



ÉCOLE POLYTECHNIQUE  
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

# ASTROPHYSIQUE III : Dynamique stellaire et galactique

Dr. Pierre North  
Laboratoire d'astrophysique  
Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne (EPFL)  
Observatoire de Sauverny  
CH-1290 Versoix

Sur la base du livre de J. Binney & S. Tremaine PUP 2008  
et des cours de Daniel Pfenniger, Gary Mamon et Georges Meylan

Année académique 2011-2012  
Semestre d'automne 2011

(Dernière révision 13 janvier 2012)

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>7</b>
1.1	Historique . . . . .	7
1.1.1	Quelle physique ? . . . . .	8
1.2	Aspects observationnels . . . . .	10
1.2.1	Notre Galaxie . . . . .	10
1.2.2	Les autres galaxies . . . . .	15
1.2.3	Amas ouverts et globulaires . . . . .	22
1.2.4	Amas de galaxies . . . . .	23
1.2.5	Trous noirs . . . . .	23
1.3	De la différence entre mécanique statistique et dynamique stel- laire . . . . .	25
1.3.1	La dynamique “sans collisions” et ses limites : notion de temps de relaxation . . . . .	26
<b>2</b>	<b>Théorie du potentiel</b>	<b>31</b>
2.1	Généralités . . . . .	31
2.2	Systèmes sphériques . . . . .	35
2.2.1	Potentiels de quelques systèmes simples . . . . .	37
2.3	Potentiel et densité des systèmes aplatis . . . . .	43
2.3.1	Le modèle de Kuzmin et le modèle de Miyamoto & Nagai	43
2.3.2	Equation de Poisson pour les systèmes très aplatis . . .	44
2.4	Les potentiels des disques . . . . .	47
2.4.1	Potentiels de disques à partir d’homoéoïdes . . . . .	47
2.4.2	Le disque de Mestel . . . . .	50
2.4.3	Le disque exponentiel . . . . .	51
2.5	Le potentiel de notre Galaxie . . . . .	53

<b>3</b>	<b>Les orbites stellaires</b>	<b>61</b>
3.1	Les systèmes sphériques . . . . .	63
3.1.1	Le potentiel harmonique . . . . .	66
3.1.2	Le potentiel de Kepler . . . . .	67
3.1.3	Le potentiel de Kepler “post-newtonien” . . . . .	68
3.2	Les systèmes axisymétriques . . . . .	70
3.3	Epicycles et ellipsoïde des vitesses (orbites quasi-circulaires) .	73
3.4	Rappels de mécanique . . . . .	81
3.4.1	Mécanique de Newton . . . . .	81
3.4.2	Mécanique de Lagrange . . . . .	81
3.4.3	Mécanique de Hamilton . . . . .	82
3.5	Les surfaces – ou plans – de section (en lecture) . . . . .	84
3.5.1	Constantes et intégrales du mouvement . . . . .	84
3.5.2	Les surfaces de section . . . . .	85
3.6	Orbites principales dans les systèmes tri- axiaux non-tournants : galaxies elliptiques . . . . .	88
3.7	Orbites principales dans les systèmes tri- axiaux tournants : galaxies spirales barrées . . . . .	90
3.8	Résonances dans un potentiel tournant pres- que axisymétrique	92
3.9	Surfaces de section dans une galaxie barrée . . . . .	97
<b>4</b>	<b>Equilibre des systèmes sans collisions</b>	<b>98</b>
4.1	L’équation de Boltzmann sans collisions . . . . .	99
4.1.1	Limites de l’équation de Boltzmann sans collisions . . .	104
4.1.2	Relation entre DF et les observables . . . . .	106
4.2	Théorème de Jeans . . . . .	109
4.2.1	Application : système sphérique stationnaire . . . . .	110
4.3	Les équations de Jeans . . . . .	126
4.4	Identité de Lagrange, critère de Jacobi et théorème du viriel .	130
4.4.1	Identité de Lagrange, critère de Jacobi . . . . .	130
4.4.2	Théorème du viriel . . . . .	131
4.4.3	Applications du théorème du viriel . . . . .	132
4.4.4	Projection et déprojection (G. Mamon, 2008-2009) . .	136
<b>5</b>	<b>Stabilité des systèmes sans collisions</b>	<b>141</b>
5.1	Introduction . . . . .	141
5.1.1	Réponse linéaire . . . . .	142
5.1.2	Equations linéarisées . . . . .	144

5.2	Réponse des systèmes homogènes . . . . .	148
5.2.1	Bases physiques de l'instabilité de Jeans . . . . .	148
5.2.2	Systèmes homogènes et “duperie de Jeans” . . . . .	149
5.2.3	Réponse d'un système fluide homogène . . . . .	150
5.2.4	Réponse d'un système stellaire homogène . . . . .	154
5.2.5	Discussion . . . . .	155
5.3	Stabilité séculaire . . . . .	157
5.3.1	Réponse des systèmes sphériques . . . . .	157
<b>6</b>	<b>Dynamique des disques et structure spirale</b>	<b>165</b>
6.1	Géométrie . . . . .	165
6.1.1	Intensité et nombre de bras . . . . .	165
6.1.2	Les bras spiraux sont-ils “leading” ou “trailing” ? . . . .	166
6.1.3	Ouverture des bras et problème de l'enroulement . . .	167
6.1.4	Vitesse de rotation de la structure spirale (“pattern”) .	172
6.1.5	Le théorème anti-spiral . . . . .	176
6.2	Mécanique des ondes dans un disque en rotation différentielle	177
6.2.1	Introduction . . . . .	177
6.2.2	Relation de dispersion pour des bras spiraux serrés (en lecture) . . . . .	181
6.2.3	Stabilité locale des disques en rotation différentielle . .	191
<b>7</b>	<b>Théorie cinétique</b>	<b>196</b>
7.1	Processus de relaxation . . . . .	196
7.2	Théorème de Liouville (en lecture) . . . . .	203
7.3	Thermodynamique des systèmes autogravitants . . . . .	206
7.3.1	Chaleur spécifique négative . . . . .	206
7.3.2	La “catastrophe gravothermique” . . . . .	207
7.4	L'approximation de Fokker-Planck . . . . .	212
7.4.1	L'équation maîtresse . . . . .	212
7.4.2	L'équation de Fokker-Planck . . . . .	213
7.5	Evolution des systèmes stellaires sphériques . . . . .	217
7.5.1	Perte de masse due à l'évolution stellaire . . . . .	217
7.5.2	Evaporation et éjection . . . . .	218
7.5.3	Effondrement du coeur . . . . .	220

<b>8</b>	<b>Collisions et rencontres de systèmes stellaires</b>	<b>225</b>
8.1	Friction dynamique . . . . .	225
8.2	Marées . . . . .	229
8.2.1	Marées instantanées . . . . .	229
8.2.2	Orbites circulaires . . . . .	232
8.2.3	Orbites allongées . . . . .	235
8.3	Coalescence (“mergers”) . . . . .	239

# Bibliographie :

- J. Binney, S. Tremaine, *Galactic Dynamics*, second edition, Princeton Series in Astrophysics, Princeton University Press, 2008.
- G. Mamon, *Dynamique gravitationnelle des systèmes à  $N$  corps*, photocopié Cours Transversal CT2, version 2008-2009.
- S. Chandrasekhar, *Principles of Stellar Dynamics*, Dover, 1942. Reissued by Dover in 2005.
- G. Contopoulos, M. Hénon, D. Lynden-Bell, *Dynamical Structure and Evolution of Stellar Systems*, Saas-Fee Advanced Course # 3, Swiss Society of Astronomy and Astrophysics, eds. L. Martinet & M. Mayor, Geneva Observatory, 1973
- J. Binney, J. Kormendy, S.D.M. White, *Morphology and Dynamics of Galaxies*, Saas-Fee Advanced Course # 12, Swiss Society of Astronomy and Astrophysics, eds. L. Martinet & M. Mayor, Geneva Observatory, 1982
- L. Landau, E. Lifchitz, *Mécanique*, 3e édition, Editions Mir, Moscou, 1969

# Chapitre 1

## Introduction

### 1.1 Historique

- 1600 : Elaboration de la mécanique céleste et de lois déterministes permettant de prévoir le mouvement des planètes autour du Soleil. Les principales contributions émanent de Kepler, Galileo Galilei, Newton, Lagrange, Laplace, Poincaré, ...
- 1850 : Découverte des lois de la thermodynamique et naissance de la mécanique statistique. Introduction de la notion de probabilité et de l'indéterminisme des trajectoires des particules. Formulation de l'hypothèse d'ergodicité : uniformité de la probabilité du système de se trouver dans un état à énergie donnée. Selon l'hypothèse ergodique, on admet qu'un processus aléatoire puisse être indifféremment caractérisé par les valeurs moyennes d'un ensemble d'événements réalisés à un instant donné ou par les valeurs successives d'une seule réalisation évoluant dans le temps. Les principaux fondateurs de la thermodynamique et de la mécanique statistique sont Clausius, Boltzmann, Gibbs, Maxwell, ...
- 1900 : Début de la dynamique stellaire : Jeans, Eddington.
- 1920 : Début de la dynamique galactique : Oort.
- 1955 : Fermi, Pasta, and Ulam procèdent à un des premiers calculs de dynamique sur ordinateur. Ils considèrent un ensemble d'oscillateurs harmoniques couplés et constatent la périodicité du mouvement de ce système, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse d'ergodicité.
- 1960 : Deux articles vont changer la façon de voir la dynamique. Hénon



& Heiles décrivent le mouvement chaotique des étoiles dans une galaxie à l'aide d'un modèle numérique simple. Lorentz élabore des modèles non-linéaires de l'atmosphère et des turbulences atmosphériques.

- Depuis 1960 : Les systèmes stellaires, et de façon plus générale les systèmes dynamiques, présentent des états réguliers (i.e. calculables sur des temps longs) et des états chaotiques (i.e. sensibilité exponentielle aux perturbations et aux conditions initiales du système). Lors de la modélisation de tels systèmes, on se heurte rapidement à un "mur de calcul" (par exemple, difficulté de faire des prévisions météorologiques fiables sur un intervalle de temps supérieur à une semaine).
- 1990 : Le système solaire est chaotique sur une échelle de temps de plusieurs millions d'années. Les probabilités de voir Mercure tomber vers le Soleil ou être éjectée du système solaire sont égales. Voir les travaux de Jacques Laskar. Ainsi le système solaire, qui avait conduit trois siècles auparavant au déterminisme, présente lui aussi des états chaotiques sur une échelle de temps beaucoup plus longue que l'année.

Il apparaît deux paradoxes :

- Déterminisme vs. Indéterminisme
- Thermodynamique vs. Univers. Alors que le deuxième principe de la thermodynamique prédit la croissance de l'entropie d'un système, on observe dans l'Univers la croissance des structures après le Big Bang.

### 1.1.1 Quelle physique ?

- *Relativité restreinte* : pas nécessaire, les vitesses en jeu dans la dynamique stellaire ( $1 - 10$  km/s) et galactique ( $100 - 1000$  km/s) sont en général non-relativistes, i.e.,  $v \ll c$ .
- *Relativité générale* : pas nécessaire non plus, les tailles caractéristiques  $R$  des systèmes dynamiques sont tels que  $R \gg R_S = 2GM/c^2$ .
- *Mécanique statistique* : ne peut s'appliquer telle quelle, car la mécanique statistique se restreint à l'étude de systèmes isolés caractérisés par des grandeurs extensives. Elle explique les effets des interactions de courte portée, mais ne convient pas à la gravitation. En effet, l'énergie gravifique s'estime par :  $E \sim \frac{Gm^2}{R} \sim G\rho^2 R^5 \sim G\rho^2 V^{5/3}$ . Or  $\frac{5}{3} > 1$ , ce qui implique qu'à grandes distances, c'est la gravitation qui domine les interactions.
- *Physique des plasmas* : ne s'applique pas, car les plasmas étudiés sont en général neutres. Et par conséquent, les charges présentes dans le

plasma sont écrantées et les forces électromagnétiques ont une portée qui ne dépasse pas la longueur de Debye. Une telle description n'est pas compatible avec la gravitation.

- *Physique quantique* : pas pertinente, car on est loin de la situation où les tailles caractéristiques  $R$  sont proches des longueurs d'onde de De Broglie  $\lambda = h/p$ . Cependant une influence des neutrinos ou d'autres particules exotiques sur la dynamique des étoiles et des galaxies n'est pas exclue. Il suffirait que les neutrinos aient une masse de  $m_\nu c^2 \simeq 0.1$  eV pour qu'ils puissent jouer un rôle. Mais la masse exacte des neutrinos reste encore un mystère, on sait seulement que  $0 < m_\nu c^2 \leq 1$  eV.

## 1.2 Aspects observationnels

### 1.2.1 Notre Galaxie

Notre Galaxie est de type spirale. C'est donc un système comprenant un *disque*, composante grossièrement axisymétrique contenant la plupart des étoiles, un *bulbe*, composante sphéroïdale centrale, et un *halo*, composante sphéroïdale beaucoup plus vaste contenant les *amas globulaires*, les étoiles pauvres en métaux dites “à grande vitesse” (par rapport au Soleil) et une “matière sombre” encore mystérieuse.

Passons brièvement en revue ces trois composantes :

**Le disque** définit le *plan galactique*, que l'on utilise comme plan équatorial des *coordonnées galactiques* ( $\ell, b$ ), qui sont héliocentriques. L'origine des longitudes galactiques,  $\ell = 0$ , est défini par le centre galactique, physiquement désigné par la radiosource Sagittarius A. La latitude galactique  $b$  est nulle sur le plan galactique et vaut  $b = \pm 90^\circ$  aux pôles galactiques (voir Fig. 1.1).

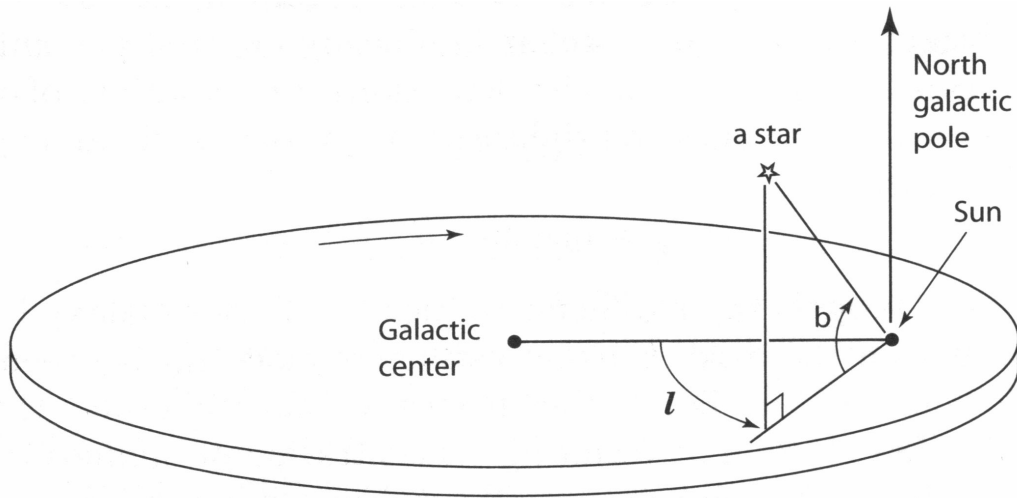


FIG. 1.1 – Coordonnées galactiques et sens de rotation de la Galaxie (flèche).

La position d'une étoile dans la Galaxie est définie par les trois coordon-

nées X (le long de l'axe Soleil –  $\ell = 0^\circ$ ), Y (axe Soleil –  $\ell = 90^\circ$ ) et Z (axe Soleil –  $b = 90^\circ$ ).

La brillance de surface du disque galactique, c'est-à-dire la luminosité stellaire totale par unité de surface du disque, décroît de manière à peu près exponentielle :

$$I(R) = I_d e^{-R/R_d} \quad (1.1)$$

où  $R_d$  est l'échelle de longueur du disque est vaut 2 ou 3 kpc. Notre Soleil ainsi que la plupart des étoiles du disque circulent sur des orbites presque circulaires autour du Centre Galactique, qui est situé à une distance  $R_0 \simeq 8.0$  kpc du Soleil. La vitesse d'une étoile sur orbite circulaire de rayon  $R_0$  est :

$$v_0 \equiv v_c(R_0) = (220 \pm 20) \text{ km s}^{-1}. \quad (1.2)$$

Un magnifique travail de Reid & Brunthaler (2004, ApJ 616, 872) a permis de mesurer le *mouvement propre* de la radio-source Sgr A\* par rapport à deux radiosources extragalactiques compactes. Ils obtiennent (voir aussi Reid 2008, RevMexAA 34, 53) :

$$\mu_\ell = (-6.379 \pm 0.026) \text{ mas/an} \quad \text{et} \quad \mu_b = (-0.202 \pm 0.019) \text{ mas/an}$$

selon la longitude et la latitude galactiques, respectivement (voir la Fig. 1.2). C'est le mouvement apparent du Centre Galactique dans le ciel, dû au mouvement du Soleil autour de celui-ci, de la même manière que le mouvement apparent du Soleil par rapport aux étoiles traduit la rotation de la Terre autour du Soleil. Le mouvement du Soleil dans la Galaxie n'est pas exactement circulaire, et en corrigeant la composante non circulaire du mouvement, on obtient, sous l'hypothèse que  $R_0 = (8.0 \pm 0.5)$  kpc, la vitesse circulaire au niveau du Soleil :

$$v_0 = (236 \pm 15) \text{ km s}^{-1},$$

l'erreur étant essentiellement due à l'incertitude sur  $R_0$ .

On définit le **Local Standard of Rest** (noté **LSR**) comme un référentiel d'inertie centré sur le Soleil et se déplaçant à vitesse  $v_0$  dans la direction de la rotation galactique. Par rapport au LSR, la vitesse des étoiles du disque est (en principe) en moyenne nulle. Le Soleil a une vitesse particulière :

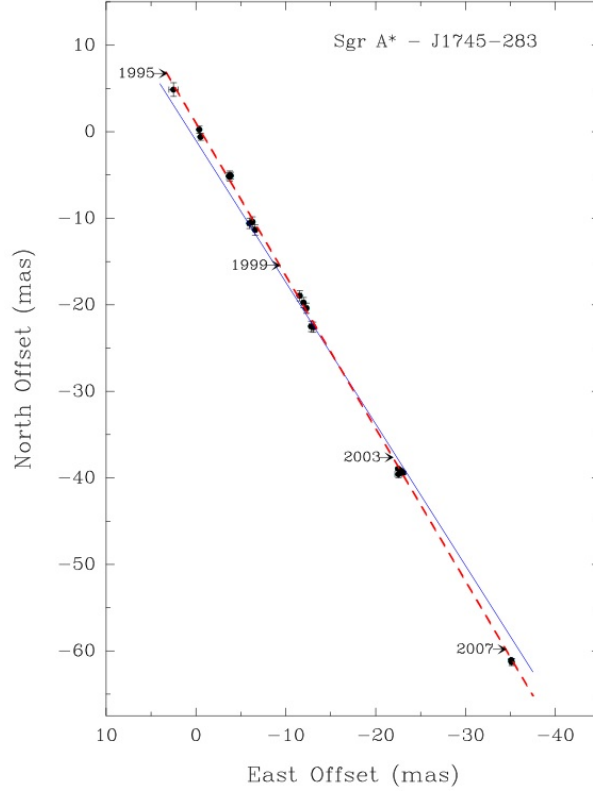


FIG. 1.2 – Mouvement propre de la radiosource Sgr A\* située au Centre Galactique, selon les coordonnées galactiques. Noter que le mouvement a lieu presque exactement dans le plan galactique, mais que l'écart par rapport à celui-ci est significatif et dû au mouvement du Soleil perpendiculairement à ce plan. (Source : M. J. Reid, 2008, RevMexAA 34, 53).

$$v_S = 13.4 \text{ km s}^{-1} \quad \text{en direction de l'apex} \quad \ell = 28^\circ, \quad b = 32^\circ$$

La dispersion des vitesses (*root-mean-square velocity*) des étoiles du disque par rapport au LSR varie de  $\sim 20$  à  $\sim 50 \text{ km s}^{-1}$  entre les étoiles les plus jeunes et celles du vieux disque. Cette dispersion est bien inférieure à la vitesse systématique de rotation ; on parle alors, d'un point de vue cinématique, d'une population stellaire **fraîche ou tiède (cool)**, par analogie avec les

molécules d'un gaz en mécanique statistique. On parlerait d'une population *froide* (*cold*) dans le cas d'un disque idéal où toutes les étoiles tourneraient sur des orbites circulaires.

