I_r - I_\theta) \Omega^2 \sin 2\theta \\
M_3^{ext} &= M_r^{ext} \cos \theta - M_\theta^{ext} \sin \theta = (-I_r + I_\theta - I_\varphi) \Omega \omega_p \frac{1}{2} \sin 2\theta - (I_r - I_\theta - I_\varphi) \Omega \omega_p \frac{1}{2} \sin 2\theta \\
&= (-I_r + I_\theta) \Omega \omega_p \sin 2\theta
\end{aligned}$$

1. **cas de l'hélice bipale** : Si I_r est le moment d'inertie par rapport à l'axe orienté le long de l'hélice, et dans l'approximation de la tige mince pour chaque pale, on a

$$I_r = 0 \quad ; \quad I_\theta = I_\varphi = 2 \cdot \frac{1}{3} m \ell^2 = 1.2 \text{ kg m}^2$$

compte tenu de $\ell = 0.6 \text{ m}$ et $m = 5 \text{ kg}$. Par ailleurs, les fréquences valent

$$\omega_p = \frac{2400 \text{ tours} \cdot 2\pi}{60 \text{ s}} = 251 \text{ rad/s} \quad \text{et} \quad \Omega = \frac{v}{R} = \frac{50 \text{ m/s}}{250 \text{ m}} = 0.2 \text{ rad/s}$$

puisque $v = 180 \text{ km/h} = 50 \text{ m/s}$. Le moment exercé par l'hélice sur l'avion vaut alors, sachant que $\mathbf{M}_G^{hélice \rightarrow avion} = -\mathbf{M}_G^{ext}$ et que $1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$:

$$\begin{aligned}
M_{G,R}^{hélice \rightarrow avion} &= \Omega \omega_p I_\theta (1 - \cos 2\theta) = 2 \Omega \omega_p I_\theta \sin^2(\omega_p t) \simeq 120 \sin^2(251 t) \text{ N m} \\
M_{G,\varphi}^{hélice \rightarrow avion} &= \frac{1}{2} I_\theta \Omega^2 \sin(2\omega_p t) \simeq 0.024 \sin(502 t) \approx 0 \text{ N m} \\
M_{G,3}^{hélice \rightarrow avion} &= -I_\theta \Omega \omega_p \sin(2\omega_p t) \simeq -60 \sin(502 t) \text{ N m}
\end{aligned}$$

On voit que la composante du moment selon \mathbf{e}_φ est négligeable, tandis que la composante selon \mathbf{e}_R est maximale en moyenne mais varie avec la fréquence de l'hélice. Ici, elle est toujours positive (ou nulle), et le moment qu'elle exerce sur l'avion tend donc à lui faire "lever le nez". Si on avait $\Omega \omega_p < 0$, c'est l'inverse qui se produirait. Le moment de force dépend du temps, ce qui provoque des vibrations. La grande amplitude de la composante variable du moment de force montre à quel point les vibrations impliquées par le virage sont fortes.

2. **cas de l'hélice tripale** : Il suffit de savoir ici que, selon la Propriété 3 de l'ellipsoïde d'inertie (p. 458), une hélice tripale est une toupie symétrique par rapport à $G\mathbf{e}_\varphi$, et que $I_r = I_\theta \neq I_\varphi$. Comme $n \geq 3$, l'axe de symétrie d'ordre 3 est aussi un axe de révolution de l'ellipsoïde d'inertie, donc le moment d'inertie par rapport à l'axe de l'hélice est indépendant de la position de celle-ci selon \mathbf{e}_θ . Par ailleurs, le moment d'inertie est une grandeur extensive, donc le moment d'une hélice tripale par rapport à l'axe de rotation est trois fois plus grand que celui de la tige mince qui nous sert d'approximation pour une pale :

$$I_\varphi = 3 \cdot \frac{1}{3} m \ell^2 = m \ell^2 = 1.8 \text{ kg m}^2$$

Les trois composantes du moment exercé par l'hélice sur l'avion sont alors :

$$\begin{aligned} M_{G,R}^{hélice \rightarrow avion} &= \Omega \omega_p I_\varphi = 90 \text{ N m} \\ M_{G,\varphi}^{hélice \rightarrow avion} &= 0 \text{ N m} \\ M_{G,3}^{hélice \rightarrow avion} &= 0 \text{ N m} \end{aligned}$$

On voit qu'ici le moment est constant et que les vibrations n'existent donc pas. Seule une composante selon \mathbf{e}_R subsiste et, comme dans le cas de l'hélice à deux pales, fait "lever le nez" de l'avion si $\Omega \omega_p > 0$.

Problème 4 :

Le plus simple est d'écrire la conservation de l'énergie mécanique, qui est l'addition de l'énergie cinétique du centre de masse, de l'énergie de rotation et de l'énergie potentielle du centre de masse. Soit un repère cartésien $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ où $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ définissent le plan horizontal et tel que la tige est dans le plan $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3$. Rappelons que, le frottement étant négligé, le point de contact A peut très bien glisser sur le sol. Comme la force de réaction est perpendiculaire au sol, le centre de gravité n'a de mouvement que selon \mathbf{e}_3 . L'énergie mécanique s'écrit :

$$\begin{aligned} E^{mec} &= \frac{1}{2} m \dot{z}^2 + \frac{1}{2} I_G \omega^2 + m g z = cte \\ \text{or, } z &= \frac{\ell}{2} \sin \theta \quad \text{et} \quad \dot{z} = \frac{\ell}{2} \cos \theta \dot{\theta} \quad \text{et} \quad I_G = \frac{1}{12} m \ell^2 \\ \Rightarrow 2 \cdot E^{mec} &= m \frac{\ell^2}{4} \cos^2 \theta \dot{\theta}^2 + I_G \dot{\theta}^2 + m g \ell \sin \theta \\ \Rightarrow 2 \cdot E^{mec} &= \dot{\theta}^2 \left(m \frac{\ell^2}{4} \cos^2 \theta + I_G \right) + m g \ell \sin \theta \end{aligned}$$

Condition initiale : $\dot{\theta} = 0$ pour $\theta = \pi/2 \Rightarrow 2 \cdot E^{mec} = m g \ell$. On a donc

$$\dot{\theta}^2 \left(\frac{\ell^2}{4} \cos^2 \theta + I_G \right) + m g \ell \sin \theta = m g \ell$$

$$\Rightarrow \dot{\theta}^2 = \frac{g \ell (1 - \sin \theta)}{\frac{\ell^2}{4} \cos^2 \theta + I_G/m} \Rightarrow \dot{\theta} = -2 \sqrt{\frac{g \ell (1 - \sin \theta)}{\ell^2 \cos^2 \theta + 4 I_G/m}} = -2 \sqrt{\frac{g}{\ell} \left(\frac{1 - \sin \theta}{\cos^2 \theta + \frac{2}{3}} \right)}$$

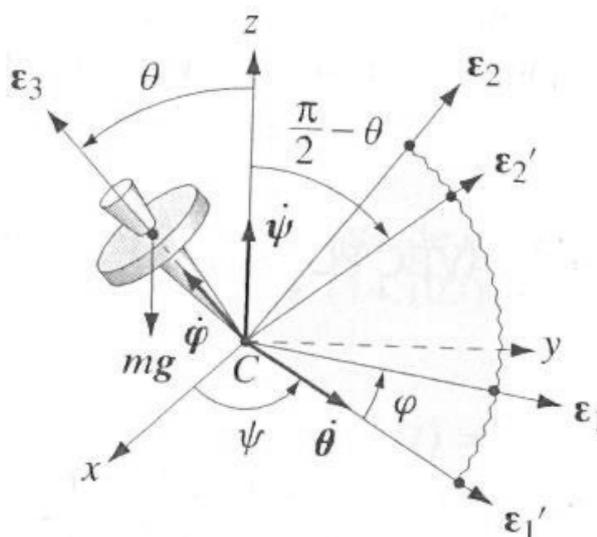
On peut se rattacher au résultat donné par le livre de Gruber & Benoit (p. 711) en posant $d = \ell/2$:

$$\dot{\theta} = -\sqrt{\frac{8 g d (1 - \sin \theta)}{4 d^2 \cos^2 \theta + 4 I_G/m}} = -\sqrt{\frac{2 g d (1 - \sin \theta)}{d^2 \cos^2 \theta + I_G/m}}$$

Mécanique générale

Énoncé des exercices**Problème 1 :**

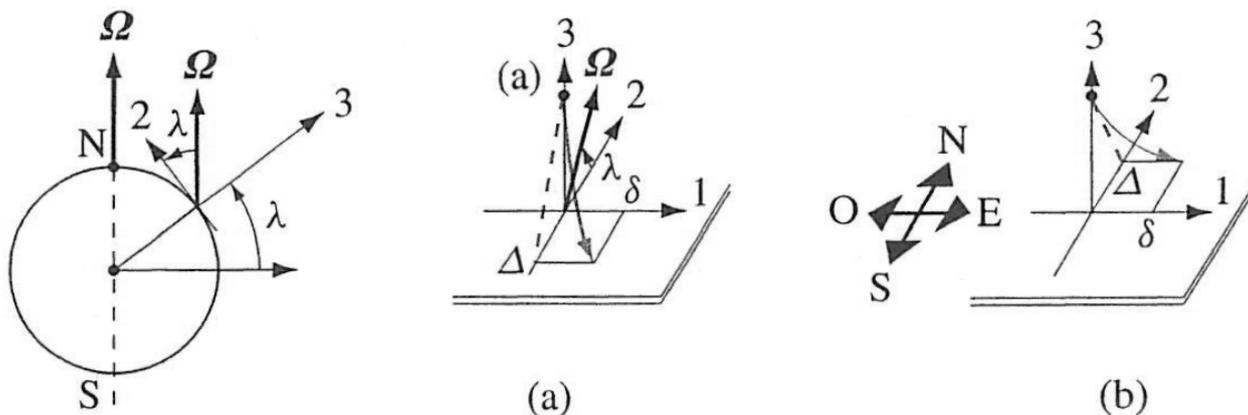
Établir les équations du mouvement d'une toupie symétrique soumise à son propre poids $m\mathbf{g}$ et dont l'axe est fixé au point C mais peut pivoter librement et sans frottement. La figure montre la situation avec les repères pertinents, ainsi que les angles d'Euler φ , ψ et θ .



1. Recenser le nombre de degrés de liberté du système et trouver, à partir du théorème du moment cinétique et de la conservation de l'énergie mécanique, un nombre équivalent de constantes du mouvement.
2. Écrire les équations du mouvement qui découlent de ces constantes, après avoir exprimé ces dernières en fonction des angles d'Euler.
3. Faire l'analyse qualitative du mouvement, et définir dans quelles conditions la nutation $\dot{\theta}$ disparaît. Montrer que dans ces conditions, il y a une vitesse de rotation propre minimale ω_p^{min} en dessous de laquelle on ne peut avoir de mouvement sans nutation.
4. Donner les fréquences de précession $\dot{\psi}$ pour le cas où $\omega_p \gg \omega_p^{min}$.
5. Dans le cas d'un mouvement de nutation, donner les caractéristiques de ce dernier.

Problème 2 :

Une bille tombe en chute libre d'une hauteur h sur le sol. La tour de laquelle on la lance se trouve à une latitude λ . On veut savoir, sous l'hypothèse d'une Terre sphérique mais tournant à la vitesse Ω , à quelle distance de la verticale vraie (direction du centre de la Terre) la bille arrivera sur le sol (voir la figure).



1. Écrire les équations du mouvement dans le système d'axes $O123$ de la figure.
Indication : Écrire les équations pour les composantes de la *vitesse* plutôt que pour celles de la position.
2. Utiliser les conditions initiales $\mathbf{x}(t = 0) = h \mathbf{e}_3$ et $\mathbf{v}(t = 0) = 0$ pour intégrer les trois équations et obtenir les composantes de la vitesse en fonction du temps.
3. Donner les résultats (vitesse et position en fonction du temps) pour l'approximation de premier ordre $\Omega = 0$.
4. Donner les résultats pour l'approximation d'ordre 1, à savoir $\Omega \neq 0$, $\Omega^2 R_T \neq 0$ mais $\Omega^2 \approx 0$.
5. Calculer le temps de chute approximatif, ainsi que les déviations δ et Δ en x_1 et x_2 respectivement.

Mécanique générale

Corrigé des exercices**Problème 1 :**

Le référentiel absolu \mathcal{R} est le laboratoire, avec le système d'axes $C\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$. Les variables sont les angles d'Euler θ , ψ et φ . On définit les deux autres repères $C\boldsymbol{\varepsilon}_1\boldsymbol{\varepsilon}_2\boldsymbol{\varepsilon}_3$ et $C\boldsymbol{\varepsilon}'_1\boldsymbol{\varepsilon}'_2\boldsymbol{\varepsilon}'_3$ selon la figure de l'énoncé.

1. Ainsi, il y a trois degrés de liberté, qui correspondent aux trois angles d'Euler. Si I_1 , I_2 et I_3 sont les composantes du moment d'inertie \mathbf{L}_C de la toupie selon les axes $C\boldsymbol{\varepsilon}_1\boldsymbol{\varepsilon}_2\boldsymbol{\varepsilon}_3$, on a par symétrie $I_1 = I_2$. Par le théorème du moment cinétique exprimé sous la forme des équations d'Euler (formules 14.107, p. 461 du livre de Gruber & Benoit), on voit que

$$I_3 \dot{\omega}_3 - \underbrace{(I_1 - I_2)}_0 \omega_1 \omega_2 = M_{C,3}^{ext} = 0$$

En effet, le moment des forces extérieures $\mathbf{M}^{ext} = \mathbf{CG} \wedge m\mathbf{g} = \ell m g \sin \theta \boldsymbol{\varepsilon}'_1 \perp \boldsymbol{\varepsilon}_3$, donc ce moment n'a pas de composante selon $\boldsymbol{\varepsilon}_3$. De plus,

$$\frac{d}{dt}(I_3 \omega_3) = 0 \Rightarrow \mathbf{L}_C \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_3 = L_3 = I_3 \omega_3 = \text{constante}$$

En exprimant le théorème du moment cinétique dans le référentiel du laboratoire, on a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{L}_C &= \mathbf{CG} \wedge m\mathbf{g} \quad \text{et} \quad (\mathbf{CG} \wedge m\mathbf{g}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_3 = 0 \Rightarrow \left(\frac{d}{dt} \mathbf{L}_C \right) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_3 = \frac{d}{dt} (\mathbf{L}_C \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_3) = 0 \\ &\Rightarrow L_z = \mathbf{L}_C \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_3 = \text{cste} \end{aligned}$$

La conservation de l'énergie mécanique nous fournit une troisième constante du mouvement :

$$\frac{1}{2} (\boldsymbol{\omega}, \mathbf{I}_C \boldsymbol{\omega}) + m g \ell \cos \theta = E = \text{cste} \quad \text{avec} \quad \ell = |\mathbf{CG}|$$

2. Écrivons d'abord la vitesse de rotation totale :

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi} \boldsymbol{\varepsilon}_3 + \dot{\psi} \mathbf{e}_3 + \dot{\theta} \boldsymbol{\varepsilon}'_1$$

Or, on a les transformations suivantes dans le repère $C\boldsymbol{\varepsilon}_1\boldsymbol{\varepsilon}_2\boldsymbol{\varepsilon}_3$:

$$\mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\varepsilon}'_1 = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ -\sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathbf{L}_C = \mathbf{I}_C \boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi \\ \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi \\ \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta \end{pmatrix}$$

Les trois constantes du mouvement donnent alors successivement :

$$L_3 = \mathbf{L}_C \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_3 = I_3 (\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta) \underbrace{\boldsymbol{\varepsilon}_3 \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_3}_1 \quad (1)$$

$$\begin{aligned} L_z &= \mathbf{L}_C \cdot \mathbf{e}_3 & (2) \\ &= (I_1(\dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi), \quad I_2(\dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi), \quad I_3(\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta)) \\ &\quad \cdot \begin{pmatrix} \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= I_1 (\dot{\psi} \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + \dot{\theta} \sin \theta \sin \varphi \cos \varphi + \dot{\psi} \sin^2 \theta \cos^2 \varphi \\ &\quad - \dot{\theta} \sin \theta \cos \varphi \sin \varphi) + I_3 (\cos \theta \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos^2 \theta) \\ &= I_1 \dot{\psi} \sin^2 \theta + I_3 (\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta) \cos \theta \end{aligned} \quad (3)$$

où $I_1 = I_2 = I_{G,1} + m\ell^2$.

