



ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

12 décembre 2008
cours de la semaine # 13

Bienvenue au



EPFL - LABORATOIRE
D'ASTROPHYSIQUE

Cours de physique générale

Physique I pour étudiants de première année
en section de mathématiques

Prof. Georges Meylan

Laboratoire d'astrophysique

Site web du laboratoire et du cours :

<http://lastro.epfl.ch>

Exercices et questions

Vendredi 19 décembre 2008

pas de séance d'exercices

mais *séance de questions* après le cours

dans les salles d'exercices avec les assistants

Séance de questions

Une semaine avant l'examen

Vendredi 16 janvier 2009

de 14h15 à 18h00

Auditoire CM3

Séance de questions

Deux semaines avant l'examen

Vendredi 9 janvier 2009

de 14h15 à 18h00

Auditoire CM3

a

Examen écrit de Physique générale I

Date : vendredi 23 janvier 2009
Heure : de 08h15 à 12h00
Lieu : dans les auditorios CE3 et CE4

Conditions d'examen :

- Les données des problèmes à résoudre sont distribuées en début d'examen, i.e., à 08h15, dans une enveloppe
- Les solutions rédigées sont à rendre au plus tard à la fin de l'examen, i.e., à 12h00, avec les énoncés dans l'enveloppe
- Matériel autorisé : papier vierge, pas de crayon, stylo, formulaire personnel manuscrit (maximum d'une feuille A4 double face)
- Calculatrice non programmable ; pas d'autre matériel autorisé
- Travail individuel en silence
- Aucune interaction autorisée entre les étudiants pendant l'examen

b

Examen écrit de Physique générale I

Répartition dans les auditorios

Vous êtes répartis,
selon votre nom de famille,
dans les deux auditorios CE3 et CE4 :

CE3 Abu-Nijmeh - Karrakchou

CE4 Kneubühler - Zwahlen

Un plan de placement sera affiché sur les portes de chaque auditorio.

Dans l'auditorio correspondant, vous trouverez
votre nom sur une petite « carte de visite », à votre place,
avec une enveloppe contenant les énoncés des exercices.

A la fin de l'examen, vous rendez l'énoncé dans l'enveloppe avec,
en plus, vos solutions et la « carte de visite ».

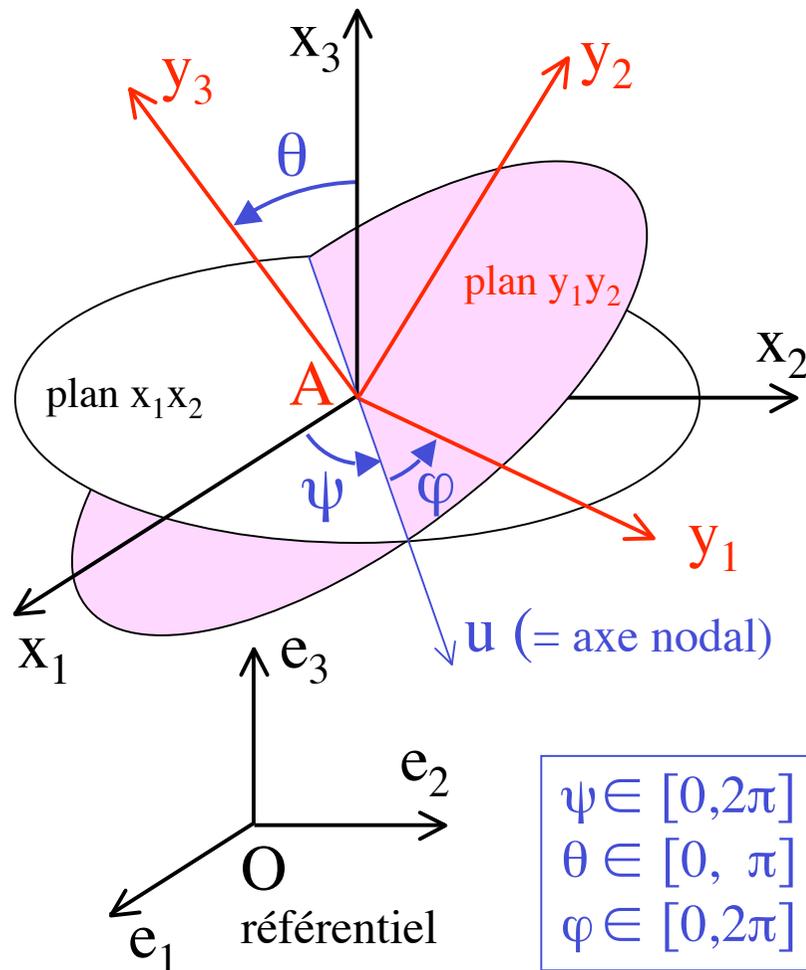
Les trois angles d'Euler

- Les mathématiques offrent plusieurs façons de décrire des rotations en 3 dimensions.
- En physique, on utilise souvent les angles d'Euler.

Toute rotation est alors décomposée
en rotations successives autour des trois axes
de coordonnées cartésiennes

Position d'un solide et angles d'Euler

- Repère lié au référentiel $Oe_1e_2e_3$
- Repère lié au solide $Ay_1y_2y_3$
- Repère $Ax_1x_2x_3$ tel que $x_i // e_i$



- La position d'un point P du solide est donnée par :

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} = \sum_i a_i(t) \hat{e}_i + \sum_i y_i \hat{y}_i(t)$$