La densité d'étoiles dans la direction  $Z$  (perpendiculaire au plan galactique) décroît exponentiellement :

$$\rho(R, z) = \rho(R, 0) e^{-|z|/z_d(R)} \quad (1.3)$$

où  $z$  est la distance au plan et  $z_d(R)$  est l'**échelle de hauteur** au rayon  $R$ , laquelle dépend du type d'étoiles considéré. Pour les étoiles jeunes (de type O et B), et dans le voisinage du Soleil,  $z_d \simeq 100$  pc, tandis que pour les étoiles plus vieilles (type G ou K par exemple),  $z_d \simeq 300$  pc. Cela est valable pour le **disque fin** (**thin disk**) qui contient les  $\simeq 93\%$  de la masse stellaire de tout le disque. Il existe une autre population, plus ancienne, qui constitue le **disque épais** (**thick disk**) ou **vieux disque**, pour lequel  $z_d \simeq 1$  kpc. Les étoiles du disque épais sont déficientes en métaux (quoique moins que celles du halo).

La notion de **voisinage solaire** est souvent utilisée en astrophysique. Elle désigne un volume centré sur le Soleil, suffisamment petit pour que la distribution des propriétés des étoiles puisse y être considérée comme constante mais assez grand pour contenir un nombre représentatif d'étoiles. La taille typique de ce volume est de l'ordre de quelques centaines de pc, mais peut varier selon le type d'objets envisagé : pour des naines M, qui sont très fréquentes, il peut ne s'étendre qu'à quelques dizaines de pc, tandis que pour des étoiles O ou B, beaucoup plus rares, il peut s'étendre jusqu'à 1 kpc. On a inventorié le voisinage solaire aussi bien pour la matière interstellaire (gaz et poussières) que pour les étoiles, et calculé la densité de surface correspondante. L'addition des masses observables donne une valeur proche de la masse obtenue par le biais de la dynamique stellaire, bien qu'un peu plus faible, à savoir une cinquantaine de masses solaires par  $\text{pc}^2$  (voir la Table 1.3).

Le **rapport masse/luminosité**  $M/L$ , mesuré en unités solaires, vaut 2 dans le plan galactique, dans la bande photométrique  $R$ , et 2.5 lorsqu'on intègre la masse et la luminosité perpendiculairement au plan, jusqu'à  $|z| = 1$  kpc.

Le **bulbe** est la composante stellaire sphéroïdale qui entoure le centre galactique (en réalité, notre Galaxie est probablement barrée, si bien que la géométrie du bulbe n'est pas axisymétrique). Il contribue pour 15% à la lumi-

component	volume density ( $\mathcal{M}_{\odot} \text{ pc}^{-3}$ )	surface density ( $\mathcal{M}_{\odot} \text{ pc}^{-2}$ )	luminosity density ( $L_{\odot} \text{ pc}^{-3}$ )	surface brightness ( $L_{\odot} \text{ pc}^{-2}$ )
visible stars	0.033	29	0.05	29
stellar remnants	0.006	5	0	0
brown dwarfs	0.002	2	0	0
ISM	0.050	13	0	0
total	$0.09 \pm 0.01$	$49 \pm 6$	0.05	29
dynamical	$0.10 \pm 0.01$	$74 \pm 6$	—	—

FIG. 1.3 – Inventaire du voisinage solaire et densité de surface correspondante.

nosité totale de la Galaxie et est constitué en moyenne d'étoiles vieilles, avec des métallicités solaire et modérément déficientes ( $[Fe/H] \geq -1.5$  à  $-2$ ). La cinématique du bulbe est très différente de celle du disque : il n'y a pratiquement pas de rotation d'ensemble, par contre la dispersion des vitesses est de l'ordre de  $150 \text{ km s}^{-1}$ , ce qui est caractéristique d'une population stellaire **chaude (hot)**.

**Le halo stellaire** contient 1% de la masse stellaire de la Galaxie, sous forme d'amas globulaires et d'étoiles de champ. La métallicité typique est de l'ordre de  $[Fe/H] \sim -1.7$ , mais on trouve de rares étoiles ayant  $[Fe/H] < -3.0$ , qui témoignent de la pollution du milieu protostellaire par seulement quelques supernovae, voire par une seule supernova. On trouve dans le halo des courants d'étoiles liés à des débris de galaxies naines ou d'amas globulaires, un peu l'équivalent de ces débris de comètes dans le système solaire qui produisent les essaims d'étoiles filantes. La densité stellaire du halo varie à peu près comme  $\rho \propto r^{-3}$ , jusqu'à 50 kpc au moins. Il n'y a que peu, voire pas du tout de rotation d'ensemble.

**Le halo** en général contient la fameuse *matière sombre* dont la nature nous est encore inconnue, mais dont l'existence est exigée aussi bien par la dynamique que par l'effet de lentille gravitationnelle. Sa masse totale est estimée à environ :

$$M(r < 100 \text{ kpc}) = 5 - 10 \times 10^{11} M_{\odot}$$

Le rapport masse/luminosité de la Galaxie entière, avec ses trois composantes principales, est très incertain, à cause de l'incertitude sur la masse du halo, mais est, dans la bande  $R$ , de l'ordre de :

$$\Upsilon_R \equiv M/L_R \sim 7 - 170 M_{\odot}/L_{\odot}$$

### 1.2.2 Les autres galaxies

Nos voisins immédiats sont, en ordre de distance, la galaxie naine Sagittarius (24 kpc), découverte en 1994 seulement parce qu'elle est partiellement cachée par le bulbe de notre Galaxie, le Grand Nuage de Magellan ( $\sim 50$  kpc) et le Petit Nuage de Magellan ( $\sim 60$  kpc). La plus proche des grandes galaxies spirales semblables à la nôtre est la galaxie d'Andromède (740 kpc). Vient ensuite la galaxie du Triangle (M33), à 830 kpc, qui est plus petite ; elle est la seule dont on ait pu mesurer le *mouvement propre* et dont on ait donc la vitesse spatiale (Brunthaler et al. 2005, Science 307, 1140). Depuis, on a aussi mesuré le mouvement propre de la galaxie irrégulière IC10 (Brunthaler et al. 2008, in Proc. IAU Symp. No 248, eds. W. J. Jin, I. Platais & M. A. C. Perryman, p. 474).

Toutes ces galaxies sont membres du **Groupe Local**, dont la taille est de l'ordre de 3 Mpc.

Une classification des galaxies a été proposée par Hubble. Les principales catégories sont les galaxies elliptiques, spirales, lenticulaires et irrégulières. Décrivons-les brièvement ici.

**i) Galaxies elliptiques :** Ce sont des galaxies contenant très peu, voire pas du tout, de gaz interstellaire et qui sont dépourvues de disque. Elles sont formées d'étoiles vieilles et il n'y a pratiquement pas de formation stellaire en leur sein. Leur structure est elliptique et peut être axisymétrique, mais aussi triaxiale. Leur fréquence est de l'ordre de 10% dans le champ, mais augmente dans les régions dense, jusqu'à plus de 40% au centre des amas de galaxies.

Les isophotes (contours d'égale brillance de surface) sont à peu de chose près des ellipses concentriques, avec un rapport d'axes variant de 1 à  $\sim 0.3$ . La classification E0, E1, E2... E7 correspond à des ellipticités  $\epsilon \equiv 1 - b/a$



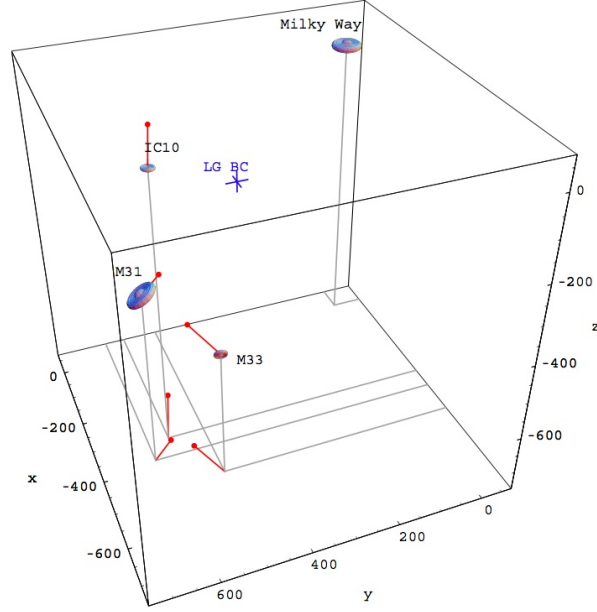


FIG. 1.4 – Position et vitesse radiale (pour M31) ou vitesse spatiale (pour M33) des deux galaxies spirales du Groupe Local et de la galaxie irrégulière IC10 (source : Brunthaler et al. 2008).

croissantes, le type En ayant un rapport  $b/a = 1 - n/10$ . La brillance de surface décroît progressivement du centre vers l'extérieur, si bien qu'on ne peut pas définir de rayon, si ce n'est en définissant le **rayon effectif**  $R_e$  comme le rayon de l'isophote qui contient la moitié de la luminosité dans le plan du ciel.  $R_e$  varie de 0.2 kpc pour une elliptique naine comme M32, à 20 kpc pour une elliptique géante comme M87.

Le **profil de brillance de surface** obéit à la loi empirique de **Sérsic** :

$$I_m(R) = I(0) \exp(-kR^{1/m}) = I_e \exp(-b_m [(R/R_e)^{1/m} - 1]) \quad (1.4)$$

où  $I_m(R)$  est la brillance (en luminosités solaires par  $\text{pc}^2$ , par exemple) de surface au rayon  $R$ ,  $m$  est l'**indice de Sérsic** et  $I_e$  est la brillance de surface au rayon effectif  $R_e$ . L'indice de Sérsic dépend de la luminosité de la galaxie : les galaxies faibles ont  $m \simeq 2$ , tandis que les plus lumineuses ont  $m \simeq 6$ . Ce profil de Sérsic et une généralisation du profil de **de Vaucouleurs**, donnée

par la loi en  $\exp(-kR^{1/4})$ . La fonction  $b_m$  doit être calculée numériquement à partir de la condition :

$$\int_0^{R_e} dR R I_m(R) = \frac{1}{2} \int_0^\infty dR R I_m(R)$$

mais en pratique on peut poser :

$$b_m = 2m - 0.324$$

relation qui est valable à un pour mille près sur l'intervalle  $1 < m < 10$ . Notons que pour  $m = 1$ , le profil de Sérsic se réduit au profil exponentiel, qui est valable pour les galaxies disques.

Pour estimer la luminosité d'une galaxie, on fait souvent un ajustement d'un modèle de Sérsic à la galaxie observée et on estime la luminosité du modèle avec l'intégrale  $L = \int d^2R I_m(R)$ . Ainsi on peut mesurer la **fonction de luminosité**  $\phi(L)$  des galaxies elliptiques (le nombre de galaxie dans un intervalle de luminosité  $(L, L + dL)$  est  $\phi(L)dL$ ). Une approximation analytique du résultat est la **loi de Schechter** :

$$\phi(L)dL = \phi_* \left( \frac{L}{L_*} \right)^\alpha e^{-L/L_*} \frac{dL}{L_*} \quad (1.5)$$

où  $\phi_* \simeq 4.9 \times 10^{-3} h_7^3 \text{Mpc}^{-3}$ ,  $\alpha = -1.1$  et  $L_* \simeq 2.9 \times 10^{10} h_7^{-2} L_\odot$  en bande  $R$ .

Les galaxies elliptiques les plus lumineuses ne présentent pas de rotation notable, même celles qui sont très elliptique. Les galaxies de faible luminosité, par contre, présentent une rotation corrélée avec l'aplatissement. On peut mesurer, par la spectroscopie, la largeur des raies dues aux étoiles de la galaxie, et qui traduit la dispersion des vitesses le long de la ligne de vue,  $\sigma_\parallel$ . En l'absence de rotation, c'est la seule quantité observable qui soit liée au champ de vitesse de la galaxie.

La luminosité, la dispersion de vitesse et la taille des galaxies elliptiques sont corrélées. En lieu et place de la luminosité, on utilise traditionnellement la brillance de surface moyenne à l'intérieur du rayon effectif,  $\bar{I}_e \equiv \frac{1}{2}L/(\pi R_e^2)$ . Il se trouve que, dans l'espace à trois dimensions  $\log \bar{I}_e$ ,  $\log R_e$  et  $\log \sigma_\parallel$ , les galaxies elliptiques se répartissent sur un plan que l'on a appelé **le plan fondamental** :

$$\log R_e = 1.24 \log \sigma_\parallel - 0.82 \log \bar{I}_e + \text{cte} \quad (1.6)$$

avec une dispersion de l'ordre de 0.08 en  $\log R_e$ . Ce plan fondamental se manifeste sous la forme de relations linéaires entre deux quantités, si on le “regarde” (ou si on le projette) sur un plan qui lui est perpendiculaire. En particulier, deux relations sont importantes :

1. La **loi de Faber-Jackson** relie la luminosité et la dispersion de vitesses :

$$\log \left( \frac{\sigma_{\parallel}}{150 \text{ km s}^{-1}} \right) \simeq 0.25 \log \left( \frac{L_R}{10^{10} h_7^{-2} L_{\odot}} \right) \quad (1.7)$$

avec une dispersion de l'ordre de 0.1. On voit que la dispersion de vitesse d'une galaxie typique  $L_*$  est de l'ordre de  $200 \text{ km s}^{-1}$ .

2. La **relation de Kormendy** relie la brillance de surface à la taille de la galaxie, et montre que la première est plus faible quand la seconde augmente :

$$\log \left( \frac{\bar{I}_{e,R}}{1.2 \times 10^3 L_{\odot} \text{ pc}^{-2}} \right) \simeq -0.8 \log \left( \frac{R_e}{h_7^{-1} \text{ kpc}} \right) \quad (1.8)$$

avec  $\bar{I}_{e,R}$  la brillance de surface moyenne dans la bande  $R$  à l'intérieur de  $R_e$ . Cette relation implique

$$\log \left( \frac{L_R}{7.7 \times 10^9 h_7^{-2} L_{\odot}} \right) \simeq 1.2 \log \left( \frac{R_e}{h_7^{-1} \text{ kpc}} \right) \quad (1.9)$$

et les plus grandes galaxies sont aussi les plus lumineuses, en dépit de leur brillance de surface moindre.

Le rapport masse/luminosité  $\Upsilon$  des galaxies elliptiques est modeste en deçà de  $R_e$  et est corrélé avec la dispersion de vitesse :

$$\Upsilon_I = (3.8 \pm 0.2) \Upsilon_{\odot} \times \left( \frac{\sigma_e}{200 \text{ km s}^{-1}} \right)^{0.84} \quad (1.10)$$

où  $\sigma_e$  est la moyenne de la dispersion de vitesses, pondérée par la luminosité, à l'intérieur de  $R_e$ .

Les galaxies elliptiques les plus massives sont celles qui occupent le centre des amas riches de galaxies : elles ont une luminosité  $L \sim 3 - 10 \times L_*$ , donc plus élevée que prévu par la loi de Schechter, et sont plusieurs fois plus lumineuses que les plus brillantes des autres galaxies de l'amas. De plus, elles se distinguent par un halo étendu, probablement constitué d'étoiles arrachées

à d'autres galaxies par effet de marée. Ces galaxies elliptiques géantes sont appelées **galaxies cD**.

A l'autre extrémité de la fonction de masses se trouvent également des objets particuliers : alors que la relation de Kormendy prévoit une augmentation de la brillance de surface avec la diminution de luminosité, il existe, pour des luminosités inférieures à  $10^9 L_\odot$ , une famille de *galaxies elliptiques diffuses* ou **galaxies naines sphéroïdales**. Elles ont un rayon effectif plus grand et une brillance de surface bien inférieure aux galaxies elliptiques naines qui obéissent à la relation de Kormendy. Elles sont difficiles à détecter à cause de leur très faible brillance de surface, mais on en connaît une bonne vingtaine dans un rayon d'environ 200 kpc. Ce sont des satellites de notre Galaxie, et leur luminosité va de  $\lesssim 10^4 L_\odot$  à  $2 \times 10^7 L_\odot$ . Elles semblent contenir beaucoup de matière sombre par rapport à leur contenu baryonique.

La distribution de masse dans les halos des galaxies elliptiques a été sondée à l'aide de diverses méthodes, en particulier (i) la dynamique des systèmes d'amas globulaires et de nébuleuses planétaires qui orbitent autour d'elles, (ii) l'émission X du gaz qui entoure les elliptiques isolées, (iii) la dynamique de galaxies satellites et (iv) le phénomène de lentilles gravitationnelles dans le régime faibles (weak lensing). Il semble que les galaxies elliptiques isolées et lumineuses soient entourées d'un halo bien plus étendu que le système d'étoiles, avec un rayon qui peut atteindre environ 300 kpc et une masse dix fois supérieure.

**ii) Galaxies spirales :** Ces galaxies ont un disque prédominant, contenant non seulement des étoiles mais aussi du gaz et de la poussière interstellaire. Le disque présente des **bras spiraux** qui sont le siège de la formation stellaire. Ceux-ci sont tracés par les étoiles jeunes mais aussi, quoique avec un contraste moindre, par les étoiles vieilles.

Dans le champ (régions peu denses de l'Univers), les galaxies spirales représentent environ 60% des galaxies lumineuses, mais cette proportion baisse à moins de 10% dans le coeur des amas.

La brillance de surface des disques suit une loi exponentielle, avec une échelle de longueur typique  $R_d \sim 2$  kpc, mais cette échelle peut varier beaucoup, de 1 à plus de 10 kpc. La brillance de surface centrale typique est de l'ordre de  $100 L_\odot pc^{-2}$ . Le gaz s'étend plus loin que les étoiles, probablement parce que la formation stellaire est inhibée en périphérie par une densité de surface trop faible du gaz.

La vitesse circulaire des étoiles et du gaz peut être mesurée par spectro-

scopie visible, respectivement radio, et la courbe de vitesse montre un plateau aussi loin du centre de la galaxie que les mesures le permettent (deux fois plus loin pour le gaz que pour les étoiles). C'est une des preuves les plus convaincantes de l'existence de matière sombre, distribuée dans le halo de la galaxie, et dont l'influence gravitationnelle supprime celle des étoiles et du gaz à grande distance.

L'équivalent de la loi de Faber-Jackson des elliptiques est, pour les spirales, la **loi de Tully-Fischer**, qui relie la luminosité à la valeur de la vitesse circulaire dans le plateau de la courbe de rotation :

$$\log \left( \frac{L_R h_7^2}{10^{10} L_\odot} \right) = 3.5 \log \left( \frac{v_c}{200 \text{ km s}^{-1}} \right) + 0.5 \quad (1.11)$$

La dispersion quadratique moyenne autour de cette relation est de 0.14 en  $\log L_R$ . La pente de la relation dépend de la longueur d'onde de la bande photométrique utilisée : elle varie de  $\sim 3$  dans la bande  $B$  ( $0.43 \mu\text{m}$ ) à  $\sim 4$  dans la bande  $K$  ( $2.2 \mu\text{m}$ ).

**Question - exercice :** Que vaut la luminosité de notre Galaxie, sachant que  $v_c \simeq 220 \text{ km s}^{-1}$  ?

Les galaxies spirales contiennent en leur centre un bulbe, système stellaire d'apparence amorphe, dont la structure ressemble à celle des galaxies elliptiques. Certains, toutefois, ressemblent plutôt à un disque épaissi. Les bulbes et les galaxies elliptiques sont appelés **sphéroïdes**, même si leur forme diffère parfois passablement de sphéroïdes au sens mathématique. Le rapport entre luminosité du bulbe et luminosité du disque est corrélé avec d'autres propriétés de la galaxie, et cela constitue la base de l'une des branches de la classification de Hubble. Les spirales sont subdivisées en quatre classes : Sa, Sb, Sc, Sd. Le long de cette séquence :

1. la luminosité relative du bulbe décroît,
2. les bras spiraux sont moins enroulés,
3. la masse relative du gaz augmente,
4. les bras spiraux deviennent plus grumeleux, moins homogènes.

Le type de la Galaxie (notre galaxies) est Sbc.

Les spirales se divisent encore en "normales" et "barrées", la barre étant une sorte de bulbe triaxial. Environ la moitié des spirales sont barrées. Notre

Galaxie et le Grand Nuage de Magellan sont des spirales barrées. La présence de barre est indiquée dans la classification de Hubble, par la lettre B : SBa, SBb, etc.

On a vu que la présence de matière sombre, dans les spirales, est indiquée par la courbe de rotation plate. Pour des distances plus grandes, des techniques semblables à celles utilisées pour les galaxies elliptiques (galaxies satellites et weak lensing) montrent qu’elles sont entourées d’un halo semblable.