$$\begin{aligned} E_{cin} &= \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{I}_C \boldsymbol{\omega}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{L}_C \\ &= \frac{1}{2} I_1 \left[(\dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi)^2 + (\dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi)^2 \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} I_3 (\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta)^2 \\ &= \frac{1}{2} I_1 \left[\dot{\psi}^2 \sin^2 \theta \underbrace{(\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi)}_1 + \dot{\theta}^2 \underbrace{(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)}_1 \right. \\ &\quad \left. + 2\dot{\psi}\dot{\theta} \underbrace{(\sin \theta \sin \varphi \cos \varphi - \sin \theta \cos \varphi \sin \varphi)}_0 \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} I_3 (\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta)^2 \\ \Rightarrow E &= \frac{1}{2} I_1 (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2} I_3 (\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta)^2 + m g \ell \cos \theta \end{aligned}$$

Les équations du mouvement peuvent donc s'écrire

$$\dot{\psi} = \frac{L_z - L_3 \cos \theta}{I_1 \sin^2 \theta} \quad (4)$$

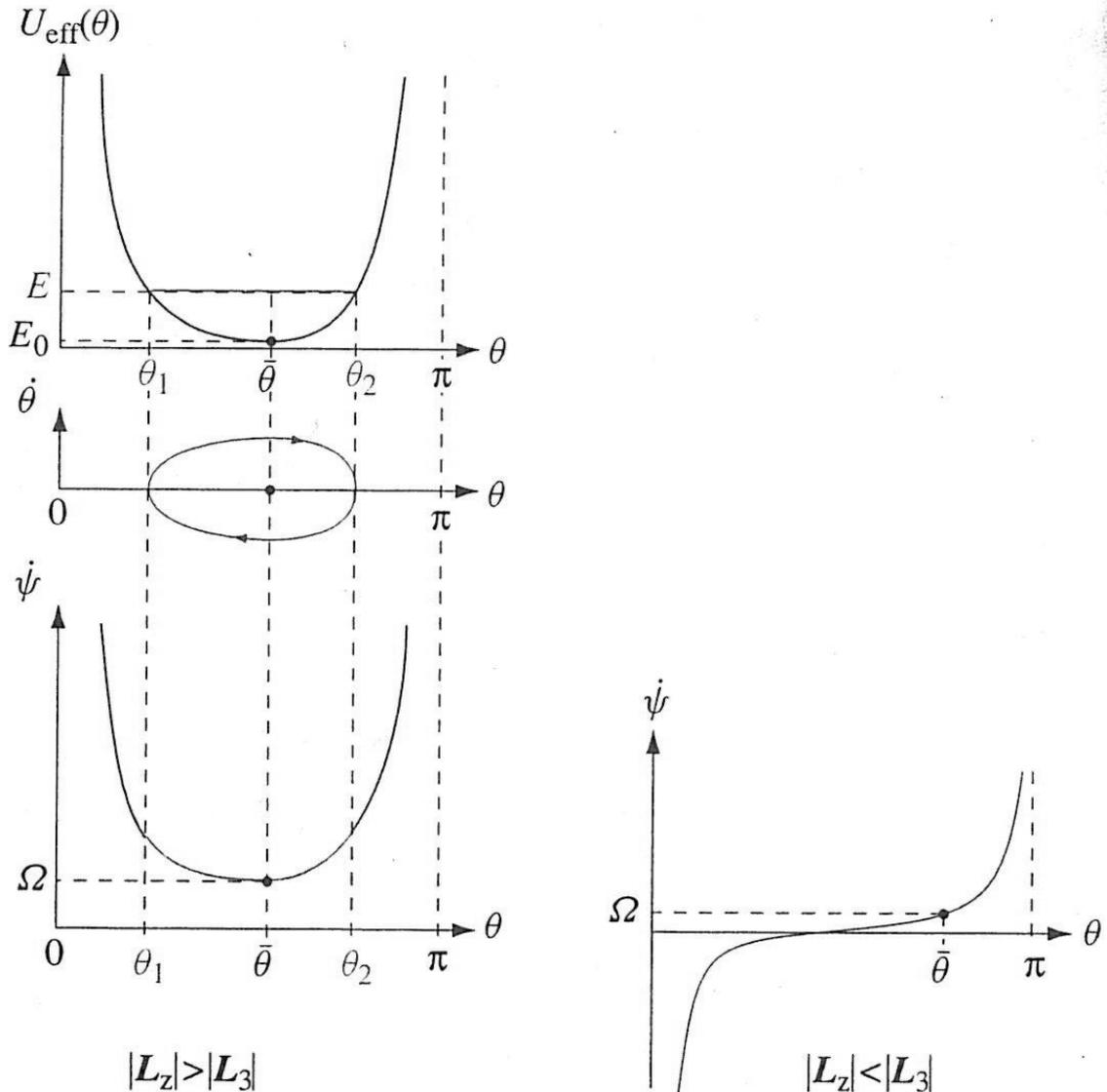
$$\dot{\varphi} = \frac{L_3}{I_3} - \cos \theta \frac{L_z - L_3 \cos \theta}{I_1 \sin^2 \theta} \quad (5)$$

$$E = \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}^2 + U_{\text{eff}}(\theta) \quad (6)$$

$$\text{avec } U_{\text{eff}}(\theta) = \frac{1}{2} \frac{L_3^2}{I_3} + m g \ell \cos \theta + \frac{1}{2} \frac{(L_z - L_3 \cos \theta)^2}{I_1 \sin^2 \theta} \quad (7)$$

3. Analyse qualitative du mouvement :

On voit que $U_{\text{eff}}(\theta) \rightarrow \infty$ pour $\theta \rightarrow 0, \pi$. Entre ces deux valeurs, il y a un minimum correspondant à $\theta(t) = \bar{\theta}$; si le système a l'énergie E_0 qui correspond à cet angle, qui est constant, alors il n'y a pas de nutation, car un seul angle $\bar{\theta}$ est possible : θ ne peut pas varier. Par contre, si $E > E_0$, l'angle θ peut varier entre θ_1 et θ_2 . La figure montre les diagrammes pertinents. Dans la situation sans



nutation, la vitesse angulaire de précession $\dot{\psi} = \Omega$ donnée par l'équation (4) est constante, car $\theta = \bar{\theta}$ est constant, et L_z et L_3 sont constants aussi, comme on l'a vu au début. La rotation propre de la toupie, $\dot{\phi} = \omega_p$, est constante aussi, pour les mêmes raisons. Dérivons le potentiel effectif pour trouver $\bar{\theta}$, puis utilisons les

équations (1) et (4) :

$$\left. \frac{dU_{\text{eff}}}{d\bar{\theta}} \right)_{\theta=\bar{\theta}} = 0 = -m g \ell \sin \bar{\theta} + \frac{L_z - L_3 \cos \bar{\theta}}{I_1 \sin^2 \bar{\theta}} L_3 \sin \bar{\theta} - \frac{(L_z - L_3 \cos \bar{\theta})^2}{I_1 \sin^3 \bar{\theta}} \cos \bar{\theta}$$

$$\text{éq. (1)} \rightarrow L_3 = I_3 (\omega_p + \Omega \cos \bar{\theta}) \Rightarrow \omega_p + \Omega \cos \bar{\theta} = \frac{L_3}{I_3} = \bar{\omega}_3 = \text{const.}$$

$$\text{éq. (4)} \rightarrow \Omega = \frac{L_z - L_3 \cos \bar{\theta}}{I_1 \sin^2 \bar{\theta}}$$

où $\bar{\omega}_3$ est l'équivalent de $\bar{\theta}$ pour la vitesse de rotation. Par conséquent, l'annulation de la dérivée de U_{eff} implique, pour un mouvement sans nutation :

$$\begin{aligned} m g \ell \sin \bar{\theta} - \Omega L_3 \sin \bar{\theta} + \Omega^2 I_1 \sin \bar{\theta} \cos \bar{\theta} &= 0 \\ [m g \ell - \Omega L_3 + \Omega^2 I_1 \cos \bar{\theta}] \sin \bar{\theta} &= 0 \\ [m g \ell - \Omega I_3 (\omega_p + \Omega \cos \bar{\theta}) + \Omega^2 I_1 \cos \bar{\theta}] \sin \bar{\theta} &= 0 \end{aligned}$$

Il existe des solutions simples pour des valeurs particulières de $\bar{\theta}$:

$$\begin{aligned} \bar{\theta} &= 0 \quad \text{ou} \quad \bar{\theta} = \pi \\ \bar{\theta} &= \frac{\pi}{2} \Rightarrow -m g \ell + \Omega I_3 \omega_p = 0 \Rightarrow \Omega = \frac{m g \ell}{I_3 \omega_p} \end{aligned}$$

La dernière équation lie la vitesse de précession Ω et la vitesse de rotation propre ω_p pour la situation où l'axe ε_3 est perpendiculaire à la force. On voit que, si ω_p est positif, alors Ω l'est aussi : en appliquant la règle du tire-bouchon, on voit alors que le sens de précession est l'opposé de celui d'une roue qui roulerait sur le sol. Remarquons toutefois que, dans le cas très particulier où $I_1 = I_3$, l'équation ci-dessus devient *linéaire* en Ω , et l'on a $\Omega = \frac{m g \ell}{I_3 \omega_p}$ même pour $\bar{\theta} \neq \frac{\pi}{2}$!

Si $\bar{\theta} \neq k\frac{\pi}{2}$, alors on aboutit à une équation du second degré pour la vitesse de précession Ω :

$$\begin{aligned} (I_1 - I_3) \cos \bar{\theta} \Omega^2 - I_3 \omega_p \Omega + m g \ell &= 0 \\ \Rightarrow \Omega_{\pm} &= \frac{1}{2(I_1 - I_3) \cos \bar{\theta}} \left[I_3 \omega_p \pm \sqrt{I_3^2 \omega_p^2 - 4 m g \ell (I_1 - I_3) \cos \bar{\theta}} \right] \end{aligned}$$

Pour qu'un tel mouvement soit possible, il faut que Ω soit réel. Or, en supposant que $I_1 > I_3$, cela revient à dire que pour $\bar{\theta} < \frac{\pi}{2}$, il faut satisfaire la condition

$$\begin{aligned} I_3^2 \omega_p^2 &\geq 4 m g \ell (I_1 - I_3) \cos \bar{\theta} \\ I_3 \omega_p &\geq \sqrt{4 m g \ell (I_1 - I_3) \cos \bar{\theta}} = I_3 \omega_p^{\text{min}} \\ \text{avec } \omega_p^{\text{min}} &= \frac{1}{I_3} \sqrt{4 m g \ell (I_1 - I_3) \cos \bar{\theta}} \end{aligned}$$

et, dans ce cas, on a deux solutions possibles.

4. Écrivons Ω_{\pm} sous la forme

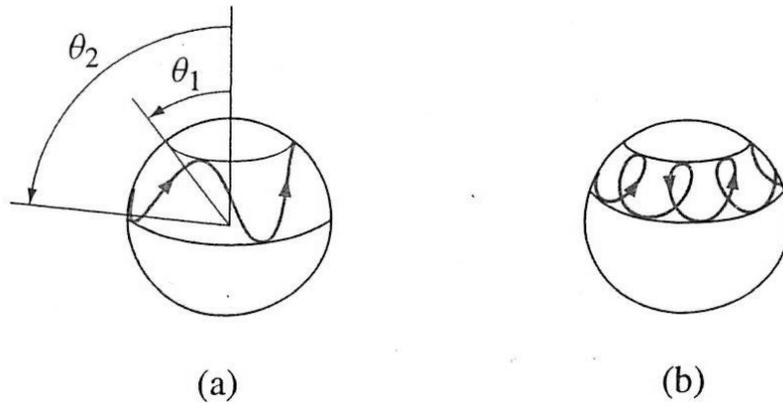
$$\begin{aligned}\Omega_{\pm} &= \frac{I_3}{2(I_1 - I_3) \cos \bar{\theta}} \left[\omega_p \pm \sqrt{\omega_p^2 - \omega_p^{min 2}} \right] \\ \omega_p \gg \omega_p^{min} &\Rightarrow \Omega_+ \simeq \frac{I_3 \omega_p}{(I_1 - I_3) \cos \bar{\theta}} \\ \Omega_- &= \frac{I_3 \omega_p}{2(I_1 - I_3) \cos \bar{\theta}} \left(1 - \underbrace{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p^{min}}{\omega_p} \right)^2}}_{\sim 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\omega_p^{min}}{\omega_p} \right)^2} \right) \\ &\simeq \frac{I_3 \omega_p}{4(I_1 - I_3) \cos \bar{\theta}} \left(\frac{\omega_p^{min}}{\omega_p} \right)^2 \\ &\simeq \frac{I_3 \omega_p}{4(I_1 - I_3) \cos \bar{\theta}} \frac{1}{I_3^2 \omega_p} 4 m g \ell (I_1 - I_3) \cos \bar{\theta} \\ \Rightarrow \Omega_- &\simeq \frac{m g \ell}{I_3 \omega_p}\end{aligned}$$

Il y a donc deux vitesses de précession possibles, une rapide (Ω_+) qui dépend de $\bar{\theta}$, et une lente (Ω_-) qui est indépendante de $\bar{\theta}$.

5. Dès que $E > E_0$, l'angle $\theta(t)$ varie entre deux limites θ_1 et θ_2 , comme le montre la figure (a) et comme le suggère l'inversion de l'équation (6) :

$$\dot{\theta} = \pm \sqrt{\frac{2}{I_1} (E - U_{\text{eff}})}$$

Or, d'après l'équation (4), on voit qu'il est tout à fait possible que, selon la valeur de $\theta(t)$, $\dot{\psi}$ devienne négatif. Dans ce dernier cas, la toupie va décrire une sorte de cycloïde (voir figure b) au lieu d'une courbe monotone ressemblant à un sinusöide (figure a).