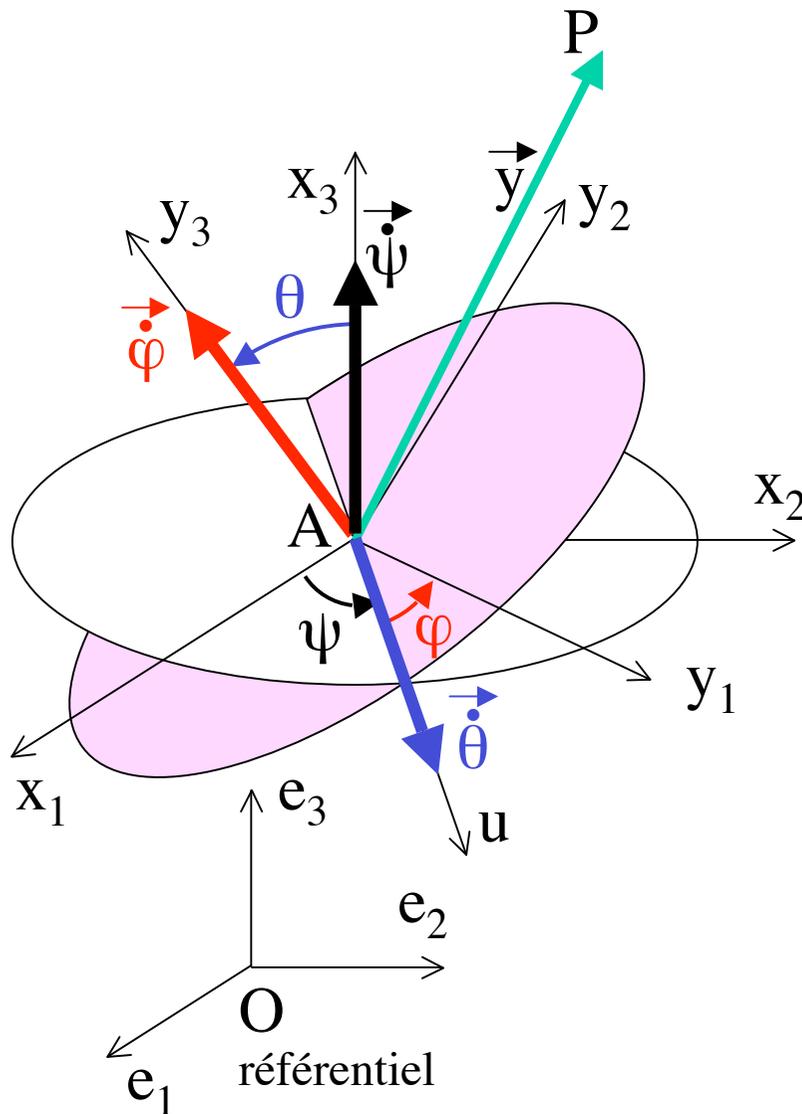
c'est-à-dire par les trois coordonnées du point A dans le repère $Oe_1e_2e_3$ et par l'orientation du repère $Ay_1y_2y_3$ par rapport au repère $Ax_1x_2x_3$.

- Cette orientation peut être caractérisée par les **trois angles d'Euler** (ψ, θ, ϕ) : on passe de $Ax_1x_2x_3$ à $Ay_1y_2y_3$ par les trois rotations successives suivantes :

- Rotation d'angle ψ autour de l'axe x_3 amenant x_1 sur u (=axe nodal)
- Rotation d'angle θ autour de l'axe u amenant x_3 sur y_3
- Rotation d'angle ϕ autour de l'axe y_3 amenant u sur y_1

$\vec{\omega}$ en fonction des angles d'Euler

Démos : Gyroscope à air # 770
Roue suspendue à un fil # 50



- Un point P du solide est fixe par rapport au repère $Ay_1y_2y_3$ lié au solide :

$$\overline{AP} \cdot \hat{y}_i = \text{constante}$$

- Vitesse de P par rapport à $Oe_1e_2e_3$:

$$\vec{v}_P = \vec{v}_A + \frac{d}{dt} \overline{AP} = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \overline{AP}$$

- Vitesse de P par rapport à $Ax_1x_2x_3$:

$$\frac{d}{dt} \underbrace{\overline{AP}}_{\vec{y}} = \frac{d\vec{y}}{dt} = \underbrace{\frac{\partial \vec{y}}{\partial \psi}}_{\vec{v}_\psi} \dot{\psi} + \underbrace{\frac{\partial \vec{y}}{\partial \theta}}_{\vec{v}_\theta} \dot{\theta} + \underbrace{\frac{\partial \vec{y}}{\partial \varphi}}_{\vec{v}_\varphi} \dot{\varphi}$$

- vitesse de P si ψ varie seul: $\vec{v}_\psi = \dot{\psi} \hat{x}_3 \wedge \overline{AP}$
- vitesse de P si θ varie seul: $\vec{v}_\theta = \dot{\theta} \hat{u} \wedge \overline{AP}$
- vitesse de P si φ varie seul: $\vec{v}_\varphi = \dot{\varphi} \hat{y}_3 \wedge \overline{AP}$

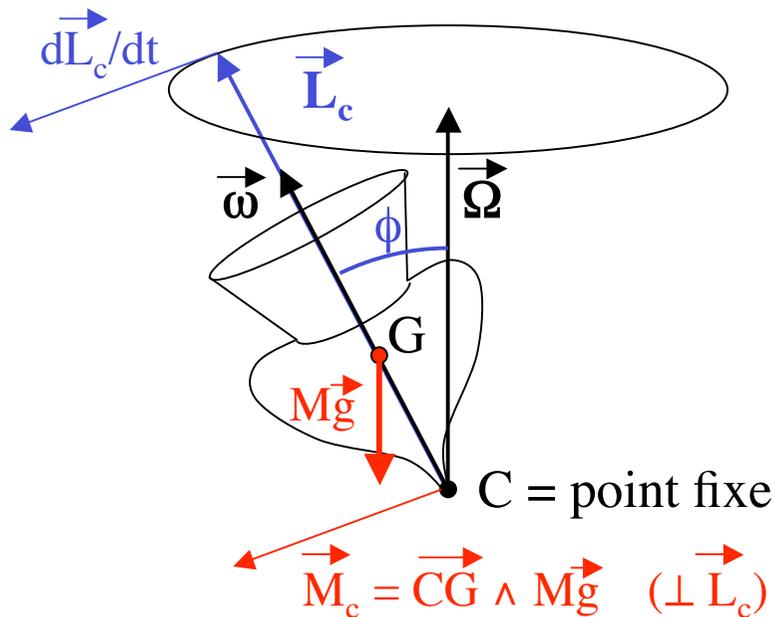
- Donc : $\vec{\omega} = \dot{\psi} \hat{x}_3 + \dot{\theta} \hat{u} + \dot{\varphi} \hat{y}_3 = \vec{\dot{\psi}} + \vec{\dot{\theta}} + \vec{\dot{\varphi}}$

$\vec{\dot{\psi}}$ = vitesse angulaire de précession

$\vec{\dot{\theta}}$ = vitesse angulaire de nutation

$\vec{\dot{\varphi}}$ = vitesse angulaire de rotation propre

Exemple d'utilisation de l'équation : $\vec{M}_C = \frac{d\vec{L}_C}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \vec{L}_C$



- Soit une toupie symétrique de masse M tournant rapidement autour de son axe de symétrie, de vitesse angulaire ω posée en équilibre sur sa pointe au point C dans un référentiel d'inertie.
- Si l'axe de symétrie de la toupie décrit un angle ϕ avec l'axe z , cet axe de symétrie de la toupie va décrire un cône autour de l'axe z vertical.
- Ce type de mvt, dans lequel un moment de force induit un changement dans la direction de l'axe de rotation est appelé « précession », dont la vitesse angulaire est appelée Ω .