**iii) Galaxies lenticulaires :** Ce sont des objets de transition entre les elliptiques et les spirales : elles ont un disque dont la densité de surface varie exponentiellement, un bulbe ou une barre, très peu de gaz froid et de formation stellaire. Il n’y a pas de bras spiraux. Elles sont rares dans le champ mais constituent presque la moitié de la population de galaxies dans le centre des amas riches. On peut donc supposer qu’il s’agit d’anciennes spirales qui ont été dépouillées de leur gaz lors de rencontres, ou par interaction avec le gaz chaud de l’amas. Dans la classification de Hubble, elles sont désignées par S0.

**iv) Galaxies irrégulières :** Pour les galaxies du type Sa au type Sd, la luminosité décroît et la structure spirale est de moins en moins clairement définie. Au-delà du type Sd, la tendance continue avec les galaxies dites “irrégulières”, qui ont une luminosité faible et où les étoiles jeunes sont distribuées de manière chaotique. Elles sont désignées par l’abréviation Sm ou Im ; les Nuages de Magellan en sont souvent considérés comme les prototypes, bien que le Grand Nuage soit aussi considéré comme une spirale barrée.

Les galaxies irrégulières sont nombreuses puisqu’elles constituent plus d’un tiers de la population de notre voisinage.

Leur vitesse circulaire est faible : elle augmente linéairement jusqu’au bord du disque, où elle atteint  $\sim 50 - 70 \text{ km s}^{-1}$ , une valeur pas beaucoup plus élevée que la dispersion des vitesses. Elles sont très riches en gaz (env. 30% de la masse des étoiles), en étoiles massives et en régions H II.

Il est utile de mentionner une curiosité historique, qui a laissé son empreinte dans la terminologie actuelle. Dans la séquence de Hubble :  $E0 \rightarrow S0 \rightarrow Sa \rightarrow Sb \rightarrow Sc \rightarrow Sd \rightarrow Sm \rightarrow Im$ , les galaxies du début de la séquences sont qualifiées de **précoces (early)**, alors que celles de la fin de la séquence sont qualifiées de **tardives (late)**. Les elliptiques sont donc appelées “précoces”, alors que les spirales Sc, par exemple, sont appelées “spirales tardives”. Cela vient de l’époque où l’on croyait que la séquence en question représentait une

suite chronologique d'états évolutifs.

### 1.2.3 Amas ouverts et globulaires

Les **amas ouverts** sont des systèmes irréguliers contenant  $10^2$  à  $10^4$  étoiles. Leurs âges sont inférieurs à  $10^9$  ans, ils se dissolvent en général avant d'atteindre cette limite. Les plus jeunes d'entre eux contiennent encore du gaz et de la poussière interstellaires et sont au centre de régions H II. Ils sont continuellement formés dans le disque de la Galaxie et la plupart des étoiles de Population I sont probablement issues de tels amas. On en a dénombré plus de 1000 dans notre Galaxie, qui en contient peut-être  $10^5$  au total.

Les **amas globulaires** contiennent  $10^4$  à  $10^7$  étoiles réparties selon une distribution quasi sphérique. Ils sont anciens et ne contiennent ni gaz, ni poussières, ni étoiles jeunes. Notre Galaxie en contient environ 150, mais une galaxie cD comme M87 pourrait en contenir 10'000. Leurs métallicités va de  $0.005 Z_{\odot}$  à quasi solaire. On distingue deux groupes d'amas globulaires dans notre Galaxie : 80% d'entre eux sont associé au halo stellaire, étant distribués de manière à peu près sphérique autour du bulbe, en un système dépourvu de rotation et ayant une métallicité  $Z < 0.1 Z_{\odot}$ . Les 20% restants ont  $Z > 0.1 Z_{\odot}$ , sont associés au disque et au bulbe, et constituent un système qui présente une rotation rapide.

Les amas globulaires présentent une forte concentration centrale d'étoiles, donc de masse. Il y a plusieurs manière de définir leur rayon. Le **rayon du coeur (core radius)** est celui où la brillance de surface est la moitié de la brillance de surface centrale. Le rayon médian est celui qui contient la moitié de la luminosité, et le **rayon de marée (limiting or tidal radius)** est celui où la densité tombe à zéro. Ce dernier rayon, obtenu par extrapolation, s'avère très incertain.

Les gros amas globulaires sont aussi lumineux que les galaxies naines sphéroïdales, mais ils sont beaucoup plus concentrés, avec un rayon typiquement cent fois plus petit.

Les amas globulaires sont des systèmes dynamiquement intéressants parce qu'ils sont simples et ne contiennent que des étoiles. Ils sont dynamiquement vieux, en ce sens que les étoiles y ont déjà parcouru des milliers d'orbites depuis leur formation. Ils sont la meilleure illustration disponible du problème de N-corps liés par la gravitation.

### 1.2.4 Amas de galaxies

Les galaxies sont réparties de manière hiérarchique, beaucoup étant membres de groupes (constitués de quelques galaxies) ou d'amas et de filaments plus ou moins riches. Les amas de galaxies sont **dynamiquement jeunes**, en ce sens que les galaxies qui les constituent n'ont parcouru que quelques orbites depuis leur formation. Dans beaucoup de groupes, les galaxies sont encore en train de tomber vers le centre pour la première fois. De plus, à la différence des amas stellaires, la fraction de volume occupée par les membres d'un amas de galaxies est beaucoup plus importante (de l'ordre de  $10^{-3}$ ), si bien que les collisions entre galaxies sont beaucoup plus fréquentes.

Les plus gros amas ont des masses de l'ordre de  $10^{15} M_{\odot}$  (matière sombre comprise) et des dispersions de vitesse de l'ordre de  $\sim 1000 \text{ km s}^{-1}$ . Le rapport masse/luminosité est de l'ordre de :

$$\Upsilon_R \simeq (200 \pm 50) h_7 \Upsilon_{\odot} \quad (1.12)$$

La majeure partie des baryons est, dans les amas de galaxies, sous forme de gaz très chaud. La fraction de baryons – sous forme de gaz et sous forme d'étoiles – est

$$f_b = 0.13 \pm 0.02 \quad (1.13)$$

la fraction sous forme de gaz chaud étant 0.11, et sous forme d'étoiles 0.02.

### 1.2.5 Trous noirs

La plupart des galaxies – du moins celles de type précoce – contiennent en leur centre un **trou noir supermassif**, qui constitue un à deux pour mille de la masse totale de la galaxie. Notre Galaxie abrite un trou noir de  $4.3 \pm 0.4 \cdot 10^6 M_{\odot}$ , mis en évidence par la dynamique des étoiles proches du centre galactique (Gillesen et al. 2009, ApJ 692, 1075). D'autres trous noirs supermassifs se manifestent par un disque d'accrétion extrêmement lumineux, et sont désignés par le terme de **noyaux actifs de galaxies (Active Galactic Nuclei, AGN)** ou encore, pour les plus lumineux d'entre eux, de **quasars**. Leur luminosité est de l'ordre de cent fois celle de leur galaxie hôte.

Il existe une relation entre la masse du trou noir supermassif, et la dispersion de vitesses au centre de la galaxie hôte :



$$\log \left( \frac{M_{BH} h_7}{10^8 M_\odot} \right) = (4 \pm 0.3) \log \left( \frac{\sigma_{\parallel}}{200 \text{ km s}^{-1}} \right) + (0.2 \pm 0.1). \quad (1.14)$$

### 1.3 De la différence entre mécanique statistique et dynamique stellaire

Comme évoqué plus haut, la grande différence entre mécanique statistique et dynamique stellaire réside dans l'intervention de la gravitation, qui est une force à longue portée. Dans un gaz, les molécules ne sont soumises à aucune force tant qu'elles ne subissent pas de collisions, lesquelles sont des événements très courts mais intenses, où les forces à courte portée agissent. Dans un "gaz" d'étoiles qui constitue une galaxie, par contre, les collisions sont rarissimes, mais les étoiles sont continuellement soumises aux forces exercées non seulement par leurs voisines, mais aussi par l'ensemble de toutes les étoiles du système, même les plus éloignées.

Pour illustrer cette caractéristique, Binney & Tremaine considèrent un ensemble d'étoiles distribuées dans un cône et l'attraction gravitationnelle qu'elles exercent sur une étoile située à la pointe du cône (Fig. 1.5). On voit que, dans une calotte d'épaisseur  $dr$  et de rayon  $r$ , le nombre d'étoiles est proportionnel à  $r^2$ . D'autre part, l'intensité de la force de gravitation est proportionnelle à  $r^{-2}$ , si bien que les étoiles situées à distance  $r_2$  du sommet du cône exercent sur lui la même force que celles, plus proches, situées à distance  $r_1$ .

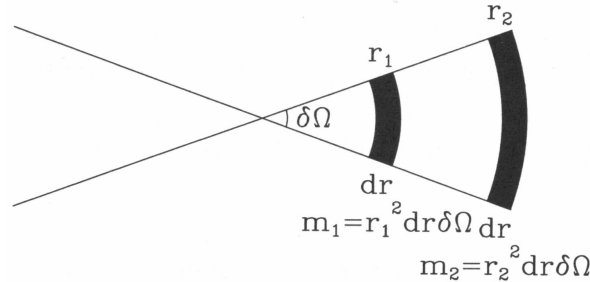


FIG. 1.5 – Influence gravitationnelle des étoiles proches et lointaines.

Par conséquent, on voit bien que la force de gravitation subie par une étoile est due au système entier et non seulement à ses plus proches voisines. Dans la plupart des cas, la force de gravitation peut être considérée comme due à une distribution continue de matière plutôt qu'à un ensemble restreint de masses ponctuelles.

Il est intéressant de constater ici que le raisonnement ci-dessus est exactement le même que celui qui fonde le **paradoxe de Cheseaux-Olbers** – ou paradoxe du noir de la nuit – pour la lumière. Il y a donc une sorte de paradoxe de Cheseaux-Olbers gravitationnel, à ceci près que ce dernier est fondé sur une grandeur vectorielle – la force de gravitation – tandis que le premier est basé sur une grandeur scalaire, à savoir l’intensité lumineuse. Le “paradoxe” gravitationnel – ou **paradoxe de Seeliger**, puisque cet auteur l’a discuté à la fin du 19<sup>e</sup> siècle – attire simplement l’attention sur le fait que tout corps, dans un espace infini et statique, est nécessairement en équilibre instable, puisqu’il est attiré de tous côtés par toutes les masses de l’Univers. Par conséquent, pour être viable, un univers statique et infini doit aussi être parfaitement homogène, sans quoi il cesserait d’être statique ! Et si l’espace est infini, alors la force qui s’exerce sur toute masse devient aussi infinie, sitôt que le moindre défaut d’homogénéité apparaît. Newton avait déjà ébauché cette réflexion (voir ses lettres avec Robert Hooke).

### 1.3.1 La dynamique “sans collisions” et ses limites : notion de temps de relaxation

Il est important d’explorer les limites de l’approche qui consiste à approximer les systèmes stellaires par une distribution continue de matière et donc par un potentiel continu. En effet, des interactions à deux corps peuvent intervenir (on les appelle “collisions” même s’il ne s’agit pas de contacts physiques) : elles consistent en une déviation de la trajectoire d’une étoile-test par rapport à la trajectoire qu’elle suivrait si on ne tenait compte que du potentiel moyen et lisse.

Plutôt que des collisions proprement dites, c’est-à-dire des rencontres à deux corps qui dévient la trajectoire des protagonistes d’un angle important (i.e. de l’ordre du radian), on va considérer approximativement ici, l’effet cumulé de rencontres relativement distantes, qui dévient chacune la trajectoire d’une étoile-test d’un angle faible. Considérons une rencontre entre l’étoile-test et une autre étoile que l’on appellera “étoile de champ”. Cette dernière est considérée comme immobile lors de la rencontre, alors que la vitesse relative de l’étoile-test est  $\mathbf{v}$  ; on cherche à déterminer la variation de vitesse  $\delta\mathbf{v} \ll \mathbf{v}$  de l’étoile-test à la suite de cette rencontre.

La situation est décrite dans la Fig. 1.6. Le mouvement de l’étoile-test est affecté par la composante perpendiculaire de la force de gravité  $\mathbf{F}_\perp$  due

à l'étoile de champ. La composante parallèle au mouvement existe aussi, mais son action est nulle en moyenne, puisque elle change de signe le long de la trajectoire. On peut estimer le module de  $\delta \mathbf{v}$  en supposant la trajectoire approximativement rectiligne. On place l'origine du temps au point de proximité maximale. On a :

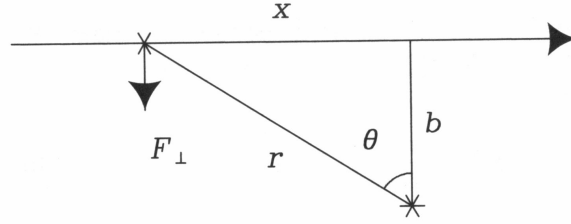


FIG. 1.6 – Trajectoire de l'étoile-test (supposée rectiligne) passant à distance minimale  $b$  d'une étoile de champ.

$$F_{\perp} = \frac{Gm^2}{b^2 + x^2} \cos \theta = \frac{Gm^2 b}{(b^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{Gm^2}{b^2} \left[ 1 + \left( \frac{vt}{b} \right)^2 \right]^{-3/2} \quad (1.15)$$

Or la deuxième loi de Newton implique :

$$m \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F} \quad \Rightarrow \quad \delta v = \frac{1}{m} \int_{-\infty}^{\infty} dt F_{\perp} \quad (1.16)$$

donc, à la faveur du changement de variable  $s = vt/b$ , on a :

$$\delta v = \frac{Gm}{b^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{[1 + (vt/b)^2]^{3/2}} = \frac{Gm}{bv} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ds}{[1 + s^2]^{3/2}} = \frac{2Gm}{bv} \quad (1.17)$$

On peut interpréter intuitivement ce résultat :  $\delta v$  est égal à l'accélération à la distance minimale,  $Gm/b^2$ , multipliée par la durée  $2b/v$  pendant laquelle elle s'exerce. On voit que l'approximation d'une trajectoire droite n'est plus valable quand  $\delta v \sim v$ . L'Equ. (1.17) montre que c'est le cas lorsque le paramètre d'impact  $b \lesssim b_{90} \equiv 2Gm/v^2$ , où l'indice 90 indique une déviation de 90 degrés.

Considérons une galaxie sphérique. Dans ce cas, la densité de surface projetée sur le ciel est de l'ordre de  $N/\pi R^2$ , où  $N$  est le nombre total d'étoiles du système et  $R$  le rayon de la galaxie. Lors d'une traversée de la galaxie, l'étoile-test va rencontrer un nombre de voisines dont le paramètre d'impact est situé dans l'intervalle  $(b, b+db)$ , égal au rapport des surfaces multiplié par le nombre total d'étoiles :

$$\delta n = \frac{2\pi b db}{\pi R^2} N = \frac{2N}{R^2} b db. \quad (1.18)$$

Chaque rencontre produit une variation  $\delta \mathbf{v}$  de la vitesse de l'étoile, mais comme ces vecteurs  $\delta \mathbf{v}$  sont aléatoires, leur moyenne s'annule. Cependant, le changement *quadratique* de la vitesse ne s'annule pas, et après une traversée du système il vaut :

$$\sum \delta v^2 \simeq \delta v^2 \delta n = \left( \frac{2Gm}{bv} \right)^2 \frac{2N}{R^2} b db. \quad (1.19)$$

On obtient la variation de vitesse quadratique moyenne en intégrant sur le paramètre d'impact :

$$\Delta v^2 \equiv \int_{b_{min}}^{b_{max}} \sum \delta v^2 \simeq 8N \left( \frac{Gm}{Rv} \right)^2 \ln \Lambda \quad (1.20)$$

avec le *logarithme de Coulomb* donné par :

$$\ln \Lambda \equiv \ln \left( \frac{b_{max}}{b_{min}} \right). \quad (1.21)$$

Pour définir  $b_{min}$  et  $b_{max}$ , on peut remarquer que l'approximation de la trajectoire rectiligne tombe pour  $b < b_{90}$ , et l'on pose  $b_{min} = f_1 b_{90}$ , où  $f_1$  est un facteur proche de un. A l'autre extrême, l'hypothèse d'une distribution homogène d'étoiles tombe pour  $b \sim R$ , ce qui permet de poser  $b_{max} = f_2 R$ . Le logarithme de Coulomb s'écrit alors :

$$\ln \Lambda = \ln \left( \frac{R}{b_{90}} \right) + \ln \left( \frac{f_2}{f_1} \right). \quad (1.22)$$

Il est difficile de déterminer  $f_1$  et  $f_2$  mais, dans la plupart des cas,  $R \gg b_{90}$ , si bien que l'on peut se permettre de poser  $f_2/f_1 = 1$  sans perte appréciable de précision.

Les rencontres entre l'étoile-test et les étoiles de champ produisent une diffusion de la vitesse de l'étoile-test, qui est distincte des effets de l'accélération régulière causée par la distribution globale des masses dans le système. C'est pourquoi on parle de *relaxation à deux corps* : cette diffusion résulte d'un grand nombre de rencontre entre l'étoile-test et une étoile de champ.

Estimons à présent le **temps de relaxation** : la vitesse typique d'une étoile-test est *grosso modo* la vitesse circulaire d'une particule-test au bord de la galaxie :

$$v^2 \sim \frac{GNm}{R} \quad (1.23)$$

et en introduisant cela dans l'Equ. (1.20) pour éliminer  $R$ , on obtient :

$$\frac{\Delta v^2}{v^2} \sim \frac{8 \ln \Lambda}{N} \quad (1.24)$$

Or cette équation donne la variation de vitesse quadratique après *une* traversée de la galaxie. Si  $\Delta v^2/v^2 \ll 1$ , l'étoile doit effectuer plusieurs traversées (crossings) avant que le changement de vitesse quadratique soit du même ordre de grandeur que la vitesse quadratique elle-même, et le nombre  $n_{relax}$  de traversées est alors donné par :

$$n_{relax} \simeq \frac{N}{8 \ln \Lambda}. \quad (1.25)$$

Il est maintenant possible de définir le **temps de relaxation**  $t_{relax} = n_{relax} t_{cross}$  avec le **temps de traversée (crossing time)**  $t_{cross} = R/v$  (temps nécessaire à une étoile pour traverser la galaxie). En admettant  $f_2/f_1 = 1$  et en remplaçant  $b_{min}$  et  $b_{max}$  par leurs valeurs, on a à un facteur deux près :

$$\Lambda = \frac{R}{b_{90}} \sim \frac{Rv^2}{Gm} \sim N$$

la dernière égalité provenant de l'Equ. (1.23). Ainsi, compte tenu de l'Equ. (1.25), le temps de relaxation devient :

$$t_{relax} \simeq \frac{0.1 N}{\ln N} t_{cross}. \quad (1.26)$$

Le temps de relaxation est celui après lequel les effets cumulés des rencontres ont conduit l'étoile-test sur une orbite franchement différente de celle qu'elle aurait parcourue dans un champ de gravitation lisse. On peut dire aussi que

c'est le temps après lequel l'étoile-test a perdu toute mémoire des conditions initiales.

Notre Galaxie a  $t_{cross} \sim 10^8$  ans et un âge de  $10^{10}$  ans, donc de  $\sim 100 t_{cross}$  ; avec  $N \sim 10^{11}$  étoiles,  $t_{relax} \sim 10^{17}$  ans, soit bien plus long que son âge. Par conséquent, **les rencontres stellaires ne jouent aucun rôle dans les galaxies** (sauf dans leurs noyaux). Par contre, pour les amas globulaires, qui ont typiquement  $N \sim 10^5$  et  $t_{cross} \sim 1$  Myr, le temps de relaxation est de l'ordre du milliard d'années, voire moins, si bien que leur structure va être modifiée de manière significative durant leur longue vie.

Voilà pourquoi la majeure partie de ce cours traite des **systèmes sans collision**, c'est-à-dire de ceux pour lesquels on considère des temps d'évolution plus courts que le temps de relaxation.

# Chapitre 2

## Théorie du potentiel

On a vu que le très grand nombre d'étoiles contenues dans une galaxie permet de remplacer une somme sur toutes ces étoiles par un potentiel moyen et lisse. Cela, d'autant plus que le temps de relaxation est en général beaucoup plus long que l'âge des galaxies considérées. Ce chapitre est consacré à l'art de calculer le champ de force gravitationnel dans une galaxie ainsi idéalisée.

Après quelques résultats généraux qui seront utiles par la suite, on traite d'abord les potentiels sphériques, qui sont les plus simples, puis les systèmes aplatis, y compris les disques minces. Enfin, on traite le potentiel de notre Galaxie.