Problème 2 :

Le référentiel est le sol. Il faut d'abord établir les forces, qui sont la gravité apparente \mathbf{g}^{app} et la force de Coriolis \mathbf{F}^{cor} . On a (éq. 15.29, p. 489) :

$$\mathbf{g}^{app}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{x})$$

Ici,

$$\begin{aligned} \mathbf{x} = R_T \mathbf{e}_3 &\Rightarrow \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{x} = \Omega R_T \sin\left(\frac{\pi}{2} - \lambda\right) \mathbf{e}_1 = \Omega R_T \cos \lambda \mathbf{e}_1 \\ &\Rightarrow -\boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{x}) = -\Omega^2 R_T \cos \lambda \sin \lambda \mathbf{e}_2 + \Omega R_T \cos^2 \lambda \mathbf{e}_3 \\ &\Rightarrow \mathbf{g}^{app} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\Omega^2 R_T \cos \lambda \sin \lambda \\ -g + \Omega^2 R_T \cos^2 \lambda \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La force de Coriolis vaut

$$\mathbf{F}^{cor} = -2m \boldsymbol{\omega}_e \wedge \mathbf{v}' = -2m \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{v}$$

Ici,

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ \Omega \cos \lambda \\ \Omega \sin \lambda \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathbf{F}^{cor} = -2m \begin{pmatrix} \Omega_2 v_3 - \Omega_3 v_2 \\ \Omega_3 v_1 - \underbrace{\Omega_1}_{0} v_3 \\ \underbrace{\Omega_1}_{0} v_2 - \Omega_2 v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Omega \cos \lambda v_3 - \Omega \sin \lambda v_2 \\ \Omega \sin \lambda v_1 \\ -\Omega \cos \lambda v_1 \end{pmatrix}$$

L'équation de Newton

$$m \mathbf{a} = m \mathbf{g}^{app} + \mathbf{F}^{cor} = m \mathbf{g}^{app} - 2m \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{v} \Rightarrow \mathbf{a} = \mathbf{g}^{app} - 2 \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{v}$$

s'écrit alors en composantes :

$$\begin{aligned} \dot{v}_1 &= -2\Omega (\cos \lambda v_3 - \sin \lambda v_2) \\ \dot{v}_2 &= -\Omega^2 R_T \cos \lambda \sin \lambda - 2\Omega \sin \lambda v_1 \\ \dot{v}_3 &= -g + \Omega^2 R_T \cos^2 \lambda + 2\Omega \cos \lambda v_1 \\ \Rightarrow v_2 &= -(\Omega^2 R_T \cos \lambda \sin \lambda) t - (2\Omega \sin \lambda) x_1 + const_2 \\ v_3 &= -(g - \Omega^2 R_T \cos^2 \lambda) t + (2\Omega \cos \lambda) x_1 + const_3 \end{aligned}$$

Utilisons les conditions initiales : $\mathbf{x}(t=0) = h \mathbf{e}_3$ et $\mathbf{v}(t=0) = 0$:

$$\begin{aligned}
t=0 : \quad v_2(0) &= 0 \text{ avec } x_1(0) = 0 \Rightarrow \text{const}_2 = 0 \\
v_3(0) &= 0 \text{ avec } x_1(0) = 0 \Rightarrow \text{const}_3 = 0 \\
\Rightarrow v_2 &= -(\Omega^2 R_T \cos \lambda \sin \lambda) t - (2 \Omega \sin \lambda) x_1 \\
v_3 &= -(g - \Omega^2 R_T \cos^2 \lambda) t + (2 \Omega \cos \lambda) x_1 \\
\dot{v}_1 &= -2 \Omega (\cos \lambda v_3 - \sin \lambda v_2) \\
\Rightarrow \dot{v}_1 &= -2 \Omega [-(g \cos \lambda - \Omega^2 R_T \cos^3 \lambda) t + (2 \Omega \cos^2 \lambda) x_1 \\
&\quad + (\Omega^2 R_T \cos \lambda \sin^2 \lambda) t + (2 \Omega \sin^2 \lambda) x_1] \\
&= -2 \Omega \left[\left(-g \cos \lambda + \Omega^2 R_T \cos \lambda \underbrace{(\cos^2 \lambda + \sin^2 \lambda)}_1 \right) t + 2 \Omega \underbrace{(\cos^2 \lambda + \sin^2 \lambda)}_1 x_1 \right] \\
&= -2 \Omega [\cos \lambda (-g + \Omega^2 R_T) t + 2 \Omega x_1] \\
\dot{v}_1 &= 2 \Omega \cos \lambda (g - \Omega^2 R_T) t - 4 \Omega^2 x_1
\end{aligned}$$

Approximation d'ordre zéro : $\Omega \simeq 0$

$$\begin{aligned}
\Omega \simeq 0 \Rightarrow \dot{v}_1 &= 0 \text{ et } v_1 = \text{cste} = 0 \text{ car } v_1(t=0) = 0 \\
v_2 &= 0 \\
v_3 &= -g t \Rightarrow x_3 = h - \frac{1}{2} g t^2
\end{aligned}$$

Approximation d'ordre 1 : $\Omega \neq 0$ et $\Omega^2 R_T \neq 0$, mais $\Omega^2 \ll \Omega^2 R_T$ et $\Omega^2 \ll \Omega$ donc on néglige Ω^2 :

$$\begin{aligned}
\dot{v}_1 &\simeq 2 \Omega \cos \lambda (g - \Omega^2 R_T) t \\
\Rightarrow v_1 &\simeq \Omega \cos \lambda (g - \Omega^2 R_T) t^2 \\
\Rightarrow x_1 &\simeq \frac{1}{3} \Omega \cos \lambda (g - \Omega^2 R_T) t^3 \\
v_2 &\simeq -\Omega^2 R_T \cos \lambda \sin \lambda t - 2 \Omega \sin \lambda x_1 \\
&\simeq -\Omega^2 R_T \cos \lambda \sin \lambda t - 2 \Omega \sin \lambda \frac{1}{3} \Omega \cos \lambda (g - \Omega^2 R_T) t^3 \\
\Rightarrow x_2 &\simeq -\frac{1}{2} \Omega^2 R_T \cos \lambda \sin \lambda t^2 - \frac{2}{3} \cdot \underbrace{\Omega^2 \cos \lambda \sin \lambda (g - \Omega^2 R_T)}_{\text{négligeable: } \Omega^2 g \ll \Omega^2 R_T \text{ et } \Omega^4 R_T \ll \Omega^2 R_T} \cdot \frac{t^4}{4} \\
v_3 &= -(g - \Omega^2 R_T \cos^2 \lambda) t + 2 \Omega \cos \lambda x_1 \\
&\simeq -(g - \Omega^2 R_T \cos^2 \lambda) t + \frac{2}{3} \underbrace{\Omega^2 \cos^2 \lambda (g - \Omega^2 R_T)}_{\text{négligeable}} t^3 \\
\Rightarrow x_3 &\simeq h - \frac{1}{2} (g - \Omega^2 R_T \cos^2 \lambda) t^2 = h - \frac{1}{2} g' t^2
\end{aligned}$$

avec $g' = g - \Omega^2 R_T \cos^2 \lambda$.

Temps de chute : $x_3(t_c) = 0 \Rightarrow t_c^2 = 2h/g' \Rightarrow t_c = \sqrt{\frac{2h}{g'}}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow x_1(t_c) &\simeq \frac{1}{3} \Omega \cos \lambda (g - \Omega^2 R_T) t_c^3 \\ &\simeq \frac{1}{3} \Omega \cos \lambda (g - \Omega^2 R_T) \left(\frac{2h}{g'}\right)^{3/2} \end{aligned}$$

On peut encore simplifier l'expression de $x_1(t_c)$ en remarquant que, puisque $\Omega^2 R_T \ll g$, on peut admettre que

$$\frac{g - \Omega^2 R_T}{g - \Omega^2 R_T \cos^2 \lambda} \approx 1 \Leftrightarrow g - \Omega^2 R_T \approx g'$$

On aura finalement :

$$\begin{aligned} x_1(t_c) = \delta &\simeq \frac{2}{3} \Omega h \cos \lambda \sqrt{\frac{2h}{g'}} \\ x_2(t_c) = \Delta &\simeq -\frac{1}{2} (\Omega^2 R_T \cos \lambda \sin \lambda) t_c^2 \\ &\simeq -\Omega^2 R_T \frac{h}{g'} \cos \lambda \sin \lambda \end{aligned}$$

où δ est la déviation vers l'Est, et Δ la déviation vers le Nord ou vers le Sud, selon l'hémisphère.

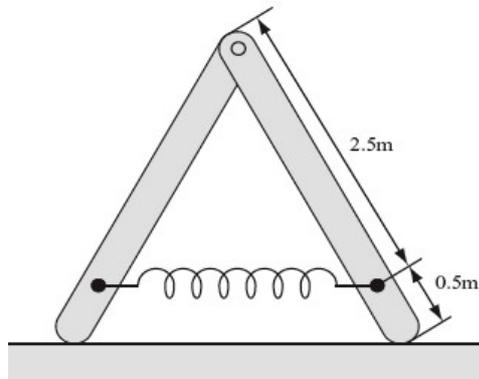
Mécanique générale

Énoncé des exercices

Problème 1 :

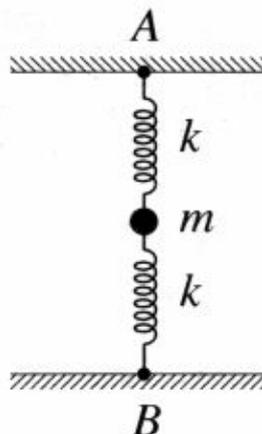
Un système articulé, formé de deux tiges de masse M reliées par un ressort de constante k , repose sans frottement sur le sol (voir figure). Trouver la position d'équilibre, sachant que le ressort exerce une force $F = -k(\ell - \ell_0)$.

Application numérique : $M = 10 \text{ kg}$; $\ell_0 = 0.5 \text{ m}$; $k = 10^3 \text{ N/m}$.



Problème 2 :

Un corps de masse m est fixé à deux ressorts identiques dont les autres extrémités sont fixées en A et B (voir figure). A l'instant $t = 0$, le corps se trouve au milieu du segment vertical AB avec une vitesse nulle. Calculer l'amplitude et la période du mouvement en l'absence de frottement.



Problème 3 :

Un oscillateur harmonique sans frottement est soumis à la force extérieure $\mathbf{F}^{ext}(t) = F_0 e^{-qt}$. Montrer que l'évolution de conditions initiales $x(t=0) = 0$, $\dot{x}(t=0) = 0$ est donné par

$$x(t) = \frac{F_0/m}{\omega_0^2 + q^2} \left(e^{-qt} + \frac{\sin(\omega_0 t - \alpha)}{\sin \alpha} \right)$$

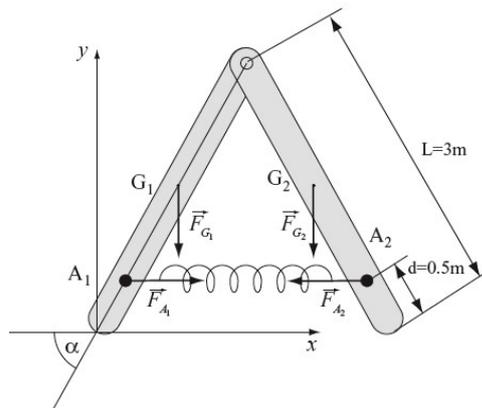
où $\alpha = \arctan(\omega_0/q)$ et $\omega_0 = \sqrt{k/m}$.

Mécanique générale

Corrigé des exercices

Problème 1 :

Soit un repère $O\mathbf{e}_x\mathbf{e}_y$ et les points A_1, A_2 de fixation du ressort. Le système est holonôme à un degré de liberté.



1. Méthode des déplacements virtuels : Pour tout déplacement virtuel compatible, on a

$$\delta W = \sum_i \mathbf{F}_i \delta \mathbf{x}_i = 0$$

Si G_1 et G_2 sont les centres de gravité des deux tiges, Les forces sont

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{G1} &= \mathbf{F}_{G2} = -Mg \mathbf{e}_y \\ \mathbf{F}_{A1} &= -\mathbf{F}_{A2} = k(\ell - \ell_0) \mathbf{e}_x \end{aligned}$$

Par ailleurs, on a :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{G1} &= \frac{L}{2} (\cos \alpha \mathbf{e}_x + \sin \alpha \mathbf{e}_y) \\ \mathbf{x}_{G2} &= \frac{3L}{2} \cos \alpha \mathbf{e}_x + \frac{L}{2} \sin \alpha \mathbf{e}_y \\ \mathbf{x}_{A1} &= d (\cos \alpha \mathbf{e}_x + \sin \alpha \mathbf{e}_y) \\ \mathbf{x}_{A2} &= (2L - d) \cos \alpha \mathbf{e}_x + d \sin \alpha \mathbf{e}_y \end{aligned}$$

Les déplacements virtuels correspondants sont :

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{x}_{G1} &= \frac{L}{2} (-\sin \alpha \mathbf{e}_x + \cos \alpha \mathbf{e}_y) \delta \alpha \\ \delta \mathbf{x}_{G2} &= \left(-\frac{3L}{2} \sin \alpha \mathbf{e}_x + \frac{L}{2} \cos \alpha \mathbf{e}_y \right) \delta \alpha \\ \delta \mathbf{x}_{A1} &= d (-\sin \alpha \mathbf{e}_x + \cos \alpha \mathbf{e}_y) \delta \alpha \\ \delta \mathbf{x}_{A2} &= [-(2L - d) \sin \alpha \mathbf{e}_x + d \cos \alpha \mathbf{e}_y] \delta \alpha \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta W &= \sum_i \mathbf{F}_i \delta \mathbf{x}_i = -F d \sin \alpha \delta \alpha + F (2L - d) \sin \alpha \delta \alpha - M g \frac{L}{2} \cos \alpha \delta \alpha - M g \frac{L}{2} \cos \alpha \delta \alpha \\ &= 2F(L - d) \sin \alpha \delta \alpha - M g L \cos \alpha \delta \alpha = Q_\alpha \delta \alpha = 0\end{aligned}$$

où Q_α représente la force généralisée associée à la coordonnée α . On en tire finalement la force :

$$F = \frac{M g L}{2(L - d) \tan \alpha} = k(\ell - \ell_0) = k[2(L - d) \cos \alpha - \ell_0]$$

De là, on trouve une équation transcendante pour l'angle α :

$$M g L = 4k(L - d)^2 \sin \alpha - 2k\ell_0(L - d) \tan \alpha$$

On ne peut résoudre cette équation analytiquement, mais seulement graphiquement ou numériquement. Dans ce dernier cas, on procède par itération, en choisissant une valeur arbitraire de α dans le membre de droite de l'équation :

$$\tan \alpha = \frac{4k(L - d)^2 \sin \alpha - M g L}{2k\ell_0(L - d)}$$

puis en tirant α de la valeur obtenue, et en réintroduisant ce α dans le membre de droite et ainsi de suite.

Pour les dimensions et constantes données, la convergence est rapide et l'on trouve

$$\alpha = 84.2^\circ$$

2. Méthode du minimum de l'énergie mécanique : L'énergie mécanique se réduit ici à l'énergie potentielle, puisqu'on est dans le cas statique. Cependant, l'équilibre correspond à un état d'énergie minimale, et comme le système n'a qu'un degré de liberté, représenté ici par l'angle α , le problème consiste à trouver le minimum de l'énergie potentielle.

Écrivons l'énergie mécanique totale :

$$E = E^{pot} = 2Mg \frac{L}{2} \sin \alpha + \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2 = MgL \sin \alpha + \frac{1}{2}k[2(L - d) \cos \alpha - \ell_0]^2$$

avec $\ell = 2(L - d) \cos \alpha$. Pour trouver le minimum d'énergie, il suffit de dériver l'énergie par rapport à α et de l'annuler :

$$\frac{\partial E}{\partial \alpha} = 0 \Rightarrow MgL \cos \alpha + k[2(L - d) \cos \alpha - \ell_0] \cdot [-2(L - d)] \sin \alpha = 0$$

$$\Rightarrow MgL = -2k\ell_0(L - d) \tan \alpha + 4k(L - d)^2 \sin \alpha$$

et on retrouve bien l'équation transcendante ci-dessus.

Problème 2 :

Soit un axe z vertical passant par m et pointant vers le haut. Les forces en présence sont, compte tenu du fait que les ressorts ont une masse négligeable et qu'il n'y a pas de frottements¹ :

$$\begin{aligned}F^{grav} &= -mg \\F^{ressort1} &= -k(z - z_1) \\F^{ressort2} &= -k(z - z_2)\end{aligned}$$

où z_1 et z_2 sont la position de m lorsque le ressort respectif n'est pas tendu ni comprimé. Ces positions z_1 et z_2 ne sont pas connues, parce qu'on ne sait pas si les ressorts sont tendus, comprimés, ou si BA représente la somme de leurs longueurs sans contrainte. Par contre, comme les ressorts sont identiques, on voit que la moyenne de z_1 et de z_2 coïncide avec le milieu du segment BA. Appelons z_0 la position de ce milieu de segment :

$$\frac{z_1 + z_2}{2} = \frac{BA}{2} \equiv z_0$$

L'équation de Newton s'écrit alors :

$$\begin{aligned}m\ddot{z} &= -mg - k(z - z_1) - k(z - z_2) \Rightarrow \ddot{z} + \frac{k}{m}[2z - (z_1 + z_2)] + g = 0 \\&\Rightarrow \ddot{z} + \frac{2k}{m}(z - z_0) + g = 0\end{aligned}$$

Pour se débarrasser du terme constant g , faisons le changement de variable

$$z' = (z - z_0) + \frac{mg}{2k}$$

On retrouve alors l'équation de l'oscillateur harmonique

$$\ddot{z}' + \frac{2k}{m}z' = 0 \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{m}} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}}$$

Conditions initiales : $z(t=0) = z_0$ et $\dot{z}(t=0) = \dot{z}'(t=0) = 0$, donc, puisque

$$z' = z - z_0 + \frac{mg}{2k} = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t \quad \text{et} \quad \dot{z}' = -A \sin \omega_0 t + B \cos \omega_0 t$$

on doit avoir

$$A = \frac{mg}{2k} \quad \text{et} \quad B = 0 \Rightarrow z' = \frac{mg}{2k} \cos \omega_0 t \Rightarrow z = z_0 + \frac{mg}{2k} (\cos \omega_0 t - 1)$$

¹Pour écrire les forces dues aux ressorts, il faut imaginer chacun de ceux-ci comme unique et isolé, et remarquer que la force est toujours en sens opposé du déplacement, que le ressort soit comprimé ou dilaté.

