



ÉCOLE POLYTECHNIQUE  
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

28 novembre 2008  
cours de la semaine # 11

Bienvenue au



EPFL - LABORATOIRE  
D'ASTROPHYSIQUE

# Cours de physique générale

Physique I pour étudiants de première année  
en section de mathématiques

Prof. Georges Meylan

Laboratoire d'astrophysique

Site web du laboratoire et du cours :

<http://lastro.epfl.ch>

## Un travail écrit : unique **test**, sans bonus

- Date : vendredi 12 décembre 2008
- Heure : de 16:15 à 18:00
- Lieu : dans les salles d'exercices CE 100, 101 et 103
  
- Remarque : pas de séance de remplacement pour les étudiants absents à cette date annoncée
  
- Simulation des conditions d'examen:
  - Les données des problèmes à résoudre sont distribuées en début de séance
  - Les solutions rédigées sont à rendre au plus tard à la fin de la séance
  - Matériel autorisé : papier vierge, crayon/stylo, formulaire personnel manuscrit (maximum : 1 feuille A4 double face)
  - Aucun autre matériel n'est autorisé !
  - Travail individuel en silence
  - Aucune interaction autorisée entre les étudiants pendant la séance
  
- Les travaux rendus sont corrigés et notés : échelle de 1(-) à 6(+)

# Exercices et questions

Vendredi 19 décembre 2008

pas de séance d'exercices

mais *séance de questions* après le cours

dans les salles d'exercices avec les assistants

# Séance de questions

Une semaine environ avant l'examen

? Vendredi 16 janvier 2009 ?

Date, heure et lieu encore à définir :  
réponse la semaine prochaine

Les délégués (Mme Marie Dupraz et M. David Strütt)  
me fournissent la date la semaine prochaine

a

# Examen écrit de Physique générale I

Date : vendredi 23 janvier 2009  
Heure : de 08h15 à 12h00  
Lieu : dans les auditorios CE3 et CE4

## Conditions d'examen :

- Les données des problèmes à résoudre sont distribuées en début d'examen, i.e., à 08h15, dans une enveloppe
- Les solutions rédigées sont à rendre au plus tard à la fin de l'examen, i.e., à 12h00, avec les énoncés dans l'enveloppe
- Matériel autorisé : papier vierge, pas de crayon, stylo, formulaire personnel manuscrit (maximum d'une feuille A4 double face)
- Calculatrice non programmable ; pas d'autre matériel autorisé
- Travail individuel en silence
- Aucune interaction autorisée entre les étudiants pendant l'examen

b

# Examen écrit de Physique générale I

Répartition dans les auditorios

Vous êtes répartis,  
selon votre nom de famille,  
dans les deux auditorios CE3 et CE4 :

CE3 Abu-Nijmeh - Karrakchou

CE4 Kneubühler - Zwahlen

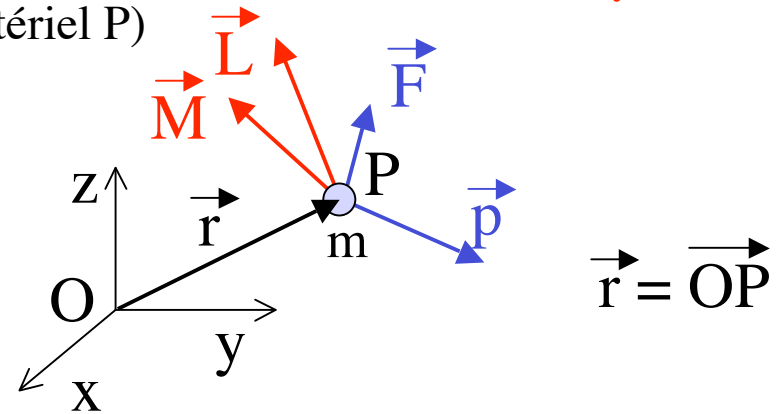
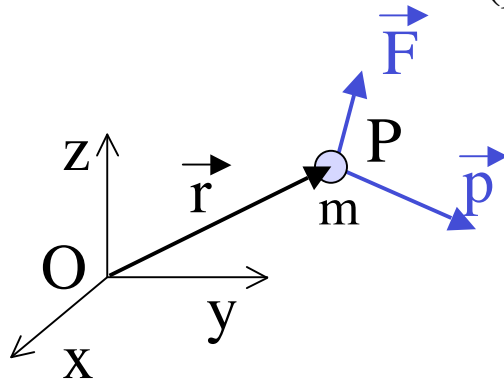
Un plan de placement sera affiché sur les portes de chaque auditorio.

Dans l'auditorio correspondant, vous trouverez  
votre nom sur une petite « carte de visite », à votre place,  
avec une enveloppe contenant les énoncés des exercices.

A la fin de l'examen, vous rendez l'énoncé dans l'enveloppe avec,  
en plus, vos solutions et la « carte de visite ».

# 2ème loi et théorème du moment cinétique

(pour un point matériel P)



- Résultante (somme) des forces appliquées au point matériel P :

$$\vec{F} = \sum \vec{F}_i$$

- Quantité de mouvement du point matériel de masse m :

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

- Deuxième loi de Newton :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

équivalente à  $\vec{F} = m\vec{a}$ , si m constante

- Moment de la force résultante F par rapport à un point O du référentiel :

$$\vec{M}_O = \vec{r} \wedge \vec{F} = \sum \vec{r} \wedge \vec{F}_i \quad = 0 \text{ si force centrale}$$

- Moment cinétique du point matériel par rapport au point O :

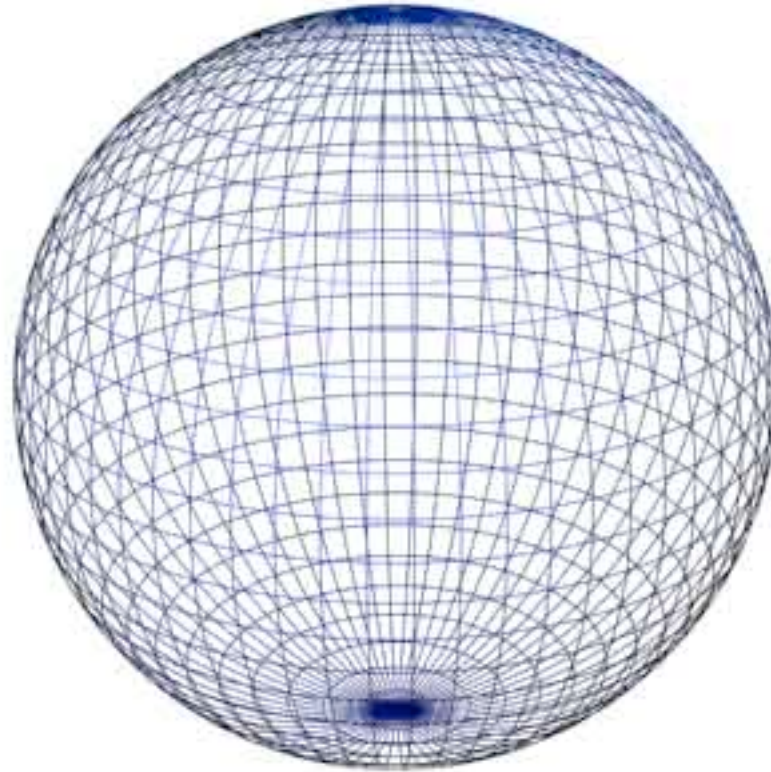
$$\vec{L}_O = \vec{r} \wedge \vec{p} = \vec{r} \wedge m\vec{v}$$