### 2.1 Généralités

Le but est de calculer la force  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  exercée sur une particule de masse  $m_s$  située en position  $\mathbf{x}$  par une distribution de masse  $\rho(\mathbf{x}')$ . La force de gravité étant additive, on peut sommer les contributions venant des volumes  $d^3\mathbf{x}'$  :

$$\delta\mathbf{F}(\mathbf{x}) = Gm_s \frac{\mathbf{x}' - \mathbf{x}}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^3} \delta m(\mathbf{x}') = Gm_s \frac{\mathbf{x}' - \mathbf{x}}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^3} \rho(\mathbf{x}') d^3\mathbf{x}' \quad (2.1)$$

La force totale qui s'exerce sur une masse  $m_s$  vaut donc :

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = m_s \mathbf{g}(\mathbf{x}) \quad \text{où} \quad \mathbf{g}(\mathbf{x}) \equiv G \int d^3\mathbf{x}' \frac{\mathbf{x}' - \mathbf{x}}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^3} \rho(\mathbf{x}') \quad (2.2)$$

où  $\mathbf{g}(\mathbf{x})$  est le **champ gravitationnel**, qui est la force gravitationnelle par unité de masse. On définit le **potentiel gravitationnel** par :



$$\Phi(\mathbf{x}) \equiv -G \int d^3\mathbf{x}' \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|} \quad (2.3)$$

En notant que :

$$\nabla_{\mathbf{x}} \left( \frac{1}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|} \right) = \frac{\mathbf{x}' - \mathbf{x}}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^3} \quad (2.4)$$

on voit que l'on peut exprimer  $\mathbf{g}$  sous la forme :

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \nabla_{\mathbf{x}} \int d^3\mathbf{x}' \frac{G\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|} = -\nabla\Phi \quad (2.5)$$

(on a laissé tomber l'indice  $\mathbf{x}$  du  $\nabla$  pour la simplicité de la notation). Prenant la divergence de l'Equ. (2.2), on obtient :

$$\nabla \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x}) = G \int d^3\mathbf{x}' \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \left( \frac{\mathbf{x}' - \mathbf{x}}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^3} \right) \rho(\mathbf{x}') \quad (2.6)$$

Or on a la relation :

$$\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \left( \frac{\mathbf{x}' - \mathbf{x}}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^3} \right) = -\frac{3}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^3} + \frac{3(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) \cdot (\mathbf{x}' - \mathbf{x})}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^5} \quad (2.7)$$

Tant que  $\mathbf{x}' - \mathbf{x} \neq 0$ , on peut simplifier la dernière fraction par  $|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^2$ , si bien que l'Equ. (2.7) se réduit à :

$$\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \left( \frac{\mathbf{x}' - \mathbf{x}}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^3} \right) = 0 \quad (\mathbf{x}' \neq \mathbf{x}) \quad (2.8)$$

Par conséquent, la seule contribution à l'intégrale de l'Equ. (2.6) doit nécessairement provenir du point  $\mathbf{x}' = \mathbf{x}$ ; on peut alors restreindre le volume d'intégration à une petite sphère de rayon  $h$  centrée en ce point, et admettre que, pour  $h$  suffisamment petit, la densité  $\rho(\mathbf{x}')$  est constante, de sorte qu'on peut la sortir de l'intégrale. On obtient alors :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x}) &= G\rho(\mathbf{x}) \int_{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}| \leq h} d^3\mathbf{x}' \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \left( \frac{\mathbf{x}' - \mathbf{x}}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^3} \right) \\ &= -G\rho(\mathbf{x}) \int_{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}| \leq h} d^3\mathbf{x}' \nabla_{\mathbf{x}'} \cdot \left( \frac{\mathbf{x}' - \mathbf{x}}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^3} \right) \\ &= -G\rho(\mathbf{x}) \int_{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}| = h} d^2\mathbf{S}' \cdot \frac{\mathbf{x}' - \mathbf{x}}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^3} \end{aligned} \quad (2.9)$$

où l'on a utilisé le théorème de la divergence pour passer d'une intégrale de volume à une intégrale de surface. Si  $d^2\Omega$  est un élément d'angle solide, un élément de surface sur la petite sphère  $|\mathbf{x}' - \mathbf{x}| = h$  vaut  $d^2\mathbf{S}' = (\mathbf{x}' - \mathbf{x})h d^2\Omega$  et l'Equ. (2.9) devient alors :

$$\nabla \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x}) = -G\rho(\mathbf{x}) \int d^2\Omega = -4\pi G\rho(\mathbf{x}) \quad \Rightarrow \quad \nabla^2\Phi = 4\pi G\rho. \quad (2.10)$$

L'équation de droite n'est autre que l'équation de Poisson, qui permet de trouver  $\Phi(\mathbf{x})$  à partir de  $\rho(\mathbf{x})$  et de conditions aux limites appropriées. Pour un système isolé, la condition est  $\Phi \rightarrow 0$  pour  $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ . Pour une densité nulle, l'équation de Poisson devient **l'équation de Laplace** :

$$\nabla^2\Phi = 0 \quad (2.11)$$

En intégrant l'équation de Poisson sur un volume englobant la masse  $M$ , puis en appliquant le théorème de la divergence, on obtient :

$$4\pi GM = 4\pi G \int d^3\mathbf{x}\rho = \int d^3\mathbf{x}\nabla^2\Phi = \int d^2\mathbf{S}\nabla\Phi \quad (2.12)$$

qui n'est autre que le **théorème de Gauss**, selon lequel *l'intégrale de la composante normale de  $\nabla\Phi$  sur une surface fermée quelconque est égale à la masse contenue à l'intérieur de cette surface, multipliée par  $4\pi G$* . Le champ de gravitation  $\mathbf{g}$  étant le gradient d'un potentiel, il est conservatif : autrement dit, le travail effectué contre la force de gravitation en amenant deux étoiles de l'infini à une configuration donnée est indépendant du chemin que l'on fait parcourir à ces étoiles, et ce travail est défini comme étant **l'énergie potentielle** du système.

Formellement, la différence d'énergie potentielle entre les états 1 et 2 d'un système est définie comme  $W_{12} = -\int_1^2 d\mathbf{x} \cdot \mathbf{F}$ . Si l'état 1 est l'infini, on a alors  $W_{\infty 2} \equiv W_2 = -\int_{\infty}^2 d\mathbf{x} \cdot \mathbf{F} = \int_2^{\infty} d\mathbf{x} \cdot \mathbf{F}$ . On peut donc dire aussi que l'énergie potentielle d'un système est le travail effectué par la force de gravitation, lorsque ses constituants sont écartés de leur position initiale vers l'infini.

L'énergie potentielle d'un système se calcule en imaginant qu'une partie du système est déjà en place, avec une densité  $\rho(\mathbf{x})$  et un potentiel  $\Phi(\mathbf{x})$ . Le travail effectué pour amener un élément de masse  $\delta m$  de l'infini à  $\mathbf{x}$  est  $\delta m\Phi(\mathbf{x})$ . Un petit incrément de densité  $\delta\rho(\mathbf{x})$  conduit donc à un incrément d'énergie potentielle :

$$\delta W = \int d^3\mathbf{x} \delta\rho(\mathbf{x}) \Phi(\mathbf{x}) \quad (2.13)$$

Par ailleurs, selon l'équation de Poisson, l'incrément de potentiel  $\delta\Phi(\mathbf{x})$  est lié à l'incrément de densité par la relation  $\nabla^2(\delta\Phi) = 4\pi G\delta\rho$ , et en substituant  $\delta\rho$  dans l'Equ. (2.13), on obtient :

$$\delta W = \frac{1}{4\pi G} \int d^3\mathbf{x} \Phi \nabla^2(\delta\Phi) \quad (2.14)$$

Le théorème de la divergence permet d'écrire :

$$\int_V d^3\mathbf{x} \nabla \cdot \mathbf{F} = \oint_S d^2\mathbf{S} \cdot \mathbf{F} \quad \Rightarrow \quad \int d^3\mathbf{x} g \nabla \cdot \mathbf{F} = \oint_S g \mathbf{F} \cdot d^2\mathbf{S} - \int d^3\mathbf{x} (\mathbf{F} \cdot \nabla) g$$

**Question - exercice :** Montrer la relation ci-dessus.

ce qui permet d'écrire l'Equ. (2.14) sous la forme :

$$\delta W = \frac{1}{4\pi G} \int \Phi \nabla(\delta\Phi) \cdot d^2\mathbf{S} - \frac{1}{4\pi G} \int d^3\mathbf{x} \nabla\Phi \cdot \nabla(\delta\Phi) \quad (2.15)$$

Or l'intégrale sur la surface disparaît, parce que la fonction sous l'intégrale varie comme  $1/r^3$  (en effet,  $\Phi \propto 1/r$  et  $\nabla(\delta\Phi) \propto 1/r^2$ ) quand  $r \rightarrow \infty$ , alors que la surface varie comme  $r^2$ . La surface étant arbitraire, elle peut être aussi lointaine que l'on veut du système, donc cette intégrale disparaît effectivement. Quant à la fonction sous l'intégrale de volume, on voit facilement que  $\nabla\Phi \cdot \nabla(\delta\Phi) = \frac{1}{2}\delta(\nabla\Phi \cdot \nabla\Phi) = \frac{1}{2}\delta|\nabla\Phi|^2$ . On obtient alors :

$$\delta W = -\frac{1}{8\pi G} \delta \left( \int d^3\mathbf{x} |\nabla\Phi|^2 \right) \quad \Rightarrow \quad W = -\frac{1}{8\pi G} \left( \int d^3\mathbf{x} |\nabla\Phi|^2 \right) \quad (2.16)$$

En appliquant à nouveau le théorème de la divergence et en remplaçant  $\nabla^2\Phi$  par  $4\pi G\rho$ , on a également :

$$W = \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) \Phi(\mathbf{x}) \quad (2.17)$$

## 2.2 Systèmes sphériques

Il est utile de rappeler ici les deux premiers théorèmes de Newton qui permettent de calculer le potentiel gravitationnel de n'importe quelle distribution de matière à symétrie sphérique :

**Premier théorème de Newton :** *Un corps situé à l'intérieur d'une coquille sphérique de matière ne subit aucune force gravitationnelle résultante de la part de cette coquille.*

**Deuxième théorème de Newton :** *La force de gravitation exercée sur un corps par une coquille sphérique de matière est identique à celle qui résulterait de la même quantité de matière concentrée au centre de la coquille.*

Un important corollaire du premier théorème est que le champ potentiel de gravitation à l'intérieur d'une coquille sphérique vide est constant, car  $\nabla\Phi = -\mathbf{g} = 0$ . Ainsi, on peut évaluer le potentiel  $\Phi(\mathbf{x})$  pour  $\mathbf{x}$  situé n'importe où à l'intérieur de la coquille, en utilisant l'Equ. (2.3) ; or le choix le plus simple est évidemment de prendre  $\mathbf{x}$  au centre de la coquille, et l'intégration donne immédiatement :

$$\Phi = -\frac{GM}{R}. \quad (2.18)$$

Une conséquence des deux premiers théorèmes est que l'attraction gravitationnelle d'une distribution de densité dotée de symétrie sphérique  $\rho(r')$  sur une masse unité située au rayon  $r$ , est entièrement définie par la masse qui se trouve à l'intérieur de  $r$  :

$$\mathbf{F}(r) = -\frac{GM(r)}{r^2} \hat{e}_r \quad (2.19)$$

où  $\hat{e}_r$  est le vecteur-unité radial, et avec :

$$M(r) = 4\pi \int_0^r dr' r'^2 \rho(r') \quad (2.20)$$

On peut considérer le potentiel comme la somme des potentiels des coquilles sphériques concentriques de masse  $dM(r) = 4\pi\rho(r)r^2dr$ . On peut calculer le potentiel en  $\mathbf{r}$  engendré par une distribution arbitraire, mais de symétrie

sphérique,  $\rho(r')$ , en additionnant les contributions, d'une part des coquilles ayant  $r' < r$ , d'autre part des coquilles ayant  $r' > r$ . On obtient ainsi :

$$\begin{aligned}\Phi(r) &= -\frac{G}{r} \int_0^r dM(r') - G \int_r^\infty \frac{dM(r')}{r'} \\ &= -4\pi G \left[ \frac{1}{r} \int_0^r dr' r'^2 \rho(r') + \int_r^\infty dr' r' \rho(r') \right] \quad (2.21)\end{aligned}$$

On peut vérifier que :

$$\mathbf{F} = -\nabla\Phi = -\frac{GM(r)}{r^2} \hat{e}_r$$

En effet, pour une fonction  $f$  telle que  $f(r) \rightarrow 0$  quand  $r \rightarrow 0$  ou  $r \rightarrow \infty$ , et si  $F$  est la primitive de  $f$ , on a :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dr} \int_0^r f(r') dr' &= \frac{d}{dr} [F(r) - F(0)] = f(r) \\ \frac{d}{dr} \int_r^\infty f(r') dr' &= \frac{d}{dr} [F(\infty) - F(r)] = -f(r)\end{aligned}$$

Par conséquent, pour un potentiel sphérique :

$$\begin{aligned}\nabla\Phi &= \frac{d}{dr}\Phi \hat{e}_r = -4\pi G \left[ -\frac{1}{r^2} \int_0^r dr' r'^2 \rho(r') + \frac{1}{r} r^2 \rho(r) - r \rho(r) \right] \hat{e}_r \\ &= \frac{G}{r^2} 4\pi \int_0^r dr' r'^2 \rho(r') \hat{e}_r = \frac{GM(r)}{r^2} \hat{e}_r\end{aligned}$$

Il est utile de calculer la **vitesse circulaire** d'une étoile-test, de masse négligeable, orbitant à distance  $r$  du centre. L'accélération centripète vaut  $v_c^2/r$ , donc :

$$v_c^2 = r|\mathbf{F}| = r \frac{d\Phi}{dr} = \frac{GM(r)}{r} \quad (2.22)$$

La fréquence angulaire correspondante, appelée **fréquence circulaire**, est donnée par :

$$\Omega \equiv \frac{v_c}{r} = \sqrt{\frac{GM(r)}{r^3}} \quad (2.23)$$

Ces deux grandeurs sont un moyen de mesurer la masse à l'intérieur de  $r$ . Une autre grandeur importante, la **vitesse d'évasion**, est donnée par :

$$v_e(r) \equiv \sqrt{2|\Phi(r)|} \quad (2.24)$$

On l'obtient en posant que l'énergie mécanique est constante, et nulle à l'infini donc aussi au rayon  $r$  :

$$\Phi(r) m + \frac{1}{2} m v_e^2 = 0$$

La vitesse d'évasion dépend de la masse à l'intérieur de  $r$  aussi bien que de la masse à l'extérieur.

**L'énergie potentielle des systèmes sphériques** se tire de l'équation suivante (non démontrée ici, mais voir Binney & Tremaine 2008, pp. 59-60)

$$W = - \int d^3\mathbf{x} \rho \mathbf{x} \cdot \nabla \Phi \quad \Rightarrow \quad W = -4\pi G \int_0^\infty dr r \rho(r) M(r) \quad (2.25)$$

### 2.2.1 Potentiels de quelques systèmes simples

1. **Masse ponctuelle** : Ce cas est celui d'un potentiel keplerien :

$$\Phi(r) = -\frac{GM}{r} \quad ; \quad v_c(r) = \sqrt{\frac{GM}{r}} \quad ; \quad v_e(r) = \sqrt{\frac{2GM}{r}} \quad (2.26)$$

2. **Sphère homogène** : On a  $M(r) = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$  avec la densité  $\rho$  constante, et :

$$v_c = \sqrt{\frac{4\pi G \rho}{3}} r \quad (2.27)$$

La vitesse circulaire est donc directement proportionnelle au rayon, si bien que la période orbitale d'une étoile-test en orbite circulaire est :

$$T = \frac{2\pi r}{v_c} = \sqrt{\frac{3\pi}{G\rho}} \quad (2.28)$$

Il est intéressant de noter que cette période ne dépend que de la densité  $\rho$  mais pas du rayon.

Supposons qu'une étoile-test puisse se déplacer sans obstacle dans la sphère homogène en question. Si elle est lâchée de la distance au centre  $r$  avec une vitesse nulle, son équation du mouvement sera :

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{GM(r)}{r^2} = -\frac{4\pi G\rho}{3}r \quad (2.29)$$

Or c'est l'équation d'un oscillateur harmonique de fréquence  $2\pi/T$ . Ainsi, quelle que soit la position initiale  $r$ , l'étoile atteindra  $r = 0$  en un temps équivalent au quart d'une période, c'est-à-dire :

$$\sqrt{\frac{3\pi}{16G\rho}} = 0.767 (G\rho)^{-1/2} \quad (2.30)$$

Ce temps est très proche de l'inverse de la vitesse angulaire d'une masse en orbite circulaire :

$$\frac{1}{\omega} = \frac{r}{v_c} = \sqrt{\frac{3}{4\pi G\rho}} = 0.489 (G\rho)^{-1/2}$$

On voit donc que le temps qu'il faut pour parcourir une portion significative de l'orbite est toujours de l'ordre de  $(G\rho)^{-1/2}$ , que l'orbite soit radiale ou circulaire. Cela vaut aussi pour les systèmes inhomogènes, pour autant que l'on remplace  $\rho$  par la densité moyenne  $\bar{\rho}$  à l'intérieur du rayon  $r$ . On peut alors dire que le temps de traversée, ou **temps dynamique**, est égal à :

$$t_{cross} \simeq t_{dyn} \simeq (G\bar{\rho})^{-1/2} \quad (2.31)$$

A partir de l'Equ. (2.21), on trouve le potentiel gravitationnel de la sphère homogène de rayon  $a$  :

$$\Phi(r) = \begin{cases} -2\pi G\rho \left(a^2 - \frac{1}{3}r^2\right) & (r < a) \\ -4\pi G\rho a^3/(3r) & (r > a) \end{cases} \quad (2.32)$$

3. **Modèle de Plummer** : C'est le modèle le plus simple, tel qu'il ne diverge pas au centre et décroisse en  $1/r$  (de manière keplerienne) aux grands rayons :

$$\Phi = -\frac{GM}{\sqrt{r^2 + b^2}} \quad (2.33)$$

où la constante  $b$  est la **longueur d'échelle de Plummer** et  $M$  est la masse totale du système. La densité correspondante est :

$$\rho(r) = \frac{3M}{4\pi b^3} \left(1 + \frac{r^2}{b^2}\right)^{-5/2} \quad (2.34)$$

**Question - exercice :** Montrer la relation ci-dessus.

4. **Potentiel isochrone :** L'avantage du modèle de Plummer est sa simplicité, mais son défaut est que les orbites d'une étoile qui y évolue ne peuvent être écrites analytiquement. Ce défaut est corrigé dans le **potentiel isochrone** :

$$\Phi = -\frac{GM}{b + \sqrt{b^2 + r^2}} \quad (2.35)$$

Le nom de ce potentiel vient du fait que la période radiale du mouvement d'une étoile ne dépend que de l'énergie mécanique totale  $E$  mais pas du moment cinétique  $L$ , comme dans le cas d'une orbite keplerienne. La vitesse circulaire dans ce potentiel vaut :

$$v_c^2(r) = \frac{GM r^2}{(b + a)^2 a} \quad \text{avec} \quad a \equiv \sqrt{b^2 + r^2} \quad (2.36)$$

**Question - exercice :** Montrer la relation ci-dessus.

si bien que  $v_c \rightarrow \sqrt{GM/r}$  quand  $r \gg b$ . A partir de l'équation de Poisson, la densité s'écrit :

$$\rho(r) = M \left[ \frac{3(b + a)a^2 - r^2(b + 3a)}{4\pi(b + a)^3} \right] \quad (2.37)$$

**Question - exercice :** Montrer la relation ci-dessus.

Au centre,  $a = b$ , donc la densité centrale se réduit à :

$$\rho(0) = \frac{3M}{16\pi b^3} \quad (2.38)$$



tandis qu'aux grands rayons,  $a \simeq r \gg b$  et la densité tend vers :

$$\rho(r) \simeq \frac{bM}{2\pi r^4} \quad (r \gg b) \quad (2.39)$$

5. **Modèles de Dehnen, Hernquist, Jaffe et NFW** : La densité de luminosité  $j(\mathbf{r})$  (en  $L_\odot/\text{pc}^3$ ) suit souvent, pour les galaxies elliptiques, une loi de puissance donnée près du centre, mais une autre dans la périphérie. Plusieurs modèles pour lesquels la densité suit une loi du type :

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{(r/a)^\alpha (1 + r/a)^{\beta-\alpha}} \quad (2.40)$$

ont donc été proposés. Selon les valeurs de  $\beta$  et de  $\alpha$ , les modèles ont pris les noms suivants :

- Les **modèles de Dehnen** sont tous ceux pour lesquels  $\beta = 4$ , valeur qui leur donne des propriétés analytiques simples.  $\alpha$  peut prendre différentes valeurs, qui définissent différents sous-ensembles des modèles de Dehnen, en particulier :
- $\alpha = 1$  (et  $\beta = 4$ ) définit le **modèle de Hernquist**,
- $\alpha = 2$  (et  $\beta = 4$ ) définit le **modèle de Jaffe**. Les régions centrales des galaxies elliptiques sont bien ajustées par des modèles de Dehnen ayant  $0.6 \leq \alpha \leq 2$ .
- $\alpha = 1$  et  $\beta = 3$  définit le **modèle NFW** (Navarro, Frenk & White 1995), qui est particulièrement bien adapté aux **halos de matière sombre** est qui est très utilisé aujourd'hui. Bien que l'Equ. (2.40) contienne deux paramètres libres,  $\rho_0$  et  $a$ , les simulations de la formation des halos montrent que ces deux paramètres sont fortement corrélés, si bien que les modèles NFW ne dépendent en fait que d'un seul paramètre. Le paramètre habituellement utilisé est le rayon  $r_{200}$  où la densité vaut 200 fois la densité critique de l'univers  $\rho_c(t) = 3H^2(t)/(8\pi G)$ . Un autre paramètre possible est la masse  $M$  à l'intérieur de  $r_{200}$  :

$$M = 200\rho_c \frac{4}{3}\pi r_{200}^3$$

On définit la **concentration** du halo par

$$c \equiv r_{200}/a$$

Cette concentration présente une dispersion assez faible à  $M$  donnée. La valeur moyenne de  $c$  varie de  $\simeq 16$  pour  $M \sim 3 \times 10^{11} M_\odot$  à  $\simeq 6$  pour  $M \sim 3 \times 10^{15} M_\odot$ .