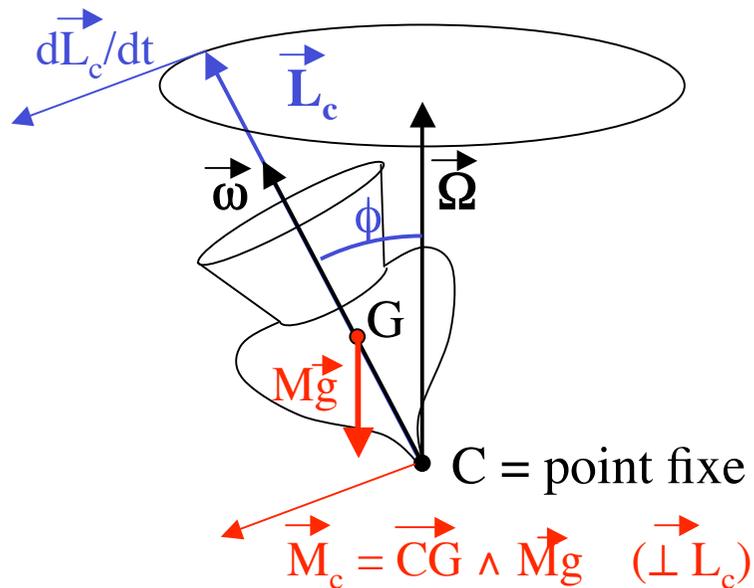
Quelle est la raison de ce mouvement ?

Exemple d'utilisation de l'éq. : $\vec{M}_C = \frac{d\vec{L}_C}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \vec{L}_C$ (suite)

Absence de rotation \Rightarrow la toupie tombe

Présence de rotation \Rightarrow pas de chute mais précession

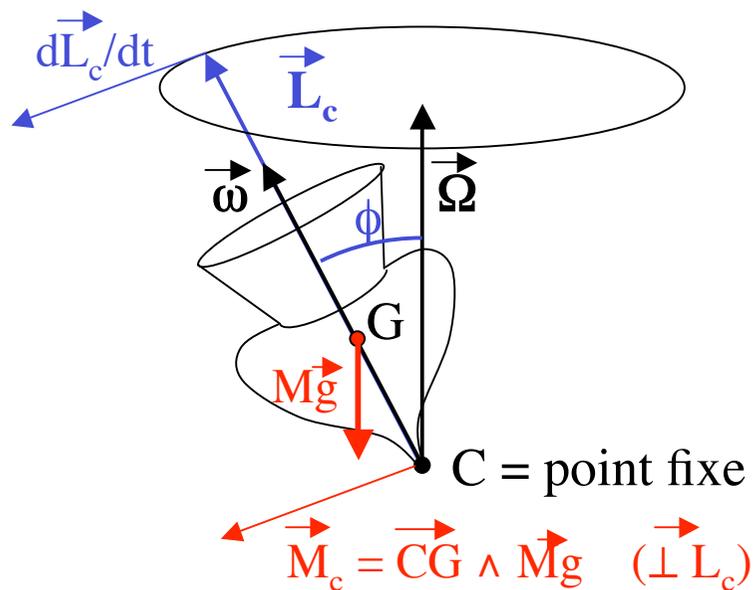
Démo : Roue suspendue à un fil # 50



- Toupie en rotation \Rightarrow vitesse angulaire ω et moment cinétique L_c le long de son axe de symétrie
- Sans moment de force $\Leftrightarrow M_c = 0 \Leftrightarrow L_c = \text{cte}$ en grandeur et en direction \Rightarrow pas de chute, pas de précession
- Le plus petit moment de force par rapport à $C \Rightarrow M_c = \vec{CG} \wedge \vec{Mg}$ avec $M =$ masse toupie
- La direction de M_c est \perp à \vec{CG} et \vec{g}
- Le chgt de L_c durant dt est horizontal, \perp à L_c et \parallel à M_c

$$\vec{M}_C = \frac{d\vec{L}_C}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \vec{L}_C$$

Exemple d'utilisation de l'éq. : $\vec{M}_C = \frac{d\vec{L}_C}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \vec{L}_C$ (suite)



- Comme $d\vec{L}_c \perp \vec{L}_c \Rightarrow$ la grandeur de $\vec{L}_c = \text{cte}$, seule la direction de \vec{L}_c change, $\vec{L}_c \parallel \vec{\omega}$, seul l'axe de rotation de la toupie bouge
- La partie supérieure de l'axe de rotation bouge horizontalement, perpendiculairement à $\vec{L}_c \Rightarrow$ **pas de chute mais précession**
- \vec{L}_c et l'axe de la toupie décrivent un cône
- \vec{M}_c et $d\vec{L}_c$ tournent également, horizontaux et perpendiculaires à \vec{L}_c

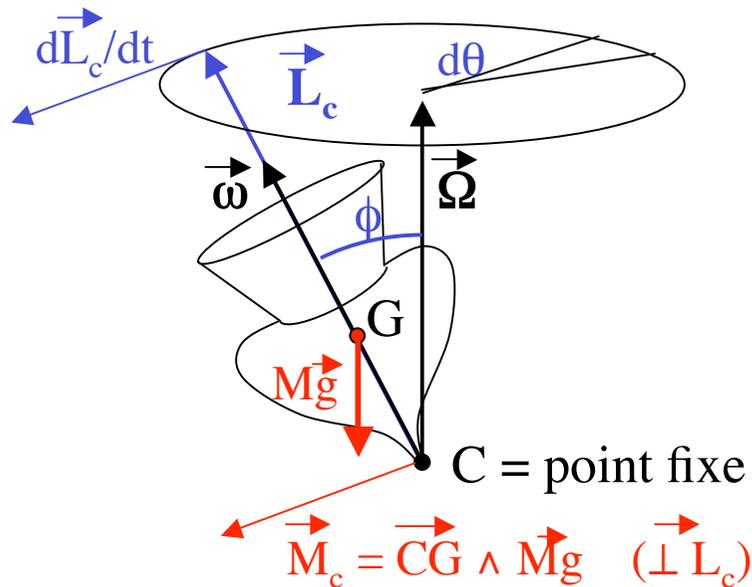
Exemple d'utilisation de l'éq. : $\vec{M}_C = \frac{d\vec{L}_C}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \vec{L}_C$ (suite)

Déterminons Ω = vitesse angulaire de précession :

$$d\theta \Rightarrow dL_c = L_c \sin \phi d\theta \quad (\text{relation entre } dL_c \text{ et } d\theta)$$

$$\Omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{dL_c / L_c \sin \phi}{dt} = \frac{1}{L_c \sin \phi} \frac{dL_c}{dt} = \frac{M_c}{L_c \sin \phi}$$

