ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

3 octobre 2008

cours de la semaine # 3

EPFL - LABORATOIRE D'ASTROPHYSIQUE

Bienvenue au

Cours de physique générale

Physique I pour étudiants de première année en section de mathématiques

Prof. Georges Meylan

Laboratoire d'astrophysique

Site web du laboratoire et du cours :

http://lastro.epfl.ch

Quelques contributions de Galilée

- Physicien, astronome et écrivain italien, né à Pise en 1564.
- Découvre la loi de la chute des corps dans le vide.
- Donne une première formulation du principe d'inertie.
- Pressent la loi de composition des vitesses.
- Met en évidence l'isochronisme des oscillations d'un pendule.
- Introduit l'emploi de la lunette en astronomie ⇒ révolution dans l'observation de l'Univers.
- Découvre le relief de la Lune, les principaux satellites de Jupiter, les phases de Vénus et la présence d'étoiles dans la Voie Lactée.
- Se rallie au système héliocentrique de Copernic (mis à l'Index).
- Condamné par le tribunal de l'Inquisition et obligé de se rétracter en 1633.
- Réhabilité par l'Eglise en ????.
- «Discours concernant deux sciences nouvelles» (1638).

Quelques contributions de Galilée

- Physicien, astronome et écrivain italien, né à Pise en 1564.
- Découvre la loi de la chute des corps dans le vide.
- Donne une première formulation du principe d'inertie.
- Pressent la loi de composition des vitesses.
- Met en évidence l'isochronisme des oscillations d'un pendule.
- Introduit l'emploi de la lunette en astronomie ⇒ révolution dans l'observation de l'Univers.
- Découvre le relief de la Lune, les principaux satellites de Jupiter, les phases de Vénus et la présence d'étoiles dans la Voie Lactée.
- Se rallie au système héliocentrique de Copernic (mis à l'Index).
- Condamné par le tribunal de l'Inquisition et obligé de se rétracter en 1633.
- Réhabilité par l'Eglise en 1992.
- «Discours concernant deux sciences nouvelles» (1638).

Galilée et la chute des corps

- Le mouvement « naturel » des corps est rectiligne uniforme (principe d'inertie) ; toute déviation est due à une force.

- La chute des corps (dans le vide, $v_0 = 0$) est un mouvement rectiligne uniformément accéléré sous l'effet de la force de la pesanteur.
  - Prouvé expérimentalement par Galilée

- Galilée constate expérimentalement et théoriquement que la période d'un pendule est indépendante de sa masse m ;

→ force de pesanteur proportionnelle à m

Galileo Galilei (1564–1642)

Existence de forces de frottement

Jusqu'à Galilée, les objets lourds étaient considérés comme tombant plus rapidement que les légers.

Galilée étudie des cas idéalisés, simplifiés

(a) (b)

Galilée postule que tous les objets tombent avec une accélération constante en l'absence d'air et d'autre force de frottement

Chutes des corps et mouvements uniformément accélérés

L'accélération gravitationnelle près de la surface de la Terre est cte.

Dans la cas d'un mouvement rectiligne :

$$\bar{v} = \frac{x - x_0}{t - t_0} = \frac{x - x_0}{t} \qquad avec\ x(t=0) = x_0,\ \ y(t=0) = y_0,\ \ t_0 = 0$$

$$a = \bar{a} = \frac{v - v_0}{t}$$

Vitesse d'un objet après un certain temps d'accélération : $\boxed{v = v_0 + at \qquad (i)}$

$$\boxed{\bar{v} = \frac{x - x_0}{t} \quad \Rightarrow \quad x = x_0 + \bar{v}t \qquad (ii)}$$

et comme a = cte , la vitesse moyenne $\bar{v}$ sera entre les valeurs initiale v_0 et finale v de la vitesse $\boxed{\Rightarrow \quad \bar{v} = \frac{v_0 + v}{2} \qquad (iii)}$

Les Eqs. (i), (ii), (iii) $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \bar{v}\,t \\ &= x_0 + \left(\frac{v_0 + v}{2}\right)t \\ &= x_0 + \left(\frac{v_0 + v_0 + a\,t}{2}\right)t \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \qquad (iv)} \end{aligned}$$

Chutes des corps
et mouvements uniformément accélérés

Substituant (iii) dans (ii) $\Rightarrow \quad x = x_0 + \bar{v}t = x_0 + \left(\dfrac{v+v_0}{2}\right)t$

Tirant t de (i) $\Rightarrow \quad t = \dfrac{v-v_0}{a}$ et remplaçant t dans ↗ , on obtient :

$$x = x_0 + \left(\frac{v+v_0}{2}\right)\left(\frac{v-v_0}{a}\right) = x_0 + \frac{v^2-v_0^2}{2a}$$

dont on tire v^2 :

$$\boxed{v^2 = v_0^2 + 2a(x-x_0) \qquad (v)}$$

avec a = cte.

