Mécanique générale

Corrigé des exercices

Problème 1 :

Fixons l'origine du système à la position initiale de la personne de $m_1 = 75$ kg ($x_1 = 0$ m). Soient $x_2 = 3$ m la position initiale de la deuxième personne et $x_b = 1.5$ m celle du centre de la barque. Le centre de masse du système se situe en $x_{CM} = (m_1x_1 + m_2x_2 + m_bx_b)/(m_1+m_2+m_b) = 1.36$ m. Ainsi le centre de masse se situe à $3.00-1.36 = 1.64$ m de la seconde personne. Lorsque les deux personnes échangent leur place, le centre de masse ne bouge pas par rapport au lac. Par conséquent, la barque se déplace de façon à ce que l'extrémité où était assise initialement la personne de 75 kg se retrouve à 1.64 m du centre de masse, au lieu de 1.36 m. C'est-à-dire que le bateau se déplace de $1.64 - 1.36 = 0.28$ m vers l'extrémité où était assise initialement la personne de 75 kg.

Plus formellement, on peut écrire que, puisqu'aucune force extérieure n'est appliquée à la barque, la position x_{CM} du centre de masse reste inchangée. Si l'on note x^i et x^f les positions initiale est finale respectivement, on a alors :

$$\begin{aligned}
x^i_{CM} = x^f_{CM} \Rightarrow \quad \frac{0 + m_2x_2^i + m_bx_b^i}{m_1+m_2+m_b} &= \frac{m_1x_1^f + m_2x_2^f + m_bx_b^f}{m_1+m_2+m_b} \\
\Rightarrow \quad m_2x_2^i + m_bx_b^i &= m_1x_1^f + m_2x_2^f + m_bx_b^f \\
\Rightarrow \quad x_b^f - x_b^i &= \frac{1}{m_b}\left[m_2x_2^i - m_1x_1^f - m_2x_2^f\right] \\
&= \frac{1}{m_b}\left[m_2(x_2^i - x_2^f) - m_1x_1^f\right] \qquad (1)
\end{aligned}$$

Or, comme la personne 1 s'est déplacée de +3 m par rapport à la barque et que la barque s'est déplacée de $(x_b^f - x_b^i)$ par rapport à l'eau, on a

$$\begin{aligned}
x_1^f &= 3 + (x_b^f - x_b^i) \qquad (2)\\
x_2^f - x_2^i &= -3 + (x_b^f - x_b^i) \qquad (3)
\end{aligned}$$

l'argument étant le même pour la personne 2. En substituant (2) et (3) dans (1), on obtient

$$\begin{aligned}
x_b^f - x_b^i &= \frac{1}{m_b}\left[m_2(3 - [x_b^f - x_b^i] - m_1(3 + [x_b^f - x_b^i])\right] \\
\Rightarrow \quad (x_b^f - x_b^i)\left[1 + \frac{m_2}{m_b} + \frac{m_1}{m_b}\right] &= \frac{3}{m_b}(m_2 - m_1) \\
\Rightarrow \quad (x_b^f - x_b^i) &= \frac{3(m_2 - m_1)}{m_1+m_2+m_b} = \frac{3(55-75)}{75+55+80} = -\frac{2}{7} = -0.286 \text{ m}
\end{aligned}$$

Problème 2 :

1. Considérons le référentiel $Oxyz$ tel que l'origine O coïncide avec le centre de la plaque rectangulaire et tel que l'axe Ox est dans le sens de la largeur l de la plaque et Oy dans le sens de la longueur L.
   Soit h l'épaisseur de la plaque. La plaque a une densité uniforme $\rho = M/(L\,l\,h)$. Considérons ensuite un élément de volume infinitésimal $\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ de la plaque situé en $(x,\, y,\, z)$. Cet élément a une masse $\mathrm{d}m = \rho\,\mathrm{d}V$ et un moment d'inertie par rapport à l'axe Oz valant $\mathrm{d}I = (\sqrt{x^2+y^2})^2\,\mathrm{d}m = (x^2+y^2)\,\rho\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$. Le moment d'inertie total I de la plaque rectangulaire est alors donné par l'intégration de $\mathrm{d}I$ selon les trois dimensions de la plaque :

$$\begin{aligned} I &= \int_{-h/2}^{h/2}\int_{-L/2}^{L/2}\int_{-l/2}^{l/2}\rho\ (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\ &= \tfrac{M}{L\,l\,h}\int_{-h/2}^{h/2}\int_{-L/2}^{L/2}\left[\tfrac{1}{3}x^3+y^2x\right]_{-l/2}^{l/2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \tfrac{M}{L\,l\,h}\int_{-h/2}^{h/2}\int_{-L/2}^{L/2}\left(\tfrac{l^3}{12}+y^2l\right)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\ &= \tfrac{M}{L\,h}\int_{-h/2}^{h/2}\left[\tfrac{l^2}{12}y+\tfrac{1}{3}y^3\right]_{-L/2}^{L/2}\,\mathrm{d}z = \tfrac{1}{12}\,\tfrac{M}{h}\ (l^2+L^2)\int_{-h/2}^{h/2}\mathrm{d}z = \tfrac{1}{12}\,M\ (l^2+L^2) \end{aligned}$$