Mais $M_c = |\vec{CG} \wedge \vec{Mg}| = CG M g \sin \phi$ car $\sin(\pi - \phi) = \sin \phi$



$$\Omega = \frac{CG M g \sin \phi}{L_c \sin \phi} = \frac{CG M g}{L_c} = \frac{CG M g}{I_\Delta \omega}$$

La vitesse de précession ne dépend pas de l'angle ϕ ,
mais est inversement proportionnelle au moment angulaire de la toupie :

$$L_c \nearrow \Leftrightarrow \Omega \searrow$$

Plus la toupie tourne vite, plus la précession est lente

Effets gyroscopiques (3)

Démos : Gyroscope à roue de vélo sur support # 42
Anagyre # 175

- Toupie symétrique avec un point fixe :
 - Le moment du poids par rapport au point fixe est constamment perpendiculaire au moment cinétique (supposé selon l'axe de rotation propre) \Rightarrow la norme du moment cinétique reste constante : $L_c = I_{\Delta} \omega$
 - L'axe de rotation propre a un **mouvement de précession** autour de l'axe vertical (de vitesse angulaire Ω)

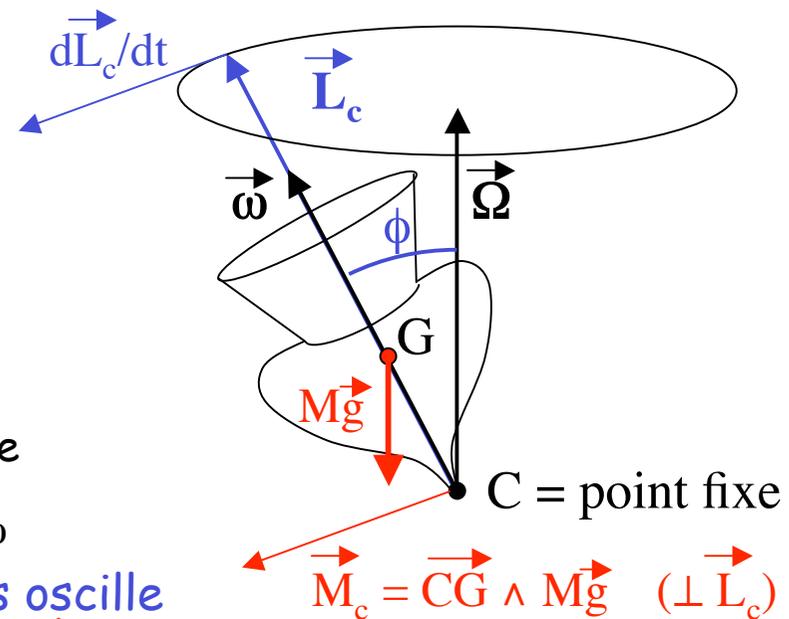
$$\vec{M}_C = \frac{d\vec{L}_C}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \vec{L}_C$$

$$\overline{CG} Mg \sin\phi = \Omega L_C \sin\phi$$

$$\Omega = \frac{Mg \overline{CG}}{L_C} = \frac{Mg \overline{CG}}{I_{\Delta} \omega}$$

- Note : on a négligé le moment cinétique causé par la rotation Ω !
Résultat approximatif valable si $\Omega \ll \omega$

- Cas général : ϕ n'est pas constant mais oscille entre deux extrêmes et un **mouvement de nutation** se superpose encore au **mouvement de précession**



- Toupie sans point d'appui fixe, avec frottement sur le sol

Tenseur d'inertie

- Déjà vu : **moment cinétique par rapport au centre de masse G** :

$$\vec{L}_G = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[\overrightarrow{GP_{\alpha}}^2 \vec{\omega} - (\overrightarrow{GP_{\alpha}} \cdot \vec{\omega}) \overrightarrow{GP_{\alpha}} \right]$$

- En coordonnées cartésiennes, dans un repère orthonormé quelconque :

$$\begin{aligned} L_{G,i} &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[\overrightarrow{GP_{\alpha}}^2 \omega_i - \left(\sum_j (\overrightarrow{GP_{\alpha}})_j \omega_j \right) (\overrightarrow{GP_{\alpha}})_i \right] \\ &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[\overrightarrow{GP_{\alpha}}^2 \sum_j \delta_{ij} \omega_j - \sum_j (\overrightarrow{GP_{\alpha}})_j \omega_j (\overrightarrow{GP_{\alpha}})_i \right] \\ &= \sum_j \underbrace{\sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[\overrightarrow{GP_{\alpha}}^2 \delta_{ij} - (\overrightarrow{GP_{\alpha}})_i (\overrightarrow{GP_{\alpha}})_j \right]}_{= (\tilde{I}_G)_{ij} \text{ (éléments d'une matrice } 3 \times 3)} \omega_j = \sum_j (\tilde{I}_G)_{ij} \omega_j \end{aligned}$$

Les scalaires, les vecteurs et les tenseurs sont les seules quantités avec lesquelles on peut définir des invariants par changement de systèmes de coordonnées. La difficulté des tenseurs vient du fait que, contrairement aux scalaires et aux vecteurs, nous n'avons pas de moyens mentaux ou géométriques de nous les représenter.

- En notation matricielle :

$$\vec{L}_G = \tilde{I}_G \cdot \vec{\omega}$$

(vecteur = matrice · vecteur)

- \tilde{I}_G = **tenseur d'inertie au point G**

Note: comparaison entre dynamique de translation et de rotation:

$$\begin{cases} \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}^{\text{ext}} & \text{avec } \vec{p} = M \vec{v}_G \\ \frac{d\vec{L}_G}{dt} = \vec{M}_G^{\text{ext}} & \text{avec } \vec{L}_G = \tilde{I}_G \cdot \vec{\omega} \end{cases}$$

« le tenseur d'inertie est aux rotations ce que la masse est aux translations »

Tenseur d'inertie (suite)

- Par rapport à un point A quelconque du solide :

$$\vec{L}_A = \overline{AG} \wedge M\vec{v}_A + \tilde{I}_A \cdot \vec{\omega}$$

\tilde{I}_A = tenseur d'inertie au point A
matrice 3×3

$$(\tilde{I}_A)_{ij} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[\overline{AP_{\alpha}}^2 \delta_{ij} - (AP_{\alpha})_i (AP_{\alpha})_j \right]$$

symétrique: $(\tilde{I}_A)_{ij} = (\tilde{I}_A)_{ji}$
définie positive: $(\tilde{I}_A)_{ii} \geq 0$