On obtient ainsi 4 équations,

reliant la position, la vitesse, l'accélération et le temps, dans le cas a = cte :

$$\left.\begin{aligned} &a) \qquad v = v_0 + at \\ &b) \qquad x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \\ &c) \qquad v^2 = v_0^2 + 2a(x-x_0) \\ &d) \qquad \bar{v} = \frac{v_0+v}{2} \end{aligned}\right\} \quad \text{a = cte}$$

Application : piste d'un aéroport

- Vous voulez construire un aéroport pour petits avions. Une sorte d'avion attendue sur cet aéroport doit atteindre, pour décoller, une vitesse d'au moins 27,8 m/s (100 km/h) et peut accélérer à 2,00 m/s². Questions :

a) Si la piste a 150 m de long, ce type d'avion peut-il décoller ?

b) Sinon, quelle est la longueur minimale que la piste doit avoir ?

a) On connaît l'accélération de l'avion et la longueur de la piste. On cherche si la vitesse de 27,8 m/s peut être atteinte. On connaît :

$$x_0 = 0$$
$$v_0 = 0$$
$$x = 150\,m$$
$$a = 2{,}00\,m/s^2$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} v^2 &= v_0^2 + 2a(x - x_0) \\ &= 0 + 2(2{,}00\,m/s^2)(150\,m) = 600\,m^2/s^2 \\ v &= \sqrt{600\,m^2/s^2} = 24{,}5\,m/s \end{aligned}$$

piste trop courte

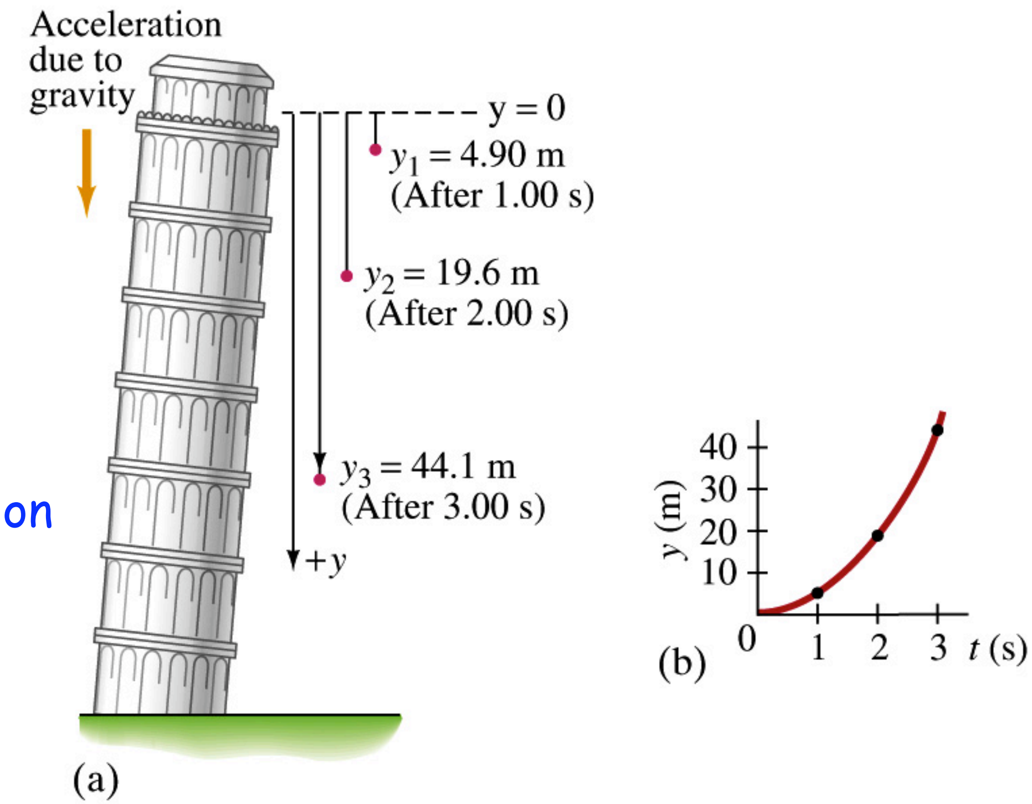
b) $$\Rightarrow \quad (x - x_0) = \frac{v^2 - v_0^2}{2a} = \frac{(27{,}8\,m/s)^2 - 0}{2(2{,}00\,m/s^2)} = 193\,m$$

longueur minimale

a) An object dropped from a tower falls with progressively greater speed and covers greater distance with each successive second
b) Graph of y vs. t

Pour tout objet au départ au repos,
Galilée montre que, une fois lâché, l'objet parcourt
une distance proportionnelle au carré du temps écoulé : $\boxed{d \propto t^2}$

Galilée
peut être
considéré
comme
le père
de la science
moderne :
théorie ⇔ observation



En un point donné à la surface de la Terre et en l'absence de résistance de l'air (vide), tous les objets tombent avec la même accélération constante : $g = 9{,}81\ m/s^2$

Chute de corps de la Tour de Pise

On lâche une balle du sommet de la Tout de Pise.
De combien de mètres aura-t-elle chuté après 1s, 2s, et 3s.
$a = g = 9.81\ m/s^2$

On utilise l'équation $x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$ avec $x_0=0$, $v_0=0$ et $a=g$

$$y_1 = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}(9{,}81 m/s^2)(1{,}00\, s)^2 = 4{,}90\ m$$

$$y_2 = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}(9{,}81 m/s^2)(2{,}00\, s)^2 = 19{,}6\ m$$

$$y_3 = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}(9{,}81 m/s^2)(3{,}00\, s)^2 = 44{,}1\ m$$

Chutes des corps
et mouvements uniformément accélérés

- Galilée : étude des corps en chute libre, le long d'un rail, sans vitesse initiale $\Rightarrow$ mvt rectiligne, d'équation :

$$x(t) = x_0 + \tfrac{1}{2}a_0 (t - t_0)^2$$

  où $a_0 = g \sin \theta$ (avec $g \cong 9{,}81\ \mathrm{ms}^{-2}$) dépend de l'inclinaison du rail mais pas du corps considéré.