2. Considérons le référentiel $Or\theta z$ en coordonnées cylindriques tel que l'origine O coïncide avec le centre du disque et tel que le disque se trouve dans le plan $z = 0$. Soit h l'épaisseur du disque. Le disque a une densité uniforme $\rho = M/(\pi R^2\,h)$. A nouveau, considérons un élément de volume infinitésimal $\mathrm{d}V = r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z$ du disque situé en $(r,\, \theta,\, z)$. Cet élément a une masse $\mathrm{d}m = \rho\,\mathrm{d}V$ et un moment d'inertie par rapport à l'axe Oz valant $\mathrm{d}I = r^2\,\mathrm{d}m = \rho\, r^3\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$. Le moment d'inertie total I du disque est alors donné par l'intégration :

$$I = \int_{-h/2}^{h/2}\int_0^{2\pi}\int_0^R \rho\, r^3\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z = \tfrac{M}{\pi R^2\,h}\int_{-h/2}^{h/2}\int_0^{2\pi}\tfrac{R^4}{4}\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z = \tfrac{M\,2\pi\,h}{\pi R^2\,h}\,\tfrac{R^4}{4} = \tfrac{1}{2}\,M\,R^2$$

Problème 3 :

Dans cette expérience le moment cinétique $\boldsymbol{L}$ est conservé. Soient $\boldsymbol{\omega}_1$ la vitesse angulaire initiale de la plateforme, et $\boldsymbol{\omega}_2$ sa vitesse angulaire lorsque la personne a les bras à l'horizontale. On peut donc écrire :

$$\boldsymbol{L} = I_1\boldsymbol{\omega}_1 = I_2\boldsymbol{\omega}_2$$

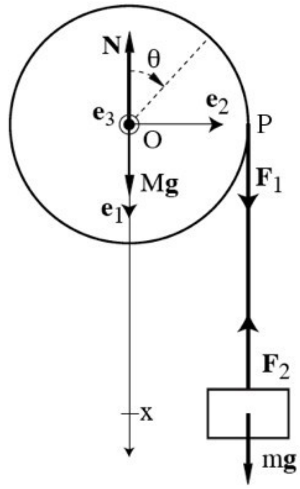
Les vecteurs $\boldsymbol{L}$, $\boldsymbol{\omega}_1$ et $\boldsymbol{\omega}_2$ sont colinéaires, on a donc simplement :

$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2 \quad\Leftrightarrow\quad I_2 = \frac{\omega_1}{\omega_2}\,I_1 = \frac{\nu_1}{\nu_2}\,I_1 = \frac{1.2\ \mathrm{s}^{-1}}{0.8\ \mathrm{s}^{-1}}\,I_1 = 1.5\,I_1$$

En écartant les bras, la personne a donc augmenté son moment d'inertie, ce qui a pour effet de ralentir sa rotation.

Problème 4 :

Définissons un système de coordonnées $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ avec l'origine O au centre de la poulie, avec $\mathbf{e}_1$ pointant vers le bas, $\mathbf{e}_2$ vers la droite et $\mathbf{e}_3$ vers nous (voir figure). Soit $\mathbf{x}(t)$ la position de la masse m.



Dans l'exercice 2, on a vu qu'une poulie (i.e. un disque) a un moment d'inertie $I = MR^2/2$. Comme la corde n'est pas extensible, si la poulie tourne avec une vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega}(t)$, la vitesse de la masse m est donnée par celle du point P, c'est-à-dire $\mathbf{v}(t) = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{OP} = \boldsymbol{\omega} \wedge R\,\mathbf{e}_2$. Ces vecteurs étant orthogonaux entre eux, on a $v = \omega\, R$. Le moment cinétique du système entier par rapport à O peut alors s'écrire :

$$\mathbf{L}_O(t) = I\boldsymbol{\omega} + \mathbf{x} \wedge m\mathbf{v} = -\left(\frac{MR^2}{2}\omega + R\,mv\right)\mathbf{e}_3 = -\left(\frac{M}{2} + m\right) R\,v(t)\,\mathbf{e}_3 \qquad (4)$$

On peut à présent appliquer le théorème du moment cinétique :

$$\frac{d}{dt}\mathbf{L}_O = \mathbf{M}_O^{ext} = \mathbf{x} \wedge \mathbf{F}_{totale}^{ext} = \mathbf{x} \wedge mg\,\mathbf{e}_1 = -R\,m\,g\,\mathbf{e}_3$$

Ainsi en dérivant l'équation (4) par rapport au temps, il vient :

$$\frac{d}{dt}\mathbf{L}_O = -\left(\frac{M}{2} + m\right) R\,a(t)\,\mathbf{e}_3 = -R\,m\,g\,\mathbf{e}_3 \quad \Rightarrow \quad a(t) = \frac{g}{1 + \frac{M}{2m}}$$

On voit que, quelles que soient les masses m et M, on a toujours $a < g$. Par conséquent, la masse m a toujours une accélération inférieure à celle qu'elle aurait en chute libre, donc la corde reste toujours tendue.