Problème 3 :

En présence de la force $F(t) = F_0 e^{-qt}$, l'évolution de l'oscillateur harmonique est forcée et décrite par l'équation de Newton

$$m\ddot{x} = -kx + F_0 e^{-qt} \quad \Leftrightarrow \quad m\ddot{x} + kx - F_0 e^{-qt} = 0$$

Pour trouver l'évolution, il faut donc résoudre cette équation linéaire du second ordre inhomogène. La méthode consiste alors à chercher d'abord la solution générale $x_h(t)$ de l'équation homogène

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

Cette équation étant simplement l'équation d'un oscillateur harmonique libre, on sait que la solution est

$$x_h(t) = C_1 \sin(\omega_0 t - \alpha)$$

avec $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, C_1 , et α des constantes. Intuitivement on peut prévoir, à cause de la force extérieure, que le système évolue de manière similaire à la force. Prenons comme *Ansatz* pour la solution particulière $x_p(t)$ (de l'équation inhomogène cette fois) une fonction de la forme

$$x_p(t) = C_2 e^{-qt}$$

où C_2 est une constante qui doit donc vérifier

$$mq^2 C_2 + kC_2 - F_0 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad C_2 = \frac{F_0}{k + mq^2} = \frac{F_0/m}{\omega_0^2 + q^2}$$

On obtient ainsi la solution particulière

$$x_p(t) = \frac{F_0/m}{\omega_0^2 + q^2} e^{-qt}$$

La solution générale $x(t)$ de l'équation différentielle inhomogène est donc

$$x(t) = x_p(t) + x_h(t) = \frac{F_0/m}{\omega_0^2 + q^2} e^{-qt} + C_1 \sin(\omega_0 t - \alpha)$$

Finalement on détermine les valeurs des constantes C_1 et α en fonction des conditions initiales, qui sont $x(0) = 0$ et $\dot{x}(0) = 0$. Ceci donne

$$\begin{cases} x(0) = 0 = \frac{F_0/m}{\omega_0^2 + q^2} + C_1 \sin(-\alpha) & \Leftrightarrow \quad C_1 = -\frac{F_0/m}{\omega_0^2 + q^2} \frac{1}{\sin(-\alpha)} = \frac{F_0/m}{\omega_0^2 + q^2} \frac{1}{\sin \alpha} \\ \dot{x}(0) = 0 = -q \frac{F_0/m}{\omega_0^2 + q^2} + C_1 \omega_0 \cos(-\alpha) = -q \frac{F_0/m}{\omega_0^2 + q^2} + C_1 \omega_0 \cos \alpha \end{cases}$$

D'où en substituant la valeur de C_1 dans la seconde équation

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\omega_0}{q} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \arctan \left(\frac{\omega_0}{q} \right)$$

Et ainsi

$$x(t) = \frac{F_0/m}{\omega_0^2 + q^2} \left(e^{-qt} + \frac{\sin(\omega_0 t - \alpha)}{\sin \alpha} \right)$$

Mécanique générale

Énoncé des exercices**Problème 1 :**

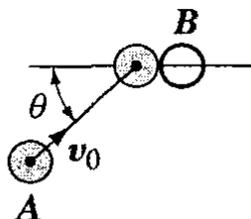
On admet que le potentiel entre deux nucléons est décrit par le potentiel de Yukawa

$$U(r) = -U_0 \frac{r_0}{r} e^{-\frac{r}{r_0}} \quad \text{avec} \quad r_0 \approx 1.5 \text{ fm}$$

Donner une analyse qualitative du mouvement de deux nucléons identiques pour différentes conditions initiales. Calculer la période du mouvement tel que $r = |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|$ soit constant et, dans ce cas, calculer l'énergie qu'il faut fournir pour séparer les deux nucléons.

Problème 2 :

Une boule de billard ayant une vitesse initiale \mathbf{v}_0 et roulant sans glisser sur la table frappe une boule identique, immobile, selon un angle θ . On suppose que le choc est parfaitement élastique et qu'il n'y a pas de frottement entre les boules (voir figure). Calculer la vitesse et la vitesse angulaire de chacune des boules immédiatement après le choc. Décrire les trajectoires des boules. Trouver l'évolution temporelle de la boule B.

**Problème 3 :**

On veut placer un satellite sur une orbite géostationnaire. Pour ce faire, on dispose de moteurs permettant une vitesse d'éjection $v_r = 2.8 \text{ km/s}$. On admet qu'il n'est pas possible d'avoir un rapport de masse m_i/m_f supérieur à 10. Quel est le nombre minimal d'étages nécessaires ?

Deux options sont possibles :

1. Solution simple et facile, consistant à négliger la gravité et à admettre le rapport de 10 comme toujours valable, quel que soit l'étage.
2. Tenter une solution avec une fusée à 3 étages, dont chacun est 3 fois plus massif que le suivant, mais où chaque étage a une masse initiale 10 fois plus grande que sa masse finale (indépendamment du reste de la fusée). Ici, on tiendra compte de la gravité, mais en négligeant sa variation sur le parcours propulsé (i.e. moteurs enclanchés) de la fusée, parcours qui sera considéré comme de longueur négligeable devant l'altitude à atteindre. Adopter un temps de combustion identique pour chaque étage : $t_{prop} = 120 \text{ s}$

Dans les deux cas, on supposera une trajectoire rectiligne et verticale.

Mécanique générale

Corrigé des exercices**Problème 1 :**

C'est un problème à deux corps. On sait dans ce cas, que le centre de gravité a un mouvement rectiligne et uniforme, si bien qu'on peut se contenter d'étudier le mouvement relatif. Il s'agit donc d'étudier le mouvement relatif d'une particule de masse réduite

$$\mu = \frac{m_N^2}{2m_N}$$

soumise à la force centrale

$$F(r) = -\frac{dU}{dr}$$

Constantes du mouvement relatif :

– Moment cinétique :

$$L_1 = \mu r^2 \dot{\theta} \quad \Rightarrow \quad L_1 = \frac{1}{2} m_N r^2 \dot{\theta}$$

– Énergie relative :

$$\begin{aligned} E_{\text{rel}} &= \frac{1}{2} \mu (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + U(r) \\ &= \frac{1}{4} m_N \dot{r}^2 + U_{\text{eff}} \end{aligned}$$

$$\text{avec } U_{\text{eff}}(r) = U(r) + \frac{1}{2} m_N r^2 \dot{\theta}^2 = U(r) + \frac{L_1^2}{m_N r^2}$$

$$\Rightarrow E_{\text{rel}} = \frac{1}{4} m_N \dot{r}^2 - U_0 \frac{r_0}{r} e^{-\frac{r}{r_0}} + \frac{L_1^2}{m_N r^2}$$

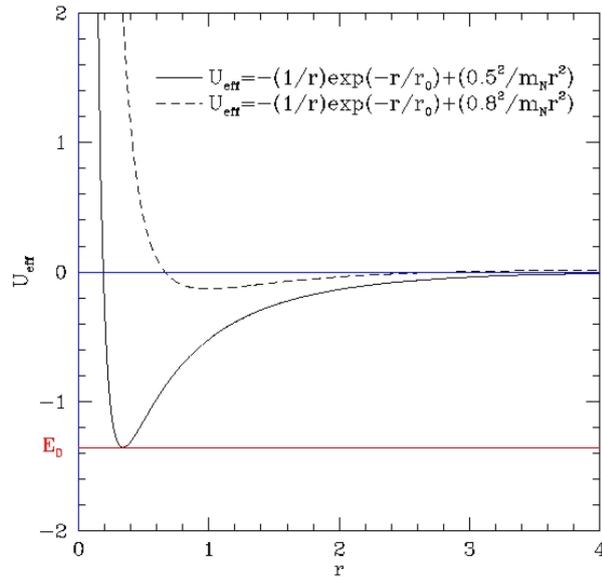
Analyse qualitative :

- Si $L_1 = 0$, $\dot{\theta} = 0$ et le mouvement est rectiligne uniforme.
- Si $L_1 \neq 0$, le signe de $\dot{\theta}$ est constant : la particule 2 tourne toujours dans le même sens autour de la particule 1.
- On a toujours

$$\frac{1}{4} m_N \dot{r}^2 = E_{\text{rel}} - U_{\text{eff}}(r) = E_{\text{rel}} + U_0 \frac{r_0}{r} e^{-\frac{r}{r_0}} - \frac{L_1^2}{m_N r^2} \geq 0$$

- Si $E_{\text{rel}} = E_0$ (voir figure), donc si l'on est au minimum du potentiel effectif, $r = \bar{r}$ est un point d'équilibre stable, correspondant à un mouvement circulaire uniforme de rayon $r = \bar{r}$. Comme

$$L_1 = \frac{1}{2} m_N r^2 \dot{\theta} = \frac{1}{2} m_N \bar{r}^2 \bar{\omega}$$



on a

$$\bar{\omega} = \frac{2L_1}{m_N \bar{r}^2} \quad \Rightarrow \quad \bar{\omega}^2 = \frac{4L_1^2}{m_N^2 \bar{r}^4}$$

Fréquence du mouvement circulaire : Pour chercher l'expression de la fréquence, on utilise le fait que l'on se trouve au minimum du potentiel effectif. $r = \bar{r} \Leftrightarrow \dot{r} = 0$ et \bar{r} est tel que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} U_{\text{eff}}(r) = 0 &\Rightarrow U_0 \frac{r_0 + \bar{r}}{\bar{r}^2} e^{-\frac{\bar{r}}{r_0}} - \frac{2L_1^2}{m_N \bar{r}^3} = 0 \\ \Rightarrow \frac{2L_1^2}{m_N \bar{r}^4} &= U_0 \frac{r_0 + \bar{r}}{\bar{r}^3} e^{-\frac{\bar{r}}{r_0}} \\ \Rightarrow \bar{\omega}^2 \frac{m_N}{2} &= U_0 \frac{r_0 + \bar{r}}{\bar{r}^3} e^{-\frac{\bar{r}}{r_0}} \\ \Rightarrow \bar{\omega}^2 &= \frac{2U_0}{m_N} \frac{r_0 + \bar{r}}{\bar{r}^3} e^{-\frac{\bar{r}}{r_0}} \quad \text{et} \quad T = \frac{2\pi}{\bar{\omega}} \end{aligned}$$

Énergie nécessaire pour séparer les nucléons : (pour simplifier, on écrira désormais $r \equiv \bar{r}$ et $\omega \equiv \bar{\omega}$).

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}W^{\text{ext}} &= - \int_r^\infty F(r') dr' = + \int_r^\infty \frac{d}{dr'} U_{\text{eff}}(r') dr' = U_{\text{eff}}(r') \Big|_r^\infty = U_{\text{eff}}(\infty) - U_{\text{eff}}(r) \\ &= U_0 \frac{r_0}{r} e^{-\frac{r}{r_0}} - \frac{L_1^2}{m_N r^2} = U_0 \frac{r_0}{r} e^{-\frac{r}{r_0}} - \frac{\omega^2}{4} m_N r^2 \end{aligned}$$

Mais $\omega^2 = \frac{2U_0}{m_N} \frac{r_0 + r}{r^3} e^{-\frac{r}{r_0}}$, donc

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}W^{\text{ext}} &= U_0 e^{-\frac{r}{r_0}} \left(\frac{r_0}{r} - \frac{m_N r^2}{4} \frac{2}{m_N} \frac{r_0 + r}{r^3} \right) \\ &= U_0 e^{-\frac{r}{r_0}} \left(\frac{r_0}{r} - \frac{1}{2} \frac{r_0 + r}{r} \right) = U_0 e^{-\frac{r}{r_0}} \left(\frac{2r_0 - r_0 - r}{2r} \right) \\ \bar{\Delta}W^{\text{ext}} &= \frac{1}{2} \left(\frac{r_0 - r}{r} \right) U_0 e^{-\frac{r}{r_0}} \end{aligned}$$

Problème 2 :

Soient C_A et C_B les positions des centres des boules à l'instant du choc. Définissons alors le vecteur $\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{C}_A \mathbf{C}_B}{|\mathbf{C}_A \mathbf{C}_B|}$ dans la direction de la ligne d'impact. Et soit \mathbf{e}_2 normal à \mathbf{e}_1 dans le plan des trajectoires des boules. Avec ces définitions, on a avant le choc $\mathbf{v}'_A = v_0 \cos \theta \mathbf{e}_1 + v_0 \sin \theta \mathbf{e}_2$ et $\mathbf{v}'_B = 0$. Lors du choc, la boule A exerce une percussion (apparition d'une force extrêmement forte pendant un intervalle de temps très court) $\mathbf{\Pi}^{A \rightarrow B}$ sur la boule B et réciproquement, avec $\mathbf{\Pi}^{A \rightarrow B} = -\mathbf{\Pi}^{B \rightarrow A}$. Dans le cas considéré, il n'y a pas de percussions extérieures, ainsi $\mathbf{\Pi}^{(r)} = 0$. Les équations des chocs (19.10 et 19.11, page 577) donnent

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{p} &= \mathbf{\Pi} + \mathbf{\Pi}^{(r)} \\ \Delta \mathbf{L}_O &= \mathbf{OP} \wedge \mathbf{\Pi} \end{cases}$$

où P est le point de contact des deux boules au moment de la collision. Et O est un point de référence. De la première équation ci-dessus, on décrit le changement de la quantité de mouvement des deux boules

$$\Delta \mathbf{p}_A = \mathbf{\Pi}^{B \rightarrow A} \quad ; \quad \Delta \mathbf{p}_B = \mathbf{\Pi}^{A \rightarrow B} = -\mathbf{\Pi}^{B \rightarrow A} = -\Delta \mathbf{p}_A$$

On en déduit que la quantité de mouvement est conservée, en effet

$$\begin{aligned} \mathbf{\Pi}^{B \rightarrow A} = \Delta \mathbf{p}_A &= m(\mathbf{v}''_A - \mathbf{v}'_A) = -m(\mathbf{v}''_B - \mathbf{v}'_B) = -\Delta \mathbf{p}_B = -\mathbf{\Pi}^{A \rightarrow B} \\ \Rightarrow m(\mathbf{v}''_A + \mathbf{v}''_B) &= m(\mathbf{v}'_A + \mathbf{v}'_B) = mv_0 \cos \theta \mathbf{e}_1 + mv_0 \sin \theta \mathbf{e}_2 \end{aligned}$$

où \mathbf{v}''_A et \mathbf{v}''_B sont les vitesses immédiatement après le choc des boules A et B respectivement. On en déduit

$$\mathbf{v}''_A = -\mathbf{v}''_B + v_0 \cos \theta \mathbf{e}_1 + v_0 \sin \theta \mathbf{e}_2 \quad (1)$$

Comme les boules sont impénétrables, on doit également avoir

$$\mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{v}''_B - \mathbf{v}''_A) = -\mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{v}'_B - \mathbf{v}'_A) = v_0 \cos \theta \quad (2)$$

Des deux équations (1) et (2), on obtient

$$\mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{v}''_B + \mathbf{v}''_B - v_0 \cos \theta \mathbf{e}_1 - v_0 \sin \theta \mathbf{e}_2) = v_0 \cos \theta \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}''_B \cdot \mathbf{e}_1 = v_0 \cos \theta$$

L'équation (1) implique alors $\mathbf{v}''_A \cdot \mathbf{e}_1 = 0$.

