



ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

19 décembre 2008
cours de la semaine # 14

Bienvenue au



EPFL - LABORATOIRE
D'ASTROPHYSIQUE

Cours de physique générale

Physique I pour étudiants de première année
en section de mathématiques

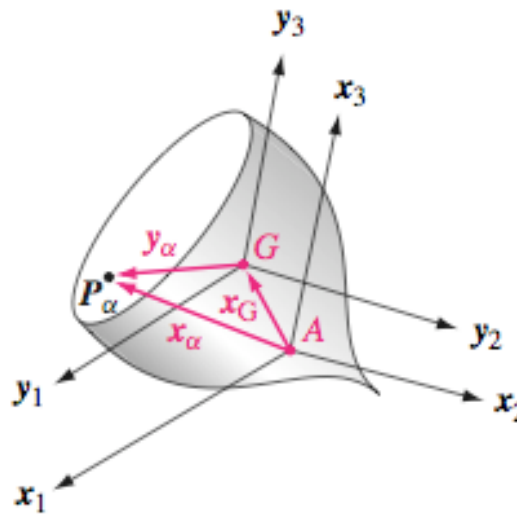
Prof. Georges Meylan

Laboratoire d'astrophysique

Site web du laboratoire et du cours :

<http://lastro.epfl.ch>

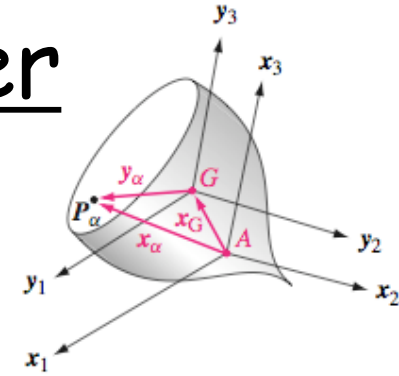
Théorème de Huygens-Steiner



Connaissant le tenseur d'inertie d'un solide par rapport à son centre de masse G (pour les solides de formes simples, on les trouve dans des tables), le théorème de Huygens-Steiner permet alors d'obtenir le tenseur d'inertie relativement à n'importe quel point A du solide

Théorème de Huygens-Steiner

- Par rapport à un point A quelconque :



$$\begin{aligned}
 (\tilde{I}_A)_{ij} &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[\overrightarrow{AP_{\alpha}}^2 \delta_{ij} - (AP_{\alpha})_i (AP_{\alpha})_j \right] \\
 &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[\left(\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GP_{\alpha}} \right)^2 \delta_{ij} - \left((AG)_i + (GP_{\alpha})_i \right) \left((AG)_j + (GP_{\alpha})_j \right) \right] \\
 &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[\left(\overrightarrow{AG}^2 + \overrightarrow{GP_{\alpha}}^2 + 2 \overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{GP_{\alpha}} \right) \delta_{ij} \right. \\
 &\quad \left. - (AG)_i (AG)_j - (GP_{\alpha})_i (GP_{\alpha})_j - (AG)_i (GP_{\alpha})_j - (GP_{\alpha})_i (AG)_j \right] \\
 &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[\overrightarrow{GP_{\alpha}}^2 \delta_{ij} - (GP_{\alpha})_i (GP_{\alpha})_j \right] + \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[\overrightarrow{AG}^2 \delta_{ij} - (AG)_i (AG)_j \right]
 \end{aligned}$$

$$(\tilde{I}_A)_{ij} = (\tilde{I}_G)_{ij} + M \left[\overrightarrow{AG}^2 \delta_{ij} - (AG)_i (AG)_j \right]$$

= tenseur d'inertie au point A
d'une masse M au point G

permet de calculer
le tenseur d'inertie
au point A quelconque
connaissant celui
au centre de masse G

Théorème de Huygens-Steiner (applications)