A partir de l'Equ. (2.40), on peut calculer la masse comprise à l'intérieur de  $r$  :

$$M(r) = 4\pi\rho_0 a^3 \int_0^{r/a} ds \frac{s^{2-\alpha}}{(1+s)^{\beta-\alpha}} \quad (2.41)$$

ce qui donne pour les modèles de Jaffe, Hernquist et NFW :

$$M(r) = 4\pi\rho_0 a^3 \times \begin{cases} \frac{r/a}{1+r/a} & \text{(Jaffe)} \\ \frac{(r/a)^2}{2(1+r/a)^2} & \text{(Hernquist)} \\ \ln(1+r/a) - \frac{r/a}{1+r/a} & \text{(NFW)} \end{cases} \quad (2.42)$$

On voit que la masse reste bornée quand  $r \rightarrow \infty$  pour les modèles de Jaffe et de Hernquist, mais qu'elle diverge dans le cas du modèle NFW. On peut calculer le potentiel en partant de l'Equ. (2.22), qui permet de poser pour les trois modèles :

$$\Phi = -G \int_r^\infty dr \frac{M(r)}{r^2}$$

Cela donne :

$$\Phi = -4\pi G \rho_0 a^2 \times \begin{cases} \ln(1+a/r) & \text{(Jaffe)} \\ \frac{1}{2(1+r/a)} & \text{(Hernquist)} \\ \frac{\ln(1+r/a)}{r/a} & \text{(NFW)} \end{cases} \quad (2.43)$$

6. **Modèles de Sérsic-3D** : Ce paragraphe est tiré du cours de Gary Mamon (Institut d'Astrophysique de Paris), *Dynamique gravitationnelle des systèmes à  $N$  corps*, version 2008–2009.

Navarro et al. (2004) ont montré que les structures des très grosses simulations cosmologiques à  $N$  corps sont encore mieux ajustées par

l'analogie 3D du modèle de Sérsic (qui ajuste très bien les profils projetés des galaxies elliptiques) que par le modèle NFW :

$$\rho(R) = \rho_0 \exp \left[ -(r/a)^{1/m} \right] \quad , \quad (2.44)$$

avec  $m \simeq 6$ . Le Sérsic-3D est plus esthétique que le NFW car il possède une densité centrale  $\rho_0$  finie et une masse totale qui converge. Son potentiel gravitationnel est donné par Cardone, Piedipalumbo & Tortora (2005). On l'appelle parfois profil d'Einstein, qui l'avait suggéré dans Einstein (1969) et avant dans un article de l'Institut d'astrophysique d'Alma-Ata en 1965. La figure 2.1 illustre les profils de densité couram-

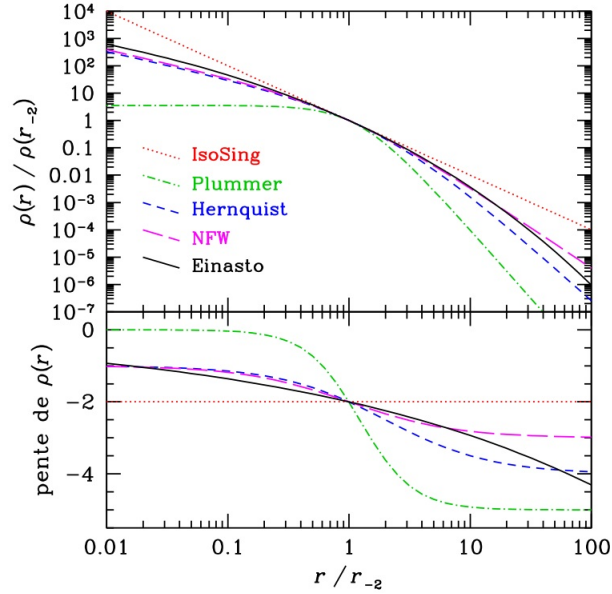


FIG. 2.1 – Profils de densité (haut) et pentes associées (bas) des modèles couramment employés, où  $r_{-2}$  est le rayon en lequel la pente vaut  $-2$ . (D'après G. Mamon 2008-2009).

ment employés, ainsi que leurs pentes associées. Les rayons maximaux où les structures sont en équilibre dynamique sont environ  $10 r_{-2}$ . Entre 1% et 100% de ce rayon d'équilibre, les pentes varient typiquement de  $-1$  à  $-3.5$ .

## 2.3 Potentiel et densité des systèmes aplatis

Voici encore quelques potentiels simples, cette fois pour des systèmes aplatis.

### 2.3.1 Le modèle de Kuzmin et le modèle de Miyamoto & Nagai

Soit le potentiel axisymétrique :

$$\Phi_K(R, z) = -\frac{GM}{\sqrt{R^2 + (a + |z|)^2}} \quad (a \geq 0) \quad (2.45)$$

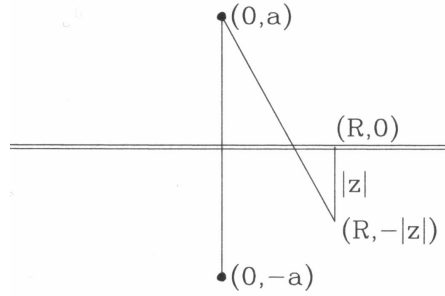


FIG. 2.2 – Disque de Kuzmin vu par la tranche. On voit que, au point  $(R, -|z|)$  sous le plan du disque, le potentiel est identique à celui produit par une masse ponctuelle située à distance  $a$  au-dessus du centre du disque.

On voit d'après la Fig. (2.2) que, pour  $z < 0$ , le potentiel  $\Phi_K$  est identique à celui d'une masse ponctuelle qui serait située au point  $(R, z) = (0, a)$ . De même, pour  $z > 0$ , le potentiel est identique à celui d'une masse ponctuelle qui serait située en  $(R, z) = (0, -a)$ . Par conséquent, tant que  $z \neq 0$ , la densité doit être nulle partout, de même que  $\nabla^2 \Phi_K$ . La matière doit donc être confinée dans un disque infiniment mince. Il est possible de calculer la densité de surface  $\Sigma_K$  en recourant au théorème de Gauss donné par l'Equ. (2.12) et en intégrant sur la surface d'un volume englobant une unité de surface du disque et d'épaisseur tendant vers zéro. On obtient alors :

$$\Sigma_K(R) = \frac{aM}{2\pi(R^2 + a^2)^{3/2}} \quad (2.46)$$

**Question - exercice :** Montrer la relation ci-dessus.

Une généralisation du potentiel de Kuzmin permet de traiter des systèmes sphériques aussi bien que plats, ainsi que tous les cas intermédiaires. C'est le **potentiel de Miyamoto & Nagai** (1975), une sorte d'hybride entre les potentiels de Plummer et de Kuzmin :

$$\Phi_M(R, z) = -\frac{GM}{\sqrt{R^2 + (a + \sqrt{z^2 + b^2})^2}} \quad (2.47)$$

Ce potentiel devient celui de Plummer pour  $a = 0$  (avec  $r^2 = R^2 + z^2$ ), tandis qu'il se réduit à celui de Kuzmin pour  $b = 0$ . C'est en jouant sur les paramètres  $a$  et  $b$  que l'on peut passer par les situations intermédiaires. La densité correspondante, obtenue à partir de  $\nabla^2 \Phi_M$ , s'écrit :

$$\rho_M(R, z) = \left( \frac{b^2 M}{4\pi} \right) \frac{aR^2 + (a + 3\sqrt{z^2 + b^2})(a + \sqrt{z^2 + b^2})^2}{[R^2 + (a + \sqrt{z^2 + b^2})^2]^{5/2}(z^2 + b^2)^{3/2}} \quad (2.48)$$

Les contours d'égale densité sont montrés dans la Fig. (2.3).

### 2.3.2 Equation de Poisson pour les systèmes très aplatis

Dans le cas d'un système axisymétrique ayant une densité  $\rho(R, z)$ , l'équation de Poisson peut s'écrire :

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 4\pi G \rho(R, z) + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R F(R)) \quad (2.49)$$

où  $F_R = -\partial \Phi / \partial R$  est la force radiale. Considérons un modèle comme celui de Miyamoto & Nagai : si  $b \rightarrow 0$ , la distribution de densité devient plus aplatie, et en  $R$  donné, la densité dans le plan croît comme  $1/b$ . Mais la force radiale  $F_R$  reste bornée : à la limite  $b = 0$ , on a  $F_R = -\partial \Phi_K / \partial R$ , où  $\Phi_K(R, z)$  est le potentiel de Kuzmin. Donc, près de  $z = 0$ , le premier terme du membre de droite de l'Equ. (2.49) devient beaucoup plus grand que le second, si bien que l'équation de Poisson se réduit à :

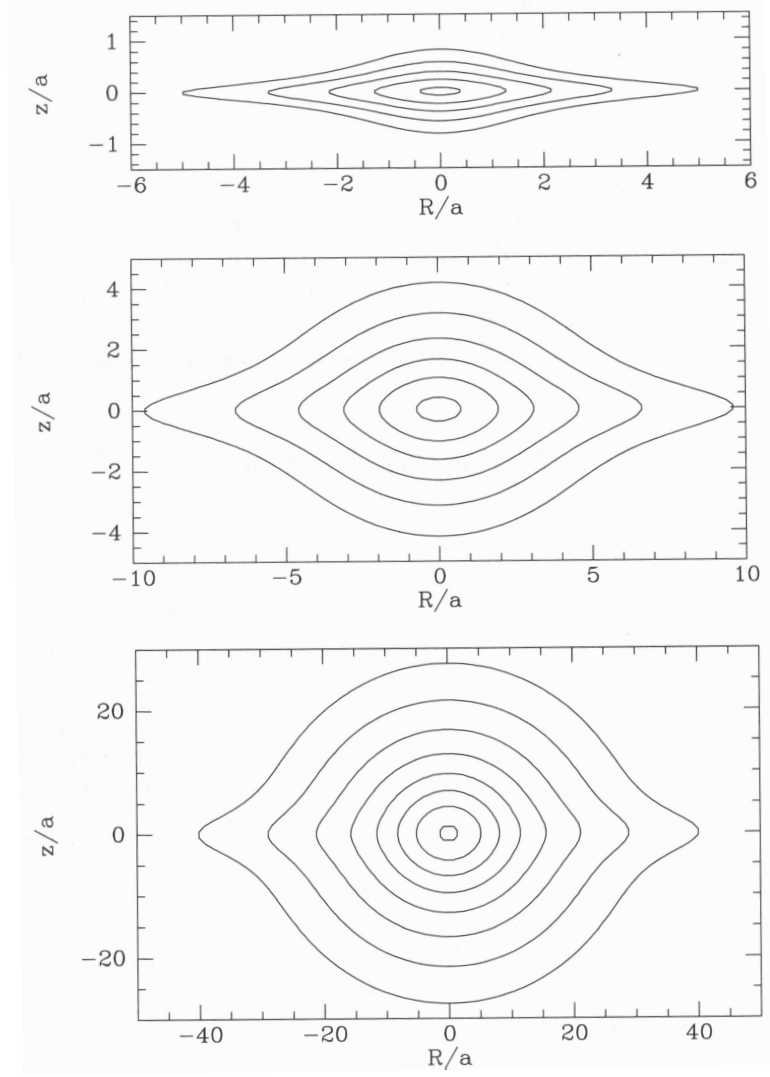


FIG. 2.3 – Contours de densité du modèle de Miyamoto–Nagai dans le plan  $(R, z)$ , pour différents rapports  $b/a$  : en haut,  $b/a = 0.2$  ; milieu,  $b/a = 1$  ; bas,  $b/a = 5$ . (Source : Binney & Tremaine 2008).

$$\frac{\partial^2 \Phi(R, z)}{\partial z^2} = 4\pi G \rho(R, z) \quad (2.50)$$

Ce résultat n'est pas limité à un modèle particulier, mais reste valable pour pratiquement tout système en forme de disque fin. La variation verticale du potentiel, en un rayon  $R$  donné, ne dépend que de la distribution de densité en ce rayon. On peut donc résoudre l'équation de Poisson en deux étapes :

- 1) assimiler le disque fin à une couche d'épaisseur nulle et déterminer le potentiel  $\Phi(R, 0)$  dans le plan du disque (à l'aide des modèles présentés ici, par exemple) ;
- 2) résoudre l'Equ. (2.50) en chaque rayon  $R$  pour trouver la dépendance en  $z$  de  $\Phi(R, z)$ .

On a alors :

$$\Phi(R, z) = \Phi(R, 0) + \Phi_z(R, z) \quad (2.51)$$

avec :

$$\Phi_z(R, z) \equiv 4\pi G \int_0^z dz' \int_0^{z'} dz'' \rho(R, z'') + a(R)z \quad (2.52)$$

et avec la constante d'intégration  $a$  étant nulle si le disque est symétrique par rapport au plan équatorial.

## 2.4 Les potentiels des disques

Les galaxies pourvues d'un disque prédominant étant très fréquentes, il est utile de voir plus en détail comment calculer le potentiel de disques très fins. On en verra ici deux exemples, le disque de Mestel et le disque exponentiel.

### 2.4.1 Potentiels de disques à partir d'homoéoïdes

Un homoéoïde est une “couche” de densité de surface uniforme délimitée par deux surface sphéroïdes concentriques. Les homoéoïdes fins ont un potentiel extérieur dont les équipotentielles sont des sphéroïdes qui ont les mêmes foyers que l'homoéoïde, et un potentiel intérieur constant. On peut ainsi calculer les potentiels de distributions de masses sphéroïdales arbitraires. Un disque axisymétrique peut être considéré comme un sphéroïdes très aplati. On donnera ici les étapes essentielles de cette méthode, sans les justifier dans tous les détails.

Considérons le sphéroïde homogène de densité  $\rho$ , de demi-axes  $a$  et  $c = qa$  représenté sur la Fig. (2.4).

Sa masse est  $M = \frac{4}{3}\pi\rho qa^3$ , et sa densité de surface est, comme on le voit sur cette figure :

$$\Sigma(a, R) = 2\rho q\sqrt{a^2 - R^2} \quad (2.53)$$

où  $R$  est le rayon en coordonnées cylindriques. On obtient la masse  $\delta M(a)$  et la densité de surface  $\delta\Sigma(a, R)$  de l'homoéoïde mince de densité  $\rho$ , de demi-grand axe  $a$ , d'épaisseur  $\delta a$  et de rapport d'axes  $q$ , en différentiant l'Equ. (2.53) :

$$\delta M(a) = 4\pi\rho qa^2\delta a \quad ; \quad \delta\Sigma(a, R) = \frac{2\rho qa}{\sqrt{a^2 - R^2}}\delta a \quad (2.54)$$

Faisons maintenant tendre  $q$  vers zéro tout en gardant la densité de surface  $\Sigma_0 \equiv 2\rho qa$  constante : on obtient la masse et la densité de surface d'un homoéoïde aplati :

$$\delta M(a) = 2\pi\Sigma_0 a\delta a \quad ; \quad \delta\Sigma(a, R) = \frac{\Sigma_0\delta a}{\sqrt{a^2 - R^2}} \quad (2.55)$$

Supposons que l'on connaisse – ou que l'on impose –  $\Sigma(R)$ . On peut construire un disque fin en superposant des homoéoïdes dont les densités de surface cumulées donnent  $\Sigma(R)$  pour chaque  $R$  :



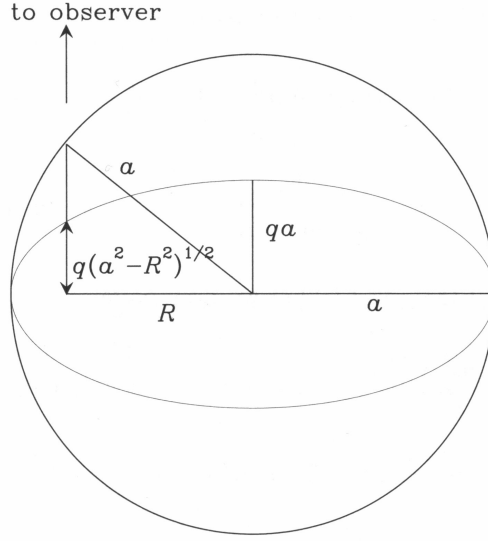


FIG. 2.4 – Un sphéroïde de rapport des axes égal à  $q$  et de demi-grand axe  $a$  est vu le long d'une ligne de visée qui coupe le plan équatorial du sphéroïde, perpendiculairement, au rayon  $R$ . Cette ligne de visée coupe à travers le sphéroïde sur une distance égale à  $2q\sqrt{a^2 - R^2}$ .

$$\Sigma(R) = \sum_{a \geq R} \delta\Sigma(a, R) = \int_R^\infty da \frac{\Sigma_0(a)}{\sqrt{a^2 - R^2}} \quad (2.56)$$

On intègre de  $R$  à l'infini parce que les homoéoïdes ayant  $a < R$  ne contribuent évidemment pas à la densité de surface en  $R$ . Il s'agit donc de trouver la fonction  $\Sigma_0(a)$  à partir de cette équation intégrale, qui est une équation intégrale d'Abel. La solution en est :

$$\Sigma_0(a) = -\frac{2}{\pi} \frac{d}{da} \int_a^\infty dR \frac{R \Sigma(R)}{\sqrt{R^2 - a^2}} \quad (2.57)$$

Il est important de voir que la fonction  $\Sigma_0(a)$  diffère de la fonction  $\Sigma(R)$  parce qu'une partie de la masse située à l'intérieur du rayon  $R$  appartient à des homoéoïdes ayant  $a > R$ .

**Troisième théorème de Newton :** *Une masse située à l'intérieur d'un homoéoïde ne subit aucune force gravitationnelle nette de la part de celui-ci.*

En vertu de ce théorème, la force de gravité subie par le point situé en  $(R' < R, 0)$  est indépendante des homéoïdes ayant  $a > R$ . Par contre, ces derniers contribuent à la masse interne à  $R$ , si bien que, à la limite du disque fin, la force subie en  $R$  ne dépend pas seulement de la masse du disque intérieure à  $R$ , mais aussi de la masse extérieure à  $R$ . Cela contraste avec la situation de symétrie sphérique, où la force subie en  $R$  ne dépend que de la masse située à l'intérieur de  $R$ . Dans le cas du disque, l'anneau  $R' > R$  contribue à la gravité subie par une étoile située en  $R$ , en exerçant sur elle une force vers l'extérieur, de sorte à compenser partiellement l'attraction centripète exercée par la matière située en  $R' < R$ . Si l'on supprime par la pensée l'anneau  $R' > R$ , on voit alors qu'une étoile située au bord d'un disque de masse donnée subit une force supérieure à celle qu'elle subirait à la périphérie d'un système sphérique de même masse, et sa vitesse circulaire est donc supérieure. On peut comprendre ce dernier fait de manière intuitive : en partant d'un système sphérique de rayon et de masse donnés, on l'aplatit progressivement en un disque de même masse et de même rayon. Les éléments de masse qui étaient initialement situés dans les régions polaires de la sphère exerçaient, sur l'étoile située à l'équateur, des forces dont les composantes verticales s'annulaient ; ces éléments de masse, une fois ramenés dans la région centrale du disque, exercent sur l'étoile une force qui, non seulement, est purement radiale, mais qui a aussi une intensité plus grande, vu qu'ils sont plus proches d'un facteur  $\sqrt{2}$ .