Avant le choc, la boule A roule sans glisser, c'est-à-dire que son axe de rotation est perpendiculaire à sa vitesse, et vérifie simplement $\mathbf{v}'_A = \boldsymbol{\omega}'_A \wedge R \mathbf{e}_3$, où R est le rayon de la boule et \mathbf{e}_3 est vertical. Avant le choc, les vitesses angulaires valent donc

$$\boldsymbol{\omega}'_A = -\frac{v_0}{R} \sin \theta \mathbf{e}_1 + \frac{v_0}{R} \cos \theta \mathbf{e}_2 \quad ; \quad \boldsymbol{\omega}'_B = 0$$

Comme on suppose qu'il n'y a pas de frottement entre les deux boules, on a $\boldsymbol{\omega}''_A = \boldsymbol{\omega}'_A$ et $\boldsymbol{\omega}''_B = \boldsymbol{\omega}'_B$. De la deuxième équation des chocs, on a

$$\Delta \mathbf{L}_{O,A} = \mathbf{OP} \wedge \mathbf{\Pi}^{B \rightarrow A} \quad ; \quad \Delta \mathbf{L}_{O,B} = \mathbf{OP} \wedge \mathbf{\Pi}^{A \rightarrow B} = -\Delta \mathbf{L}_{O,A}$$

Ceci n'est autre que la conservation du moment cinétique. En outre, on sait que $\mathbf{\Pi}^{A \rightarrow B} = m(\mathbf{v}''_B - \mathbf{v}'_B)$, d'où

$$\Delta \mathbf{L}_{O,B} = \mathbf{OP} \wedge m(\mathbf{v}''_B - \mathbf{v}'_B)$$

Le point de référence O pouvant être choisi arbitrairement, choisissons le de manière à ce qu'il coïncide avec le centre de la boule B au moment de la collision. Ainsi $\mathbf{OP} = -R\mathbf{e}_1$ et donc

$$\Delta\mathbf{L}_{O,B} = I(\boldsymbol{\omega}''_B - \boldsymbol{\omega}'_B) = 0 = \mathbf{OP} \wedge (\mathbf{v}''_B - \mathbf{v}'_B) = -R\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{v}''_B$$

Ceci implique que \mathbf{v}''_B est colinéaire à \mathbf{e}_1 et donc que $(\mathbf{v}''_B \cdot \mathbf{e}_2) = 0$. Finalement on obtient

$$\begin{aligned} \mathbf{v}''_B &= v_0 \cos \theta \mathbf{e}_1 & ; & & \boldsymbol{\omega}''_B &= \boldsymbol{\omega}'_B = 0 \\ \mathbf{v}''_A &= v_0 \sin \theta \mathbf{e}_2 & ; & & \boldsymbol{\omega}''_A &= \boldsymbol{\omega}'_A = -\frac{v_0}{R} \sin \theta \mathbf{e}_1 + \frac{v_0}{R} \cos \theta \mathbf{e}_2 \end{aligned}$$

Remarquer que les vitesses finales sont perpendiculaires, et que puisque le choc est élastique, l'énergie cinétique est conservée.

La boule B n'a pas de vitesse angulaire juste après la collision, ainsi elle commence par glisser et son mouvement restera en tout temps colinéaire à \mathbf{e}_1 . Les frottements entre la boule et le sol ralentiront la boule et la mettront en rotation, jusqu'à ce que la boule roule sans glisser.

Soit P le point de contact de la boule B avec le sol et soit G_B le centre de masse de la boule B . Les forces extérieures sur la boule sont $\mathbf{N} + m\mathbf{g} = 0$ et la force de frottement donnée par $\mathbf{F}^{fr} = -\mu_c m\mathbf{g} \mathbf{e}_1 = m\dot{\mathbf{v}}_{G_B}$. Le moment de force qu'exercent les frottements sur la boule induit un changement de son moment cinétique

$$\frac{d}{dt}\mathbf{L}_B(t) = \mathbf{G}_B\mathbf{P} \wedge \mathbf{F}_{fr} = R\mu_c m\mathbf{g} \mathbf{e}_2 \quad \text{où} \quad \mathbf{L}_B = I\boldsymbol{\omega}_B(t) = \frac{2}{5}mR^2\boldsymbol{\omega}_B(t)$$

puisque le moment d'inertie d'une boule est $I = \frac{2}{5}mR^2$. D'où

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_B(t) = \frac{5}{2R}\mu_c g \mathbf{e}_2 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\omega}_B(t) = \frac{5}{2R}\mu_c g t \mathbf{e}_2$$

La vitesse du point P est donnée par $\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_{G_B} + \boldsymbol{\omega}_B \wedge \mathbf{G}_B\mathbf{P}$, ce qui permet d'écrire

$$\dot{\mathbf{v}}_P = \dot{\mathbf{v}}_{G_B} + \dot{\boldsymbol{\omega}}_B(t) \wedge \mathbf{G}_B\mathbf{P} = -\frac{7}{2}\mu_c g \mathbf{e}_1 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}_P(t) = \mathbf{e}_1 \left(v_0 \cos \theta - \frac{7}{2}\mu_c g t \right)$$

puisque on sait que $\mathbf{v}_P(0) = \mathbf{v}''_B$. A cause des frottements, la vitesse du point de contact de la boule avec le sol va ensuite décroître jusqu'à atteindre zéro au temps \bar{t} tel que

$$\mathbf{v}_P(\bar{t}) = \mathbf{e}_1 \left(v_0 \cos \theta - \frac{7}{2}\mu_c g \bar{t} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{t} = \frac{2v_0 \cos \theta}{7\mu_c g}$$

Comme $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_{G_B} = \mathbf{v}_P - \boldsymbol{\omega}_B \wedge \mathbf{G}_B\mathbf{P}$ on obtient l'évolution temporelle de la boule B pour $t \leq \bar{t}$

$$\mathbf{v}_B(t) = \mathbf{e}_1 \left(v_0 \cos \theta - \frac{7}{2}\mu_c g t + \frac{5}{2}\mu_c g t \right) = \mathbf{e}_1 (v_0 \cos \theta - \mu_c g t)$$

Ensuite, la boule B roule sans glisser, il n'y a donc plus de frottements, et la boule se déplace à la vitesse constante

$$\mathbf{v}_B(t) = \mathbf{e}_1 \frac{5}{7}v_0 \cos \theta \quad ; \quad \boldsymbol{\omega}_B(t) = \frac{5}{7R}v_0 \cos \theta \mathbf{e}_2$$

pour tout $t \geq \bar{t}$.

Problème 3 :

Cherchons d'abord quel rayon R possède l'orbite géostationnaire, qui est circulaire. La période orbitale T est 24 heures = 86400 secondes, et elle s'écrit par ailleurs

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{R^3}{GM}}$$

où $G = 6.673 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ est la constante de la gravitation et $M_T \sim 5.98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ la masse de la Terre. On en tire le rayon de l'orbite géostationnaire

$$R = \left(\frac{G}{4\pi^2} M_T T^2 \right)^{1/3} = 4.225 \cdot 10^7 \text{ m} = 42250 \text{ km}$$

Par conséquent, l'altitude à atteindre vaut $h = 4.225 \cdot 10^7 - 6.37 \cdot 10^6 = 3.59 \cdot 10^6 \text{ m} = 35900 \text{ km}$.

Cherchons ensuite quelle vitesse la fusée doit acquérir pour pouvoir atteindre, en vol balistique (c'est-à-dire une fois les moteurs éteints et les étages inférieurs largués), l'altitude de l'orbite géostationnaire.

Supposons que la fusée parte verticalement et atteigne rapidement une vitesse suffisante pour que, une fois les moteurs arrêtés, elle atteigne l'altitude h avec une vitesse nulle. Les moteurs chimiques donnant une très forte poussée sur des temps brefs, on admet que la vitesse maximale est atteinte peu après la sortie de l'atmosphère, à une altitude de quelques centaines de kilomètres tout au plus. Ainsi, on peut admettre que l'accélération de la pesanteur g reste presque constante, si bien qu'on néglige sa variation pendant la phase de propulsion de la fusée. Cette phase correspondant à un trajet très court, nous négligeons également celui-ci devant l'altitude h . Appliquons alors la conservation de l'énergie pour trouver la vitesse v que doit acquérir la fusée¹ :

$$\text{En général, } E = T + U = \frac{1}{2} m v^2 - G \frac{M_T m}{r}$$

$$\text{Ici, } E_{initial} = \frac{1}{2} m v^2 - G \frac{M_T m}{R_T}$$

$$E_{final} = 0 - G \frac{M_T m}{R} \quad \text{mais} \quad E_{initial} = E_{final}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m v^2 = G \frac{M_T m}{R_T} - G \frac{M_T m}{R}$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{2 G M_T \left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{R} \right)} = 1.03 \cdot 10^4 \text{ m/s} = 10.3 \text{ km/s}$$

où m est la masse du dernier étage de la fusée vidé de son carburant et de son comburant. En partant de l'équation du mouvement d'un système S' ouvert (formule 20.3 p. 591),

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \sum_{\alpha} \mathbf{F}_{\alpha}^{ext \rightarrow S'} + \mathbf{v}_r \frac{dm}{dt}$$

¹Remarquons que v est une vitesse "finale" quant à la phase propulsée de la fusée, mais une vitesse "initiale" quant au vol balistique depuis l'arrêt des moteurs jusqu'à l'altitude h de l'orbite géostationnaire.

on a pour notre cas particulier :

$$m \frac{dv}{dt} = -mg - v_r \frac{dm}{dt}$$

$$\Rightarrow v(t) - v_i = -gt + v_r \ln \left(\frac{m_i}{m(t)} \right)$$

1. **Solution simple et facile** : On néglige la gravité et l'on admet que pour chaque étage, le rapport de la masse initiale totale à la masse finale totale est toujours de 10 (ce qui suppose que l'étage $n + 1$ est beaucoup plus léger que l'étage n !), les termes "initiale" et "finale" se référant à l'allumage et à l'épuisement d'un étage donné. Dans ce cas la vitesse finale de l'étage n devient la vitesse initiale de l'étage $n + 1$. On a alors l'équation :

$$v_f = n v_r \ln \left(\frac{m_i}{m_f} \right) = n 2.8 \ln(10) = 6.45 \cdot n \Rightarrow n \geq 2$$

2. **Tentative difficile mais réaliste** : Supposons, cette fois-ci, que le facteur 10 entre masse initiale et masse finale s'applique non à la fusée tout entière, mais à chaque étage individuellement. Supposons aussi que la vitesse d'éjection des tuyères est la même pour tous les étages, ainsi que la durée de propulsion t_{prop} . Enfin, on tient compte de la gravité, mais en négligeant sa variation.

Adoptons comme exemple une fusée à trois étages, dont chacun serait 3 fois plus massif que le suivant. En unités de masse m_3 du troisième étage, on aurait alors $m_1 = 9$, $m_2 = 3$ et $m_3 = 1$, les indices numérotant l'étage. Soit m_{i1} et m_{f1} sont respectivement la masse *totale* de la fusée à l'allumage du premier étage et à son extinction, m_{i2} la masse totale de la fusée après largage du premier étage et allumage du second, et m_{f2} la masse totale de la fusée à l'extinction du deuxième étage (juste avant son largage). On aura alors, toujours en unités de masse m_3 , et en se souvenant qu'un étage vide est toujours 10 fois moins massif que lorsqu'il est plein :

$$m_{i1} = 13 \ ; \ m_{f1} = 4.9$$

$$m_{i2} = 4 \ ; \ m_{f2} = 1.3$$

$$m_{i3} = 1 \ ; \ m_{f3} = 0.1$$

Les vitesses finales relatives à chaque étage s'écrivent alors

$$v_{f1} = 0 - g t_{prop} + v_r \ln \frac{m_{i1}}{m_{f1}}$$

$$v_{f2} = v_{f1} - g t_{prop} + v_r \ln \frac{m_{i2}}{m_{f2}}$$

$$v_{f3} = v_{f2} - g t_{prop} + v_r \ln \frac{m_{i3}}{m_{f3}}$$

$$= -3 g t_{prop} + v_r \ln \frac{m_{i1} m_{i2} m_{i3}}{m_{f1} m_{f2} m_{f3}}$$

Si $t_{prop} = 120$ s seulement, on aura numériquement :

$$-3.532 + 2.8 \ln \frac{13 \cdot 4 \cdot 1}{4.9 \cdot 1.3 \cdot 0.1} = -3.532 + 12.32 = 8.79 \text{ km/s}$$

Autrement dit, en se déplaçant verticalement, une fusée réaliste, même à trois étages ne parvient pas à l'altitude géosynchrone. Un déplacement plus "arrondi" serait moins coûteux !

25.05.2007

Mécanique générale

Énoncé des problèmes

Problème 1 :

Un cylindre homogène en acier de rayon $R = 1$ cm est posé sur un plan en acier faisant un angle θ avec l'horizontale. L'axe du cylindre est perpendiculaire à la direction de la pente. On demande pour quels angles θ :

1. le cylindre reste immobile ;
2. le cylindre roule sans glisser ;

Pour un frottement acier sur acier, on a les paramètres suivants :

$$\delta_s = \delta_c = 0.05 \text{ mm} \quad ; \quad \mu_c = 0.42 \quad ; \quad \mu_s = 0.78$$

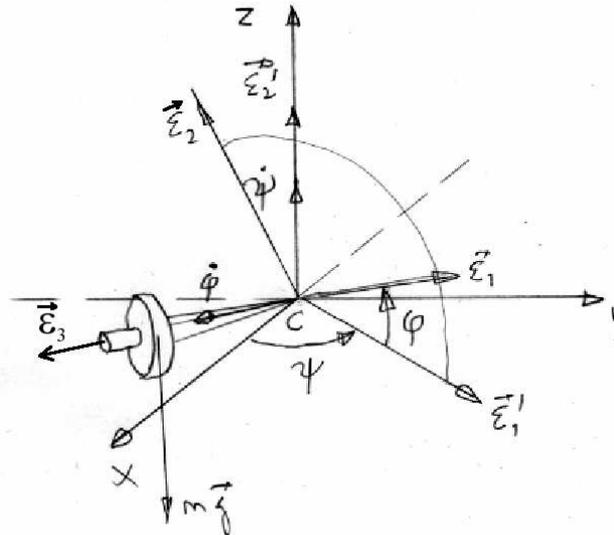
Problème 2 :

Une moto de police de 300 kg poursuit un chauffard en direction Nord-Sud sur l'auto-route du Soleil (latitude 45°) à la vitesse de 230 km/h. Calculer la force de Coriolis et l'inclinaison de la moto que cela implique.

TOURNER SVP

Problème 3 :

On considère une toupie symétrique soumise à son propre poids $m\mathbf{g}$ et dont l'axe est fixé au point C mais peut pivoter librement et sans frottement. L'axe de la toupie fait un angle $\theta = 90^\circ$ avec la verticale. La distance entre le point C et le centre de masse G de la toupie vaut ℓ . La figure montre la situation avec les repères pertinents, ainsi que les angles d'Euler φ , ψ et θ . Noter que la toupie ne touche pas le sol.



1. Recenser le nombre de degrés de liberté du système et trouver, à partir du théorème du moment cinétique et de la conservation de l'énergie mécanique, un nombre équivalent de constantes du mouvement.
2. Écrire les équations du mouvement qui découlent de ces constantes, après avoir exprimé ces dernières en fonction des angles d'Euler.
3. Donner les fréquences de précession $\Omega = \dot{\psi}$ en fonction de la fréquence de rotation propre ω_p de la toupie.