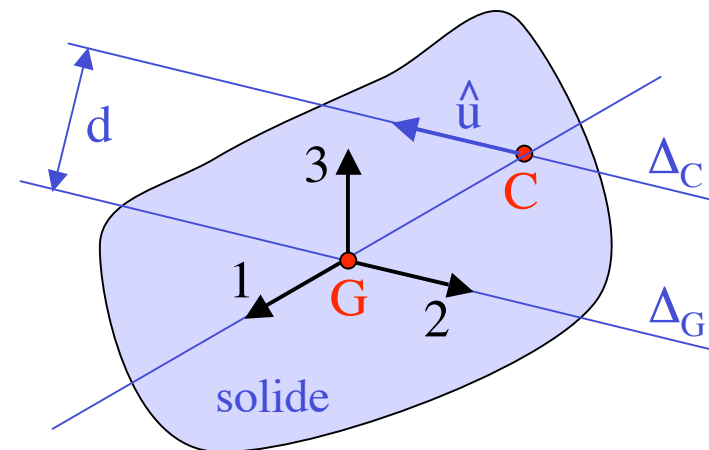
- Formule de Steiner pour les moments d'inertie :
 - Δ_C = axe de direction \hat{u} passant par un point C quelconque
 - Δ_G = axe de direction \hat{u} passant par le centre de masse G
 - d = distance entre les deux axes Δ_C et Δ_G

$$I_{\Delta_C} = \sum_{i,j} (\tilde{I}_C)_{ij} u_i u_j = \sum_{i,j} (\tilde{I}_G)_{ij} u_i u_j + \sum_{i,j} M \left[\overline{CG}^2 u_i u_j \delta_{ij} - (CG)_i u_i (CG)_j u_j \right]$$

$$= I_{\Delta_G} + M \left[\overline{CG}^2 - (\overline{CG} \cdot \hat{u})^2 \right]$$

$$I_{\Delta_C} = I_{\Delta_G} + M d^2$$

= moment d'inertie d'une masse M à une distance d de Δ_C



- Axes principaux :

Si les axes Δ_G et CG sont des axes principaux d'inertie au point G alors les axes Δ_C et CG sont des axes principaux d'inertie au point C

Problème de la meule

Démo : Moulin à gyroscope # 224

- Description et hypothèses :

- Meule : disque mince de masse M , rayon R , centre de masse G
- Axe de la meule CG : horizontal, sans masse, longueur d
- Roulement sans glissement sur le sol avec point C fixe sur un axe vertical
- ω = rotation propre de la meule, Ω = rotation autour de l'axe vertical

- Vecteur instantané de rotation total = $\vec{\omega} + \vec{\Omega}$

$$\begin{cases} 0 = \vec{v}_A = \vec{v}_G + (\vec{\omega} + \vec{\Omega}) \wedge \overrightarrow{GA} \\ 0 = \vec{v}_C = \vec{v}_G + (\vec{\omega} + \vec{\Omega}) \wedge \overrightarrow{GC} \end{cases} \quad \text{pas de glissement}$$

$$\Rightarrow (\vec{\omega} + \vec{\Omega}) \wedge \overrightarrow{GA} = (\vec{\omega} + \vec{\Omega}) \wedge \overrightarrow{GC}$$

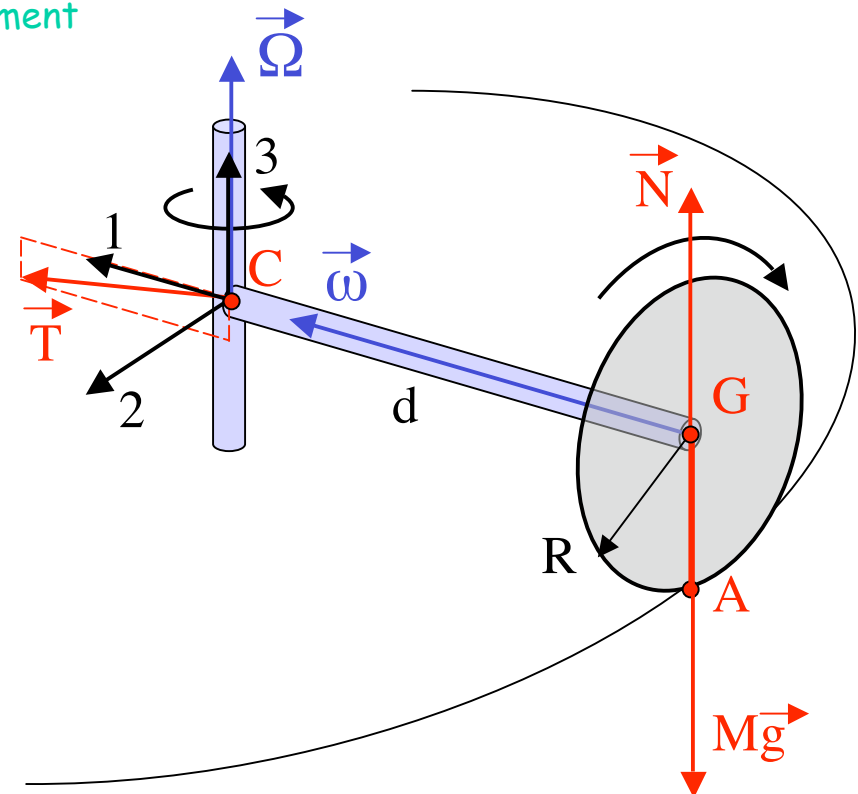
$$\Rightarrow \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{GA} = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{GC}$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega R = \Omega d}$$