Pour calculer le potentiel, remarquons d'abord que, contrairement au champ de gravitation qui est discontinu sur le plan (il change de direction entre  $z = +\varepsilon$  et  $z = -\varepsilon$ ), le potentiel reste continu. Il suffit donc de calculer le potentiel qui règne à l'extérieur de tous les homéoïdes, puis de faire tendre  $z$  vers zéro.

Le potentiel à l'intérieur d'un homéoïde de masse  $M$  est donné en coordonnées sphéroïdales oblates  $u$  et  $v$ , définies par :

$$R = \Delta \cosh u \sinh v \quad ; \quad z = \Delta \sinh u \cosh v \quad \text{avec} \quad u \geq 0, \quad 0 \leq v \leq \pi \quad (2.58)$$

où  $\Delta$  est une constante.  $u$  est la coordonnée "radiale", c'est-à-dire que les courbes  $u = \text{constante}$  sont, dans le plan  $(R, z)$ , des ellipses confocales mais de différents demi-grands axes  $a$ . Dans ces coordonnées, le potentiel s'écrit :

$$\Phi = -\frac{G\delta M}{ae} \times \begin{cases} \arcsin(e) & (u < u_0) \\ \arcsin(\operatorname{sech} u) & (u \geq u_0) \end{cases} \quad (2.59)$$

Pour un homoéioïde complètement aplati, l'excentricité vaut  $e = 1$  et en exprimant la masse en fonction de  $\Sigma_0$  par l'Equ. (2.55), le potentiel devient :

$$\delta\Phi(R, z) = -2\pi G\Sigma_0\delta a \arcsin(\operatorname{sech} u) \quad (2.60)$$

Des calculs un peu longs permettent d'arriver à l'expression du potentiel :

$$\Phi(R, z) = 4G \int_0^\infty da \arcsin\left(\frac{2a}{\sqrt{+} + \sqrt{-}}\right) \frac{d}{da} \int_a^\infty dR' \frac{R'\Sigma(R')}{\sqrt{R'^2 - a^2}} \quad (2.61)$$

avec :

$$\sqrt{\pm} \equiv \sqrt{z^2 + (a \pm R)^2}$$

Pour le potentiel dans le plan, cette expression se réduit à :

$$\Phi(R, 0) = -4G \int_0^R \frac{da}{\sqrt{R^2 - a^2}} \int_a^\infty dR' \frac{R'\Sigma(R')}{\sqrt{R'^2 - a^2}} \quad (2.62)$$

La vitesse circulaire est :

$$v_c^2(R) = R \frac{\partial\Phi}{\partial R} = -4G \int_0^R da \frac{a}{\sqrt{R^2 - a^2}} \frac{d}{da} \int_a^\infty dR' \frac{R'\Sigma(R')}{\sqrt{R'^2 - a^2}} \quad (2.63)$$

## 2.4.2 Le disque de Mestel

Ce disque possède la curieuse propriété de donner une vitesse circulaire constante, indépendante du rayon. Considérons d'abord une densité de surface donnée par :

$$\Sigma(R) = \begin{cases} \frac{v_0^2}{2\pi GR} & (R < R_{max}) \\ 0 & (R \geq R_{max}) \end{cases} \quad (2.64)$$

où  $v_0$  et  $R_{max}$  sont des constantes. La dernière intégrale de l'Equ. (2.63) est proportionnelle à  $\operatorname{arccosh}(R_{max}/a)$ , et sa dérivée est :

$$\frac{d}{da} \operatorname{arccosh}(R_{max}/a) = -\frac{R_{max}}{a\sqrt{R_{max}^2 - a^2}} \quad (2.65)$$

Faisons tendre  $R_{max}$  vers l'infini, ce qui définit le **disque de Mestel** : la dérivée ci-dessus devient  $-1/a$  qui, introduite dans l'Equ. (2.63), donne :

$$v_c^2 = \frac{2v_0^2}{\pi} \int_0^R \frac{da}{\sqrt{R^2 - a^2}} = v_0^2 \quad (2.66)$$

Par ailleurs, pour cette densité de surface inversement proportionnelle au rayon, la masse s'écrit :

$$M(R) = 2\pi \int_0^R dR' R' \Sigma(R') = \frac{v_0^2 R}{G} \quad (2.67)$$

et on a donc

$$v_0^2 = v_c^2(R) = \frac{GM(R)}{R} \quad (2.68)$$

L'équation pour  $v_c^2$  est, exceptionnellement, la même que pour un système sphérique (à ceci près que, dans le cas sphérique,  $v_c$  dépend en général du rayon) ! Seul le disque de Mestel offre cette particularité.

L'intérêt de ce disque a été, historiquement, de reproduire correctement la courbe de rotation plate de la Galaxie (W. L. H. Shuter 1981, MNRAS 194, 851).

### 2.4.3 Le disque exponentiel

On a vu que les galaxies spirales réelles possèdent ce type de loi de densité. Déterminons le potentiel correspondant à la densité de surface :

$$\Sigma(R) = \Sigma_0 e^{-R/R_d} \quad (2.69)$$

On peut montrer que l'intégrale de droite dans l'Equ. (2.63) (par exemple) peut s'écrire :

$$\int_a^\infty dR' \frac{R' \Sigma_0 e^{-R'/R_d}}{\sqrt{R'^2 - a^2}} = \Sigma_0 a K_1(a/R_d) \quad (2.70)$$

où  $K_1$  est une fonction de Bessel modifiée. En introduisant cela dans l'Equ. (2.62), on a :

$$\Phi(R, 0) = -4G\Sigma_0 \int_0^R da \frac{aK_1(a/R_d)}{\sqrt{R^2 - a^2}} \quad (2.71)$$

$$= -\pi G\Sigma_0 R [I_0(y)K_1(y) - I_1(y)K_0(y)] \quad (2.72)$$

avec

$$y \equiv \frac{R}{2R_d} \quad (2.73)$$

et où  $I_0$  et  $I_1$  sont des fonctions de Bessel modifiées. La vitesse circulaire est donnée par :

$$v_c^2 = R \frac{\partial \Phi}{\partial R} = 4\pi G\Sigma_0 R_d y^2 [I_0(y)K_0(y) - I_1(y)K_1(y)] \quad (2.74)$$

La Fig. (2.5) montre cette vitesse circulaire, ainsi que celle d'un système sphérique ayant la même loi  $M_s(r)$  que le disque exponentiel, à savoir :

$$\begin{aligned} M_s(R) = M_d(R) &= 2\pi \int_0^R dR' R' \Sigma_0 e^{-R'/R_d} \\ &= 2\pi \Sigma_0 R_d^2 \left[ 1 - e^{-R/R_d} \left( 1 + \frac{R}{R_d} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.75)$$

On voit que la vitesse circulaire du disque n'approche la courbe keplerienne que lentement.

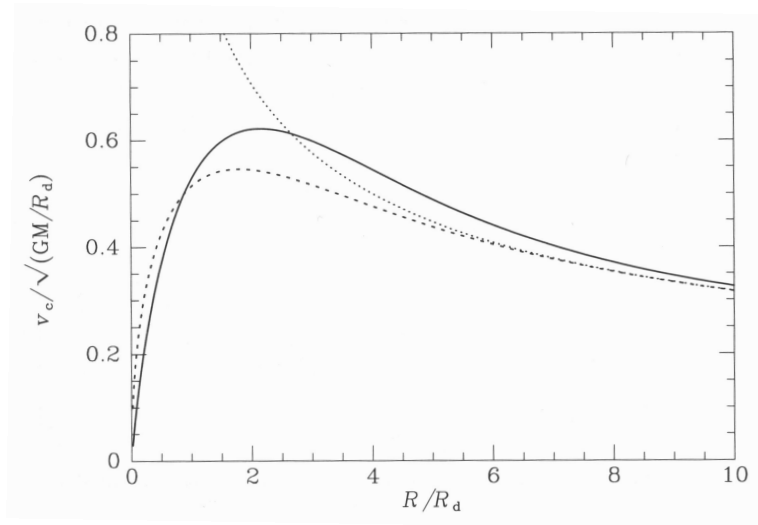


FIG. 2.5 – Vitesse circulaire du disque exponentiel (courbe continue), d’une masse ponctuelle de même masse que le disque (courbe pointillée) et du système sphérique dont la distribution de masse est donnée par l’Equ. (2.75) (courbe traitillée).

## 2.5 Le potentiel de notre Galaxie

La Galaxie est une superposition de plusieurs composantes (le disque, le bulbe, le halo stellaire et le halo de matière sombre) et il n’est pas possible de déduire le potentiel des seuls observables dynamiques. On fait en particulier l’hypothèse que chaque composante possède un rapport masse/luminosité  $\Upsilon$  différent mais indépendant de la position. Cette hypothèse est arbitraire, mais elle permet de construire des potentiels Galactiques et de tester leurs prédictions concernant la cinématique des étoiles et du gaz.

Les données utilisables sont :

1. La vitesse circulaire  $v_c(R)$ , compte tenu d’une vitesse circulaire du Soleil  $v_0 \equiv v_c(R_0)$  obtenue indépendamment.
2. Les valeurs des constantes de Oort (cf. cours d’Introduction).
3. La densité de surface totale (jusqu’à env. 1.1 kpc) du plan Galactique au niveau du Soleil,  $\Sigma_{1.1}(R_0)$ .
4. La dispersion des vitesses des étoiles du bulbe dans la fenêtre de Baade, qui vaut  $117 \pm 15 \text{ km s}^{-1}$ .

5. La masse totale jusqu'à 100 kpc du centre Galactique.

6. Le rayon de l'orbite solaire  $R_0 = 8$  kpc.

La forme de la loi de densité pour chaque composante est la suivante :

**a) Le bulbe :**

$$\rho_b(R, z) = \rho_{b0} \left( \frac{m}{a_b} \right)^{-\alpha_b} e^{-m^2/r_b^2} \quad (2.76)$$

avec :

$$m = \sqrt{R^2 + z^2/q_b^2} \quad (2.77)$$

Pour  $q_b < 1$ , c'est un sphéroïde oblat tronqué au rayon extérieur  $r_b$ . Les paramètres  $\alpha_b = 1.8$ ,  $q_b = 0.6$ ,  $r_b = 1.9$  kpc et  $a_b = 1$  kpc.

**b) Le halo de matière sombre :** On adopte un modèle de Dehnen généralisé aux sphéroïdes oblates :

$$\rho_h(R, z) = \rho_{h0} \left( \frac{m}{a_h} \right)^{-\alpha_h} \left( 1 + \frac{m}{a_h} \right)^{\alpha_h - \beta_h} \quad (2.78)$$

$m$  étant donné par l'Equ. (2.77), où l'on a remplacé  $q_b$  par  $q_h$ . La densité varie donc comme  $m^{-\alpha_h}$  pour  $m \ll a_h$  et comme  $m^{-\beta_h}$  aux grandes valeurs de  $m$ . Il y a cinq paramètres :  $\rho_{h0}$ ,  $a_h$ ,  $\alpha_h$ ,  $\beta_h$  et  $q_h$ . Ce dernier paramètre est mal contraint par les données, qu'elles soient photométriques ou dynamiques, et on pose arbitrairement  $q_h = 0.8$ . Les quatre autres paramètres sont ajustés à l'aide des contraintes dynamiques.

**c) Le disque stellaire :** On a vu que le disque comporte deux composantes, le disque fin et le disque épais. On superpose donc deux exponentielles d'échelles de hauteur différentes :

$$\rho_d(R, z) = \Sigma_d e^{-R/R_d} \left( \frac{\alpha_0}{2z_0} e^{-|z|/z_0} + \frac{\alpha_1}{2z_1} e^{-|z|/z_1} \right) \quad (2.79)$$

avec  $\alpha_0 + \alpha_1 = 1$ .  $\Sigma_d$  est la densité de surface au centre,  $R_d$  est la taille caractéristique du disque ;  $z_0 = 0.3$  kpc et  $z_1 = 1$  kpc sont les échelles de hauteur du disque fin et du disque épais, respectivement.

**d) Le disque de matière interstellaire :** Le disque de matière interstellaire est plus fin que le disque stellaire, et il s'étend plus loin en rayon. Par

contre, il présente un trou de 4 kpc de rayon au centre de la Galaxie. Sa densité est approchée par la formule :

$$\rho_g(R, z) = \frac{\Sigma_g}{2z_g} \exp\left(-\frac{R}{R_g} - \frac{R_m}{R} - \frac{|z|}{z_g}\right) \quad (2.80)$$

avec  $R_m = 4$  kpc et  $z_g = 80$  pc. On admet que  $R_g = 2R_d$  et que la matière interstellaire contribue pour 25% à la densité de surface totale du disque au niveau du Soleil, c'est-à-dire au rayon  $R_0$ . Compte tenu de cela,  $\Sigma_g$  et  $R_g$  sont liés à  $\Sigma_d$  et  $R_d$  par l'Equ. (2.79).

Un modèle de la Galaxie qui satisfait les contraintes d'observations en superposant les composantes a) à d) est dégénéré, en ce sens que plusieurs combinaisons (une infinité, même) de paramètres donnent des ajustements modèles-observations également satisfaisants. Le paramètre le plus important est  $R_d$ , qui est de l'ordre de 2 à 3 kpc : pour  $R_d = 2$  kpc, le disque domine le champ de gravitation jusqu'au delà du Soleil, tandis que pour  $R_d = 3$  kpc, c'est le halo qui domine partout. La Fig. (2.6) (qui reproduit en fait la Table (2.3) de Binney & Tremaine 2008) donne la valeur des paramètres de deux modèles extrêmes, appelés Modèle I et Modèle II.

Dans le Modèle I, on adopte  $R_d = 2$  kpc et la densité du halo croît, près du centre, comme  $\rho_h \propto r^{-\alpha_h} = r^2$ . Cela donne la plus faible contribution possible du halo près du centre, pour l'échelle de longueur du disque donnée. Les propriétés des deux modèles sont illustrées par les Figures (2.7) et (2.8), qui montrent les potentiels produit par les différentes composantes, et par la Fig. (2.9) qui montre les vitesses circulaires correspondantes. La force verticale  $K_z$  est aussi montrée à la Fig. (2.10).

Dans le Modèle I, le disque domine le champ de gravitation (gradient du potentiel) au niveau du Soleil, mais c'est le halo qui contribue le plus au potentiel lui-même, et cela partout. Cela est dû à la très grande masse du halo, qui est mal connue en fait, la courbe de rotation étant inconnue au-delà de  $\sim 2R_0$ .

Dans le Modèle II, le halo domine la courbe de rotation partout, à cause du fait qu'il est beaucoup plus concentré que dans le Modèle I.

Il est important de voir à quel point les contributions respectives du disque et du halo à la masse intérieure à  $R_0$  et à la vitesse circulaire en  $R_0$ , sont incertaines. Il y a une sorte de dégénérescence entre les paramètres du disque et du halo.

La force verticale est dominée par le disque en deçà de  $\sim 2$  kpc du plan, comme le montre la Fig. 2.10. La contribution du disque à  $K_z$  croît très



**Table 2.3** Parameters of Galaxy models

Parameter	Model I	Model II
$R_d/\text{kpc}$	2	3.2
$(\Sigma_d + \Sigma_g)/\mathcal{M}_\odot \text{pc}^{-2}$	1905	536
$\rho_{b0}/\mathcal{M}_\odot \text{pc}^{-3}$	0.427	0.3
$\rho_{h0}/\mathcal{M}_\odot \text{pc}^{-3}$	0.711	0.266
$\alpha_h$	-2	1.63
$\beta_h$	2.96	2.17
$a_h/\text{kpc}$	3.83	1.90
$M_d/10^{10} \mathcal{M}_\odot$	5.13	4.16
$M_b/10^{10} \mathcal{M}_\odot$	0.518	0.364
$M_{h,<10 \text{ kpc}}/10^{10} \mathcal{M}_\odot$	2.81	5.23
$M_{h,<100 \text{ kpc}}/10^{10} \mathcal{M}_\odot$	60.0	55.9
$v_e(R_0)/\text{km s}^{-1}$	520	494
$f_b$	0.05	0.04
$f_d$	0.60	0.33
$f_h$	0.35	0.63

NOTES: In both models  $0.75\Sigma(R_0)$  is contributed by stars, of which  $0.05\Sigma(R_0)$  is in the thick disk. Interstellar gas accounts for the remaining  $0.25\Sigma(R_0)$ . The thin and thick disks have the same scale length  $R_d$ , while the gas disk has scale length  $2R_d$  and a central hole of radius  $R_m = 4 \text{ kpc}$ . The thicknesses of the disks are  $z_0 = 300 \text{ pc}$ ,  $z_1 = 1 \text{ kpc}$ ,  $z_g = 80 \text{ pc}$ . In both models the bulge parameters are  $a_b = 1 \text{ kpc}$ ,  $\alpha_b = 1.8$ ,  $r_b = 1.9 \text{ kpc}$ ,  $q_b = 0.6$ , while the halo axis ratio  $q_h = 0.8$ . The quantity  $v_e(R_0)$  is the escape speed from the solar neighborhood;  $f_b$ ,  $f_d$  and  $f_h$  are the fractions of the radial force supplied by bulge, disk and halo at  $R_0 = 8 \text{ kpc}$ . These are slightly modified forms of Models 1 and 4 of Dehnen & Binney (1998a).

FIG. 2.6 – Paramètres des Modèle I et Modèle II de la Galaxie (Binney & Tremaine 2008).

vite quand on s'éloigne de celui-ci, pour atteindre un plateau dont la valeur est de l'ordre de  $2\pi G\Sigma(R)$ . Au contraire, la contribution du halo augmente presque linéairement, jusqu'à plusieurs kiloparsecs du plan. Il est intéressant de remarquer que la courbe de  $K_z$  est presque identique pour le Modèle I et pour le Modèle II, malgré les différences de contributions du disque et du halo.

**e) La barre centrale, un bulbe particulier :** Les observations suggèrent que, au lieu d'un bulbe axisymétrique, la Galaxie comporte une barre dont le demi-grand axe a 3 kpc et forme un angle de  $20^\circ$  par rapport à la direction du Soleil (Fig. 2.11). Si l'on approxime cette barre à l'aide d'un ellipsoïde oblat, ses axes sont dans les rapports 1 : 0.3 : 0.3. Le potentiel peut être calculé en augmentant, dans les Equations (2.76) et (2.77), le rayon  $r_c$  de 1.9 à 3 kpc et

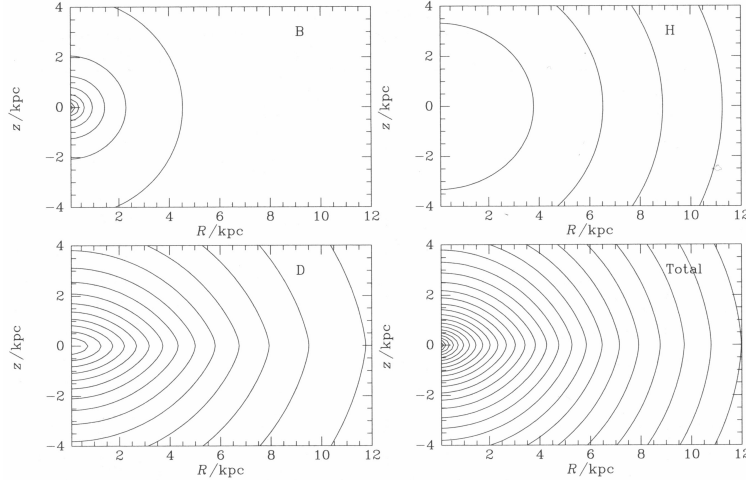


FIG. 2.7 – Contours équipotentiels dans le plan  $(R, z)$  pour le Modèle I de la galaxie ( $R_d = 2$  kpc). Les équipotentiels sont données pour le bulbe (en haut à gauche), le halo (en haut à droite), le disque (en bas à gauche) et le modèle complet (en bas à droite). Les contours sont donnés pour les valeurs  $(-0.5, -1, -1.5...) \times (100 \text{ km s}^{-1})^2$ , et la valeur du potentiel à la position du Soleil  $(R, z) = (8 \text{ kpc}, 0)$  est, d'en haut à gauche à droite en bas,  $-0.28$ ,  $-10.2$ ,  $-2.98$  et  $-13.46 \times (100 \text{ km s}^{-1})^2$ , respectivement.

en redéfinissant  $m$  comme étant  $m^2 = x^2 + (y^2 + z^2)/q^2$ , où  $x$  est la coordonnée le long de la direction du grand axe de la barre. On adopte  $q = 0.35$  et on augmente  $\rho_{b0}$  de sorte que la barre ait la même masse que le bulbe initial. La Fig. 2.12 montre les équipotentiels produites par la barre dans le plan Galactique, comparées à celles dues à un bulbe axisymétrique. On voit que la différence est négligeable au niveau du Soleil, mais très sensible en deçà de 5 kpc. Par conséquent, la force tangentielle est importante dans les régions centrales par rapport à la force radiale, et la dynamique de la Galaxie est fortement affectée par la barre dans les régions avec  $R \lesssim 2 - 3$  kpc.