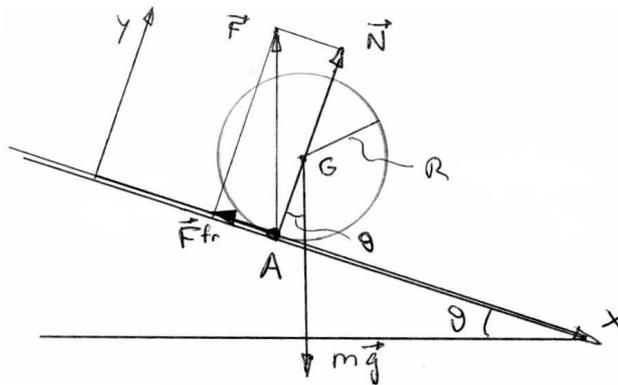
25.05.2007

Mécanique générale

Corrigé des problèmes

Problème 1 :

La situation est décrite sur la figure ci-dessous. On place un référentiel $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ avec l'axe Ox sur la pente.



1. Le cylindre reste immobile, si bien que

$$\begin{aligned}
 m \mathbf{a}_G &= 0 = \mathbf{F}^{fr} + \mathbf{N} + m \mathbf{g} \\
 \Rightarrow N &= m g \cos \theta \\
 F^{fr} &= -m g \sin \theta \\
 \frac{d}{dt} \mathbf{L}_A &= 0 = \mathbf{AG} \wedge m \mathbf{g} + \mathbf{M}_A \\
 \Rightarrow \mathbf{M}_A &= -\mathbf{AG} \wedge m \mathbf{g} = R m g \sin \theta \mathbf{e}_3
 \end{aligned}$$

De plus, on a la condition de résistance au roulement

$$|\mathbf{M}_A| \leq \delta_s |\mathbf{N}| = \delta_s m g \cos \theta$$

d'où

$$\tan \theta \leq \frac{\delta_s}{R} = \frac{0.05}{10} = 0.005 \Rightarrow \theta \leq 0.286^\circ$$

2. Utilisons les équations du mouvement

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \sum \mathbf{F}^{ext} \quad \text{et} \quad \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum \mathbf{M}^{ext}$$

La première est décomposée selon les axes x et y , la seconde ne donne lieu qu'à une composante selon z :

$$\frac{d}{dt}(m v) = F^{fr} + m g \sin \theta \quad (1)$$

$$0 = N - m g \cos \theta \quad (2)$$

$$\left(\frac{d\mathbf{L}_G}{dt}\right)_z = -\frac{d}{dt}(I\omega) = -R F^{fr} \quad (3)$$

avec pour le cylindre

$$I = \frac{1}{2} m R^2$$

La première et la troisième équations permettent d'éliminer la force de frottement. En multipliant (1) par R et en se souvenant que la vitesse v_G du centre de gravité du cylindre peut s'écrire

$$v_G = (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{R})_x = -\omega R$$

on a en introduisant (3) dans (1) :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(m R v_G) &= R F^{fr} + m R g \sin \theta \\ &= -\frac{1}{2} m R \dot{v}_G + m R g \sin \theta \\ \Rightarrow \frac{3}{2} \frac{d}{dt} v_G &= g \sin \theta \\ \Rightarrow v_G &= \frac{2}{3} g \sin \theta \cdot t \end{aligned}$$

car la condition initiale est $v_G = 0$ au temps $t = 0$.

L'équation (3) nous donne alors la force de frottement :

$$F^{fr} = -\frac{1}{2} m \frac{2}{3} g \sin \theta = -\frac{1}{3} m g \sin \theta$$

Pour qu'il y ait roulement sans glissement, il faut que

$$|F^{fr}| \leq \mu_s |N|$$

Or l'équation (2) nous donne la valeur de N , si bien que

$$|F^{fr}| = \frac{1}{3} m g \sin \theta \leq \mu_s m g \cos \theta \quad \Rightarrow \quad \tan \theta \leq 3 \mu_s$$

et l'angle doit donc être

$$\theta \leq 66.9^\circ$$

Cependant, selon les conditions initiales, on peut avoir roulement avec glissement pour des angles θ inférieurs à cette valeur.

Première solution : cas général, $\theta = \pi/2$ introduit à la fin

1. A priori, il y a trois degrés de liberté, qui correspondent aux trois angles d'Euler. Si I_1 , I_2 et I_3 sont les composantes du moment d'inertie \mathbf{I}_C de la toupie selon les axes $C\boldsymbol{\varepsilon}_1\boldsymbol{\varepsilon}_2\boldsymbol{\varepsilon}_3$, on a par symétrie $I_1 = I_2$. Par le théorème du moment cinétique exprimé sous la forme des équations d'Euler (formules 14.107, p. 461 du livre de Gruber & Benoit), on voit que

$$I_3 \dot{\omega}_3 - \underbrace{(I_1 - I_2)}_0 \omega_1 \omega_2 = M_{C,3}^{ext} = 0$$

En effet, le moment des forces extérieures $\mathbf{M}^{ext} = \mathbf{CG} \wedge m\mathbf{g} = \ell m g \sin \theta \boldsymbol{\varepsilon}'_1 \perp \boldsymbol{\varepsilon}_3$, donc ce moment n'a pas de composante selon $\boldsymbol{\varepsilon}_3$. De plus,

$$\frac{d}{dt}(I_3 \omega_3) = 0 \Rightarrow \mathbf{L}_C \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_3 = L_3 = I_3 \omega_3 = \text{constante}$$

En exprimant le théorème du moment cinétique dans le référentiel du laboratoire, on a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathbf{L}_C = \mathbf{CG} \wedge m\mathbf{g} \quad \text{et} \quad (\mathbf{CG} \wedge m\mathbf{g}) \cdot \mathbf{e}_3 = 0 &\Rightarrow \left(\frac{d}{dt}\mathbf{L}_C\right) \cdot \mathbf{e}_3 = \frac{d}{dt}(\mathbf{L}_C \cdot \mathbf{e}_3) = 0 \\ &\Rightarrow L_z = \mathbf{L}_C \cdot \mathbf{e}_3 = \text{constante} \end{aligned}$$

La conservation de l'énergie mécanique nous fournit une troisième constante du mouvement :

$$\frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{I}_C \boldsymbol{\omega}) + m g \ell \cos \theta = E = \text{constante} \quad \text{avec} \quad \ell = |\mathbf{CG}|$$

2. Écrivons d'abord la vitesse de rotation totale :

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi} \boldsymbol{\varepsilon}_3 + \dot{\psi} \mathbf{e}_3 + \dot{\theta} \boldsymbol{\varepsilon}'_1$$

Or, on a les transformations suivantes dans le repère $C\boldsymbol{\varepsilon}_1\boldsymbol{\varepsilon}_2\boldsymbol{\varepsilon}_3$:

$$\mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\varepsilon}'_1 = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ -\sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathbf{L}_C = \mathbf{I}_C \boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi \\ \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi \\ \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1 (\dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi) \\ I_2 (\dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi) \\ I_3 (\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta) \end{pmatrix}$$

Les trois constantes du mouvement donnent alors successivement :

$$L_3 = \mathbf{L}_C \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_3 = I_3 (\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta) \tag{4}$$

$$L_z = \mathbf{L}_C \cdot \mathbf{e}_3 \tag{5}$$

$$\begin{aligned} &= (I_1 (\dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi) \quad I_2 (\dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi) \quad I_3 (\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta)) \\ &\quad \cdot \begin{pmatrix} \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= I_1 (\dot{\psi} \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + \dot{\theta} \sin \theta \sin \varphi \cos \varphi) + I_2 (\dot{\psi} \sin^2 \theta \cos^2 \varphi - \dot{\theta} \sin \theta \cos \varphi \sin \varphi) \\ &\quad + I_3 (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi} \cos^2 \theta) \end{aligned}$$

$$= I_1 \dot{\psi} \sin^2 \theta + I_3 (\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta) \cos \theta \tag{6}$$

où $I_1 = I_2 = I_{G,1} + m\ell^2$.

$$\begin{aligned}
E_{cin} &= \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{I}_C \boldsymbol{\omega}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{L}_C \\
&= \frac{1}{2} I_1 \left[(\dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi)^2 + (\dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi)^2 \right] \\
&\quad + \frac{1}{2} I_3 (\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta)^2 \\
&= \frac{1}{2} I_1 \left[\underbrace{\dot{\psi}^2 \sin^2 \theta (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi)}_1 + \underbrace{\dot{\theta}^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)}_1 \right. \\
&\quad \left. + 2 \dot{\psi} \dot{\theta} \underbrace{(\sin \theta \sin \varphi \cos \varphi - \sin \theta \cos \varphi \sin \varphi)}_0 \right] \\
&\quad + \frac{1}{2} I_3 (\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta)^2
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{2} I_1 (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2} I_3 (\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta)^2 + m g \ell \cos \theta$$

$$\dot{\psi} = \frac{L_z - L_3 \cos \theta}{I_1 \sin^2 \theta} \quad (7)$$

$$\dot{\varphi} = \frac{L_3}{I_3} - \cos \theta \frac{L_z - L_3 \cos \theta}{I_1 \sin^2 \theta} \quad (8)$$

$$E = \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}^2 + U_{\text{eff}}(\theta) \quad (9)$$

$$\text{avec } U_{\text{eff}}(\theta) = \frac{1}{2} \frac{L_3^2}{I_3} + m g \ell \cos \theta + \frac{1}{2} \frac{(L_z - L_3 \cos \theta)^2}{I_1 \sin^2 \theta} \quad (10)$$

3. Il faut se placer au point d'équilibre donné par la dérivée du potentiel effectif :

$$\left. \frac{dU_{\text{eff}}}{d\theta} \right)_{\theta=\bar{\theta}} = 0 = -m g \ell \sin \bar{\theta} + \frac{L_z - L_3 \cos \bar{\theta}}{I_1 \sin^2 \bar{\theta}} L_3 \sin \bar{\theta} - \frac{(L_z - L_3 \cos \bar{\theta})^2}{I_1 \sin^3 \bar{\theta}} \cos \bar{\theta}$$

$$\text{équ. (7)} \rightarrow \Omega = \frac{L_z - L_3 \cos \bar{\theta}}{I_1 \sin^2 \bar{\theta}}$$

Par conséquent, l'annulation de la dérivée de U_{eff} implique :

$$\begin{aligned}
m g \ell \sin \bar{\theta} - \Omega L_3 \sin \bar{\theta} + \Omega^2 I_1 \sin \bar{\theta} \cos \bar{\theta} &= 0 \\
[m g \ell - \Omega L_3 + \Omega^2 I_1 \cos \bar{\theta}] \sin \bar{\theta} &= 0 \\
[m g \ell - \Omega I_3 (\omega_p + \Omega \cos \bar{\theta}) + \Omega^2 I_1 \cos \bar{\theta}] \sin \bar{\theta} &= 0
\end{aligned}$$

On voit que, pour $\bar{\theta} = \pi/2$, la dernière équation implique

$$\Omega = \frac{m g \ell}{I_3 \omega_p}$$

Seconde solution : on pose $\theta = \pi/2$ dès le début

On part de l'équation d'Euler dans le référentiel $C\mathbf{e}'_1\mathbf{e}'_2\mathbf{e}_3$:

$$I_1 \dot{\omega}_1 - (I_2 - I_3) \omega_2 \omega_3 = \mathbf{M}_{C,1}^{ext} = m g \ell$$

Le vecteur vitesse angulaire s'écrit

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\psi} \mathbf{e}'_2 + \dot{\varphi} \mathbf{e}_3 \Rightarrow \dot{\boldsymbol{\omega}} = \underbrace{\ddot{\psi}}_0 \mathbf{e}'_2 + \dot{\psi} \underbrace{\dot{\mathbf{e}}'_2}_0 + \underbrace{\ddot{\varphi}}_0 \mathbf{e}_3 + \dot{\varphi} \dot{\mathbf{e}}_3 = \dot{\varphi} \dot{\psi} \mathbf{e}'_2 \wedge \mathbf{e}_3 = \dot{\varphi} \dot{\psi} \mathbf{e}'_1 = \dot{\omega}_1$$

où l'on a utilisé la formule de Poisson et le fait que $\dot{\varphi}$ et $\dot{\psi}$ sont constants, comme on le voit au point 1 de la première solution, en posant $\theta = \pi/2$. Notons que $\dot{\mathbf{e}}'_2 = 0$ puisque la toupie reste dans le plan horizontal. En introduisant la valeur de $\dot{\omega}_1$ dans l'équation d'Euler et en se souvenant que $\dot{\varphi} \equiv \Omega$ et $\dot{\psi} \equiv \omega_p$, on a

$$\begin{aligned} I_1 \omega_p \Omega - (I_2 - I_3) \omega_p \Omega &= m g \ell \\ \omega_p \Omega \underbrace{(I_1 - I_2 + I_3)}_0 &= m g \ell \\ \Rightarrow \Omega &= \frac{m g \ell}{I_3 \omega_p} \end{aligned}$$

Mécanique générale

Énoncé des exercices**Problème 1 :**

Deux avions volant à Mach 2 (= 660 m/s) partent d'un même point à l'équateur, l'un dans la direction Ouest, l'autre dans la direction Est. Il y a une horloge extrêmement précise dans chaque avion, une troisième horloge au sol, au point de départ des avions, et une quatrième horloge au pôle Nord de la Terre, (qui ne partage donc pas le mouvement de rotation propre de celle-ci). Quelles seront les heures indiquées par les quatre horloges lorsque les deux avions se rencontreront à nouveau ?

Indications : Considérer le référentiel géocentrique ; ne tenir compte que des effets liés à la relativité restreinte (il y a d'autres effets liés à la gravitation). On prendra $R_T = 6378.14$ km pour le rayon équatorial de la Terre, 23 heures 56 minutes pour la durée du jour sidéral, et $c = 2.9979 \cdot 10^8$ m/s pour la vitesse de la lumière.

Problème 2 :

Calculer la masse relativiste et la vitesse d'un électron d'énergie 50 MeV. Quelle est l'énergie de l'électron par rapport à un observateur se déplaçant avec une vitesse \mathbf{u} dans le même sens que l'électron ?

Problème 3 :

Un point matériel a un mouvement rectiligne de vitesse $\mathbf{v} = v \mathbf{e}_2$ par rapport à un observateur O . Vérifier que l'angle α entre la vitesse du point et l'axe \mathbf{e}_1 , tel que vu par un observateur O' se déplaçant à vitesse $\mathbf{v}_{O'/O} = u \mathbf{e}_1$, est donné par

$$\tan \alpha = -\frac{v}{u} \sqrt{1 - u^2/c^2}$$

Mécanique générale

Corrigé des exercices**Problème 1 :**

On considère l'horloge située au pôle Nord (le pôle Sud conviendrait aussi) comme référence. L'intervalle de temps Δt mesuré par l'observateur avec cette horloge est lié à l'intervalle de temps $\Delta t'$ mesuré par le navigateur de l'un des avions par la relation 21.35 p. 621

$$\Delta t = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Delta t'$$

Ici, la vitesse v est la vitesse totale de l'avion, c'est-à-dire la vitesse de l'avion par rapport au sol ajoutée à la vitesse de la Terre à l'équateur. On peut se permettre d'additionner simplement les vitesses, dans la mesure où celles-ci sont beaucoup plus petites que la vitesse de la lumière, et donc non relativistes.