- **Théorème du moment cinétique :**

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O \quad = 0 \text{ si force centrale}$$

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \wedge \vec{p}) = \underbrace{\vec{v} \wedge \vec{p}}_{=0} + \vec{r} \wedge \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r} \wedge \vec{F} = \vec{M}_O$$

$$\vec{L}_O = \vec{r} \wedge \vec{p} = \vec{r} \wedge m\vec{v}$$



La grandeur physique qui joue un rôle analogue à la quantité de mouvement dans le cas des rotations est le vecteur moment cinétique (ou moment angulaire)

# Lois de conservation pour un système isolé

- Si le système ne subit aucune force de l'extérieur (système isolé), alors :

La grandeur physique qui joue un rôle analogue à la quantité de mouvement dans le cas des rotations est le vecteur moment cinétique (ou moment angulaire)

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{p} = \text{constante} \Rightarrow \vec{v}_G = \text{constante}$$

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{L}_O = \text{constante}$$

par rapport à n'importe quel point O du référentiel

Démos : Effet de recul (bouteille de  $CO_2$  ou boulets) # 113  
véhicule (initialement à l'arrêt) propulsé par un gaz ou des boulets

$$\vec{p}_{\text{boulets}} + \vec{p}_{\text{véhicule}} = 0$$

Oscillateur ou pendule sur rail à air # 767

le centre de masse possède un mouvement rectiligne uniforme

Tabouret tournant # 17

$\vec{L} = mr^2\vec{\omega} = \text{constante}$   
si r diminue,  $\omega$  augmente

# Propriétés du centre de masse (CM)

- Soit  $G$  ( $G'$ ) le centre de masse défini à partir de l'origine  $O$  ( $O'$ ) :

$$\overrightarrow{O'G'} = \frac{1}{M} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \overrightarrow{O'P_{\alpha}} = \frac{1}{M} \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OP_{\alpha}}) = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OG} = \overrightarrow{O'G}$$

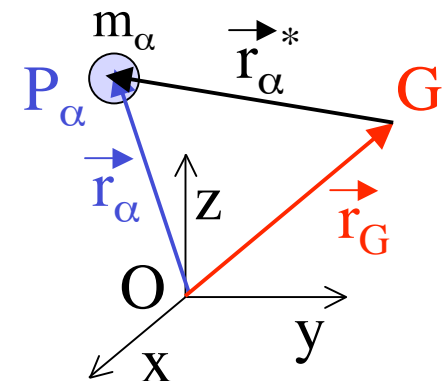
$\Rightarrow G' = G \Rightarrow$  **le centre de masse est indépendant de l'origine**  
(et l'origine n'a même pas besoin d'être un point du référentiel)

- Les positions  $\vec{r}_{\alpha}^*$  et les quantités de mouvement  $\vec{p}_{\alpha}^* = m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha}^*$  des points matériels du système par rapport au CM (i.e. dans le référentiel du CM) satisfont à :

$$\sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{r}_{\alpha}^* = 0 \quad \text{où } \vec{r}_{\alpha}^* = \overrightarrow{GP_{\alpha}} = \vec{r}_{\alpha} - \vec{r}_G$$

$$\sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha}^* = 0 \quad \text{où } \vec{v}_{\alpha}^* = \frac{d\vec{r}_{\alpha}^*}{dt} = \vec{v}_{\alpha} - \vec{v}_G$$

$\rightarrow$  **La somme des quantités de mouvement par rapport au centre de masse est nulle**



# Moment cinétique par rapport à un point quelconque

- Le moment cinétique  $L_O$  est défini par rapport à un point  $O$  du référentiel lié au laboratoire. Si on choisit un autre point de référence  $A$  quelconque (au repos ou en mouvement par rapport au référentiel du laboratoire) :

$$\begin{aligned}\vec{L}_A &= \sum_{\alpha} \overrightarrow{AP_{\alpha}} \wedge m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha} = \sum_{\alpha} (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OP_{\alpha}}) \wedge m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha} \\ &= \overrightarrow{AO} \wedge \sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha} + \sum_{\alpha} \underbrace{\vec{r}_{\alpha}}_{\vec{L}_{O,\alpha}} \wedge m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha}\end{aligned}$$

$$\vec{L}_A = \vec{L}_O + \overrightarrow{AO} \wedge M \vec{v}_G$$

Théorème du transfert

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \frac{d\vec{L}_O}{dt} + \frac{d}{dt} (\overrightarrow{AO} \wedge M \vec{v}_G) = \vec{M}_O^{\text{ext}} + \overrightarrow{AO} \wedge \vec{F}^{\text{ext}} - \vec{v}_A \wedge M \vec{v}_G$$

$$\begin{aligned}\vec{M}_O^{\text{ext}} + \overrightarrow{AO} \wedge \vec{F}^{\text{ext}} &= \sum_{\alpha} \overrightarrow{OP_{\alpha}} \wedge \vec{F}_{\alpha}^{\text{ext}} + \overrightarrow{AO} \wedge \sum_{\alpha} \vec{F}_{\alpha}^{\text{ext}} \\ &= \sum_{\alpha} (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OP_{\alpha}}) \wedge \vec{F}_{\alpha}^{\text{ext}} = \sum_{\alpha} \overrightarrow{AP_{\alpha}} \wedge \vec{F}_{\alpha}^{\text{ext}} = \sum_{\alpha} \vec{M}_{A,\alpha}^{\text{ext}} = \vec{M}_A^{\text{ext}}\end{aligned}$$

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \vec{M}_A^{\text{ext}} - \vec{v}_A \wedge M \vec{v}_G$$

Théorème du moment cinétique par rapport à un point A quelconque

- Si et seulement si  $\vec{v}_A // \vec{v}_G$ , en particulier si  $A = G$  ou  $v_A = 0$  ( $A$  est un point du référentiel) :