- Equations du mouvement :

$$\boxed{\frac{d\vec{p}}{dt} = M\dot{\vec{v}}_G = \vec{T} + \vec{N} + M\vec{g}}$$

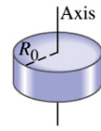
$$\boxed{\frac{d\vec{L}_C}{dt} = \vec{M}_C^{\text{ext}} = \overrightarrow{CG} \wedge (\vec{N} + M\vec{g})}$$



Problème de la meule (suite)

Démo : Moulin à gyroscope # 224

- Tenseur d'inertie :
(dans repère d'inertie d'axes 1, 2, et 3, en rotation avec l'axe de la meule autour de 3)



$$(\tilde{\mathbf{I}}_C)_{ij} = (\tilde{\mathbf{I}}_G)_{ij} + M \left[\overline{\mathbf{CG}}^2 \delta_{ij} - (\mathbf{CG})_i (\mathbf{CG})_j \right]$$

$$\tilde{\mathbf{I}}_C = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}MR^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}MR^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4}MR^2 \end{pmatrix} + M \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & d^2 & 0 \\ 0 & 0 & d^2 \end{pmatrix}$$

- Moment cinétique :

$$\vec{\mathbf{L}}_C = \tilde{\mathbf{I}}_C \cdot (\vec{\omega} + \vec{\Omega}) = (\tilde{\mathbf{I}}_C)_{11} \vec{\omega} + (\tilde{\mathbf{I}}_C)_{33} \vec{\Omega}$$

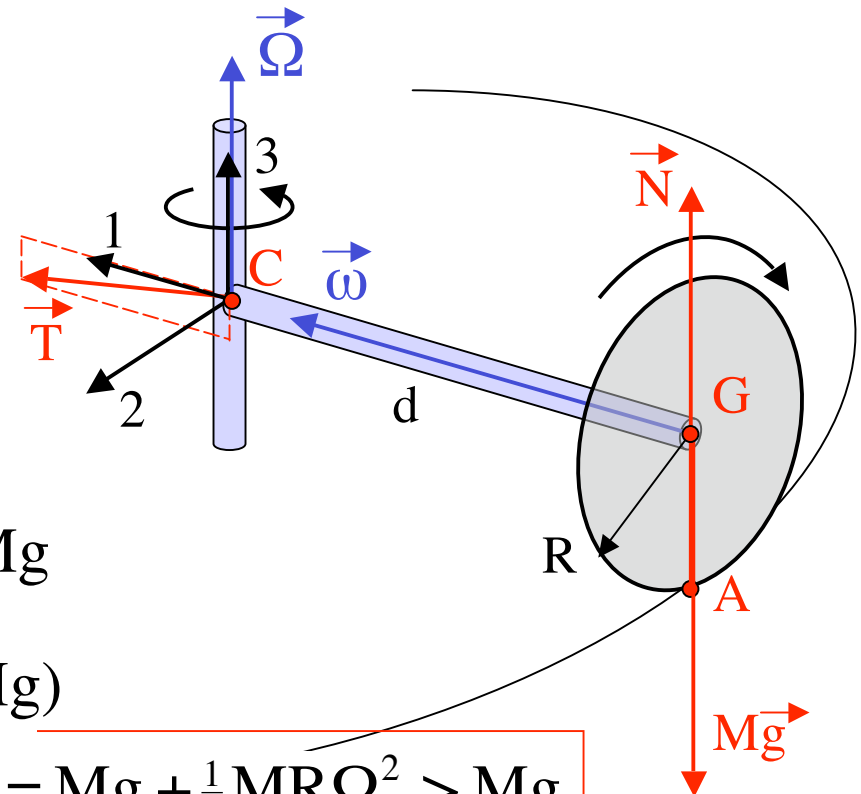
$$\Rightarrow \frac{d\vec{\mathbf{L}}_C}{dt} = (\tilde{\mathbf{I}}_C)_{11} \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{1}{2}MR^2 \vec{\Omega} \wedge \vec{\omega}$$