Calculons d'abord Δt , qui est égal à la distance parcourue par rapport au sol divisée par la vitesse de l'avion. Comme les deux avions volent à la même vitesse $v = 660 \text{ m/s} = 0.66 \text{ km/s}$, chacun parcourt la même distance durant Δt , et ils se rencontrent donc exactement à l'antipode de leur point de départ. La distance parcourue est une demi-circonférence (équatoriale) terrestre, soit $\pi \cdot 6378.1 = 20037 \text{ km}$. Ainsi,

$$\Delta t = \frac{20037 \text{ km}}{0.66 \text{ km/s}} = 30360 \text{ s}$$

Il s'agit maintenant de calculer $\Delta t'$ en fonction de Δt pour chacune des trois vitesses en question : la vitesse équatoriale v_T , la vitesse de l'avion parti vers l'Est v_E et la vitesse de l'avion parti vers l'Ouest v_O . Comme le jour sidéral comporte 86160 s, on a

$$\begin{aligned} v_T &= \frac{2 \cdot 20037}{86160} = 0.465 \text{ km/s} \\ v_E &= 0.660 + 0.465 = 1.125 \text{ km/s} \\ v_O &= 0.660 - 0.465 = 0.195 \text{ km/s} \end{aligned}$$

Comme $v/c \ll 1$, le facteur $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ est si proche de 1 que les calculettes courantes ne peuvent le distinguer de 1. Pour résoudre ce problème, il faut développer en série la racine carrée (au premier ordre) et trouver l'écart entre le temps de référence et le temps propre :

$$\Delta t' = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Delta t \simeq \left(1 - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}\right) \Delta t = \Delta t - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \Delta t$$

Finalement, les écarts sont

$$\begin{aligned} \Delta t_T &= \Delta t - \frac{1}{2} \left(\frac{465}{2.9979 \cdot 10^8}\right)^2 \cdot 30360 = \Delta t - 3.65 \cdot 10^{-8} \text{ s} \\ \Delta t_E &= \Delta t - 2.14 \cdot 10^{-7} \text{ s} \\ \Delta t_O &= \Delta t - 6.42 \cdot 10^{-9} \text{ s} \end{aligned}$$

Problème 2 :

La masse au repos de l'électron est $m_0 = 0.51$ MeV. L'énergie totale de l'électron est 50 MeV. La masse relativiste m et la masse au repos m_0 sont reliées par le facteur de Lorentz γ , et l'on a

$$\begin{aligned}m &= \gamma m_0 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} m_0 \\E &= m c^2 = 50 \text{ MeV} \\E_0 &= m_0 c^2 = 0.51 \text{ MeV} \\ \Rightarrow \gamma &= \frac{m}{m_0} = \frac{E}{E_0} = \frac{50}{0.51} \simeq 98 \\ \frac{1}{\gamma^2} &= 1 - \frac{v^2}{c^2} \Rightarrow \frac{v^2}{c^2} = 1 - \frac{1}{\gamma^2} \\ \Rightarrow v &= \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} \cdot c = 0.9995 \cdot c\end{aligned}$$

Énergie de l'électron par rapport à un observateur se déplaçant à vitesse \mathbf{u} dans le même sens

Partons des équations 21.71 p. 630, que nous justifions d'abord brièvement : on a

$$E = m c^2 = \gamma m_0 c^2 \quad \text{et} \quad \mathbf{p} = m \mathbf{v} = \gamma m_0 \mathbf{v}$$

où m est la masse relativiste et m_0 la masse au repos. Ainsi, on peut voir que

$$\left(\frac{E}{c}\right)^2 - \mathbf{p}^2 = m^2 c^2 - m^2 v^2 = m^2 c^2 (1 - v^2/c^2) = \frac{m_0^2 c^2}{1 - v^2/c^2} (1 - v^2/c^2) = m_0^2 c^2$$

Or, cette forme

$$\left(\frac{E}{c}\right)^2 - \mathbf{p}^2 = \left(\frac{E}{c}\right)^2 - (p^1)^2 - (p^2)^2 - (p^3)^2 = m_0^2 c^2 = \text{invariant}$$

est analogue à

$$(ct)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = -s^2 = \text{invariant}$$

et les mêmes lois de transformation s'appliquent. Il suffit de remplacer ct par E/c (ct' par E'/c) et x^i par p^i (x'^i par p'^i) puis d'appliquer la transformation de Lorentz (21.13)

p. 611. On obtient alors directement

$$\begin{aligned}
 \frac{E'}{c} &= \gamma \left(\frac{E}{c} - \frac{u}{c} p^1 \right) \\
 \Rightarrow E' &= \gamma (E - u p^1) \\
 \text{mvt selon 1} \Rightarrow p^2 &= p^3 = 0 \Rightarrow \mathbf{p}^2 = (p^1)^2 \\
 \text{Or, } \mathbf{p}^2 &= \frac{E^2}{c^2} - m_0^2 c^2 \\
 \Rightarrow E' &= \gamma \left[E - u \left(\frac{E^2}{c^2} - m_0^2 c^2 \right)^{1/2} \right] \\
 &= \gamma E \left[1 - \frac{u}{c} \left(1 - \frac{m_0^2 c^4}{E^2} \right)^{1/2} \right] \\
 \Rightarrow E' &= \frac{E}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \left(1 - \frac{u}{c} \sqrt{1 - \left(\frac{m_0 c^2}{E} \right)^2} \right)
 \end{aligned}$$

Dans la première partie de l'exercice, nous avons vu que $(m_0 c^2/E)^2 \simeq 10^{-4} \ll 1$. Par conséquent, dans la situation présente, on peut se permettre d'écrire

$$E' \simeq E \frac{1 - u/c}{\sqrt{1 - u/c} \sqrt{1 + u/c}} = E \sqrt{\frac{1 - u/c}{1 + u/c}}$$

Problème 3 :

Partons des formules (21.21, p. 614) de transformation des vitesses, en tenant compte du fait que $\mathbf{v} = (0, v, 0)$ et que $\mathbf{u} = (u, 0, 0) \Rightarrow \mathbf{v}' \cdot \mathbf{u} = v'^1 u$:

$$\begin{aligned}
 v^1 &= \frac{v'^1 + u}{1 + v'^1 u/c^2} = 0 \Rightarrow v'^1 = -u \\
 v^2 &= \frac{\sqrt{1 - u^2/c^2}}{1 + v'^1 u/c^2} v'^2 = v \\
 v^3 &= \frac{\sqrt{1 - u^2/c^2}}{1 + v'^1 u/c^2} v'^3 = 0 \Rightarrow v'^3 = 0
 \end{aligned}$$

L'angle cherché sera tel que

$$\tan \alpha = \frac{v'^2}{v'^1}$$

De la deuxième équation, on tire (avec $\gamma = (1 - u^2/c^2)^{-1/2}$) :

$$\begin{aligned}
 v'^2 &= \gamma v (1 + v'^1 u/c^2) = \gamma v + \gamma v \frac{v'^1 u}{c^2} \\
 \Rightarrow \frac{v'^2}{v'^1} &= \gamma \frac{v}{v'^1} + \gamma \frac{v u}{c^2} = -\gamma \frac{v}{u} + \gamma \frac{v u}{c^2} \\
 &= -\frac{v}{u} \frac{1 - u^2/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \\
 \Rightarrow \tan \alpha &= -\frac{v}{u} \sqrt{1 - u^2/c^2}
 \end{aligned}$$

Mécanique générale

Énoncé des exercices**Problème 1 :**

Une sphère d'aluminium ($\beta = 75 \cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$) a un diamètre de 8.75 cm. Quel sera son diamètre si cette sphère est chauffée de 20 à 300°C ?

Problème 2 :

Combien de moles sont-elles contenues dans 1 litre d'eau ? Et combien de molécules ? La densité de l'eau vaut $\rho = 1.000 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$.

Problème 3 :

Une bouteille de plongée complètement remplie contient de l'air à une pression $P_1 = 200 \text{ atm}$ et à une température $T_1 = 20^\circ\text{C}$. La bouteille a un volume $V_1 = 11.3 \text{ l}$. Quel volume V_2 occupe cet air à $P_2 = 1 \text{ atm}$ si la température ne change pas ? Avant d'entrer dans l'eau, une personne consomme 2 l d'air par inspiration, et inspire 12 fois par minute. A ce rythme, en combien de temps la personne vide-t-elle la bouteille ? La personne fait la même expérience dans la mer à une profondeur de 20 m et à une température $T_3 = 10^\circ\text{C}$. Si la personne respire au même rythme qu'en surface, combien de temps s'écoule-t-il avant que la bouteille ne soit vidée ? La densité de l'eau de mer vaut $\rho = 1.025 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$.

Problème 4 :

Soit une pièce de volume $V = 240 \text{ m}^3$ à une température $T = 25^\circ\text{C}$. L'air dans la pièce a une humidité de 80%. Quelle masse d'eau peut encore s'évaporer d'un récipient ouvert contenant de l'eau ?

Problème 5 :

Lorsqu'une capsule Apollo revenait de la Lune et rentrait sur Terre, elle arrivait dans l'atmosphère à une vitesse d'environ 40'000 km/h. Quelle était la température des molécules de l'air qui entraient en collision avec la capsule à cette vitesse ? Supposez que l'air est constitué uniquement d'azote.

Problème 6 :

Le milieu interstellaire est principalement constitué d'atomes d'hydrogène et possède une densité d'un atome par cm^3 . Estimez le libre parcours moyen de ces atomes en supposant le diamètre d'un atome égal à 1 Å.

Mécanique générale

Corrigé des exercices

Problème 1 :

Le changement de volume ΔV est donné par ($\beta = 75 \cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$) :

$$\Delta V = \beta \frac{4}{3} \pi \left(\frac{D_0}{2} \right)^3 \Delta T = 7.37 \text{ cm}^3$$

Le diamètre final D vaut :

$$\frac{4}{3} \pi \left(\frac{D}{2} \right)^3 = \frac{4}{3} \pi \left(\frac{D_0}{2} \right)^3 + \Delta V \quad \Leftrightarrow \quad D = 8.81 \text{ cm}$$

Problème 2 :

Les molécules d'eau (H_2O) ont une masse molaire de $M = 18 \text{ g/mol}$. Le nombre de moles est donné par $n = \rho V/M = 55.6 \text{ mol}$.

Le nombre de molécules s'obtient par $N = nN_A = 3.34 \cdot 10^{25}$ molécules avec $N_A = 6.02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$.

Problème 3 :

De la loi des gaz parfaits, on obtient :

$$\frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{T_2} \quad \Leftrightarrow \quad V_2 = 2.26 \cdot 10^3 \text{ l}$$

La personne consomme $2 \text{ l} \cdot 12 \text{ min}^{-1} = 24 \text{ l/min}$. Elle a donc une autonomie de $2.26 \cdot 10^3 \text{ l} / (24 \text{ l/min}) = 94 \text{ min}$.

La pression à 20 m de profondeur est de : $P_3 = P_1 + \rho g h = 2.99 \text{ atm}$, puisque $1 \text{ atm} = 1.013 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$. L'air contenu dans la bouteille occupe à cette pression et à une température $T_3 = 283 \text{ K}$ un volume :

$$\frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_3 V_3}{T_3} \quad \Leftrightarrow \quad V_3 = 7.33 \cdot 10^2 \text{ l}$$

Ce qui correspond à une autonomie de $7.33 \cdot 10^2 \text{ l} / (24 \text{ l/min}) = 31 \text{ min}$.

Problème 4 :

A 25°C la pression de la vapeur saturée est $P_2 = 3.17 \cdot 10^3 \text{ N/m}^2$. De l'eau peut s'évaporer jusqu'à ce que la pression partielle de la vapeur atteigne cette valeur de saturation. La pression partielle initiale de la vapeur d'eau est $P_1 = 0.80 \cdot 3.17 \cdot 10^3 = 2.54 \cdot 10^3 \text{ N/m}^2$. Le volume et la température ne changent pas. Ainsi la loi des gaz parfaits donne :

$$n_1 = \frac{P_1 V}{RT} \quad \text{et} \quad n_2 = \frac{P_2 V}{RT} \quad \Leftrightarrow \quad \Delta n = n_2 - n_1 = (P_2 - P_1) \frac{V}{RT} = 61.4 \text{ mol}$$

Ce qui correspond à une masse $m = 18 \text{ g/mol} \cdot 61.4 \text{ mol} = 1.11 \text{ kg}$.

Problème 5 :

La vitesse $v_{rms} = 40'000 \text{ km/h} = 1.11 \cdot 10^4 \text{ m/s}$ est la vitesse des molécules d'azote (N_2) par rapport à la capsule, ainsi :

$$\frac{1}{2} m v_{rms}^2 = \frac{3}{2} k T \quad \Leftrightarrow \quad T = \frac{m v_{rms}^2}{3k} = 1.39 \cdot 10^5 \text{ K}$$

où $k = 1.38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$ et $m = 28 \text{ u} \cdot 1.66 \cdot 10^{-27} \text{ kg/u}$. Une protection thermique ("bouclier thermique") était donc indispensable pour éviter la vaporisation de la capsule Apollo.

Problème 6 :

Le nombre d'atomes par unité de volume est $N/V = 10^6 \text{ m}^{-3}$. Le libre parcours moyen est donné par :

$$l_M = \frac{1}{4\pi \sqrt{2} r^2 (N/V)} = 2.25 \cdot 10^{13} \text{ m} \simeq 1 \text{ jour-lumière}$$

avec $r = 0.5 \text{ \AA} = 5.0 \cdot 10^{-11} \text{ m}$.

Mécanique générale

Énoncé des exercices**Problème 1 :**

1. Montrer que si la chaleur spécifique d'une substance (liquide ou solide) varie en fonction de la température, $c(T)$, la quantité de chaleur nécessaire pour élever la température d'une masse m de cette substance de T_1 à T_2 est donnée par

$$Q = \int_{T_1}^{T_2} m c(T) dT$$

2. Supposons que c ait la forme $c(T) = c_0(1 + aT)$ pour une substance donnée, où a est une constante, T est la température en degrés Celsius et c_0 est la chaleur spécifique à 0°C . Déterminer la chaleur nécessaire pour élever la température de T_1 à T_2 .
3. Quelle est la valeur moyenne de c sur l'intervalle $[T_1, T_2]$ de la partie 2, exprimée en fonction de c_0 , T_1 et T_2 ?

Problème 2 :

On mélange des masses égales de glace à 0°C et de vapeur à 100°C . Quel sera le résultat final ?

$L_{\text{vapeur}} = 2.26 \cdot 10^6$ J/kg, $L_{\text{glace}} = 3.33 \cdot 10^5$ J/kg, $c_{\text{eau}} = 4186$ J/kg/ $^\circ\text{C}$. (On se trouve dans les conditions standard, i.e. 0°C et 1 bar).

Problème 3 :

On a 2.0 moles de gaz parfait, qui occupent un volume $V_1 = 3.50$ m³ à $T_1 = 300$ K. On suppose qu'il se dilate de manière isotherme jusqu'à occuper un volume $V_2 = 7.00$ m³.

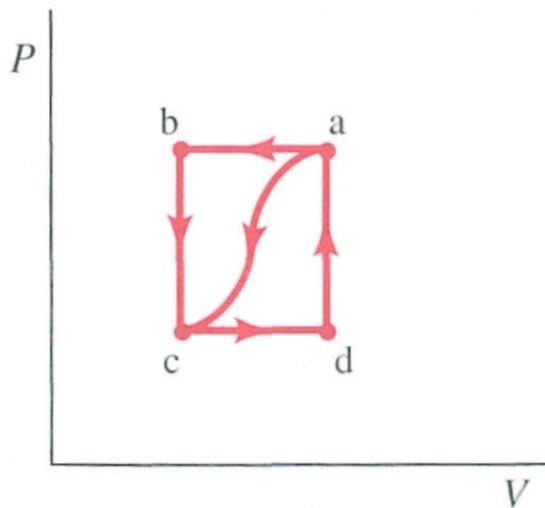
Déterminer

1. le travail fourni par le gaz,
2. le changement d'énergie interne du gaz, et
3. la quantité de chaleur ajoutée au gaz.

Problème 4 :

Quand un gaz est mené d'un état a à un état c le long du chemin courbe du diagramme PV de la figure, le travail fourni par le gaz est $-W = -35$ J et la chaleur ajoutée au gaz est $Q = -63$ J. Le long du chemin abc , le travail effectué par le gaz est $-W = -48$ J.

1. Que vaut la variation de chaleur Q pour le chemin abc ?
2. Si $P_c = \frac{1}{2} P_b$, que vaut le travail pour le chemin cda ?
3. Que vaut Q pour le chemin cda ?
4. Que vaut la variation d'énergie interne $U_a - U_c$?