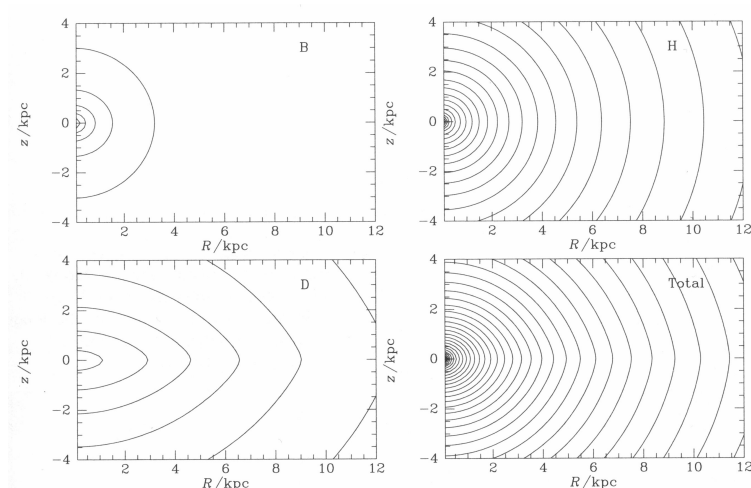


FIG. 2.8 – Idem à la Fig. 2.7, mais pour le Modèle II.

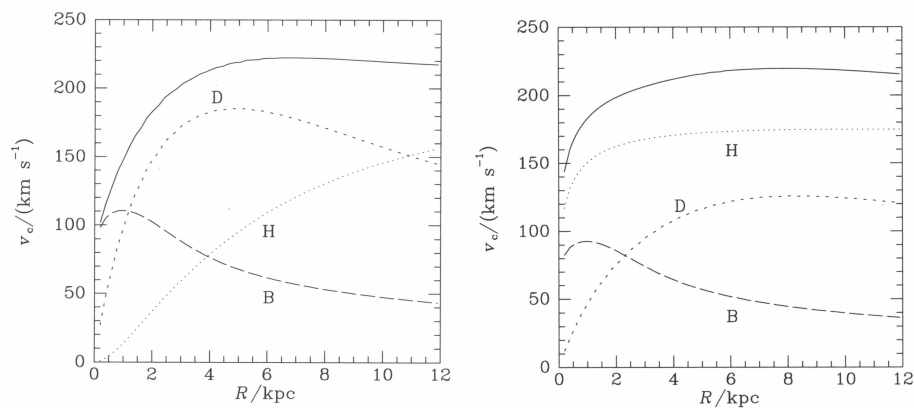


FIG. 2.9 – Courbe de rotation circulaire (courbe continue) du Modèle I (à gauche) et du Modèle II (à droite). Les contribution respectives du bulbe, du disque et du halo sont montrées par les courbes désignées par B, D et H. La vitesse circulaire totale est la somme quadratique des vitesses des diverses composantes.

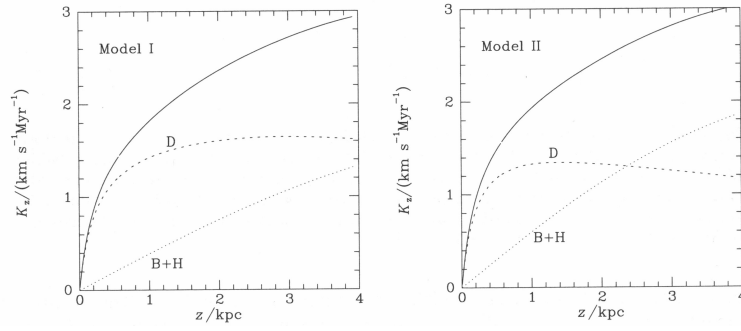


FIG. 2.10 – Force verticale  $K_z = \partial\Phi/\partial z$  en  $R_0 = 8$  kpc pour le Modèle I (à gauche) et pour le Modèle II (à droite). Les contributions du disque et du bulbe+halo sont les courbes désignées par D et B+H, respectivement.

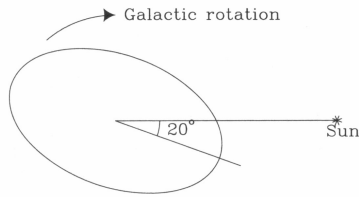


FIG. 2.11 – Schéma représentant la position de la barre de la Galaxie en projection sur le plan Galactique.

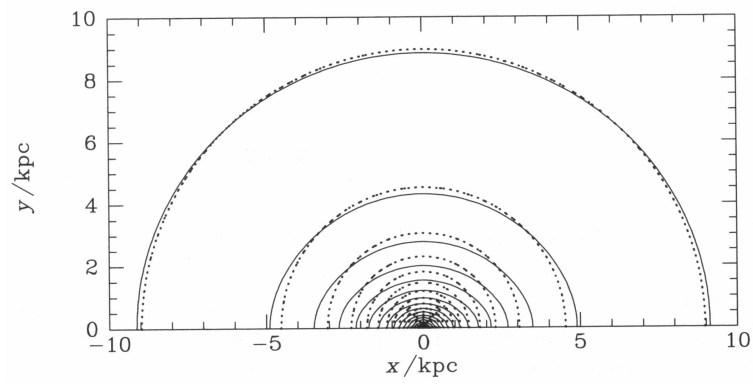


FIG. 2.12 – Equipotentielles dues à la barre dans le plan Galactique, pour le Modèle I (courbes continues) et à un bulbe axisymétrique (courbes pointillées).

# Chapitre 3

## Les orbites stellaires

Une des méthodes permettant de construire des modèles de galaxies consiste à établir une bibliothèque d'orbites variées, puis à les superposer en les pondérant par une densité de probabilité propre à chaque famille d'orbites. C'est ce qu'on appelle la "Méthode de Schwarzschild" (de Martin Schwarzschild, fils de Karl Schwarzschild qui a donné son nom au rayon des trous noirs). Il est donc important de voir comment on calcule des orbites dans différents potentiels et quelles sont leurs caractéristiques.

Dans ce qui suit on suppose que le potentiel gravifique  $\Phi(\mathbf{x})$  est indépendant du temps et qu'il résulte de l'équation de Poisson  $\nabla^2\Phi = 4\pi G \rho$ .

Précisons alors la signification d'une :

- trajectoire : toute solution des équations du mouvement  $\ddot{\mathbf{x}} = -\nabla\Phi(\mathbf{x})$  défini sur un intervalle de temps fini. C'est donc l'ensemble :

$$\{\mathbf{x}(t) \mid \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, t \in [t_0, t_1]\} \quad (3.1)$$

- orbite : trajectoire définie sur un intervalle de temps infini. C'est donc l'ensemble :

$$\{\mathbf{x}(t) \mid \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, t \in ]-\infty, \infty[ \} \quad (3.2)$$

La dimension  $D$  d'une orbite peut valoir :

- $D = 0$  : pour une orbite se réduisant à un point,
- $D = 1$  : pour une orbite périodique,
- $D = 2$  ou  $3$  : pour une orbite quasi-périodique,
- pour des orbites avec des structures compliquées, on peut avoir des dimensions  $D$  fractionnaires (par exemple, les fractales), ou même des distributions de  $D$ .

Poincaré avait remarqué que les orbites périodiques forment l'ossature de système dynamique. Ces orbites s'apparentent ainsi à des résumés de la dynamique du système. Ceci permet une description économique de la dynamique du système dans son ensemble.

Point fixe	→ stable	→ typiquement des orbites périodiques stables dans le voisinage du point (par ex. point = min. du potentiel)
	→ instable	→ typiquement des orbites périodiques instables et des orbites chaotiques dans le voisinage du point
Orbite périodique	→ stable	→ orbites quasi périodiques avec la même forme générale
	→ instable	→ orbites chaotiques dans le voisinage

Une illustration de cela est donné par les disques des galaxies "expliqués" par les orbites périodiques circulaires. Ce qui permet la construction de modèles dits en anneaux.

La marche à suivre pour le calcul d'une orbite dans un potentiel simple est la suivante :

1. Etablir que le moment cinétique est conservé, et utiliser ce fait pour réduire le problème au mouvement dans un plan.
2. Séparer l'équation du mouvement vectorielle en deux équations scalaires.
3. Considérer non plus le temps comme la variable indépendante, mais l'angle azimutal.
4. Multiplier par la dérivée du rayon réciproque par rapport à l'angle, puis intégrer, ce qui donne une équation pour le carré de la dérivée du rayon réciproque par rapport à l'angle. La constante d'intégration est proportionnelle à l'énergie par unité de masse divisée par le carré du moment cinétique.
5. Résoudre l'équation différentielle pour le rayon réciproque en fonction de l'angle.

### 3.1 Les systèmes sphériques

Dans de tels systèmes le potentiel  $\Phi(r)$  ne dépend plus que de la coordonnée radiale. Ceci permet une conservation détaillée de l'énergie et du moment cinétique  $\mathbf{L}$ . Les équations du mouvement impliquant  $d\mathbf{L}/dt = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{x} \wedge \dot{\mathbf{x}} = \text{cte}$ , le mouvement d'une particule du système sphérique est plan. Dans un tel plan de l'espace on peut envisager :

1. des orbites périodiques axiales ;
2. des orbites périodiques circulaires ;
3. des orbites quasi-périodiques qui sont des développements autour des orbites périodiques : elles sont en forme de rosette ;
4. des orbites périodiques résonantes. Nommons  $\Omega$  la pulsation de rotation de l'orbite périodique circulaire et  $\kappa$  la pulsation d'oscillation autour de l'orbite périodique circulaire. Si le rapport  $\Omega/\kappa$  est rationnel (i.e., qu'il vaut  $n/m$  où  $n$  et  $m$  sont des nombres naturels non-nuls), alors on aura une orbite résonante.

L'équation différentielle vectorielle s'écrit :

$$\frac{d^2}{dt^2}\mathbf{r} = -\nabla\Phi(r) = \mathbf{F} = F(r)\mathbf{e}_r \quad (3.3)$$

Avec le moment cinétique défini par  $\mathbf{L} \equiv \mathbf{r} \wedge \mathbf{v}$ , on trouve immédiatement la conservation du moment cinétique (puisque le gradient du potentiel est purement radial) :

$$\frac{d}{dt}\mathbf{L} = \frac{d}{dt}\left(\mathbf{r} \wedge \frac{d\mathbf{r}}{dt}\right) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \wedge \frac{d\mathbf{r}}{dt} + \mathbf{r} \wedge \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = 0 \quad (3.4)$$

L'orbite est limitée à un plan perpendiculaire au moment cinétique. En coordonnées polaires  $r, \psi$ , l'intensité du moment cinétique est :

$$L = r^2 \frac{d\psi}{dt} \quad (3.5)$$

Rappelons que l'accélération en coordonnées polaires s'écrit :

$$\frac{d^2}{dt^2}\mathbf{r} = (\ddot{r} - r\dot{\psi}^2) \mathbf{e}_r + (2\dot{r}\dot{\psi} + r\ddot{\psi}) \mathbf{e}_\psi$$

Il s'ensuit que les deux équations scalaires du mouvement sont :



$$\ddot{r} - r\dot{\psi}^2 = F(r) \quad (3.6)$$

$$2\dot{r}\dot{\psi} + r\ddot{\psi} = 0 \quad (3.7)$$

Passant de  $t$  à  $\psi$  pour la variable indépendante, on a, en tenant compte de l'Equ. (3.5) :

$$\frac{d}{dt} = \frac{L}{r^2} \frac{d}{d\psi} \quad (3.8)$$

et en passant à la variable dépendante  $u \equiv 1/r$ , on a :

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{d\psi} r = -\frac{d}{d\psi} u \quad (3.9)$$

L'équation radiale du mouvement, Equ. (3.6), devient alors :

$$\frac{d^2 u}{d\psi^2} + u = -\frac{F(u)}{L^2 u^2} = +\frac{\nabla \Phi}{L^2 u^2} = \frac{1}{L^2 u^2} \frac{d\Phi}{dr}(1/u) \quad (3.10)$$

Remarquons que :

$$\frac{d\Phi}{dr} = \frac{d\Phi}{du} \frac{du}{dr} = -\frac{1}{r^2} \frac{d\Phi}{du} = -u^2 \frac{d\Phi}{du}$$

et multiplions l'équation précédente par  $du/d\psi$  :

$$\frac{du}{d\psi} \frac{d^2 u}{d\psi^2} + \frac{du}{d\psi} u = -\frac{1}{L^2} \frac{d\Phi}{du} \frac{du}{d\psi} = -\frac{1}{L^2} \frac{d\Phi}{d\psi}$$

Or, le membre de gauche de cette équation peut s'écrire  $\frac{1}{2} \frac{d}{d\psi} [(du/d\psi)^2 + u^2]$ , si bien qu'en intégrant l'équation du mouvement radial sur  $\psi$ , on obtient :

$$\left( \frac{du}{d\psi} \right)^2 + u^2 + \frac{2\Phi}{L^2} = \text{cte} \equiv \frac{2E}{L^2} \quad (3.11)$$

où  $E$  est l'énergie totale qui s'écrit, en réintroduisant les coordonnées initiales dans l'équation ci-dessus, sous la forme familière :

$$E = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 + r^2 \left( \frac{d\psi}{dt} \right)^2 \right] + \Phi(r) \quad (3.12)$$

Il est également possible de trouver l'Equ. (3.11) en écrivant l'hamiltonien par unité de masse.

Pour une orbite liée, l'équation  $du/d\psi = 0$  doit avoir deux solutions; d'après 3.11, elle est équivalente à l'équation :

$$u^2 + \frac{2[\Phi(1/u) - E]}{L^2} = 0 \quad (3.13)$$

qui est une équation quadratique pour un potentiel képlerien ( $\Phi(1/u) \propto u$ ) et comporte donc deux solutions : l'une représente le péricentre, l'autre l'apocentre. Pour d'autres potentiels, on aura en général aussi un péricentre et un apocentre, mais tels que, par exemple, deux apocentres successifs n'auront pas lieu au même azimut  $\psi$  : l'orbite aura une forme de rosette, au lieu d'une courbe fermée comme l'ellipse képlerienne.

**La période radiale**  $T_r$  peut se calculer en isolant  $\dot{r}$  de l'Equ. (3.12), après y avoir introduit  $L = r^2\dot{\psi}$ , ce qui donne :

$$\frac{dr}{dt} = \pm \sqrt{2[E - \Phi(r)] - \frac{L^2}{r^2}} \quad (3.14)$$

(les signes + et - sont liés au fait que l'étoile s'éloigne, respectivement s'approche du centre). Si  $r_1$  et  $r_2$  désignent respectivement le rayon du péricentre et celui de l'apocentre, la période radiale vaut alors :

$$T_r = 2 \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\sqrt{2[E - \Phi(r)] - L^2/r^2}} \quad (3.15)$$

En se souvenant que  $\frac{d\psi}{dr} = \frac{d\psi}{dt} \frac{dt}{dr}$ , on peut alors écrire l'intervalle d'azimut  $\Delta\psi$  parcouru au cours d'une oscillation radiale entière (péricentre-apocentre-péricentre) de l'étoile :

$$\Delta\psi = 2 \int_{r_1}^{r_2} \frac{d\psi}{dr} dr = 2 \int_{r_1}^{r_2} \frac{L}{r^2} \frac{dt}{dr} dr = 2L \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2 \sqrt{2[E - \Phi(r)] - L^2/r^2}} \quad (3.16)$$

L'intervalle  $\Delta\psi$  vaut  $2\pi$  dans le cas d'une orbite képlerienne, mais peut différer de cette valeur si l'orbite n'est pas fermée (rosette).

**La période azimutale**  $T_\psi$  vaut :

$$T_\psi = \frac{2\pi}{|\Delta\psi|} T_r \quad (3.17)$$

de sorte que la fréquence  $2\pi/T_\psi$  représente la vitesse angulaire moyenne de l'étoile.

Examinons à présent quelques potentiels, en commençant par les deux seuls dans lesquels les orbites liées sont fermées, à savoir le potentiel harmonique et le potentiel de Kepler.

### 3.1.1 Le potentiel harmonique

Le potentiel appelé “potentiel harmonique sphérique” est celui qui règne à l'intérieur d'une sphère homogène (Chap. 2) :

$$\Phi(r) = \frac{1}{2}\Omega^2 r^2 + \text{cte} \quad (3.18)$$

Au lieu de résoudre l'Equ. (3.10), il est plus simple de revenir aux équations du mouvement dans le repère cartésien, où  $x = r \cos \psi$ ,  $y = r \sin \psi$  et  $\Phi(x, y) = \frac{1}{2}\Omega^2(x^2 + y^2)$  :

$$\ddot{x} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} = -\Omega^2 x \quad (3.19)$$

$$\ddot{y} = -\frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\Omega^2 y \quad (3.20)$$

Les solutions sont :

$$x = X \cos(\Omega t + \epsilon_x) \quad ; \quad y = Y \cos(\Omega t + \epsilon_y) \quad (3.21)$$

où  $X$ ,  $Y$ ,  $\epsilon_x$  et  $\epsilon_y$  sont des constantes définies par les conditions initiales. On voit que l'orbite doit être fermée, puisque la fréquence  $\Omega$  est la même pour les deux composantes, et que c'est une ellipse (tant que  $X \neq Y$ ) centrée sur le centre d'attraction. Tandis que l'étoile fait un tour, elle passe deux fois au péricentre et à l'apocentre, donc dans ce cas la période radiale est la moitié de la période azimutale :

$$T_r = \frac{1}{2}T_\psi = \frac{\pi}{\Omega} \quad (3.22)$$

### 3.1.2 Le potentiel de Kepler

En substituant ce potentiel dans l'Equ. (3.10), on obtient :

$$\Phi(r) = -\frac{GM}{r} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2u}{d\psi^2} + u = \frac{GM}{L^2} \quad (3.23)$$

C'est une équation harmonique avec **une fréquence égale à l'unité** : le rayon  $1/u$  retrouve sa valeur initiale après que l'angle  $\psi$  ait varié de  $2\pi$ , si bien que la période radiale est identique à la période azimutale. On trouve une solution (à la faveur d'un changement de variable  $u' = u - GM/L^2$ ) de la forme :

$$u = C \cos(\psi - \psi_0) + \frac{GM}{L^2} \quad (3.24)$$

ce qui donne pour le rayon :

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos(\psi - \psi_0)} \quad (3.25)$$

avec l'excentricité et le demi-grand axe :

$$e \equiv \frac{CL^2}{GM} \quad \text{et} \quad a \equiv \frac{L^2}{GM(1 - e^2)} \quad (3.26)$$

Notons qu'en plus des trois constantes  $a$ ,  $e$  et  $\psi_0$ , il y a encore deux angles qui définissent l'orientation de l'orbite dans l'espace (l'inclinaison et l'angle de position du noeud ascendant), mais qui n'apparaissent pas explicitement ici puisque nous nous sommes restreints au plan orbital. Il y a donc cinq constantes, si bien que l'orbite se réduit, dans l'espace de phase à six dimensions, à un espace à une seule dimension. On appelle **intégrales du mouvement** les constantes qui réduisent la dimensionalité de l'espace de phase accessible à une orbite donnée. Les intégrales du mouvement ne dépendent pas explicitement du temps, contrairement aux **constantes du mouvement** (une intégrale du mouvement est bien sûr aussi une constante du mouvement, mais l'inverse n'est pas vrai). Les orbites ont toujours six constantes du mouvement (par exemple les six coordonnées de l'espace de phase au temps  $t = 0$ ), mais elles n'ont qu'entre zéro et cinq intégrales du mouvement, et ces intégrales n'ont pas toujours une forme analytique.

### 3.1.3 Le potentiel de Kepler “post-newtonien”

Le terme “post-newtonien” vient du fait que ce potentiel reproduit, au premier ordre d’approximation, les effets de la relativité générale :

$$\Phi(r) = -\frac{GM}{r} \left( 1 + \frac{k}{r} \right) \quad (3.27)$$

où  $k = 2GM/c^2$  (rayon de Schwarzschild de l’horizon d’un trou noir) dans le cas où l’on cherche à approcher la relativité générale. En introduisant ce potentiel dans l’Equ. (3.10), cela donne :

$$\frac{d^2u}{d\psi^2} + u \left( 1 - \frac{2GMk}{L^2} \right) = \frac{GM}{L^2} \quad (3.28)$$

C’est encore une équation harmonique, mais dont **la fréquence radiale n’est plus unitaire** : les oscillations radiale et azimutale ont des périodes différentes. On voit que **la fréquence est inférieure à 1**, donc l’étoile accomplit une période radiale seulement après que l’azimut  $\psi$  ait parcouru **plus** que  $2\pi$ .