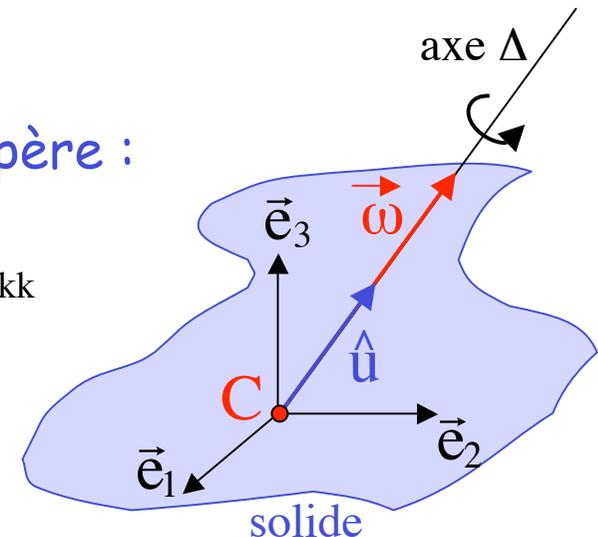
- Moment d'inertie I_{Δ} par rapport à un axe fixe Δ quelconque de direction $\hat{u} = \vec{\omega}/\omega$ passant par un point C fixe :

$$I_{\Delta} = \frac{L_{\Delta}}{\omega} = \frac{\vec{L}_C}{\omega} \cdot \hat{u} = (\tilde{I}_C \cdot \hat{u}) \cdot \hat{u} = \sum_{i,j} (\tilde{I}_C)_{ij} u_i u_j$$

- Moment d'inertie I_k par rapport à l'axe k du repère :

$$\hat{u} = \vec{e}_k \Rightarrow u_i = \delta_{ik} \Rightarrow I_k = \sum_{i,j} (\tilde{I}_C)_{ij} \delta_{ik} \delta_{jk} = (\tilde{I}_C)_{kk}$$

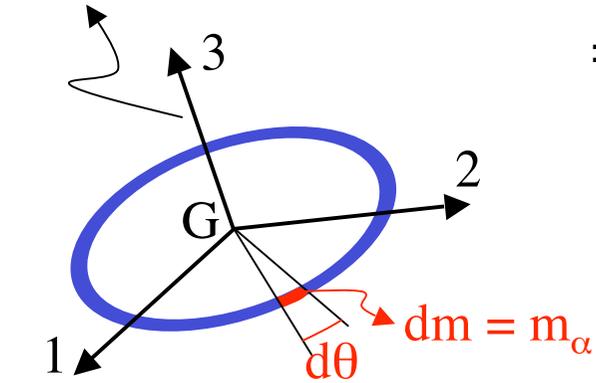
Les éléments diagonaux de la matrice représentant le tenseur d'inertie au point C sont les moments d'inertie par rapport aux axes du repère choisi au point C



Exemple de calcul d'un tenseur d'inertie

- Roue modélisée par un anneau mince de rayon R , de masse M :

axe de la roue



$$(\tilde{I}_G)_{ij} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[\overline{GP_{\alpha}}^2 \delta_{ij} - (GP_{\alpha})_j (GP_{\alpha})_i \right]$$

$$= \int_{\text{roue}} (R^2 \delta_{ij} - x_i x_j) dm = MR^2 \delta_{ij} - \frac{M}{2\pi} \int_0^{2\pi} x_i x_j d\theta$$

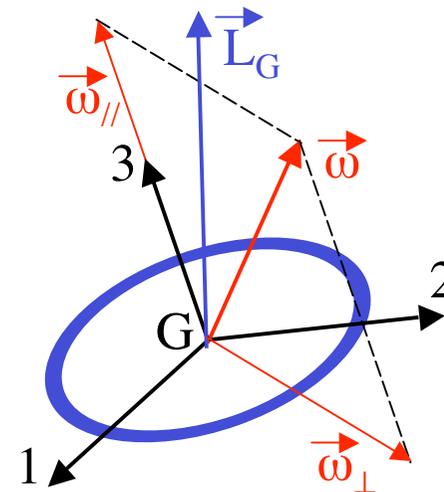
avec $x_1 = R \cos\theta$, $x_2 = R \sin\theta$, $x_3 = 0$

On obtient $\tilde{I}_G = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}MR^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}MR^2 & 0 \\ 0 & 0 & MR^2 \end{pmatrix}$

- Roue en rotation autour d'un axe quelconque passant par G :

$$\begin{aligned} \vec{L}_G &= \tilde{I}_G \cdot \vec{\omega} = \tilde{I}_G \cdot (\vec{\omega}_{\perp} + \vec{\omega}_{\parallel}) \\ &= MR^2 \left(\frac{1}{2} \vec{\omega}_{\perp} + \vec{\omega}_{\parallel} \right) \end{aligned}$$

- \vec{L} n'est pas parallèle à $\vec{\omega}$ (mais dans le plan défini par $\vec{\omega}$ et l'axe de la roue)



Axes principaux d'inertie

- **Théorème :**

- se démontre en algèbre linéaire

Pour tout point C d'un solide, il est toujours possible de choisir un repère orthonormé au point C tel que la matrice représentant le tenseur d'inertie soit diagonale :

$\tilde{\mathbf{I}}_C$ est diagonalisable

$$\tilde{\mathbf{I}}_C = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{I}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{I}_3 \end{pmatrix}$$

- Définitions (au point C):

- **Repère d'inertie** : repère dans lequel $\tilde{\mathbf{I}}_C$ est une matrice diagonale
- **Axes principaux d'inertie** : axes du repère d'inertie
- **Moments d'inertie principaux** : moments d'inertie par rapport aux axes principaux d'inertie, c-à-d éléments diagonaux de $\tilde{\mathbf{I}}_C$ dans le repère d'inertie

- Dans le repère d'inertie :
$$\vec{\mathbf{L}}_C = \tilde{\mathbf{I}}_C \cdot \vec{\omega} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{I}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{I}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_1 \omega_1 \\ \mathbf{I}_2 \omega_2 \\ \mathbf{I}_3 \omega_3 \end{pmatrix}$$

- Axe fixe Δ passant par C :

$$\vec{\mathbf{L}}_C = \mathbf{I}_\Delta \vec{\omega} \Leftrightarrow \Delta \text{ est un axe principal d'inertie}$$