5. Si $U_d - U_c = 5 \text{ J}$, que vaut Q pour le chemin da ?

Problème 5 :

Une mole de gaz parfait diatomique à la pression de 1 atm et à la température de 490 K subit une transformation où la pression augmente linéairement avec la température. Les température et pression finales sont 720 K et 1.60 atm respectivement.

Déterminer

1. le changement d'énergie interne,
2. le travail fait par le gaz, et
3. la chaleur ajoutée au gaz.

On suppose que le nombre de termes quadratiques dans E vaut $\nu = 5$.

Problème 6 :

Une mole de gaz parfait monoatomique, initialement à pression de 1.0 atm, subit une transformation en trois étapes :

- il subit une expansion adiabatique de $T_1 = 550 \text{ K}$ à $T_2 = 389 \text{ K}$;
- il diminue de volume à pression constante jusqu'à ce que sa température atteigne T_3 ;
- il revient à ses pression et température initiales en gardant son volume constant.

1. Dessiner ces transformations sur un diagramme PV .
2. Déterminer T_3 .
3. Calculer le changement d'énergie interne, le travail effectué par le gaz et la chaleur ajoutée au gaz dans chaque étape, et
4. pour la transformation entière.

Problème 7 :

Une météorite ferreuse fond pendant qu'elle pénètre dans l'atmosphère terrestre. Sa température initiale, hors de l'atmosphère, était -125°C . Calculer la vitesse minimale que devait avoir la météorite avant d'entrer dans l'atmosphère terrestre.

Chaleur latente de fusion du fer : $L_{fer} = 2.89 \cdot 10^5 \text{ J kg}^{-1}$.

Chaleur spécifique du fer : $c_{fer} = 450 \text{ J kg}^{-1} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$

Température de fusion du fer : $T_{fusion} = 1808 \text{ }^\circ\text{C}$

Mécanique générale

Corrigé des exercices**Problème 1 :**

1. La chaleur requise pour élever la température d'une valeur infinitésimale dT est $dQ = m c(T) dT$, donc la chaleur totale nécessaire à élever la température de T_1 à T_2 est

$$Q = \int_0^Q dQ = \int_{T_1}^{T_2} m c(T) dT$$

(Pour un solide ou un liquide, la distinction faite pour les gaz entre C_V et C_P n'a pas de sens).

2.

$$Q = \int_{T_1}^{T_2} m c_0 (1 + aT) dT = m c_0 [(T_2 - T_1) + a(T_2^2 - T_1^2)/2]$$

3. Par définition de la valeur moyenne (dans ce cas particulier), on a

$$Q = m \bar{c} (T_2 - T_1) = m c_0 [(T_2 - T_1) + a(T_2^2 - T_1^2)/2] \quad (1)$$

$$= m c_0 (T_2 - T_1) [1 + a(T_2 + T_1)/2] \quad (2)$$

$$\Rightarrow \bar{c} = c_0 [1 + \frac{1}{2} a (T_2 + T_1)] \quad (3)$$

Problème 2 :

Supposons d'abord que toute la glace fonde et que toute la vapeur se condense, de sorte qu'il ne resterait que de l'eau liquide. Avec $m_{glace} = m_{vapeur} = m$, on pose que la chaleur gagnée par la glace est égale à celle perdue par la vapeur, ce qui revient à dire que l'ensemble vapeur+glace est un système fermé :

$$\Delta Q_{glace} = -\Delta Q_{vapeur} \Leftrightarrow \Delta Q_{glace} + \Delta Q_{vapeur} = 0$$

Comme la glace *gagne* de la chaleur, $\Delta Q_{glace} > 0$ (par convention, ΔQ est positif quand de la chaleur est fournie *au* système), tandis que $\Delta Q_{vapeur} < 0$ puisque la vapeur perd de l'énergie. On peut donc écrire la somme des deux comme

$$-m L_{vapeur} + m c_{eau} (T - 100) + m L_{glace} + m c_{eau} (T - 0) = 0$$

Avec $L_{vapeur} = 2.26 \cdot 10^6 \text{ J kg}^{-1}$, $L_{glace} = 3.33 \cdot 10^5 \text{ J kg}^{-1}$ et $c_{eau} = 4186 \text{ J kg}^{-1} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$, on obtient $T = 280^\circ\text{C}$: notre hypothèse était donc fautive, puisque toute l'eau ne peut pas être liquide et se trouver à une température aussi élevée. Supposons donc qu'il reste une certaine quantité d'eau à 100°C et une autre quantité de vapeur également à 100°C . Si une fraction $x m$ de la vapeur s'est condensée, on a

$$x m L_{vapeur} = m L_{glace} + m c_{eau} (T - 0) \Rightarrow x = 0.333$$

Il reste donc $\frac{2}{3}m$ de vapeur et $\frac{4}{3}m$ d'eau à 100°C .

Problème 3 :

1. Sachant que $PV = nRT$, le travail effectué par le système lors d'une transformation isotherme est

$$-W = \int_{V_1}^{V_2} P dV = nRT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = nRT \ln(V_2/V_1) = 3.46 \cdot 10^3 \text{ J}$$

2. L'énergie interne d'un nombre fixe de moles de gaz parfait ne dépend que de la température, puisque celle-ci est une mesure de l'énergie cinétique moyenne des molécules. La température étant constante, on a

$$\Delta U = 0$$

3. Le premier principe de la thermodynamique permet de calculer l'apport de chaleur :

$$\Delta U = Q + W \Rightarrow Q = 3.46 \cdot 10^3 \text{ J}$$

Problème 4 :

1. On peut déjà trouver le changement d'énergie interne $U_c - U_a$ à partir de l'information donnée sur le chemin $a \rightarrow c$:

$$U_c - U_a = Q_{a \rightarrow c} + W_{a \rightarrow c} = -63 \text{ J} + 35 \text{ J} = -28 \text{ J}$$

Pour le chemin $a \rightarrow b \rightarrow c$, on a

$$U_c - U_a = Q_{a \rightarrow b \rightarrow c} + W_{a \rightarrow b \rightarrow c} = Q_{a \rightarrow b \rightarrow c} + W_{a \rightarrow b}$$

$$-28 \text{ J} = Q_{a \rightarrow b \rightarrow c} + 48 \text{ J} \Rightarrow Q_{a \rightarrow b \rightarrow c} = -76 \text{ J}$$

2. Pour le chemin $c \rightarrow d \rightarrow a$, du travail est fourni seulement durant la transformation à pression constante mais à volume variable ($dV \neq 0$) $c \rightarrow d$, donc on a

$$-W_{c \rightarrow d \rightarrow a} = P_c (V_d - V_c) = \frac{1}{2} P_b (V_a - V_b) = -\frac{1}{2} W_{b \rightarrow a} = \frac{1}{2} W_{a \rightarrow b} = +24 \text{ J}$$

3. On utilise le premier principe de la thermodynamique pour le chemin $c \rightarrow d \rightarrow a$ afin de trouver $Q_{c \rightarrow d \rightarrow a}$:

$$U_a - U_c = -(U_c - U_a) = Q_{c \rightarrow d \rightarrow a} + W_{c \rightarrow d \rightarrow a} \Rightarrow Q_{c \rightarrow d \rightarrow a} = +52 \text{ J}$$

- 4.

$$U_a - U_c = -(U_c - U_a) = +28 \text{ J}$$

5. Comme aucun travail n'est effectué le long du chemin $d \rightarrow a$ (puisque $V = \text{constante} \Rightarrow dV = 0$), on a en vertu du premier principe

$$U_a - U_d = (U_a - U_c) + (U_c - U_d) = \underbrace{(U_a - U_c)}_{28 \text{ J}} - \underbrace{(U_d - U_c)}_{5 \text{ J}} = Q_{d \rightarrow a} + \underbrace{W_{d \rightarrow a}}_0$$

$$\Rightarrow Q_{d \rightarrow a} = +23 \text{ J}$$

Problème 5 :

1. Le changement d'énergie interne d'une quantité donnée de gaz parfait diatomique est

$$\Delta U = n C_V \Delta T = n \frac{5}{2} R \Delta T = 1 \cdot \frac{5}{2} \cdot 8.315 \cdot (720 - 490) = 4.78 \cdot 10^3 \text{ J}$$

2. La pression est une fonction linéaire de T telle que $P = P_0 + aT$. Il est facile de déterminer les constantes P_0 et a à partir des états initial et final, qui sont connus :

$$1.00 = P_0 + a \cdot 490 \quad ; \quad 1.60 = P_0 + a \cdot 720 \quad \Rightarrow \quad P_0 = -0.279 \text{ atm}, \quad a = 2.61 \cdot 10^{-3} \text{ atm/K}$$

Le travail fourni par le gaz s'écrit

$$-W = \int P dV = \int (P_0 + aT) dV$$

Exprimons V en fonction de P à l'aide de la loi des gaz parfaits :

$$V = nRT/P = nR[(P - P_0)/a]/P = (nR/a) - (nRP_0/aP) \quad \Rightarrow \quad |dV| = \frac{nRP_0 dP}{aP^2}$$

On peut maintenant intégrer sur dP :

$$-W = \int P dV = \int_{P_1}^{P_2} P \left(\frac{nRP_0}{aP^2} \right) dP = \frac{nRP_0}{a} \int_{P_1}^{P_2} \frac{dP}{P} = \frac{nRP_0}{a} \ln \left(\frac{P_2}{P_1} \right)$$

Finalement,

$$\underline{-W} = [1.00 \cdot 8.315 \cdot (-0.279) / 2.61 \cdot 10^{-3}] \ln \left(\frac{1.60}{1.00} \right) = \underline{-418 \text{ J}}$$

3. Le premier principe de la thermodynamique permet de trouver la chaleur ajoutée au gaz :

$$\Delta U = Q + W \quad \Rightarrow \quad Q = \Delta U - W = 4.78 \cdot 10^3 - 418 = 4.36 \cdot 10^3 \text{ J}$$

Problème 6 :

2. Pour un gaz monoatomique, $\gamma = 5/3$, donc on a

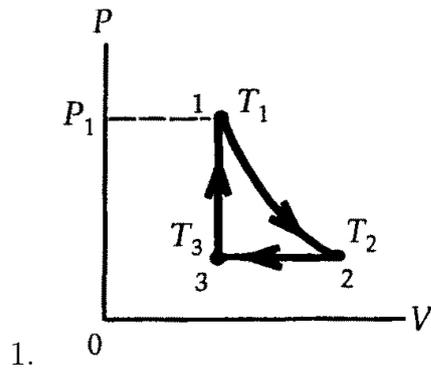
$$P_2 V_2^\gamma = P_1 V_1^\gamma \quad \Leftrightarrow \quad P_2/P_1 = (V_1/V_2)^\gamma$$

L'équation des gaz parfaits donne

$$\frac{P_2 V_2}{P_1 V_1} = \frac{T_2}{T_1} \quad \text{et} \quad P_2/P_1 = (T_2/T_1)(V_1/V_2) = (V_1/V_2)^\gamma \quad \Rightarrow \quad V_1/V_2 = (T_2/T_1)^{1/(\gamma-1)}$$

Et dans le cas de la transformation à pression constante $2 \rightarrow 3$, on obtient

$$\frac{V_3}{V_2} = \frac{T_3}{T_2}$$



Comme $V_3 = V_1$, cette égalité devient

$$V_1/V_2 = T_3/T_2$$

En combinant cela avec le résultat précédent, on a finalement

$$T_3 = \frac{T_2^{\gamma/(\gamma-1)}}{T_1^{1/(\gamma-1)}} = \frac{389^{\frac{5}{3}}}{550^{\frac{1}{3}}} = 231 \text{ K}$$

3. Pour l'expansion adiabatique $1 \rightarrow 2$, il n'y a pas de flux de chaleur :

$$Q_{1 \rightarrow 2} = 0 \text{ J}$$

Variation d'énergie interne :

$$\Delta U_{1 \rightarrow 2} = n \frac{3}{2} R \Delta T = 1.00 \cdot \frac{3}{2} \cdot 8.315 \cdot (389 - 550) = -2.01 \cdot 10^3 \text{ J}$$

Travail effectué par le gaz : on fait appel au premier principe :

$$Q_{1 \rightarrow 2} = \Delta U_{1 \rightarrow 2} - W_{1 \rightarrow 2} \Rightarrow -W_{1 \rightarrow 2} = +2.01 \cdot 10^3 \text{ J}$$

Pour la transformation $2 \rightarrow 3$ à pression constante, on a :

Travail effectué par le gaz :

$$-W_{2 \rightarrow 3} = P \Delta V = n R \Delta T = 1 \cdot 8.315 \cdot (231 - 389) = -1.31 \cdot 10^3 \text{ J}$$

Variation d'énergie interne :

$$\Delta U_{2 \rightarrow 3} = n \frac{3}{2} R \Delta T = 1.00 \cdot \frac{3}{2} \cdot 8.315 \cdot (231 - 389) = -1.97 \cdot 10^3 \text{ J}$$

Flux de chaleur (ajoutée au gaz) :

$$Q_{2 \rightarrow 3} = \Delta U_{2 \rightarrow 3} - W_{2 \rightarrow 3} = -1.97 \cdot 10^3 - 1.31 \cdot 10^3 = -3.28 \cdot 10^3 \text{ J}$$

Le résultat est négatif, ce qui signifie que le gaz *perd* de la chaleur.

Transformation à volume constant $3 \rightarrow 1$:

$$-W_{3 \rightarrow 1} = P \Delta V = 0$$

Variation d'énergie interne :

$$\Delta U_{3 \rightarrow 1} = n \frac{3}{2} R \Delta T = 1.00 \cdot \frac{3}{2} \cdot 8.315 \cdot (550 - 231) = +3.98 \cdot 10^3 \text{ J}$$

Flux de chaleur (ajoutée au gaz) :

$$Q_{3 \rightarrow 1} = \Delta U_{3 \rightarrow 1} - W_{3 \rightarrow 1} = 3.98 \cdot 10^3 \text{ J}$$

4. Pour le cycle complet, on a

$$-W_{cycle} = -W_{1 \rightarrow 2} - W_{2 \rightarrow 3} - W_{3 \rightarrow 1} = 2.01 \cdot 10^3 - 1.31 \cdot 10^3 + 0 = +0.70 \cdot 10^3 \text{ J}$$

$$Q_{cycle} = Q_{1 \rightarrow 2} + Q_{2 \rightarrow 3} + Q_{3 \rightarrow 1} = 0 - 3.28 \cdot 10^3 + 3.98 \cdot 10^3 = +0.70 \cdot 10^3 \text{ J}$$

$$\Delta U_{cycle} = \Delta U_{1 \rightarrow 2} + \Delta U_{2 \rightarrow 3} + \Delta U_{3 \rightarrow 1} = -2.01 \cdot 10^3 - 1.97 \cdot 10^3 + 3.98 \cdot 10^3 = 0$$

Problème 7 :

La friction de l'air effectue un travail au dépend de l'énergie cinétique de la météorite, et ce travail est dégradé en énergie thermique. Cette dernière est en général distribuée entre l'air, qui est chauffé, la radiation et l'énergie thermique de la météorite. Seule une fraction de l'énergie thermique disponible est consacrée à l'élévation de la température de la météorite, puis à la faire fondre. Plus cette fraction est grande, plus petite est la vitesse requise. Ici, on admettra pour simplifier que la fraction en question est 1, i.e. que toute l'énergie est consacrée à la fusion de la météorite, et l'on obtiendra une borne inférieure de la vitesse.

En égalant l'énergie cinétique et l'énergie thermique nécessaire pour faire fondre la météorite, on a

$$\frac{1}{2} m v_{min}^2 = m (c_{fer} \Delta T + L_{fer}) \Rightarrow v_{min} = \sqrt{2(c_{fer} \Delta T + L_{fer})}$$

On a donc finalement

$$v_{min} = \sqrt{2(450 \cdot [1808 - (-125)] + 2.89 \cdot 10^5)} = 1520 \text{ m/s} = 1.52 \text{ km/s}$$

La plupart des météorites sont bien plus rapides que cela, celles qui arrivent jusqu'au sol sont fondues au moins en superficie.