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \vec{M}_A^{\text{ext}}$$

## Moment cinétique par rapport à un point quelconque (suite)

- Soit un point  $A$  quelconque (qui peut être en mouvement) :

$$\begin{aligned}\vec{L}_A &= \sum_{\alpha} \overrightarrow{AP_{\alpha}} \wedge m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha} = \sum_{\alpha} \left( \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GP_{\alpha}} \right) \wedge m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha} = \sum_{\alpha} \left( \overrightarrow{AG} + \vec{r}_{\alpha}^* \right) \wedge m_{\alpha} \left( \vec{v}_G + \vec{v}_{\alpha}^* \right) \\ &= \overrightarrow{AG} \wedge \sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{v}_G + \overrightarrow{AG} \wedge \underbrace{\sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha}^*}_{=0} + \underbrace{\sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{r}_{\alpha}^* \wedge \vec{v}_G}_{=0} + \underbrace{\sum_{\alpha} \vec{r}_{\alpha}^* \wedge m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha}^*}_{= \vec{L}_G^*}\end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{L}_A = \overrightarrow{AG} \wedge M \vec{v}_G + \vec{L}_G^*}$$

Premier théorème de König

moment cinétique du centre de masse par rapport à  $A$

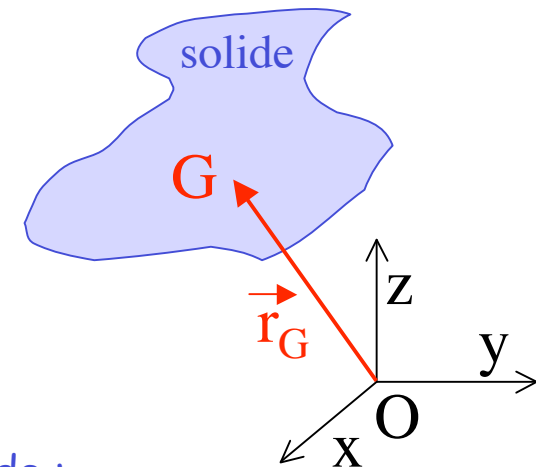
Cas particulier où  $A = G$  :  $\boxed{\vec{L}_G = \vec{L}_G^*}$

- Le moment cinétique total d'un système par rapport à  $A$  est égal au moment cinétique du CM (comme point matériel) par rapport à  $A$  plus le moment cinétique du système par rapport au CM. Ce dernier peut être évalué indifféremment dans le référentiel du laboratoire ou celui du CM.

# Corps solide indéformable

- Définition: solide indéformable = système de points matériels qui sont fixes les uns par rapport aux autres
- Remarques:
  - Tous les corps solides réels se déforment sous l'effet des forces appliquées ; le solide indéformable est un modèle mathématique (bonne approximation si les déformations sont petites par rapport aux dimensions du solide).
  - Le nombre  $N$  de points matériels peut être très grand ( $N \rightarrow \infty$ ) ; on remplace alors les sommes sur ces  $N$  points par des intégrales. Par exemple, pour le centre de masse :

$$\vec{r}_G = \frac{1}{M} \sum_{\alpha} \vec{r}_{\alpha} m_{\alpha}$$
$$\rightarrow \frac{1}{M} \int \vec{r} dm(\vec{r}) = \frac{1}{M} \int_{\text{volume du solide}} \vec{r} \rho(\vec{r}) d^3\vec{r}$$



- Position du solide:
  - 6 coordonnées indépendantes ;
  - par exemple, on repère 3 points non colinéaires du solide :
    - 3 coord. pour le point 1
    - 2 coord. pour le point 2 (à une distance fixe du premier)
    - 1 coord. pour le point 3 (à des distances fixes des deux premiers)
    - 0 coord. pour tous les autres points (fixes par rapport aux trois premiers)

# Vitesse et accélération d'un point du solide

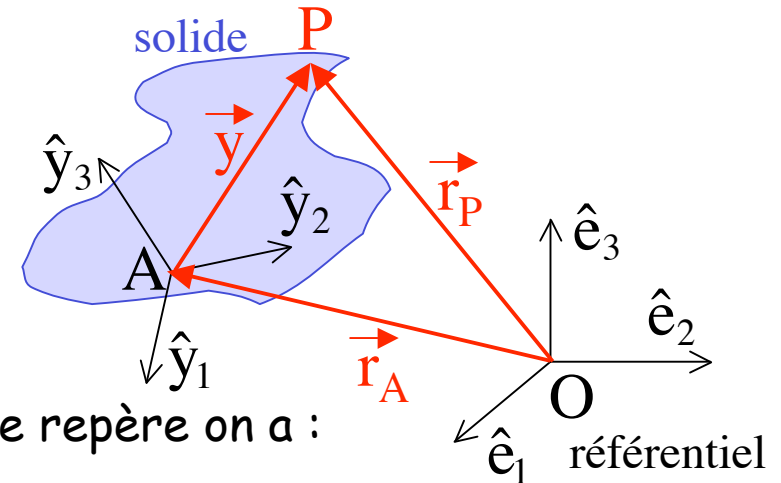
- Repère lié au référentiel  $Oe_1e_2e_3$
- Repère lié au solide  $Ay_1y_2y_3$   
(A = point quelconque du solide)

- Tous les points P du solide sont immobiles dans ce repère  $Ay_i$
- Pour tout vecteur  $\vec{y}$  immobile dans ce repère on a :

$$\frac{d\vec{y}}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \sum y_i \hat{y}_i \right) = \sum y_i \underbrace{\frac{d\hat{y}_i}{dt}}_{\vec{\omega} \wedge \hat{y}_i} = \vec{\omega} \wedge \sum y_i \hat{y}_i = \vec{\omega} \wedge \vec{y}$$

formule de Poisson

$\vec{\omega}$  = vitesse instantanée de rotation du repère  $Ay_1y_2y_3$ , donc du solide



- Pour tout point P du solide :

$$\vec{v}_P = \frac{d\vec{r}_P}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \vec{r}_A + \overline{AP} \right) = \vec{v}_A + \frac{d}{dt} \overline{AP} = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \overline{AP}$$

$$\vec{a}_P = \frac{d\vec{v}_P}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \overline{AP} \right) = \vec{a}_A + \dot{\vec{\omega}} \wedge \overline{AP} + \vec{\omega} \wedge \left( \vec{\omega} \wedge \overline{AP} \right)$$

avec  $\vec{\omega}$  indépendant de P, de A et du choix du repère  $Ay_1y_2y_3$

# Mouvement instantané d'un solide

Gruber & Benoit pp 204-206

**Propriété.** Le mouvement pendant  $[t_0, t_1]$  est une translation si et seulement si à tout instant  $t \in [t_0, t_1]$ , tous les points P du solide ont même vitesse.

Le mouvement instantané d'un solide à l'instant  $t$  est une translation si, à cet instant, tous les points du solide ont même vitesse :

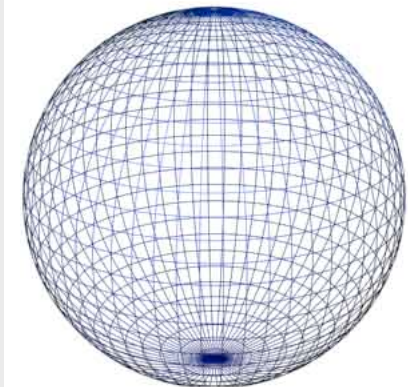
$$\mathbf{v}_p(t) = \mathbf{v}(t). \quad (8.10)$$

Le vecteur  $\mathbf{v}(t)$  est appelé vitesse (instantanée) de translation.