Recherche des axes principaux d'inertie

- Il faut trouver les valeurs et vecteurs propres de \tilde{I}_C , donc les moments d'inertie I et les vecteurs $\vec{\omega}$ tels que :

$$\vec{L}_C = \tilde{I}_C \cdot \vec{\omega} = I \vec{\omega} \Rightarrow (\tilde{I}_C - I) \cdot \vec{\omega} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} I_{11} - I & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} - I & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} - I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} I_{11} - I & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} - I & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} - I \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{équation polynomiale de degré 3 pour } I$$

$$\Rightarrow \text{en général, 3 solutions } I_1, I_2 \text{ et } I_3$$

$$\Rightarrow (\tilde{I}_C - I_i) \cdot \vec{e}_i = 0 \text{ donne l'axe principal } \vec{e}_i$$

- Si le solide est symétrique, les axes suivants sont des axes principaux d'inertie au point C :

- Tout axe de symétrie passant par C
- L'axe passant par C et perpendiculaire à un plan de symétrie
- Tout axe passant par C et perpendiculaire à un axe de symétrie d'ordre $n \geq 3$

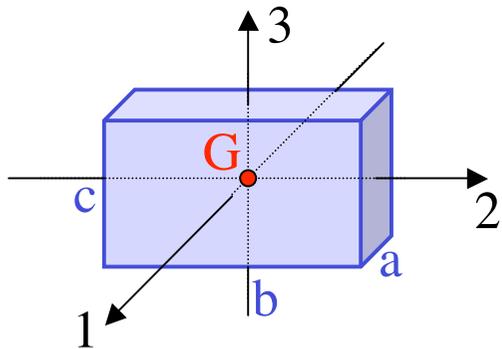
un objet est dit posséder une symétrie d'ordre n d'axe (d)

Démo : anagyre # 175

lorsqu'il est globalement invariant par une rotation d'angle $2\pi/n$ autour de (d).

Cas particuliers simples

Axes et moments d'inertie principaux par rapport au centre de masse G de quelques solides homogènes de masse M



- Parallélépipède rectangle plein (plaque rectangulaire si a, b ou $c \rightarrow 0$) :

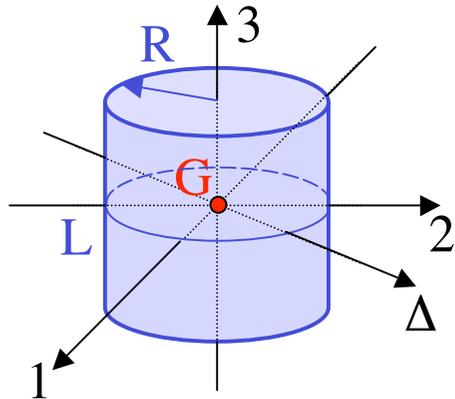
$$I_1 = \frac{1}{12}M(b^2+c^2)$$

$$I_2 = \frac{1}{12}M(c^2+a^2)$$

$$I_3 = \frac{1}{12}M(a^2+b^2)$$

« toupie asymétrique » :
seulement trois axes principaux par G

Démo : Inertie : axe ou plan (hélices bi et tripales) # 134



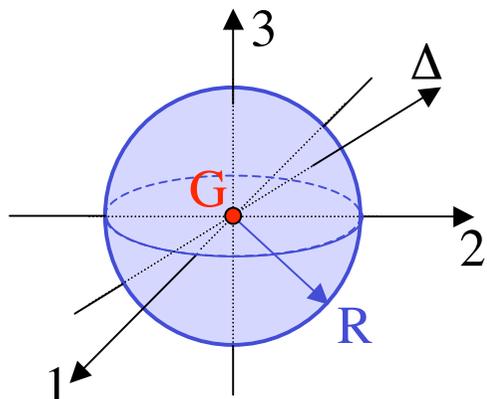
- Cylindre de révolution (tige si $R \rightarrow 0$, disque si $L \rightarrow 0$) :

plein: $I_1 = I_2 = I_\Delta = \frac{1}{4}MR^2 + \frac{1}{12}ML^2, I_3 = \frac{1}{2}MR^2$

vide: $I_1 = I_2 = I_\Delta = \frac{1}{2}MR^2 + \frac{1}{12}ML^2, I_3 = MR^2$

▲ sans masse sur les bases circulaires

« toupie symétrique » :
tout axe Δ par G dans le plan 12 est principal



- Sphère :

pleine: $I_1 = I_2 = I_3 = I_\Delta = \frac{2}{5}MR^2$

vide: $I_1 = I_2 = I_3 = I_\Delta = \frac{2}{3}MR^2$

« toupie sphérique » :
tout axe Δ par G est principal

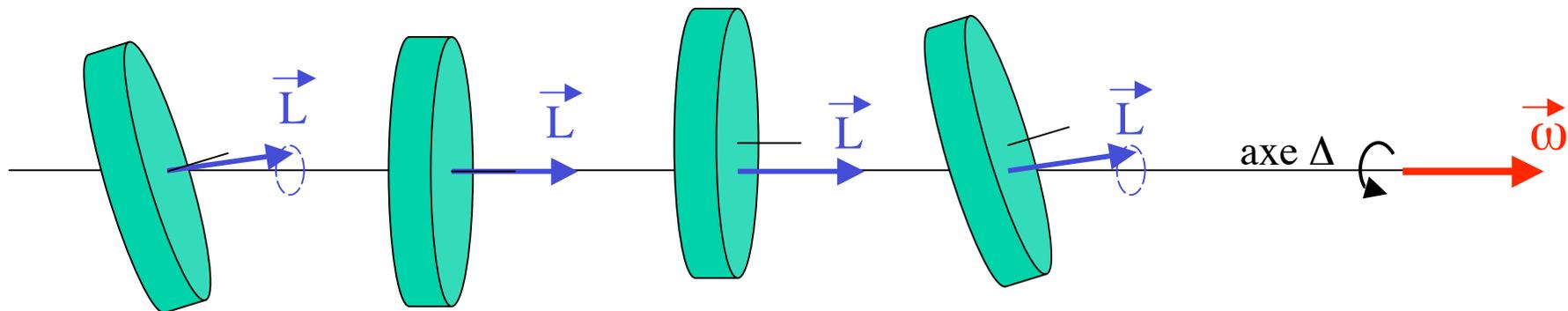
Application: équilibrage d'un solide en rotation

Démo : Stabilité (cube en mousse) # 37

Toupie chinoise (axes stables et instables) # 36

- Dans beaucoup de situations, il est nécessaire qu'un solide en rotation soit « équilibré »
 - Exemples : roues de voiture, hélices d'avion, pâles de ventilateur, turbines, arbres de transmission, ...
- Pour un axe de rotation Δ :