- Equations du mouvement :

$$M\dot{\vec{v}}_G = \sum \vec{F} \Rightarrow \begin{cases} M\Omega^2 d = T_1 \\ 0 = T_2 \\ 0 = T_3 + N - Mg \end{cases}$$

$$\frac{d\vec{\mathbf{L}}_C}{dt} = \vec{\mathbf{M}}_C^{\text{ext}} \Rightarrow \frac{1}{2}MR^2\Omega\omega = d(N - Mg)$$

$$\Rightarrow \boxed{N = Mg + \frac{1}{2}MR^2\Omega\frac{\omega}{d} = Mg + \frac{1}{2}MR\Omega^2 > Mg}$$



- Donc, en prenant le cas $I_1 = (1/2) m R^2$, nous obtenons finalement :

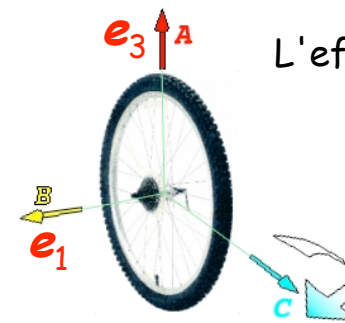
$$\Rightarrow N = Mg + \frac{1}{2} MR\Omega^2 > Mg$$

- A titre d'illustration, considérons le cas $R = 50 \text{ cm}$ et $\Omega = 1 \text{ t/s}$:
la réaction du sol sera alors le double du poids. $\omega = (2\pi)/T = 2\pi f$
- Grâce à cet effet gyroscopique, la force exercée par la meule sur le sol est supérieure au poids de la meule.

Exemple de la moto

- Remarque : L' **effet gyroscopique** apparaît lorsqu'une roue est soumise à deux rotations d'axes perpendiculaires (ici e_3 et e_1).
- Mentionnons que dans le cas d'un virage effectué sur une **moto**, cet effet gyroscopique s'additionne à l'effet centrifuge et contribue à la stabilité du mvt.

- **A** : 1er axe de rotation (vitesse constante)
- **B** : 2e axe de rotation (axe de rotation de la roue, vitesse constante)
- **C** : Axe d'application de l'effet gyroscopique



L'effet gyroscopique des roues lors d'un virage aura tendance à diminuer l'inclinaison de la moto

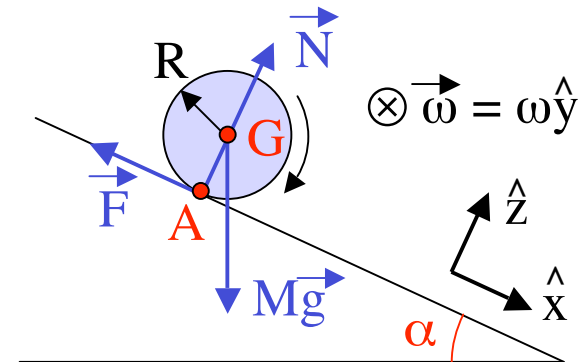
Roulement sans glissement sur plan incliné

• **Cylindre de révolution roulant sans glisser :**

$$\Rightarrow v_A = 0 \Rightarrow v_G = \omega R$$

• **Moment d'inertie :** $I_{G,y} = k MR^2$

- $k =$ nombre caractérisant la « forme », indépendamment de la masse et de la dimension
 - $k = 1/2$ si cylindre homogène plein
 - $k = 1$ si cylindre homogène vide



• **Moment cinétique :**

$$\vec{L}_G = I_{G,y} \vec{\omega}, \quad L_G = I_{G,y} \omega = kMR^2 \frac{v_G}{R} = kRMv_G$$

• **Equations du mouvement :**

$$M\vec{a}_G = M\vec{g} + \vec{N} + \vec{F} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} Ma_G = Mg \sin\alpha - F \\ 0 = 0 \\ 0 = N - Mg \cos\alpha \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} N = Mg \cos\alpha \\ F = Mg \sin\alpha \frac{k}{k+1} \\ a_G = \frac{g \sin\alpha}{k+1} \end{array} \right.$$

$$\frac{d\vec{L}_G}{dt} = \vec{M}_G \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 0 = 0 \\ kRMa_G = FR \\ 0 = 0 \end{array} \right.$$