- Si l'on diminue, voire supprime les frottements : amélioration de l'accord entre les mesures expérimentales et l'équation ci-dessus, équation dont on peut tirer la vitesse et l'accélération :

$$v(t) = \dot{x}(t) = a_0 (t - t_0)$$

$$a(t) = a_0 = \text{cste.}$$

Démo : Chocs élastiques et chocs mous sur rail à air # 766

- Observation $\Rightarrow$ mouvement rectiligne uniforme
  $\Rightarrow$ mouvement rectiligne uniformément accéléré

Chutes des corps et mouvements uniformément accélérés (suite)

- Inversement, pour tout mvt rectiligne d'accélération cte a_0 , on a :

$$\frac{dv}{dt} = a_0 \qquad \text{d'où} \qquad v(t) = v_0 + a_0(t - t_0)$$

$$\frac{dx}{dt} = v(t) \qquad \text{d'où} \qquad x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) + \tfrac{1}{2}a_0(t - t_0)^2$$

  où x_0 et v_0 sont la position et la vitesse à l'instant t_0. L' équation de la diapositive précédente correspond au cas $v_0 = 0$.

- Des deux équations ci-dessus on vérifie facilement la relation :

$$\tfrac{1}{2}v(t)^2 - a_0 x(t) = \tfrac{1}{2}v_0^2 - a_0 x_0 = \text{cste.}$$

En effet :

Par conséquent, pour tout mvt rectiligne uniformément accéléré,

$$\boxed{G(x, v) = \tfrac{1}{2}v^2 - a_0 x}$$

est une fonction cte avec le temps, fixée par les conditions initiales.

Chutes des corps et mouvements uniformément accélérés (suite)

- Inversement, pour tout mvt rectiligne d'accélération cte a_0 , on a :

$$\frac{dv}{dt} = a_0 \qquad \text{d'où} \qquad v(t) = v_0 + a_0(t - t_0)$$

$$\frac{dx}{dt} = v(t) \qquad \text{d'où} \qquad x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) + \tfrac{1}{2}a_0(t - t_0)^2$$

où x_0 et v_0 sont la position et la vitesse à l'instant t_0. L' équation de la diapositive précédente correspond au cas $v_0 = 0$.

- Des deux équations ci-dessus on vérifie facilement la relation :

$$\tfrac{1}{2}v(t)^2 - a_0 x(t) = \tfrac{1}{2}v_0^2 - a_0 x_0 = \text{cste.}$$ En effet :

$$\frac{d}{dt}\left(\tfrac{1}{2}\boldsymbol{v}(t)^2 - \boldsymbol{a}_0 \cdot \boldsymbol{x}(t)\right) = \boldsymbol{v} \cdot \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} - \boldsymbol{a}_0 \cdot \frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{v} \cdot \left(\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} - \boldsymbol{a}_0\right) = 0.$$

Par conséquent, pour tout mvt rectiligne uniformément accéléré,

$$\boxed{G(x,\ v) = \tfrac{1}{2}v^2 - a_0 x}$$

est une fonction cte avec le temps, fixée par les conditions initiales.

Chutes des corps et mouvements uniformément accélérés (suite)

Soit un point P d'évolution $x(t)$; on appelle *constante du mouvement* toute fonction $G(x, v)$ telle que

$$G(x(t), v(t)) = G(x_0, v_0).$$

Par la suite on écrira plus simplement

$$G(x, v) = K \quad \text{avec} \quad K = G(x_0, v_0) = \text{cste}.$$

Attention : constante du mouvement ≠ constante

$G(x,v)$ cte du mvt $\Leftrightarrow$ $d\,G(x(t),v(t))/dt = 0$

Dans le cas du mvt rectiligne uniformément accéléré (a_0 = cte), on a :

$$\frac{dG}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\tfrac{1}{2}v^2 - a_0 x\right) = v\,\frac{dv}{dt} - a_0\,\frac{dx}{dt} = v\left(\frac{dv}{dt} - a_0\right) = 0$$

Cette cte du mvt est (à un facteur près) l'énergie mécanique du système.
Sous-jacente apparaît une super-loi : <u>la conservation de l'énergie mécanique</u>

Lois de Newton

« Philosophiae Naturalis Principia Mathematica » (1687)

Sir Isaac Newton (1642–1727)