**Propriété.** Le mouvement d'un solide pendant  $[t_0, t_1]$  est une rotation d'axe  $\Delta$  fixe si et seulement si à tout instant  $t \in [t_0, t_1]$ , la distribution des vitesses des points du solide est donnée par la relation

$$\mathbf{v}_p = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{AP} \quad (8.11)$$

où  $\boldsymbol{\omega}$  est un vecteur parallèle à  $\Delta$  et A est un point quelconque de  $\Delta$ .



# Mouvement instantané d'un solide

Gruber & Benoit pp 204-206

Le mouvement instantané d'un solide à l'instant  $t$  est une *rotation d'axe*  $\Delta(t)$  si, à cet instant, la distribution des vitesses des points du solide est donnée par

$$\mathbf{v}_p(t) = \boldsymbol{\omega}(t) \wedge \mathbf{AP} \quad (8.12)$$

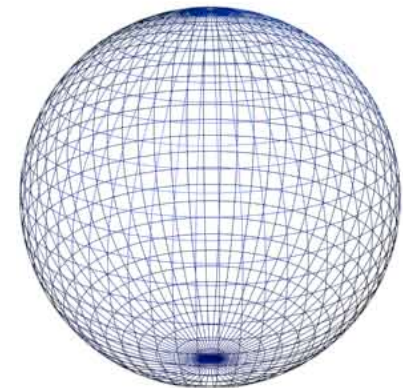
où  $A$  est un point du solide. L'axe  $\Delta(t)$  est la droite passant par  $A$ , parallèle à  $\boldsymbol{\omega}(t)$ .

**Théorème.** A chaque instant  $t$  il existe un pseudo-vecteur  $\boldsymbol{\omega}(t)$  tel que pour tout point  $P$  du solide

dépend de l'orientation  
du système d'axes

$$\mathbf{v}_p = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{AP} \quad (8.13)$$

où  $A$  est un point quelconque du *solide* et  $\boldsymbol{\omega}(t)$  est indépendant du point  $A$  choisi. Le vecteur  $\boldsymbol{\omega}(t)$  est appelé *vitesse (instantanée) de rotation du solide*.



# Mouvement instantané d'un solide

- Soit  $A$  un point quelconque du solide :

$$\boxed{\vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \overline{AP}} \quad \forall P \in \text{solide} \quad \text{où } \vec{\omega} = \text{vitesse instantanée de rotation du solide}$$

- Le mouvement instantané du solide est l'un des quatre suivants :

- $\vec{\omega} = 0$  et  $\vec{v}_A = 0 \Leftrightarrow \vec{v}_P = 0 \quad \forall P \Leftrightarrow$  solide au repos
- $\vec{\omega} = 0$  et  $\vec{v}_A \neq 0 \Leftrightarrow \vec{v}_P = \vec{v}_A \neq 0 \quad \forall P \Leftrightarrow$  solide en translation
- $\vec{\omega} \neq 0$  et  $\vec{v}_A \cdot \vec{\omega} = 0 \Leftrightarrow \vec{v}_P \cdot \vec{\omega} = 0 \quad \forall P \Leftrightarrow$  solide en rotation (axe //  $\vec{\omega}$ )
- $\vec{\omega} \neq 0$  et  $\vec{v}_A \cdot \vec{\omega} \neq 0 \Leftrightarrow \vec{v}_P \cdot \vec{\omega} \neq 0 \quad \forall P \Leftrightarrow$  solide en mvt hélicoïdal  
(rotation d'axe //  $\vec{\omega}$  + translation //  $\vec{\omega}$ )

- Si  $\omega \neq 0$ , un point  $C$  sur l'axe instantané de rotation est donné par :

$$\boxed{\overline{AC} = \frac{\vec{\omega} \wedge \vec{v}_A}{\vec{\omega}^2}}$$

En effet :

$$\vec{v}_C = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \overline{AC} = \vec{v}_A + \hat{\omega} \wedge (\hat{\omega} \wedge \vec{v}_A) = \vec{v}_A + (\hat{\omega} \cdot \vec{v}_A)\hat{\omega} - (\hat{\omega} \cdot \hat{\omega})\vec{v}_A = (\hat{\omega} \cdot \vec{v}_A)\hat{\omega}$$

$$\vec{v}_C = \begin{cases} 0 \text{ si solide en rotation} & \Rightarrow \vec{v}_P = \vec{\omega} \wedge \overline{CP} & \forall P \in \text{solide} \\ // \vec{\omega} \text{ si solide en mvt hélicoïdal} & \Rightarrow \vec{v}_P = \vec{\omega} \wedge \overline{CP} + v_C \hat{\omega} & \forall P \in \text{solide} \end{cases}$$

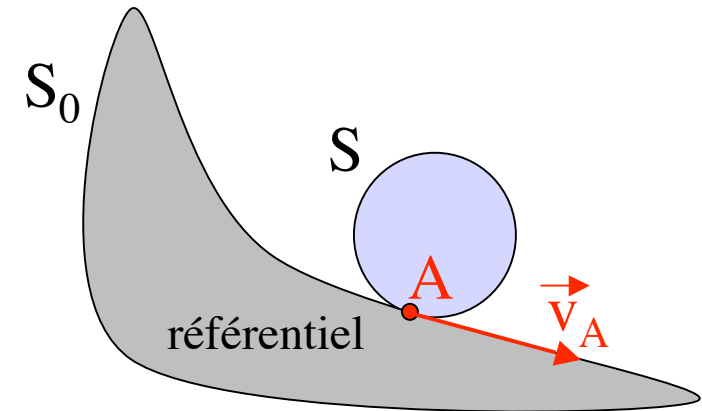
# Mouvement instantané d'un solide

- Remarque :

Le 3ème cas parmi les quatre (diapositive précédente) ne peut pas avoir une translation dans une direction perpendiculaire à  $\omega$ , superposée au mouvement de rotation. Une telle situation correspondrait à une rotation instantanée autour d'un autre axe (toujours parallèle à  $\omega$ ). Il suffit de penser à un rouleau à pâte roulant sur la table. Il semble qu'il s'agit d'une rotation autour de l'axe du rouleau superposée à une translation, mais en fait il s'agit simplement d'une rotation instantanée autour de la génératrice en contact avec la table !

# Solides en contact

- Soient deux solides  $S$  et  $S_0$  restant constamment en contact
  - On choisit l'un des deux solides,  $S_0$ , comme référentiel  
 $\Rightarrow S_0$  est immobile et on décrit le mouvement de  $S$  par rapport à  $S_0$
  - On admet que le contact est ponctuel. Soit  $A$  le point de  $S$  en contact avec  $S_0$  au temps  $t$ .