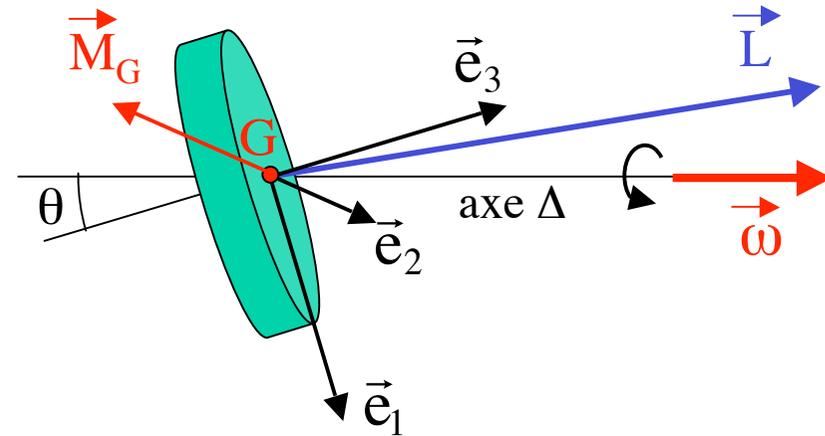
Solide équilibré statiquement $\Leftrightarrow G \in \Delta$
Solide équilibré dynamiquement $\Leftrightarrow \Delta$ est un axe principal d'inertie



- Si le solide n'est pas équilibré dynamiquement, le moment cinétique précède autour de Δ , et un moment de force perpendiculaire à Δ doit être appliqué pour garder Δ fixe :
 \Rightarrow vibrations, usure des coussinets et supports, ...

Roue mal équilibrée en rotation

- Axe de rotation fixe faisant un angle θ avec l'axe de symétrie
- On choisit un repère d'inertie (lié à la roue, donc en mouvement) :
 - Origine au centre de masse G
 - Axe 3 selon l'axe de la roue
 - Axe 1 dans le plan défini par l'axe de la roue et l'axe de rotation Δ



- Dans le repère d'inertie :

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} \omega \sin\theta \\ 0 \\ \omega \cos\theta \end{pmatrix} \quad \tilde{\mathbf{I}}_G = \begin{pmatrix} I_{\perp} & 0 & 0 \\ 0 & I_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & I_{\parallel} \end{pmatrix}$$

$$\vec{\mathbf{L}}_G = I_{\perp} \omega \sin\theta \vec{e}_1 + I_{\parallel} \omega \cos\theta \vec{e}_3$$

$$\frac{d\vec{\mathbf{L}}_G}{dt} = I_{\perp} \omega \sin\theta (\vec{\omega} \wedge \vec{e}_1) + I_{\parallel} \omega \cos\theta (\vec{\omega} \wedge \vec{e}_3)$$

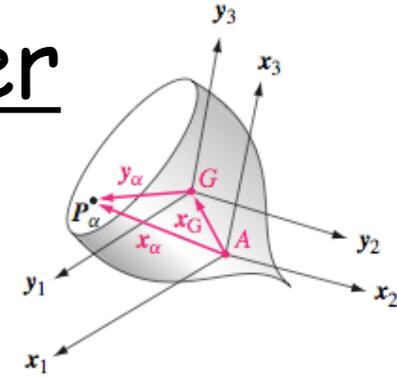
$$= I_{\perp} \omega \sin\theta (\omega \cos\theta \vec{e}_2) + I_{\parallel} \omega \cos\theta (-\omega \sin\theta \vec{e}_2)$$

$$\frac{d\vec{\mathbf{L}}_G}{dt} = (I_{\perp} - I_{\parallel}) \omega^2 \sin\theta \cos\theta \vec{e}_2 = \vec{\mathbf{M}}_G$$

$\mathbf{M}_G = 0$ si et seulement si $\theta = 0$, $\theta = \pi/2$ ou $I_{\perp} = I_{\parallel}$

Théorème de Huygens-Steiner

- Par rapport à un point A quelconque :



$$\begin{aligned}
 (\tilde{I}_A)_{ij} &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[\overrightarrow{AP_{\alpha}}^2 \delta_{ij} - (AP_{\alpha})_i (AP_{\alpha})_j \right] \\
 &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[\left(\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GP_{\alpha}} \right)^2 \delta_{ij} - \left((AG)_i + (GP_{\alpha})_i \right) \left((AG)_j + (GP_{\alpha})_j \right) \right] \\
 &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[\left(\overrightarrow{AG}^2 + \overrightarrow{GP_{\alpha}}^2 + 2 \overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{GP_{\alpha}} \right) \delta_{ij} \right. \\
 &\quad \left. - (AG)_i (AG)_j - (GP_{\alpha})_i (GP_{\alpha})_j - (AG)_i (GP_{\alpha})_j - (GP_{\alpha})_i (AG)_j \right] \\
 &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[\overrightarrow{GP_{\alpha}}^2 \delta_{ij} - (GP_{\alpha})_i (GP_{\alpha})_j \right] + \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[\overrightarrow{AG}^2 \delta_{ij} - (AG)_i (AG)_j \right]
 \end{aligned}$$

$$(\tilde{I}_A)_{ij} = (\tilde{I}_G)_{ij} + M \left[\overrightarrow{AG}^2 \delta_{ij} - (AG)_i (AG)_j \right]$$

= tenseur d'inertie au point A
d'une masse M au point G

permet de calculer
le tenseur d'inertie
au point A quelconque
connaissant celui
au centre de masse G

Théorème de Huygens-Steiner (applications)

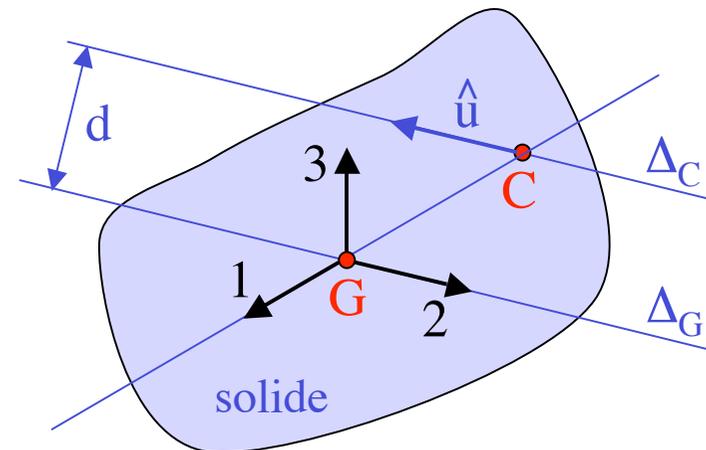
- Formule de Steiner pour les moments d'inertie :
 - Δ_C = axe de direction \hat{u} passant par un point C quelconque
 - Δ_G = axe de direction \hat{u} passant par le centre de masse G
 - d = distance entre les deux axes Δ_C et Δ_G

$$I_{\Delta_C} = \sum_{i,j} (\tilde{I}_C)_{ij} u_i u_j = \sum_{i,j} (\tilde{I}_G)_{ij} u_i u_j + \sum_{i,j} M \left[\overline{CG}^2 u_i u_j \delta_{ij} - (CG)_i u_i (CG)_j u_j \right]$$

$$= I_{\Delta_G} + M \left[\overline{CG}^2 - (\overline{CG} \cdot \hat{u})^2 \right]$$

$$I_{\Delta_C} = I_{\Delta_G} + M d^2$$

= moment d'inertie d'une masse M à une distance d de Δ_C



- Axes principaux :