- Accélération a_G ne dépend que de k , pas de M ni de R !

a_G (cylindre creux)
inférieure
 a_G (cylindre plein)

Démo : Cylindres roulants sur plan incliné # 60

Energie cinétique d'un solide

- Pour un point A quelconque du solide :

$$\begin{aligned}
 E_{\text{cin}} &= \sum_{\alpha} \frac{1}{2} m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha}^2 = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left(\vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AP_{\alpha}} \right)^2 \\
 &= \frac{1}{2} M \vec{v}_A^2 + M \vec{v}_A \cdot \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AG} \right) + \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AP_{\alpha}} \right)^2 \\
 \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AP_{\alpha}} \right)^2 &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[\vec{\omega}^2 \overrightarrow{AP_{\alpha}}^2 - \left(\vec{\omega} \cdot \overrightarrow{AP_{\alpha}} \right)^2 \right] \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[\sum_{i,j} \omega_i \omega_j \delta_{ij} \overrightarrow{AP_{\alpha}}^2 - \sum_{i,j} \omega_i \omega_j \left(AP_{\alpha} \right)_i \left(AP_{\alpha} \right)_j \right] \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{i,j} \omega_i \omega_j \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[\overrightarrow{AP_{\alpha}}^2 \delta_{ij} - \left(AP_{\alpha} \right)_i \left(AP_{\alpha} \right)_j \right] \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{i,j} \omega_i \omega_j \left(\tilde{I}_A \right)_{ij} = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{L}_A = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \left(\tilde{I}_A \cdot \vec{\omega} \right)
 \end{aligned}$$

$$E_{\text{cin}} = \frac{1}{2} M \vec{v}_A^2 + \underbrace{M \vec{v}_A \cdot \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AG} \right)}_{=0 \text{ si } A=G \text{ (centre de masse) ou si } v_A=0 \text{ (point fixe)}} + \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \left(\tilde{I}_A \cdot \vec{\omega} \right)$$

Si rotation selon axe principal d'inertie Δ par un point fixe :

$$E_{\text{cin}} = \frac{1}{2} I_{\Delta} \omega^2$$

Roulement sans glissement sur pente

- Energie cinétique (en utilisant le point A) :

$$E_{\text{cin}} = \frac{1}{2} I_{A,y} \omega^2 = \frac{1}{2} (I_{G,y} + MR^2) \omega^2$$

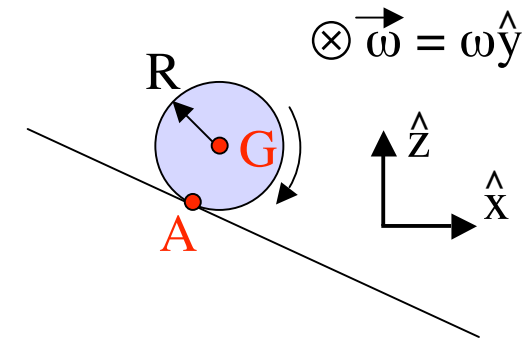
- Energie cinétique (en utilisant le point G) :

$$E_{\text{cin}} = \frac{1}{2} M v_G^2 + \frac{1}{2} I_{G,y} \omega^2 = \frac{1}{2} MR^2 \omega^2 + \frac{1}{2} I_{G,y} \omega^2$$