- Lex prima (loi d'inertie):
  - « Tout corps persévère dans l'état de repos ou de mouvement uniforme en ligne droite à moins qu'une force n'agisse sur lui et ne le contraigne à changer d'état »

$$\boxed{\text{mouvement rectiligne uniforme} \Leftrightarrow \vec{F} = 0}$$

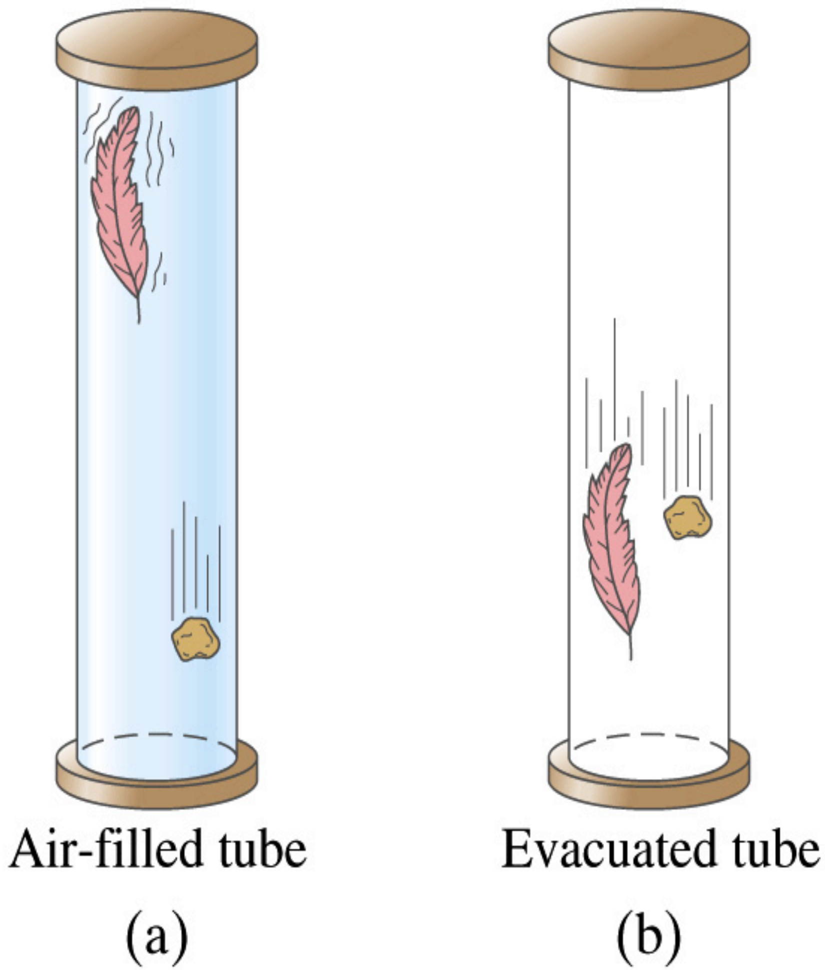
- Lex secunda:
  - « Les changements dans le mouvement d'un corps sont proportionnels à la force et se font dans la direction de la force »

$$\boxed{\vec{F} = m\vec{a}}$$

- Lex tertia (action-réaction):
  - « A chaque action, il y a toujours une réaction égale et opposée; si un corps exerce une force sur un autre, cet autre corps exerce une force égale et opposée sur le premier »

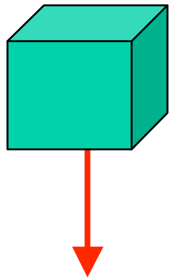
$$\boxed{\vec{F}_{1\to 2} = -\vec{F}_{2\to 1}}$$

Démo : Tube de Newton # 9



Force de pesanteur et chute des corps

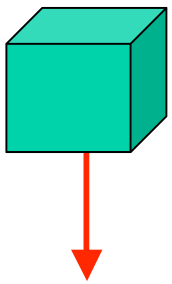
- Modèle phénoménologique :
  - l'attraction terrestre donne lieu à une force verticale (appelée poids) proportionnelle à la masse m :
    $F = mg$
  - facteur de proportionnalité :
    $g \cong$ constante $= 9.81\ m/s^2$



$\vec{F} = m\vec{g}$

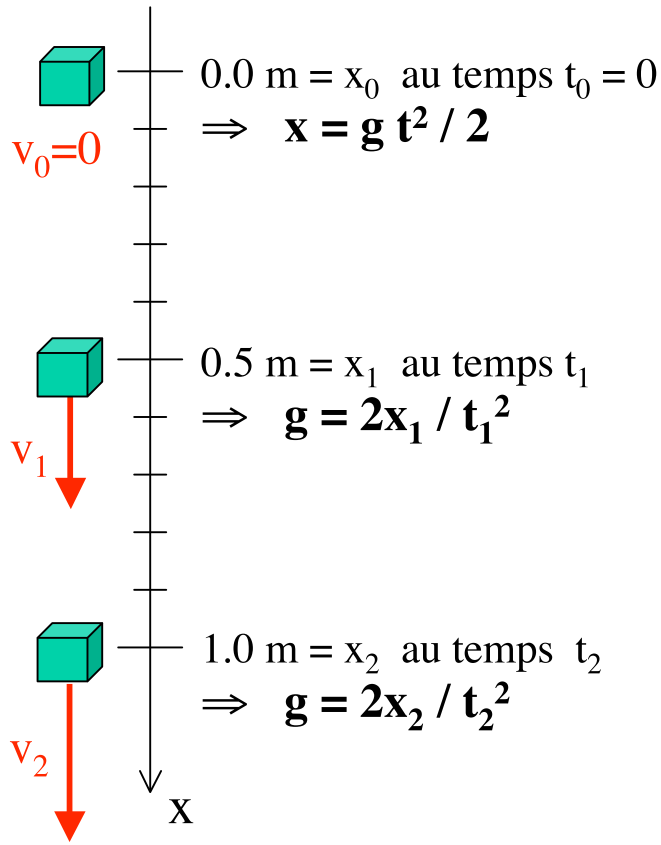
- Application de la 2ème loi de Newton :
  - Si le poids est la seule force appliquée à un point matériel :
    $F = ma \Rightarrow a = g =$ constante