Si les axes Δ_G et CG sont des axes principaux d'inertie au point G alors les axes Δ_C et CG sont des axes principaux d'inertie au point C

Problème de la meule

Démo : Moulin à gyroscope # 224

- Description et hypothèses :

- Meule : disque mince de masse M , rayon R , centre de masse G
- Axe de la meule CG : horizontal, sans masse, longueur d
- Roulement sans glissement sur le sol avec point C fixe sur un axe vertical
- ω = rotation propre de la meule, Ω = rotation autour de l'axe vertical

- Vecteur instantané de rotation total = $\vec{\omega} + \vec{\Omega}$

$$\begin{cases} 0 = \vec{v}_A = \vec{v}_G + (\vec{\omega} + \vec{\Omega}) \wedge \overrightarrow{GA} \\ 0 = \vec{v}_C = \vec{v}_G + (\vec{\omega} + \vec{\Omega}) \wedge \overrightarrow{GC} \end{cases}$$

$$\Rightarrow (\vec{\omega} + \vec{\Omega}) \wedge \overrightarrow{GA} = (\vec{\omega} + \vec{\Omega}) \wedge \overrightarrow{GC}$$

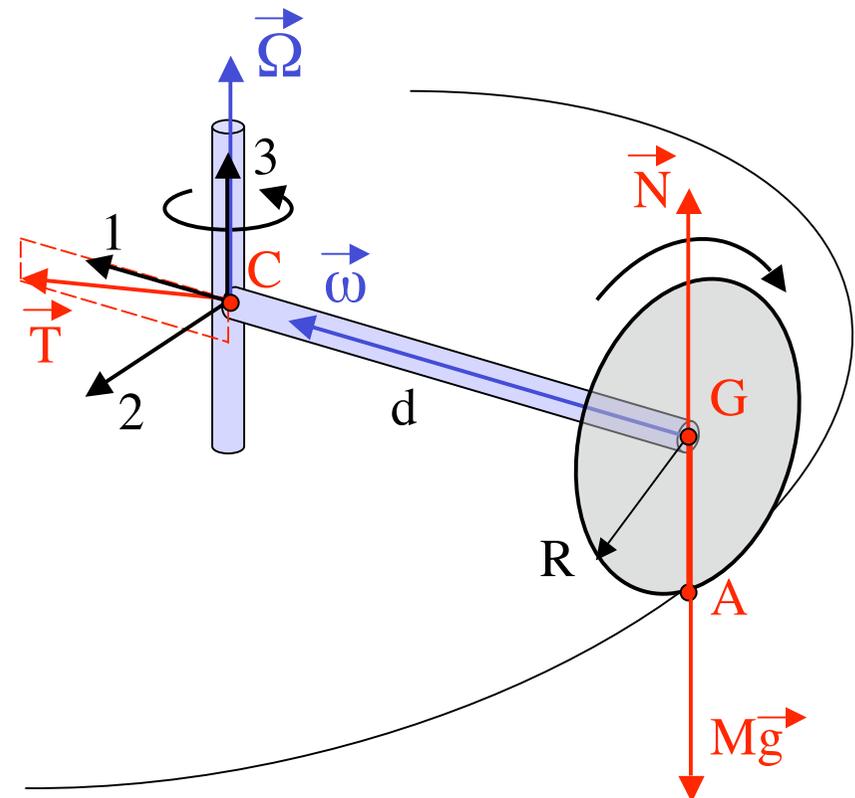
$$\Rightarrow \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{GA} = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{GC}$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega R = \Omega d}$$

- Equations du mouvement :

$$\boxed{\frac{d\vec{p}}{dt} = M\dot{\vec{v}}_G = \vec{T} + \vec{N} + M\vec{g}}$$

$$\boxed{\frac{d\vec{L}_C}{dt} = \vec{M}_C^{\text{ext}} = \overrightarrow{CG} \wedge (\vec{N} + M\vec{g})}$$



Problème de la meule (suite)

Démo : Moulin à gyroscope # 224

- Tenseur d'inertie :
(dans repère d'inertie
d'axes 1, 2, et 3,
en rotation avec l'axe
de la meule autour de 3)

$$(\tilde{\mathbf{I}}_C)_{ij} = (\tilde{\mathbf{I}}_G)_{ij} + M \left[\overline{\mathbf{CG}}^2 \delta_{ij} - (\mathbf{CG})_i (\mathbf{CG})_j \right]$$

$$\tilde{\mathbf{I}}_C = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}MR^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}MR^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4}MR^2 \end{pmatrix} + M \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & d^2 & 0 \\ 0 & 0 & d^2 \end{pmatrix}$$

- Moment cinétique :

$$\vec{\mathbf{L}}_C = \tilde{\mathbf{I}}_C \cdot (\vec{\omega} + \vec{\Omega}) = (\tilde{\mathbf{I}}_C)_{11} \vec{\omega} + (\tilde{\mathbf{I}}_C)_{33} \vec{\Omega}$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{\mathbf{L}}_C}{dt} = (\tilde{\mathbf{I}}_C)_{11} \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{1}{2}MR^2 \vec{\Omega} \wedge \vec{\omega}$$

- Equations du mouvement :

$$M\dot{\vec{v}}_G = \sum \vec{F} \Rightarrow \begin{cases} M\Omega^2 d = T_1 \\ 0 = T_2 \\ 0 = T_3 + N - Mg \end{cases}$$

$$\frac{d\vec{\mathbf{L}}_C}{dt} = \vec{M}_C^{\text{ext}} \Rightarrow \frac{1}{2}MR^2\Omega\omega = d(N - Mg)$$

$$\Rightarrow \boxed{N = Mg + \frac{1}{2}MR^2\Omega\frac{\omega}{d} = Mg + \frac{1}{2}MR\Omega^2 > Mg}$$