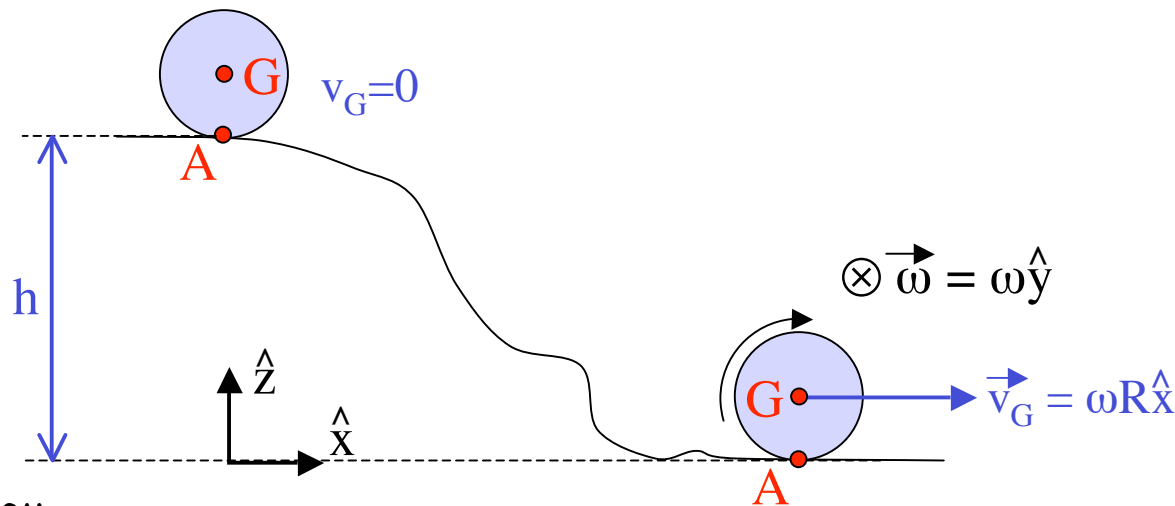
- Energie mécanique totale :

$$E_{\text{tot}} = E_{\text{cin}} + E_{\text{pot}} = \frac{1}{2} I_{A,y} \omega^2(t) + Mgz_G(t) = \text{constante}$$

- Exemple :



la force de frottement
en A ne travaille pas !
($v_A=0$)



$$E_{\text{tot}} = Mgh = \frac{1}{2} I_{A,y} \omega^2$$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{2Mgh}{I_{A,y}}}$$

Dynamique du solide avec axe fixe

- Quand un axe de rotation Δ est fixe (et que l'on ne s'intéresse ni aux forces ni aux moments qui maintiennent cet axe fixe), il est utile de projeter le théorème du moment cinétique sur cet axe :

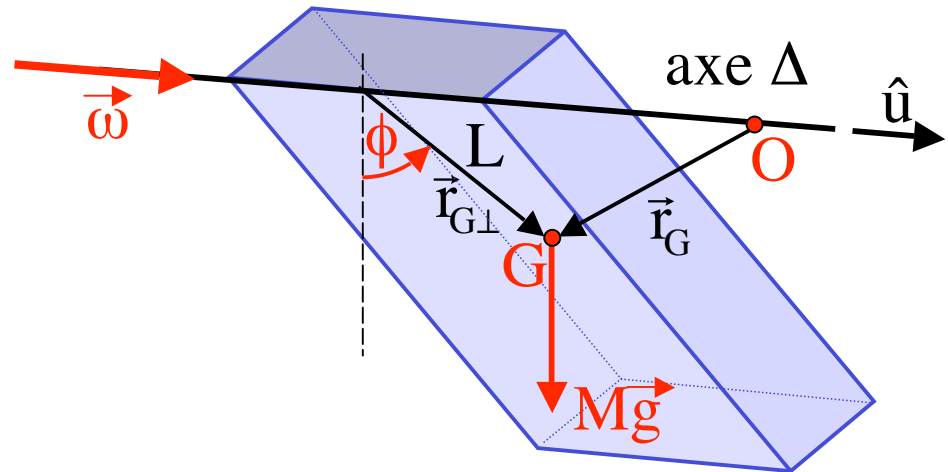
- Pour tout point O sur l'axe Δ de direction \hat{u}

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \vec{L}_O &= \vec{M}_O^{\text{ext}} \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} (\vec{L}_O \cdot \hat{u}) &= \vec{M}_O^{\text{ext}} \cdot \hat{u} \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} (I_\Delta \dot{\phi}) &= \sum_\alpha (\vec{r}_\alpha \wedge \vec{F}_\alpha^{\text{ext}}) \cdot \hat{u} \\ \Rightarrow I_\Delta \dot{\phi} &= \sum_\alpha (\vec{r}_{\alpha,\perp} \wedge \vec{F}_{\alpha,\perp}^{\text{ext}}) \cdot \hat{u} \end{aligned}$$

où $\vec{r}_{\alpha,\perp}$ et $\vec{F}_{\alpha,\perp}^{\text{ext}}$ sont les composantes de \vec{r}_α et $\vec{F}_\alpha^{\text{ext}}$ perpendiculaires à \hat{u}