    $\Rightarrow$ dans le vide les corps ont un mouvement uniformément accéléré d'accélération g



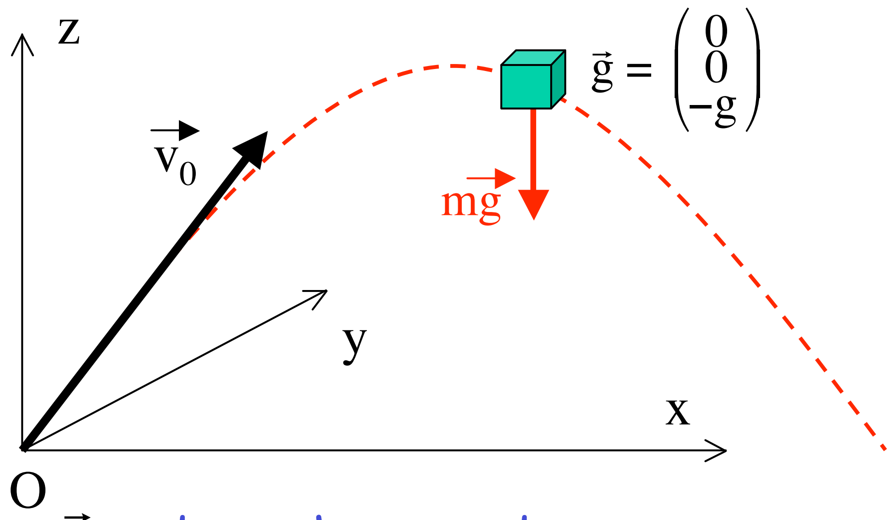
$\vec{F} = m\vec{a}$

Démo : mesure de g chute de billes # 92



Projectile sous l'effet de la force de pesanteur

- On peut toujours choisir un repère Oxyz (avec z vertical) tel quel les conditions initiales s'écrivent :



$$\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} v_{0x} \\ v_{0y} \\ v_{0z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{0x} \\ 0 \\ v_{0z} \end{pmatrix}$$

- Application de la loi de Newton, $\vec{F} = m\vec{a}$, dans chacune des directions x, y, z :

$$\begin{cases} m\ddot{x} = 0 & \Rightarrow x(t) = v_{0x}t + x_0 = v_{0x}t \\ m\ddot{y} = 0 & \Rightarrow y(t) = v_{0y}t + y_0 = 0 \\ m\ddot{z} = -mg & \Rightarrow z(t) = -\tfrac{1}{2}gt^2 + v_{0z}t + z_0 = -\tfrac{1}{2}gt^2 + v_{0z}t \end{cases}$$

- En éliminant t, on obtient l'équation d'une parabole dans le plan y=0 :

$$z = -\frac{1}{2}\, g \left(\frac{x}{v_{0x}}\right)^2 + v_{0z}\left(\frac{x}{v_{0x}}\right)$$

Décomposition du mouvement balistique

Démo : Tir oblique (table à air) # 762

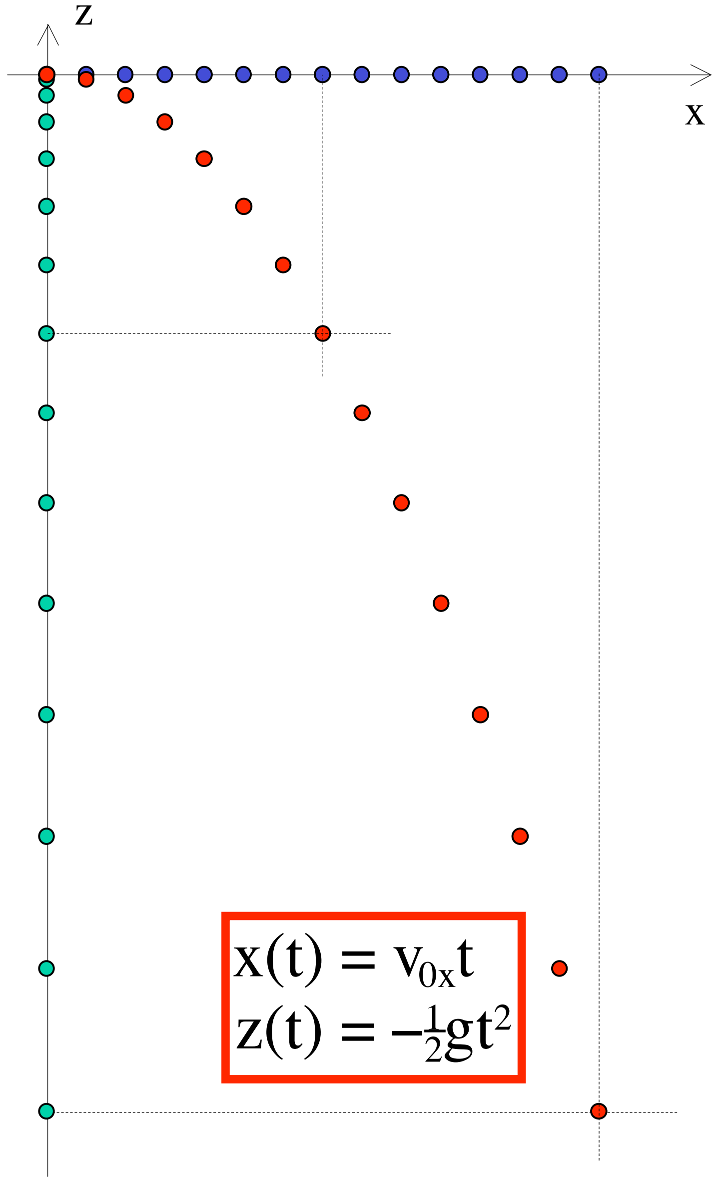
Deux boules dont les conditions initiales ne diffèrent que par la vitesse horizontale touchent le sol en même temps