- $\vec{v}_A$  = vitesse de glissement (de  $S$  par rapport à  $S_0$ )

- Condition du **roulement sans glissement** :  $\vec{v}_A = 0$

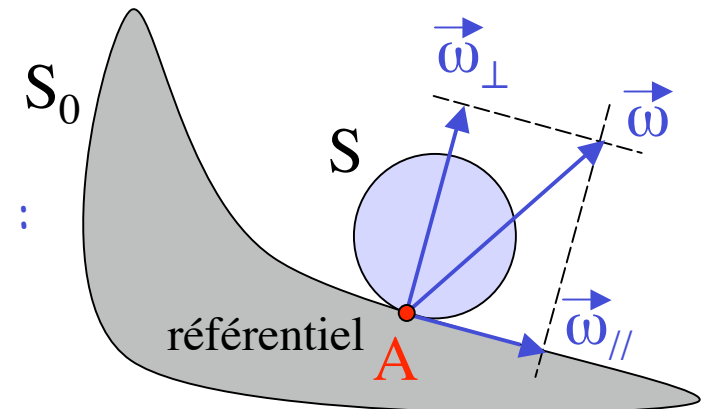
- $A$  est alors sur l'axe instantané de rotation

- Vecteur instantané de rotation  $\vec{\omega}$

- Décomposition en composantes parallèle et perpendiculaire au plan tangent à  $S$  en  $A$  :

$\vec{\omega}_{//}$  = vitesse angulaire de roulement

$\vec{\omega}_{\perp}$  = vitesse angulaire de pivotement

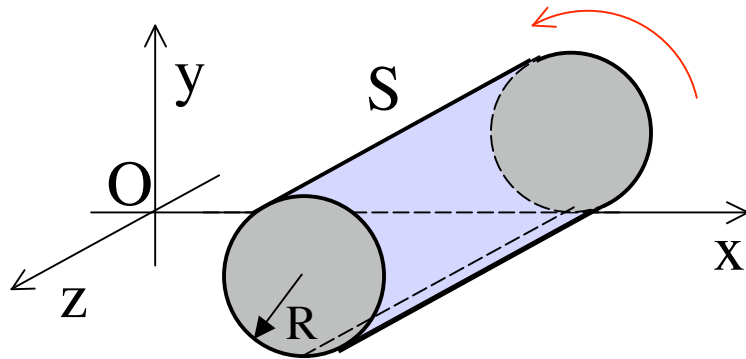


# Mouvement « plan-sur-plan »

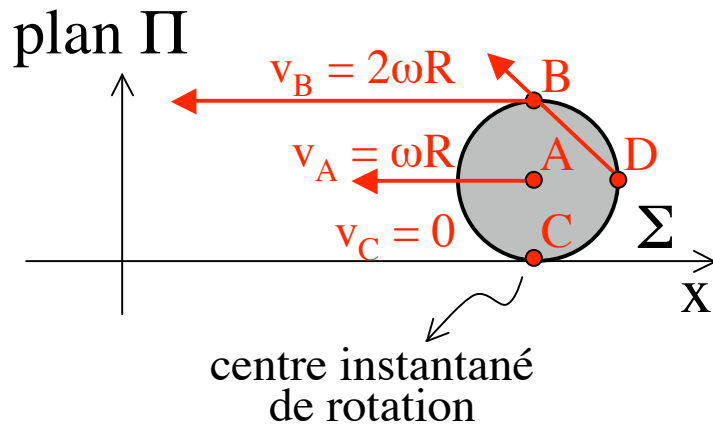
- Définition : mouvement tel qu'un plan du solide  $S$  reste constamment dans un plan fixe  $\Pi$  du référentiel  
 $\Leftrightarrow$   
à tout instant les vitesses de tous les points du solide sont parallèles à un plan fixe  $\Pi$
- Conséquences :
  - le vecteur instantané de rotation  $\omega$  est perpendiculaire à  $\Pi$  ;
  - on est ramené à l'étude du mouvement d'une surface plane rigide  $\Sigma$  (section de  $S$ ) sur un plan  $\Pi$  ;
  - dans ce plan, il y a un centre instantané de rotation (si  $\omega \neq 0$ ).
- Lieu géométrique des centres instantanés de rotation :
  - dans le référentiel lié à  $\Pi$  : la base
  - dans le référentiel lié à  $\Sigma$  : la roulante

« Tout mouvement plan-sur-plan est un roulement sans glissement de la roulante sur la base »

# Exemple : cylindre sur un plan sans glissement



- En trois dimensions :
  - Un cylindre  $S$  de rayon  $R$  roule sans glisser sur le plan  $Oxz$ , avec la génératrice de contact parallèle à l'axe  $z$
  - Il s'agit d'un mouvement plan-sur-plan : à chaque instant, toutes les vitesses sont dans le plan  $Oxy \Leftrightarrow$  la base du cylindre reste constamment parallèle au plan  $Oxy$
  - $\vec{\omega} = \omega \hat{z}$  = vitesse angulaire de roulement (pas de pivotement)



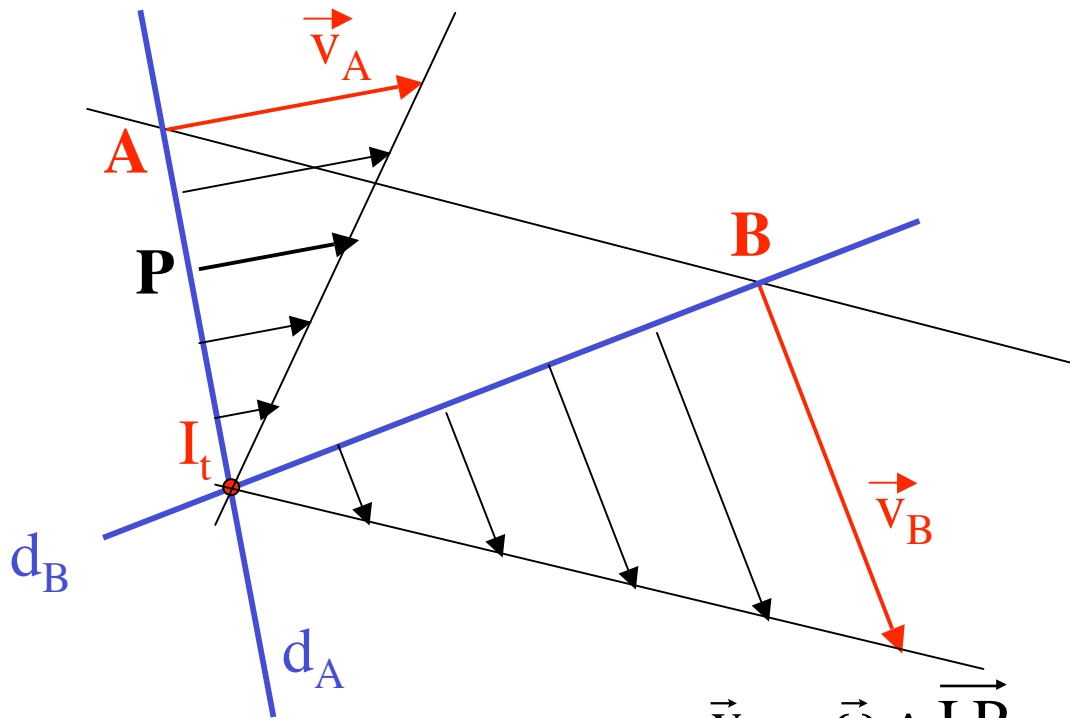
Base = axe  $x$   
 Roulante = circonférence du disque  $\Sigma$