Démo : Pendule physique # 65

- Exemple : pendule physique = solide soumis à la pesanteur et libre de se mouvoir autour d'un axe fixe horizontal



$$I_\Delta \dot{\phi} = \sum_\alpha (\vec{r}_{\alpha,\perp} \wedge m_\alpha \vec{g}) \cdot \hat{u}$$

$$I_\Delta \ddot{\phi} = (\vec{r}_{G,\perp} \wedge M\vec{g}) \cdot \hat{u} = -L Mg \sin\phi$$

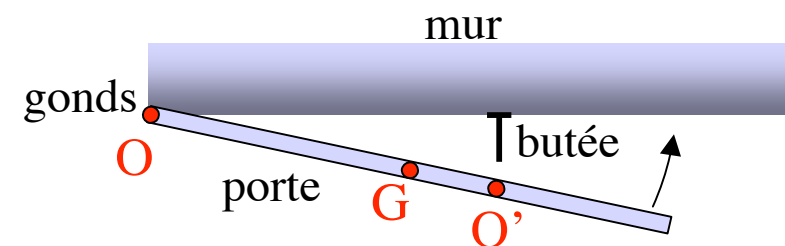
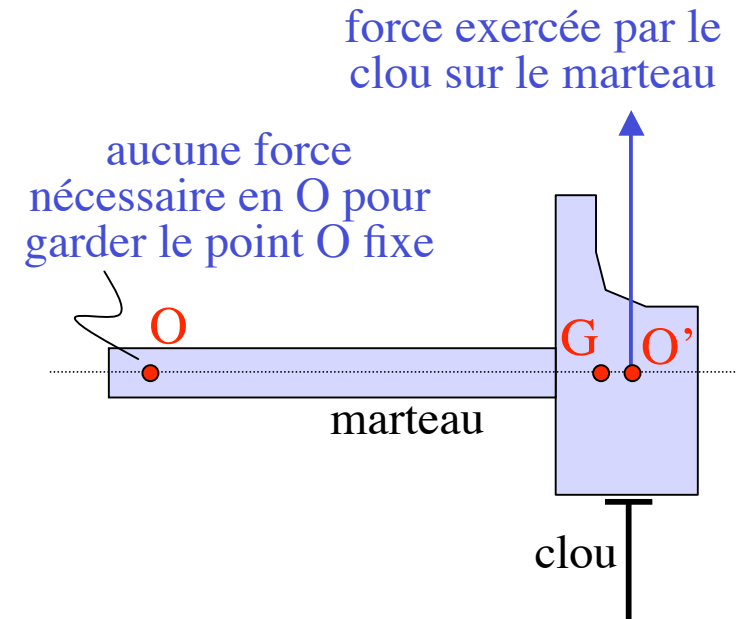
$$\ddot{\phi} = -\frac{L Mg}{I_\Delta} \sin\phi$$

- Si toute la masse M est en G ($I_\Delta = ML^2$): $\ddot{\phi} = -\frac{g}{L} \sin\phi$

Démo : Pendule simple # 483

Dynamique du solide avec axe fixe (suite)

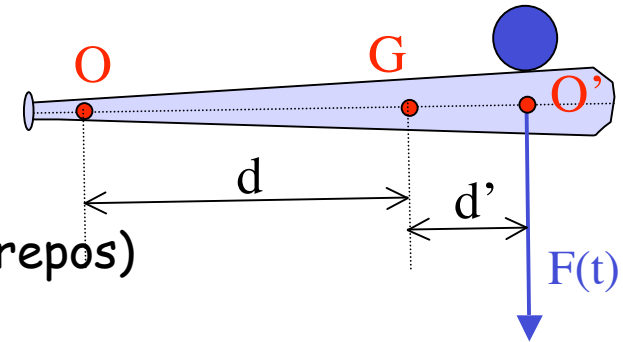
- Solide libre de tourner autour d'un axe fixe passant par O
- **Centre de percussion :**
 - point O' sur la droite OG tel qu'un choc (percussion) appliqué en ce point (perpendiculairement à OG) n'engendre aucune réaction (répercussion) de l'axe de rotation sur le solide
- **Exemples et applications :**
 - Marteau :
 - où le tenir ?
 - Batte de baseball :
 - où frapper la balle ?
 - Butée de porte :
 - où l'installer ?