- Le mouvement d'un corps en chute libre peut être vu comme la superposition de deux mouvements:
  - un mouvement rectiligne horizontal uniforme :

$$\boxed{x(t) = v_{0x}t}$$

  - un mouvement rectiligne vertical uniformément accéléré :

$$\boxed{z(t) = -\tfrac{1}{2}gt^2}$$

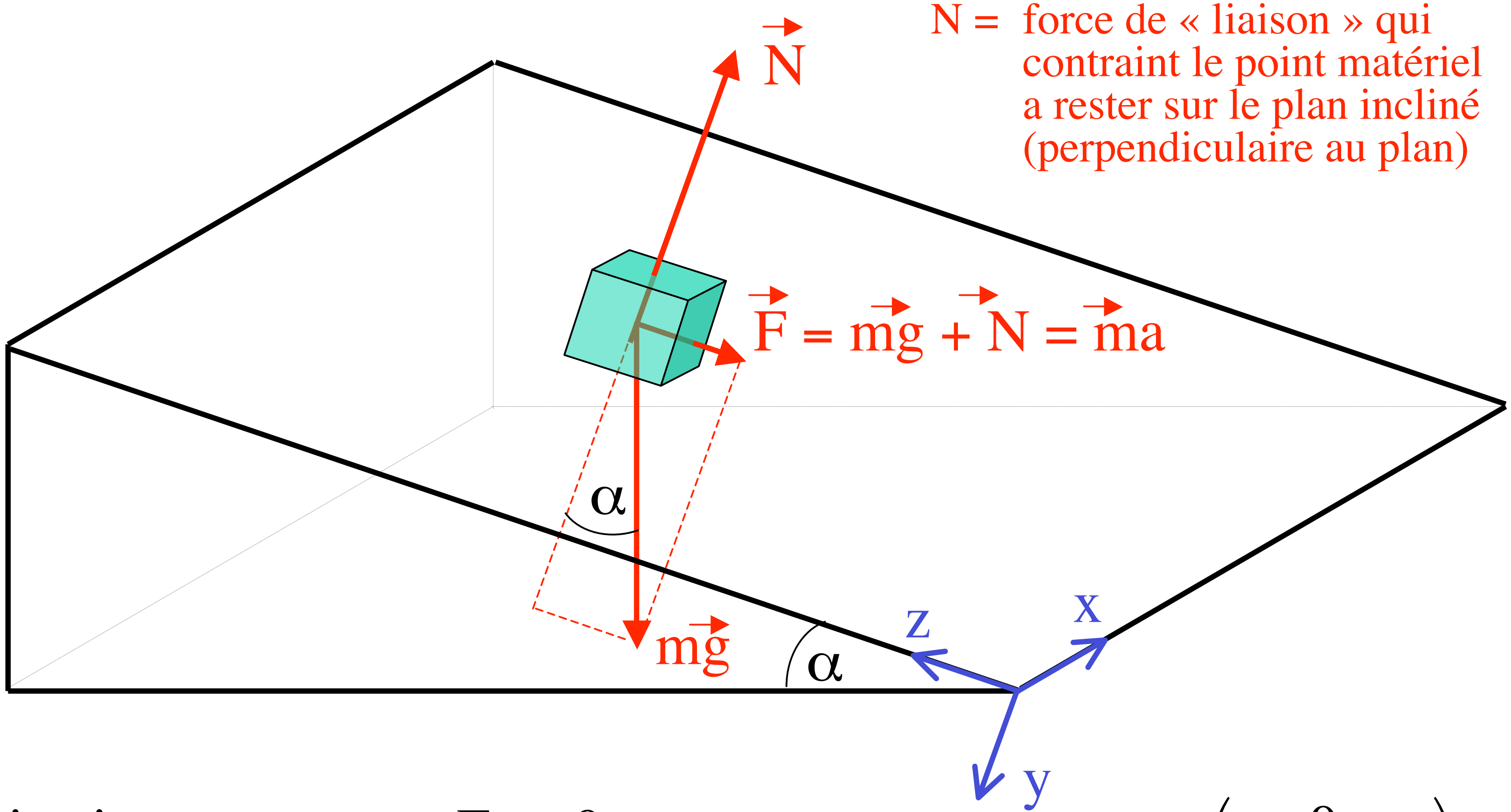


$$\boxed{\begin{aligned} x(t) &= v_{0x}t \\ z(t) &= -\tfrac{1}{2}gt^2 \end{aligned}}$$