- Dans le plan  $Oxy$  (plan  $\Pi$ )
  - On considère la section  $\Sigma$  du cylindre
  - Le point de contact  $C$  a une vitesse nulle (pas de glissement) ; c'est le centre instantané de rotation
  - $\vec{v}_P = \vec{\omega} \wedge \overline{CP} \quad \forall P \in \Sigma$   
 par ex.  $\vec{v}_D = \vec{\omega} \wedge \overline{CD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} R \\ R \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega R \\ \omega R \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AP} \Rightarrow \boxed{\vec{v}_P \cdot \overrightarrow{AP} = \vec{v}_A \cdot \overrightarrow{AP}}$$

Les projections des vitesses de deux points quelconques du solide sur la droite qui les relie sont égales

## Détermination du centre instantané de rotation pour un solide en mouvement plan-sur-plan dont on connaît les vitesses de deux points A et B



$d_A$  = droite passant par A et perpendiculaire à  $v_A$

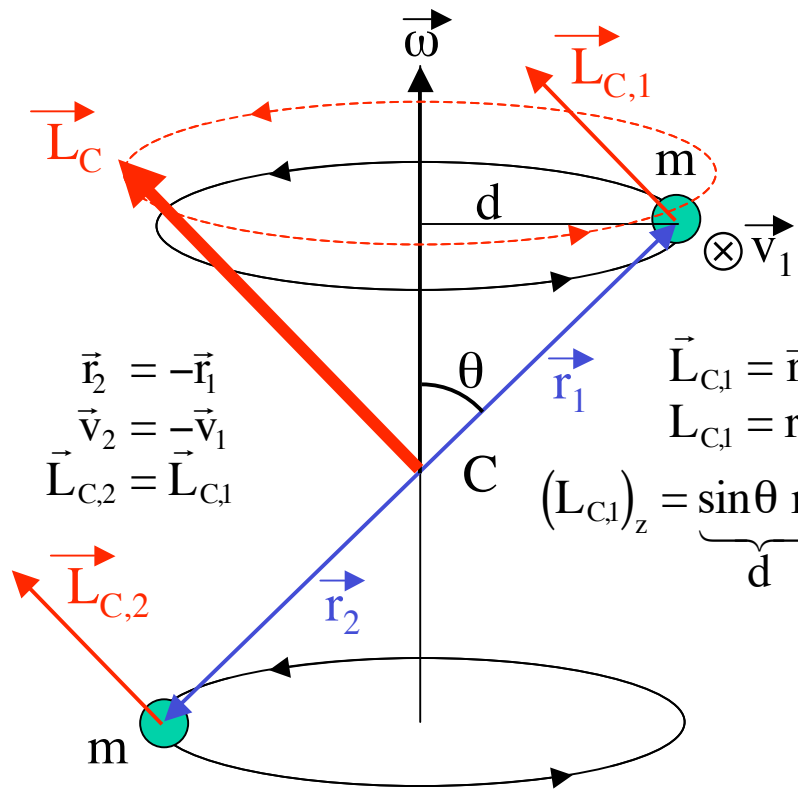
Tous les points P de cette droite ont des vitesses ayant une projection nulle sur cette droite (égale à celle de  $v_A$ )

Idem pour la droite  $d_B$

Le point commun à  $d_A$  et  $d_B$  a donc une vitesse nulle. C'est le centre instantané de rotation  $I_t$ .

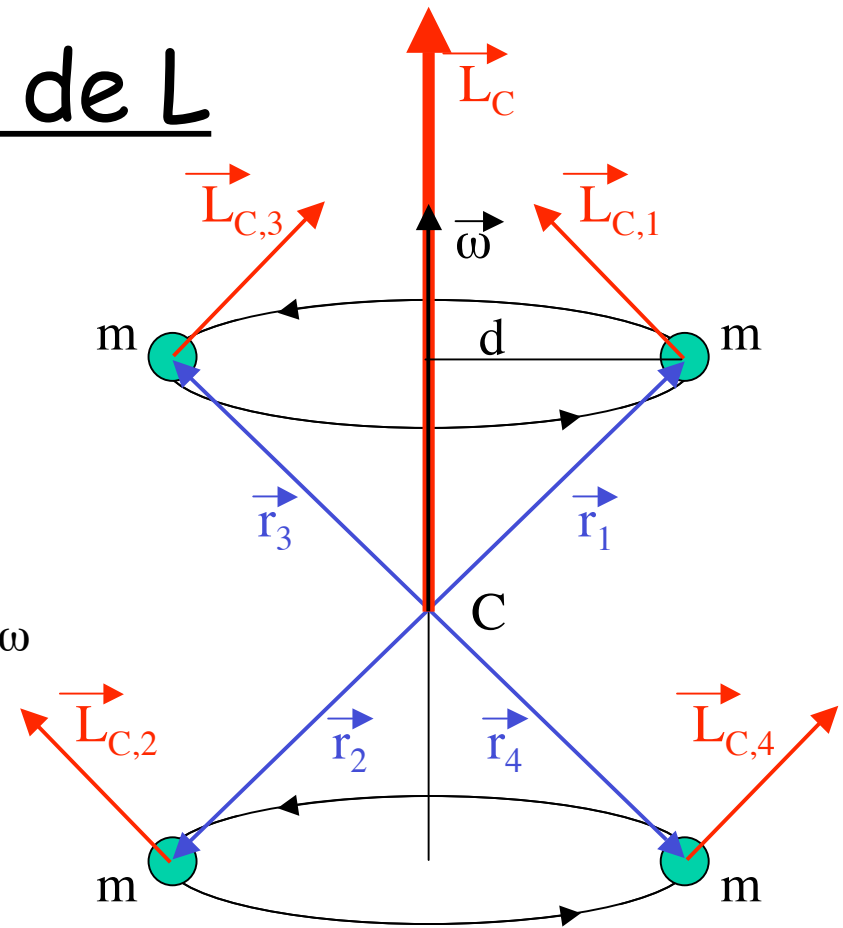
$$\vec{v}_P = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{I_t P} \Rightarrow v_P = \omega I_t P \Rightarrow \frac{v_P}{v_A} = \frac{I_t P}{I_t A}$$