butée placée au centre de percussion :
attention aux gonds

Calcul du centre de percussion

- Batte de baseball frappée par une balle avec une force $F(t)$ au centre de percussion O' par rapport à l'emplacement des mains en O :



- Juste avant le choc ($t=0$): $v_G=0, \omega=0$ (batte au repos)
- Juste après le choc ($t=\Delta t$): $v_G = \omega d \neq 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \Rightarrow \Delta\vec{p} = \int_{t=0}^{\Delta t} \vec{F}(t) dt \Rightarrow Mv_G = \int_{t=0}^{\Delta t} F(t) dt \\ \frac{d\vec{L}_G}{dt} = \vec{M}_G^{\text{ext}} \Rightarrow \Delta\vec{L}_G = \int_{t=0}^{\Delta t} \vec{M}_G^{\text{ext}}(t) dt \Rightarrow I_G\omega = d' \int_{t=0}^{\Delta t} F(t) dt \end{array} \right\} \Rightarrow Mv_G d' = I_G\omega$$

$$\Downarrow$$

$I_G = Mdd'$

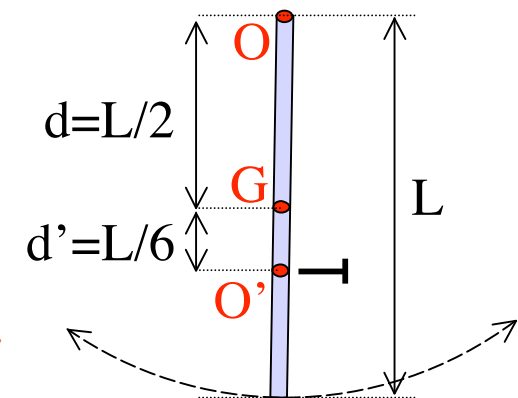
Démo : Centre de percussion à répercussion nulle (pendule) # 88

- Pendule physique interrompu dans sa course :

- Point O à l'extrémité d'une barre mince homogène de masse M et de longueur L :

$$\frac{1}{12}ML^2 = I_G = Mdd' = M\frac{L}{2}d' \Rightarrow d' = \frac{L}{6}$$

Pour frapper un solide sans se faire mal au poignet (marteau, etc...), il faut tenir le solide à une distance $a = d + d'$ du point de choc.



Axes en rotation : équations d'Euler

- C = point fixe du solide (ou centre de masse) $\Rightarrow \frac{d\vec{L}_C}{dt} = \vec{M}_C^{\text{ext}}$
- $\hat{e}_1 \hat{e}_2 \hat{e}_3$ = repère d'inertie au point C (lié au solide)

$$\vec{L}_C = \sum_i L_i \hat{e}_i \quad \text{avec} \quad L_i = I_i \omega_i$$

I_i = moments d'inertie principaux

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}_C}{dt} &= \sum_i (\dot{L}_i \hat{e}_i + L_i \dot{\hat{e}}_i) = \sum_i (I_i \dot{\omega}_i \hat{e}_i + L_i \vec{\omega} \wedge \hat{e}_i) = \sum_i I_i \dot{\omega}_i \hat{e}_i + \vec{\omega} \wedge \vec{L}_C \\ &= \begin{pmatrix} I_1 \dot{\omega}_1 \\ I_2 \dot{\omega}_2 \\ I_3 \dot{\omega}_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} I_1 \omega_1 \\ I_2 \omega_2 \\ I_3 \omega_3 \end{pmatrix} \quad \left(\text{Note: } \frac{d\vec{L}_C}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{L}_C \Leftrightarrow \omega_i \text{ constants} \right) \end{aligned}$$

- Théorème du moment cinétique par rapport à C , en composantes dans le repère d'inertie :

$$\begin{aligned} I_1 \dot{\omega}_1 - (I_2 - I_3) \omega_2 \omega_3 &= M_{C,1}^{\text{ext}} \\ I_2 \dot{\omega}_2 - (I_3 - I_1) \omega_3 \omega_1 &= M_{C,2}^{\text{ext}} \\ I_3 \dot{\omega}_3 - (I_1 - I_2) \omega_1 \omega_2 &= M_{C,3}^{\text{ext}} \end{aligned}$$

équations d'Euler

équations différentielles couplées pour $\omega_1(t)$, $\omega_2(t)$ et $\omega_3(t)$