Plan incliné sans frottement (table à air)

Démo : Tir oblique (table à air) # 762

N = force de « liaison » qui contraint le point matériel a rester sur le plan incliné (perpendiculaire au plan)



Projection sur axe x: $F_x = 0$

Projection sur axe y: $F_y = mg\cos\alpha - N = 0$

Projection sur axe z: $F_z = -\,mg\sin\alpha = ma_z$

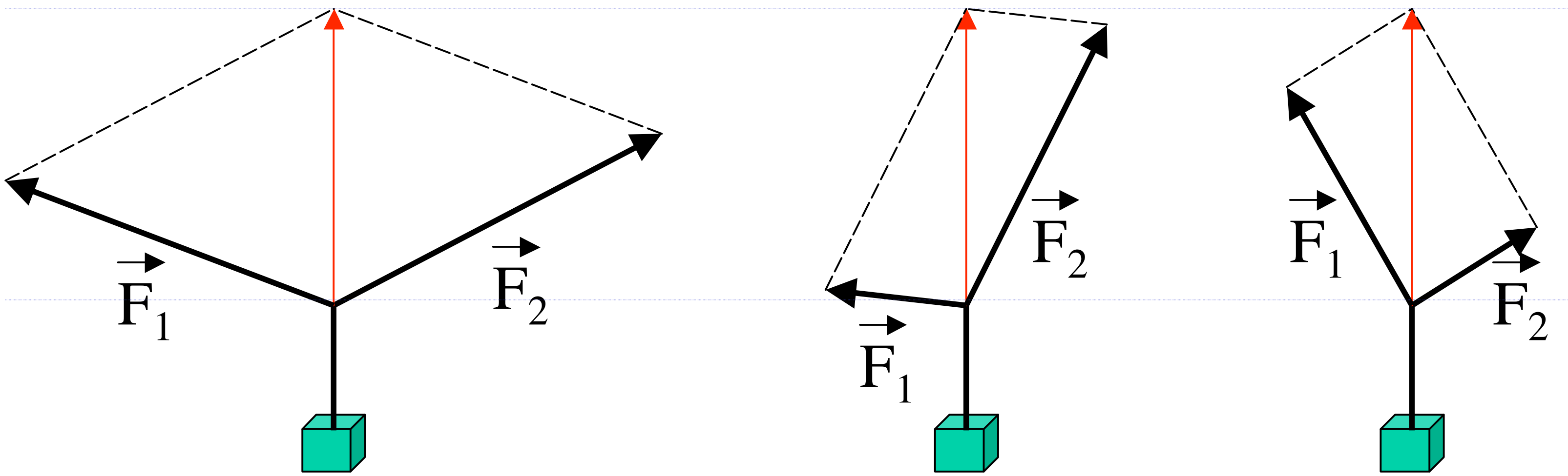
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\,g\sin\alpha \end{pmatrix}$$

Démos avec petit « g » : 1) accélération a indép. de m, 2) intersection balistique

Expérience de Stévin (1548–1620)

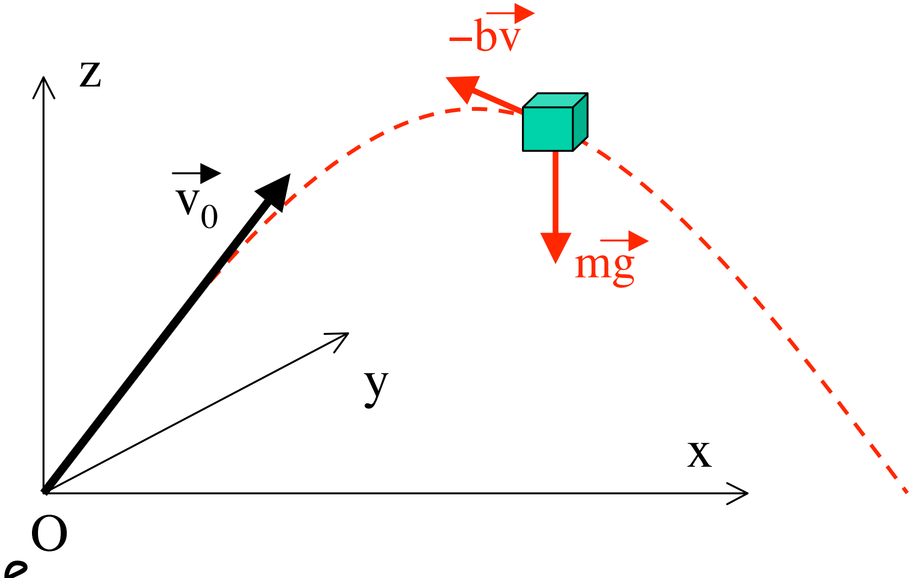
Démo : Parallélogramme des forces (articulations) # 13

- Une masse est suspendue à deux fils obliques dont on mesure les tensions avec des dynamomètres
- La diagonale verticale du parallélogramme construit sur les deux vecteurs forces est indépendante de la direction des fils



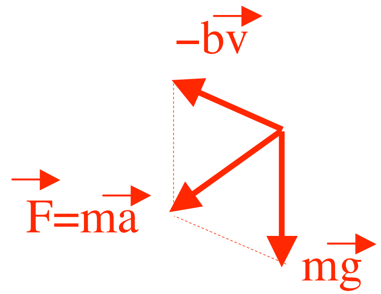
- Conclusion: il est possible de représenter l'effet global des deux forces au moyen d'une seule force égale à $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$
  - cette résultante est en l'occurrence opposée au poids de la masse puisque cette dernière est à l'équilibre (immobile)