# Direction de $L$



$$\begin{aligned} \vec{r}_2 &= -\vec{r}_1 \\ \vec{v}_2 &= -\vec{v}_1 \\ \vec{L}_{C,2} &= \vec{L}_{C,1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{L}_{C,1} &= \vec{r}_1 \wedge m\vec{v}_1 \\ L_{C,1} &= r_1 m v_1 \\ (L_{C,1})_z &= \underbrace{\sin\theta r_1}_d m \underbrace{v_1}_{\omega d} = md^2 \omega \end{aligned}$$



- Deux masses  $m$  telles que  $\vec{r}_1 = -\vec{r}_2$  par rapport à  $C$
- Axe de rotation  $\Delta$  par  $C$  faisant un angle  $\theta$  quelconque avec  $\vec{r}_1$

- $L_\Delta = \vec{L}_C \cdot \hat{\omega} = 2md^2 \omega = I_\Delta \omega$   
 $\vec{L}_C$  n'est pas parallèle à  $\vec{\omega}$   $\rightarrow I_\Delta = \sum_i m_i R_i^2$

- On ajoute deux masses  $m$  supplémentaires, de sorte à faire un **système symétrique par rapport à l'axe de rotation**

- $L_\Delta = \vec{L}_C \cdot \hat{\omega} = 4md^2 \omega = I_\Delta \omega$   
 $\vec{L}_C$  est parallèle à  $\vec{\omega}$ :  $\vec{L}_C = I_\Delta \vec{\omega}$

# Gyroscope

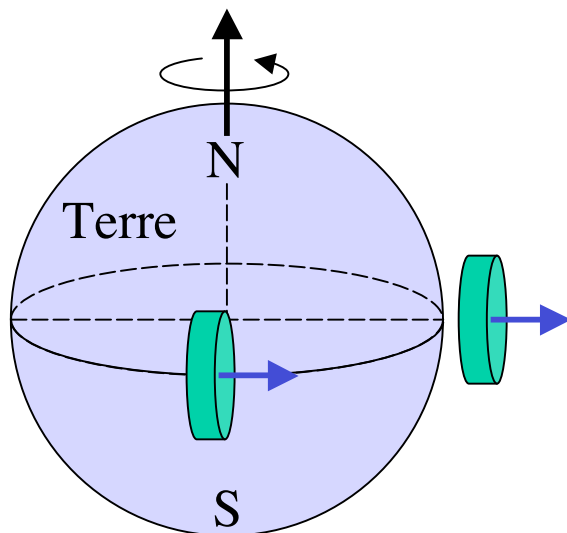
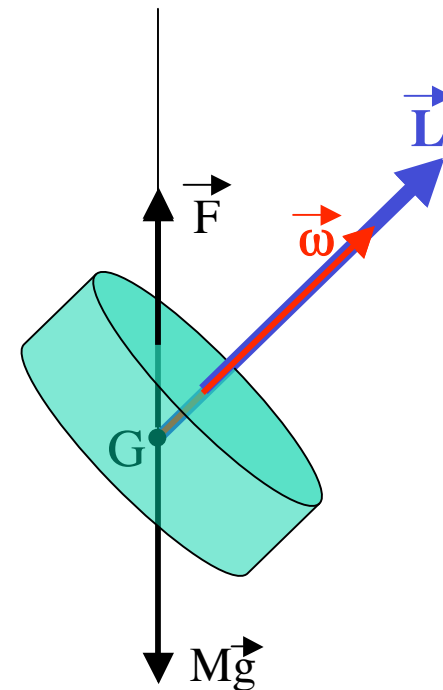
Démo : Gyroscope de Magnus # 43

- Solide « suspendu » à son centre de masse  $G$ , libre d'adopter n'importe quelle orientation, en rotation autour d'un axe de symétrie (fixe par rapport au solide) tel que :  $\vec{L}_G = I_\Delta \vec{\omega}$   

$$I_\Delta = \sum_i m_i R_i^2$$
- Théorème du moment cinétique :

$$\frac{d\vec{L}_G}{dt} = \vec{M}_G^{\text{ext}} = 0 \Rightarrow \vec{L}_G = \overrightarrow{\text{constante}}$$

donc  $\vec{\omega} = \overrightarrow{\text{constante}}$



- Gyroscope à l'équateur terrestre :
  - axe de rotation horizontal selon la direction est-ouest
  - 6 heures plus tard, l'axe est devenu vertical (à cause du mouvement de la Terre)

# Effets gyroscopiques (1)

Démos : Gyroscope avec roue de vélo simple et double # 56

- Roue de vélo en rotation au tour de son axe de symétrie :  $\vec{L}_G // \vec{\omega}$   
 On veut changer la direction de l'axe de rotation ; comment faut-il exercer le couple de force pour que l'axe tourne autour de Ox ? ou de Oz ?

a) forces F parallèles à z

$\vec{M}$  selon  $-x \Rightarrow d\vec{L}$  selon  $-x$   
 $\Rightarrow \vec{L}$  tourne dans le plan xy

b) forces F parallèles à x

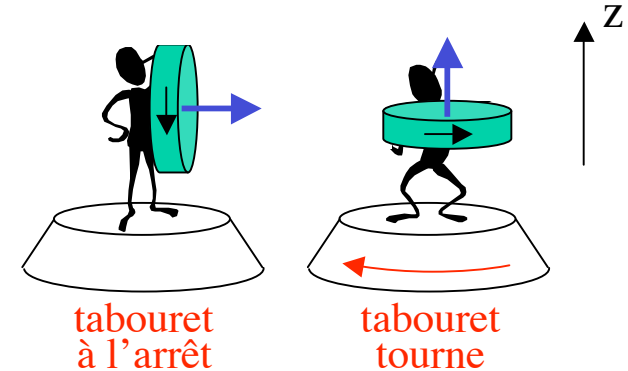
$\vec{M}$  selon z  $\Rightarrow d\vec{L}$  selon z  
 $\Rightarrow \vec{L}$  tourne dans le plan yz

Théorème du moment cinétique  $\frac{d\vec{L}_G}{dt} = \vec{M}_G^{\text{ext}} = (\vec{r} \wedge \vec{F}) + (-\vec{r} \wedge -\vec{F}) = 2 \vec{r} \wedge \vec{F}$

# Effets gyroscopiques (2)

Démo : Roue de vélo et tabouret # 17

- Pourquoi le tabouret tournant (à l'arrêt quand l'axe de la roue est horizontal) se met-il en rotation quand on force l'axe de la roue à être vertical ?