Il reste à calculer la tension $\mathbf{F}_2$ de la corde. Pour cela, considérons les forces qui s'exercent sur la masse m.

$$m\mathbf{a} = \sum \mathbf{F} = m\mathbf{g} + \mathbf{F}_2 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{F}_2 = m\,(\mathbf{a} - \mathbf{g})$$

Les vecteurs $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{a}$ et $\mathbf{g}$ étant parallèles à $\mathbf{e}_1$, on obtient la norme de la tension :

$$F_2 \,=\, m(g-a) = \frac{Mmg}{2m+M}$$

Problème 5 :

Considérons le centre instantané de rotation A. Comme il n'y a pas de glissement en ce point, on a $\mathbf{v}_A = \mathbf{0}$. Considérons alors le repère centré en A et tel que $\mathbf{e}_1$ pointe à droite, $\mathbf{e}_2$ pointe vers le haut et $\mathbf{e}_3$ pointe vers nous. Notons $\boldsymbol{\omega} = -\omega\,\mathbf{e}_3$ la vitesse instantanée de rotation de la bobine. On peut alors écrire la vitesse du point B, qui est le point où le fil est tangent à la bobine, de deux manières :

$$\begin{cases} \mathbf{v}_B &= \mathbf{v}_0 = -v_0\,\mathbf{e}_1 \\ \mathbf{v}_B &= \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{AB} = -\omega\,(R-r)\,\mathbf{e}_1 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \omega = \frac{v_0}{R-r}$$

La vitesse du point C est donnée par :

$$\mathbf{v}_C = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{AC} = -\omega\,R\,\mathbf{e}_1 = -\frac{R}{R-r}\,v_0\,\mathbf{e}_1 = \frac{R}{R-r}\,\mathbf{v}_0$$

On a donc $v_C > v_0$, ce qui implique que la bobine rattrape la main qui tire le fil.

Déterminons maintenant les accélérations. De la théorie, on sait qu'à chaque instant t, il existe un vecteur $\boldsymbol{\omega}(t)$ tel que pour tous points P et Q de la bobine :

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_Q + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{QP}$$

et où $\boldsymbol{\omega}$ est indépendant des points P et Q choisis. Le vecteur $\boldsymbol{\omega}$ est appelé vitesse instantanée de rotation. L'accélération du point P est alors donnée par :

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_P &= \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{v}_P) = \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{v}_Q + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{QP}) \\ &= \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{v}_Q) + \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{\omega}) \wedge \mathbf{QP} + \boldsymbol{\omega} \wedge \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{QP}) \\ &= \mathbf{a}_Q + \dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge \mathbf{QP} + \boldsymbol{\omega} \wedge \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{OP} - \mathbf{OQ}) \\ &= \mathbf{a}_Q + \dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge \mathbf{QP} + \boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{v}_P - \mathbf{v}_Q) \\ &= \mathbf{a}_Q + \dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge \mathbf{QP} + \boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{QP}) \end{aligned}$$

Ce développement étant indépendant du point Q choisi, on peut choisir $Q \equiv C$. Ceci est judicieux puisque pour tout instant t :

$$\mathbf{a}_C(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{v}_C) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{R}{R-r}\,\mathbf{v}_0\right) = \mathbf{0}$$

En outre, de ce qui précède, on sait que :

$$\boldsymbol{\omega}(t) = -\frac{v_0}{R-r}\,\mathbf{e}_3 \qquad \forall\, t \qquad \Rightarrow \qquad \dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{0}$$

Ainsi $\mathbf{a}_A$ et $\mathbf{a}_B$ deviennent :

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_A &= \boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{CA}) = -\omega^2\,R\;\mathbf{e}_3 \wedge (\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_2) = \omega^2\,R\;\mathbf{e}_2 = \left(\frac{v_0}{R-r}\right)^2 R\,\mathbf{e}_2 \\ \mathbf{a}_B &= \boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{CB}) = -\omega^2\,r\;\mathbf{e}_3 \wedge (\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_2) = \omega^2\,r\;\mathbf{e}_2 = \left(\frac{v_0}{R-r}\right)^2 r\,\mathbf{e}_2 \end{aligned}$$

Noter que ces valeurs pour $\mathbf{a}_A$ et $\mathbf{a}_B$ ne sont vraies qu'à l'instant où A touche le sol.