Balistique avec frottement dans l'air



- Notre modèle balistique avec F = mg est-il bon ?
  - $v_z(t)$ ne croît pas à l'infini !
- Modèle plus réaliste :
  - On tient compte de la résistance de l'air
  - Force de frottement opposée à la vitesse : $\vec{F}_{frot} = -b\vec{v}$, b = cte et v « petite » (lamin)

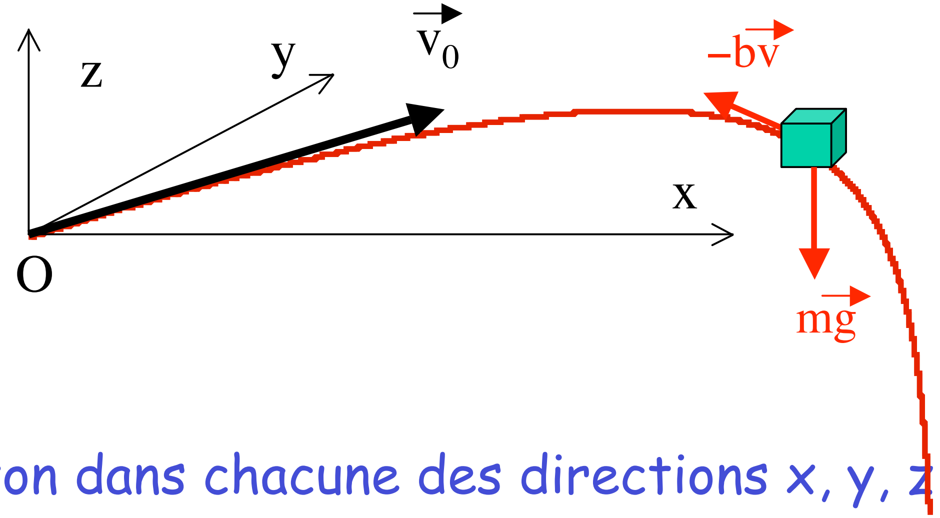
    $\vec{F}_{frot} = -c\vec{v}^{\,2}$, c = cte et v « grande » (turbu)
- Attention :
  - Les forces s'additionnent comme des vecteurs
  - La 2ème loi de Newton s'applique en utilisant la somme vectorielle des forces (comme dans l'exemple précédent de la table à air)



Chute libre avec frottement

- On peut toujours choisir un référentiel Oxyz (avec z vertical) tel quel les conditions initiales s'écrivent :

$$\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} v_{0x} \\ 0 \\ v_{0z} \end{pmatrix}$$



- Application de la loi de Newton dans chacune des directions x, y, z :

$$m\ddot{x} = -b\dot{x} \quad \Rightarrow \quad x(t) = v_{0x}\tau\left(1-e^{-t/\tau}\right)$$

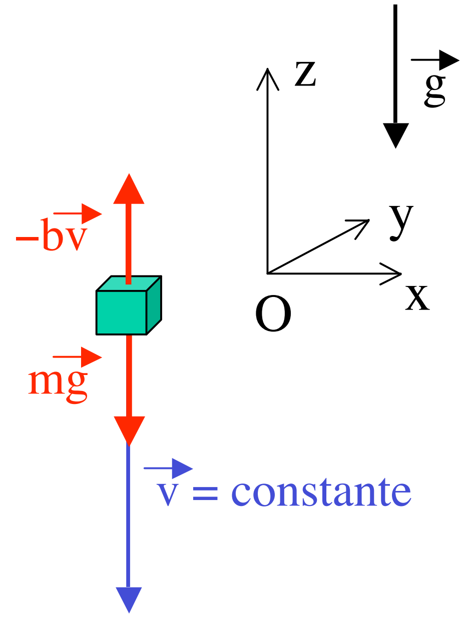
$$m\ddot{y} = -b\dot{y} \quad \Rightarrow \quad y(t) = 0 \qquad \text{avec } \tau = \frac{m}{b}$$

$$m\ddot{z} = -b\dot{z} - mg \quad \Rightarrow \quad z(t) = -g\tau\, t + \left(v_{0z} + g\tau\right)\tau\left(1-e^{-t/\tau}\right)$$

- Vitesse limite de chute ($t \gg \tau$): $v_z(t) \cong -g\tau = -mg/b$

Vitesse limite de chute

- Après un temps de chute long ($t \gg m/b$) :
  - vitesse $\vec{v}$ = constante
  - accélération $\vec{a} = 0$
  - force $\vec{F} = m\vec{a} = m\vec{g} - b\vec{v} = 0$
  - vitesse $\vec{v} = \vec{g}\, m/b$



- Deux masses différentes avec b constant :
  - la plus grande masse
    - atteint sa vitesse limite plus tard
    - atteint une vitesse limite plus grande
- Deux masses égales dans milieux visqueux avec b différents :
  - dans le milieu le plus visqueux
    - vitesse limite atteinte plus vite
    - vitesse limite plus faible

Démo : Viscosité (billes) force de frottement # 682