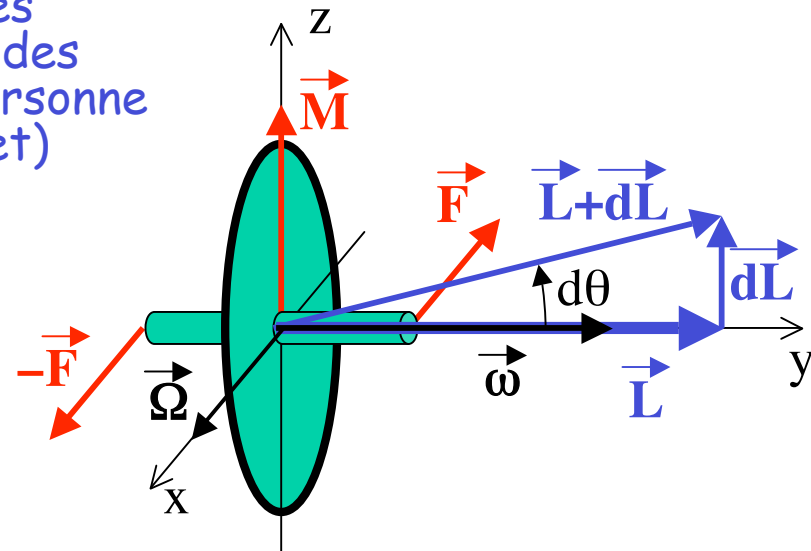
- **Conservation de  $L$**  : si le tabouret peut tourner sans frottements sur son socle, la composante z du moment cinétique du système roue+personne+tabouret est conservée ( $L_{z,tot} = 0$ )
- **3ème loi** : si la personne applique des forces sur la roue, la roue applique des forces égales et opposées sur la personne (qui la font tourner sur son tabouret)

$$M = \frac{dL}{dt} = L \frac{d\theta}{dt} = L \Omega$$

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \vec{L}$$

Attention: axe de rotation modifié !

$$\vec{\omega}_{tot} = \vec{\omega} + \vec{\Omega} \approx \vec{\omega}$$



# Effets gyroscopiques (3)

Démos : Gyroscope à roue de vélo sur support # 42  
Anagyre # 175

- Toupie symétrique avec un point fixe :
  - Le moment du poids par rapport au point fixe est constamment perpendiculaire au moment cinétique (supposé selon l'axe de rotation propre)  $\Rightarrow$  la norme du moment cinétique reste constante :  $L_c = I_{\Delta} \omega$
  - L'axe de rotation propre a un **mouvement de précession** autour de l'axe vertical (de vitesse angulaire  $\Omega$ )

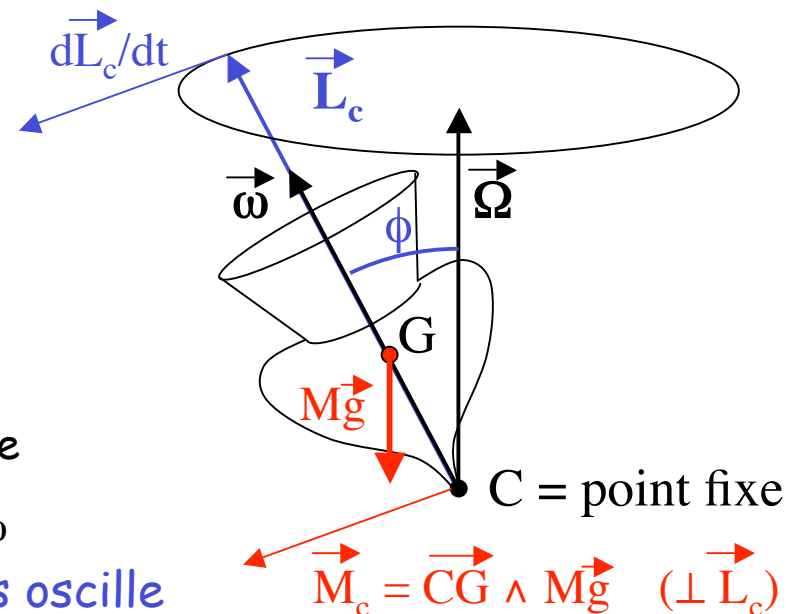
$$\vec{M}_C = \frac{d\vec{L}_C}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \vec{L}_C$$

$$\overline{CG} Mg \sin\phi = \Omega L_C \sin\phi$$

$$\Omega = \frac{Mg \overline{CG}}{L_C} = \frac{Mg \overline{CG}}{I_{\Delta} \omega}$$

- Note : on a négligé le moment cinétique causé par la rotation  $\Omega$  !  
Résultat approximatif valable si  $\Omega \ll \omega$

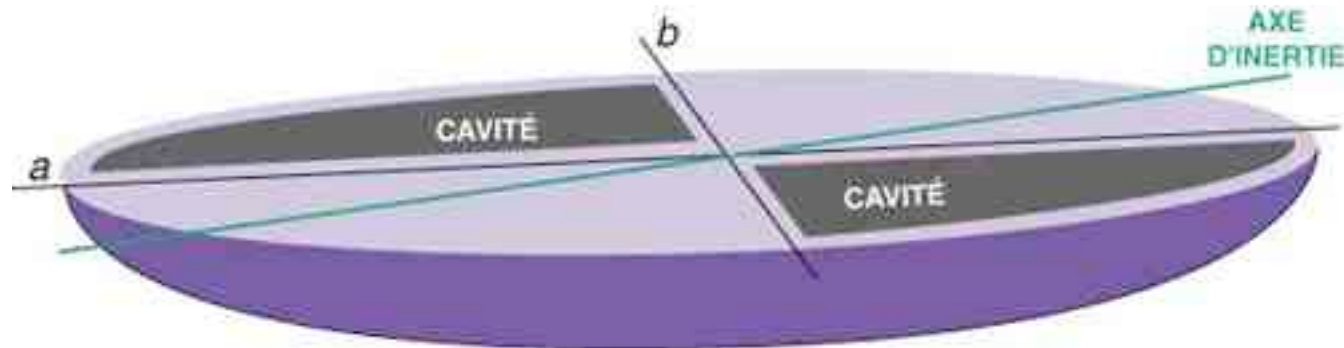
- Cas général :  $\phi$  n'est pas constant mais oscille entre deux extrêmes et un **mouvement de nutation** se superpose encore au **mouvement de précession**



- Toupie sans point d'appui fixe, avec frottement sur le sol

# Anagyre

du grec ana : en sens contraire et gyros : cercle  
un objet aux propriétés très curieuses.



- Cet objet **ellipsoïdal**, possède une géométrie particulière qui induit un comportement étrange lorsqu'il est mis en rotation : **lancé dans un sens, il va tourner très rapidement, alors que lancé dans l'autre sens il va s'arrêter au bout de quelques instants pour repartir dans l'autre sens de rotation**
- Initialement l'anagyre possède de l'énergie cinétique de rotation ; cette énergie à cause de la géométrie spécifique de la pierre est convertie en énergie de mouvement oscillatoire, enfin de nouveau en énergie de rotation.
- L'asymétrie de l'objet, apparente dans la forme, ou cachée dans la **répartition inhomogène des masses**, implique que l'axe d'inertie n'est pas confondu avec l'axe géométrique (la symétrie de l'objet n'est qu'apparente).
- Solution du problème récente et difficile ... !