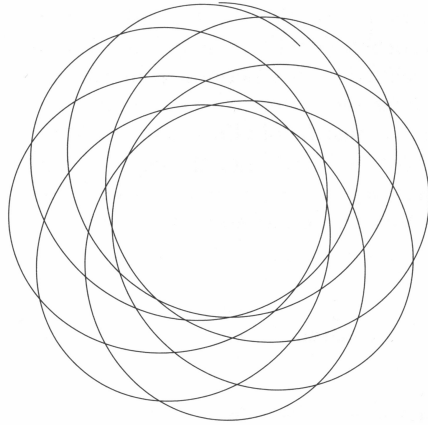


FIG. 3.1 – Orbite en forme de rosette, dans le cas d’un potentiel isochrone (Binney & Tremaine 2008).

On a vu que, dans le potentiel harmonique, l’étoile accomplit une oscillation radiale complète sur un intervalle d’azimut  $\Delta\psi = \pi$  seulement. Dans le potentiel de Kepler, l’oscillation radiale s’accomplit sur un intervalle  $\Delta\psi = 2\pi$ .

Dans la réalité, les galaxies sont évidemment plus étendues que des masses ponctuelles, mais plus concentrées que des sphères homogènes. On peut donc s'attendre à ce que les orbites typiques dans une galaxie sphérique, correspondent à des oscillations radiales qui s'accomplissent sur des intervalles d'azimut de valeur intermédiaire,  $\pi < \Delta\psi < 2\pi$ .

Il peut être utile de considérer une telle orbite en forme de rosette (Fig. 3.1), comme une orbite de forme à peu près elliptique, mais qui **précesse** d'un angle  $\psi_p = \Delta\psi - 2\pi$  durant la période radiale. Dans la plupart des cas, cette précession est **rétrograde**, c'est-à-dire qu'elle a lieu en sens inverse du mouvement de l'étoile. La vitesse angulaire du référentiel tournant dans lequel l'ellipse paraît fermée, ou **vitesse de précession**, est donnée par :

$$\Omega_p = \frac{\psi_p}{T_r} = \frac{\Delta\psi - 2\pi}{T_r} \quad (3.29)$$

Cette notion sera utilisée dans le contexte de la théorie des bras spiraux.

## 3.2 Les systèmes axisymétriques

Il existe deux types de systèmes axisymétriques ; les systèmes prolats, avec le grand axe perpendiculaire au plan équatorial, et les systèmes oblates, où c'est le petit axe qui est perpendiculaire à l'équateur.

Ces systèmes sont caractérisés par :

1. une symétrie de révolution autour d'un axe,
2. une symétrie de réflexion autour d'un plan principal perpendiculaire à l'axe de symétrie de révolution

Pour rendre compte de cette dernière propriété on écrit parfois  $\Phi(R, z^2)$  ou encore  $\Phi(R, -z) = \Phi(R, z)$ .

Les équations du mouvement s'écrivent, pour les composantes de l'accélération selon  $(R, \phi, z)$  :

$$\ddot{R} - R\dot{\phi}^2 = -\frac{\partial\Phi}{\partial R} \quad (3.30)$$

$$\frac{d}{dt}(R^2\dot{\phi}) = 0 \quad (3.31)$$

$$\ddot{z} = -\frac{\partial\Phi}{\partial z} \quad (3.32)$$

On peut écrire l'Equ. (3.30) sous la forme suivante, après avoir utilisé l'Equ. (3.31) en substituant  $R\dot{\phi}^2$  par  $L_z^2/R^3$  :

$$\ddot{R} = -\frac{\partial\Phi}{\partial R} + \frac{L_z^2}{R^3} = -\frac{\partial}{\partial R} \left( \Phi + \frac{L_z^2}{2R^2} \right) \quad (3.33)$$

Ainsi, en définissant le **potentiel effectif** comme égal à :

$$\Phi_{\text{eff}} \equiv \Phi + \frac{L_z^2}{2R^2} \quad (3.34)$$

l'équation radiale se réduit à :

$$\ddot{R} = -\frac{\partial\Phi_{\text{eff}}}{\partial R} \quad (3.35)$$

Ces systèmes axisymétriques possèdent deux intégrales du mouvement ; l'énergie et la composante  $L_z$  du moment cinétique. Ceci permet (on utilise un repère cylindrique  $R, \phi, z$ ) :

1. des orbites périodiques axiales  $\{z(t), R(t) = 0\}$
2. des orbites périodiques axiales  $\{R(t), z(t) = 0, \phi(t) = \text{cte}\}$
3. des orbites périodiques circulaires  $\{R(t) = R_0, z(t) = 0, \phi(t) = \phi_0 + \Omega t\}$
4. Dans un plan méridien tournant à pulsation constante  $\Omega$ , les particules subissent un potentiel identique au potentiel effectif, et dans ce plan existent des orbites périodiques radiales, périodiques résonantes et chaotiques.

Les équations du mouvement selon  $R$  et selon  $z$  s'écrivent, en fonction du potentiel effectif :

$$\ddot{R} = -\frac{\partial \Phi_{\text{eff}}}{\partial R} \quad ; \quad \ddot{z} = -\frac{\partial \Phi_{\text{eff}}}{\partial z} \quad (3.36)$$

Par ailleurs, l'énergie totale de l'étoile vaut :

$$E = \frac{1}{2}(\dot{R}^2 + \dot{z}^2) + \Phi_{\text{eff}} \quad (3.37)$$

Cette énergie est d'ailleurs identique à l'hamiltonien :

$$H_{\text{eff}} = \frac{1}{2}(p_R^2 + p_z^2) + \Phi_{\text{eff}} \quad (3.38)$$

qui représente l'énergie totale de l'orbite. Par conséquent, les contours équipotentiels dans le plan méridien  $(R, z)$  (voir Fig. 3.2) sont aussi des frontières du mouvement pour des orbites d'énergie  $E$  donnée : l'énergie cinétique y est nulle (abstraction faite bien sûr de celle qui est incluse dans  $\Phi_{\text{eff}}$ ).

On voit sur la figure que les équipotentiels se resserrent près du centre. Cette croissance très rapide qui interdit l'accès à l'axe  $z$  est appelée **barrière centrifuge**.

Le minimum du potentiel effectif  $\Phi_{\text{eff}}$  est donné par :

$$\frac{\partial \Phi_{\text{eff}}}{\partial R} = \frac{\partial \Phi}{\partial R} - \frac{L_z^2}{R^3} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial \Phi_{\text{eff}}}{\partial z} = 0 \quad (3.39)$$

et a lieu sur le plan équatorial  $z = 0$ , par hypothèse de symétrie de part et d'autre de ce plan, et au rayon dit **centre-guide (guiding-center radius)**  $R_g$ , qui satisfait la condition :

$$\left( \frac{\partial \Phi}{\partial R} \right)_{(R_g, 0)} = \frac{L_z^2}{R_g^3} = R_g \dot{\phi}^2 \quad (3.40)$$



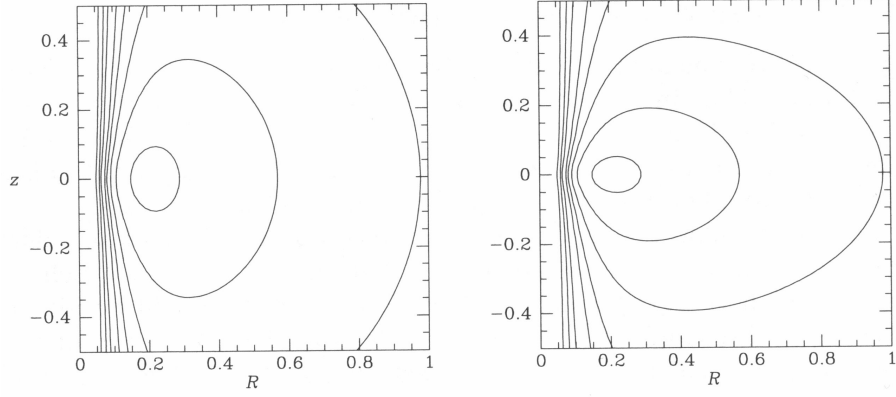


FIG. 3.2 – Equipotentielles pour le potentiel effectif  $\Phi_{\text{eff}} = \frac{1}{2}v_0^2 \ln(R^2 + z^2/q^2) + L_z^2/(2R^2)$  dans le plan méridien, pour  $v_0 = 1$  et pour  $L_z = 0.2$ . Les contours sont montrés pour  $\Phi_{\text{eff}} = -1, -0.5, 0, 0.5, 1, 1.5, 2, 3$  et  $5$ . A gauche le rapport d'axes est  $q = 0.9$ , à droite  $q = 0.5$ .

qui n'est autre que celle d'une orbite circulaire de vitesse angulaire  $\dot{\phi}$ . La Fig. (3.3) montrent deux orbites possibles dans le même potentiel que celui de la Fig. (3.2).

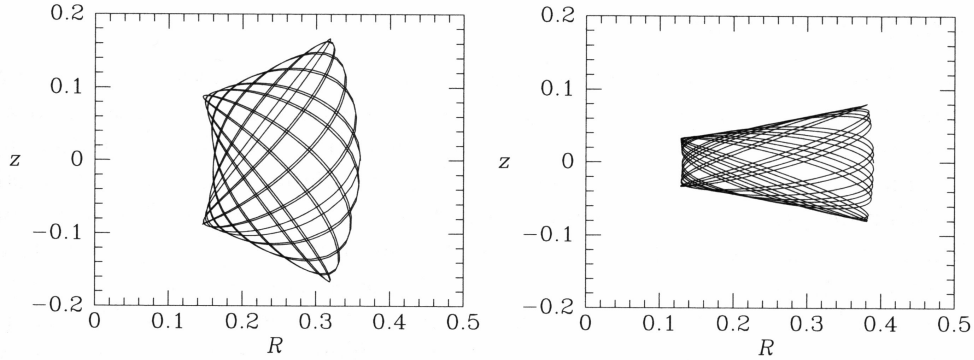


FIG. 3.3 – Deux orbites possibles dans le potentiel de la Fig. (3.2), pour  $q = 0.1$ ,  $E = -0.8$ ,  $L_z = 0.2$  et  $v_0 = 1$  (source : Binney & Tremaine 2008).

### 3.3 Epicycles et ellipsoïde des vitesses (orbites quasi-circulaires)

Dans les galaxies à disques, de nombreuses étoiles se déplacent sur des orbites quasi-circulaires, si bien qu'il est utile d'examiner des solutions approximatives des équations du mouvement de l'Equ. (3.36) dans un potentiel axisymétrique.

Soit :

$$\delta R = R - R_g$$

où  $R_g(L_z)$  est le *centre-guide* (**guiding center**) de l'orbite de moment cinétique  $L_z$ . Le minimum de  $\Phi_{\text{eff}}$  est alors en  $(\delta R, z)(0, 0)$ . Développons en série de Taylor  $\Phi_{\text{eff}}$  autour de ce minimum :

$$\Phi_{\text{eff}} = \Phi_{\text{eff}}(R_g, 0) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 \Phi_{\text{eff}}}{\partial R^2} \right)_{(R_g, 0)} \delta R^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 \Phi_{\text{eff}}}{\partial z^2} \right)_{(R_g, 0)} z^2 + \mathcal{O}(\delta R z^2) \quad (3.41)$$

Comme nous développons autour d'un minimum, les premières dérivées de  $\Phi_{\text{eff}}$  s'annulent par définition. De même, les termes mixtes  $\partial^2 \Phi_{\text{eff}} / \partial R \partial z$  s'annulent à cause de la symétrie de part et d'autre du plan équatorial  $z = 0$ , qui implique  $\partial \Phi_{\text{eff}} / \partial z = 0 \forall R$  en  $z = 0$ .

Définissons à présent :

$$\kappa^2(R_g) \equiv \left( \frac{\partial^2 \Phi_{\text{eff}}}{\partial R^2} \right)_{(R_g, 0)} \quad ; \quad \nu^2(R_g) \equiv \left( \frac{\partial^2 \Phi_{\text{eff}}}{\partial z^2} \right)_{(R_g, 0)} \quad (3.42)$$

Les Equ. (3.36) deviennent alors, avec  $R = R_g + \delta R$  :

$$\delta \ddot{R} = -\kappa^2 \delta R \quad ; \quad \ddot{z} = -\nu^2 z \quad (3.43)$$

qui sont deux équations harmoniques de fréquences  $\kappa$  – appelée **fréquence épicycle ou radiale** – et  $\nu$  – appelée **fréquence verticale** – respectivement.

En revenant au potentiel initial, les définitions de  $\kappa$  et  $\nu$  deviennent :

$$\kappa^2(R_g) = \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial R^2} \right)_{(R_g,0)} + \frac{3L_z^2}{R_g^4} = \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial R^2} \right)_{(R_g,0)} + \frac{3}{R_g} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial R} \right)_{(R_g,0)} \quad (3.44)$$

$$\nu^2(R_g) = \left( \frac{\partial^2 \Phi_{\text{eff}}}{\partial z^2} \right)_{(R_g,0)} \quad (3.45)$$

Par ailleurs, l'accélération centripète est donnée par  $\Omega^2 R_g = \left( \frac{\partial \Phi}{\partial R} \right)_{(R_g,0)}$ , donc :

$$\left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial R^2} \right)_{(R_g,0)} = R_g \left( \frac{d\Omega^2}{dR} \right)_{(R_g,0)} + \Omega^2$$

et, comme :

$$\frac{1}{R_g} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial R} \right)_{(R_g,0)} = \Omega^2$$

on a :

$$\kappa^2(R_g) = R_g \left( \frac{d\Omega^2}{dR} \right)_{R_g} + \Omega^2 + 3\Omega^2 = \left( R \frac{d\Omega^2}{dR} + 4\Omega^2 \right)_{R_g} \quad (3.46)$$

**Près du centre** d'une galaxie-disque, on a une rotation de corps solide :  $v_c \propto R \Leftrightarrow \Omega = \text{cte}$ . Par conséquent :

$$\kappa = \sqrt{\sim 0 + 4\Omega^2} = 2\Omega$$

**Plus loin**,  $\Omega$  décroît avec le rayon  $R$ , mais moins vite que le cas keplérien où  $v_c \propto R^{-1/2} \Leftrightarrow \Omega = v_c/R \propto R^{-3/2}$ . Or le cas keplérien correspond évidemment à :

$$\kappa = \Omega$$

Donc, en général on aura

$$\Omega < \kappa < 2\Omega \quad (3.47)$$

Notons encore que, **pour une courbe de rotation plate**  $v_c = \text{cte}$  :

$$\kappa^2 = 2\Omega R \frac{d\Omega}{dR} + 4\Omega^2 = 2v_c \left( -\frac{v_c}{R^2} \right) + 4\frac{v_c^2}{R^2} = 2\Omega^2 \quad (3.48)$$

Introduisons maintenant les **constantes de Oort**, lesquelles définissent des quantités mesurables :

$$A(R) = -\frac{1}{2}R\frac{d\Omega}{dR} = \frac{1}{2}\left[\frac{v_c}{R} - \frac{dv_c}{dR}\right] \quad (3.49)$$

$$B(R) = -\left(\Omega + \frac{1}{2}R\frac{d\Omega}{dR}\right) = -\frac{1}{2}\left[\frac{v_c}{R} + \frac{dv_c}{dR}\right] \quad (3.50)$$

On voit alors que  $\Omega$  et  $\kappa$  sont liés aux constantes de Oort par les relations :

$$\Omega = A - B \quad ; \quad \kappa^2 = -4B(A - B) = -4B\Omega \quad (3.51)$$

Les constantes de Oort ont été mesurées dans le voisinage solaire, à partir du mouvement des étoiles :

$$A = 14.8 \pm 0.8 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1} \quad ; \quad B = -12.4 \pm 0.6 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1} \quad (3.52)$$

$$\Rightarrow \quad \kappa_0 = 37 \pm 3 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$$

(voir J. Binney et S. Tremaine 2008, *Galactic dynamics*, 2nd ed.) et le rapport :

$$\frac{\kappa_0}{\Omega_0} = 2\sqrt{\frac{-B}{A - B}} = 1.35 \pm 0.05 \quad , \quad (3.53)$$

l'indice 0 indiquant qu'on se réfère au Soleil. Le Soleil fait donc 1.35 oscillations radiales pendant qu'il fait un tour complet ( $\Delta\phi = 2\pi$ ) autour du Centre Galactique.

Que nous apprennent les rapports des fréquences  $\kappa$ ,  $\Omega$ ,  $\nu$  sur la structure de la Galaxie ?

Plaçons-nous dans la situation d'une courbe de rotation galactique plate :

$$v_c = \text{cte} \quad \Rightarrow \quad \kappa^2 = 2\Omega^2$$

L'équation de Poisson en coordonnées cylindriques est :

$$4\pi G\rho = \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}\left(R\frac{\partial\Phi}{\partial R}\right) + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = \frac{1}{R}\frac{dv_c^2}{dR} + \nu^2 \quad (3.54)$$

la dernière égalité n'étant valable que dans le plan équatorial. On avait vu dans le Chap. 2 que dans le plan du disque, ou à proximité immédiate de celui-ci, le terme  $\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}\left(R\frac{\partial\Phi}{\partial R}\right) \ll 4\pi G\rho$ . On a donc :

$$\nu^2 \simeq 4\pi G\rho.$$

D'autre part, dans le cas sphérique :

$$\Omega^2 \sim \frac{GM}{R^3} = \frac{4}{3}\pi G\bar{\rho}$$

avec  $\bar{\rho}$  la densité moyenne de la sphère située à l'intérieur de  $R$ . Cette relation reste grossièrement vraie pour un sphéroïde aplati ou même un disque, comme on le voit sur la Fig. (2.5). Donc :

$$\kappa^2 = 2\Omega^2 \simeq \frac{2}{3}4\pi G\bar{\rho}$$

et :

$$\frac{\nu^2}{\kappa^2} \simeq \frac{3\rho}{2\bar{\rho}} \quad (3.55)$$

Ce rapport de fréquences mesure donc le degré de concentration de la matière dans le plan galactique et doit être plus grand que 1 dans une galaxie-disque.

Application numérique au voisinage solaire :

$$\begin{aligned} \rho &= 0.1 \text{ M}_\odot \text{ pc}^{-3} = 6.8 \times 10^{-21} \text{ kg m}^{-3} \\ \Rightarrow \nu &= \sqrt{4\pi G\rho} \simeq 2.4 \times 10^{-15} \text{ rad s}^{-1} \\ T &= \frac{2\pi}{\nu} = 2.63 \times 10^{15} \text{ s} = 83 \text{ Myr} \\ v_c &= 220 \text{ km s}^{-1} \quad \text{et} \quad R_0 = 8 \text{ kpc} \\ \Rightarrow \Omega^2 &= \left(\frac{v_c}{R_0}\right)^2 = \frac{4}{3}\pi G\bar{\rho} \\ \Rightarrow \bar{\rho} &= \frac{3}{4\pi G} \left(\frac{v_c}{R_0}\right)^2 \sim 0.04 \text{ M}_\odot \text{ pc}^{-3} \\ \Rightarrow \frac{\nu^2}{\kappa^2} &= \frac{3\rho}{2\bar{\rho}} \sim 4 \quad \Rightarrow \quad \frac{\nu}{\kappa} \sim 2 \end{aligned}$$

Pour que l'approximation  $\nu = \text{cte}$  soit valable, il faut que  $\nu^2 = \frac{\partial^2 \Phi_{\text{eff}}}{\partial z^2} \simeq 4\pi G\rho(0) = \text{cte}$ , ce qui n'est vrai que pour  $z \ll 300 \text{ pc}$ , en  $R_0$ . Dans ce cas, on a :

$$z = Z \cos(\nu t + \zeta)$$

avec  $Z$  et  $\zeta$  des constantes arbitraires. Mais en fait, beaucoup d'étoiles vont au-delà de  $z = 300$  pc, donc cette approximation est bonne dans le plan mais pas perpendiculairement au plan.

Il s'agit maintenant de définir le mouvement tangentiel dans le plan.

**Mouvement radial :** On avait  $\ddot{R} = -\kappa^2 \delta R$ , donc :

$$\delta R(t) = X \cos(\kappa t + \alpha) \quad (3.56)$$

avec  $X \geq 0$  et  $\alpha$  arbitraires.

**Mouvement tangentiel :** On a :

$$\dot{\phi} = \frac{L_z}{R^2} = \frac{L_z}{(R_g + \delta R)^2} = \frac{L_z}{R_g^2} \left(1 + \frac{\delta R}{R_g}\right)^{-2} \quad (3.57)$$

et comme  $\Omega_g = L_z/R_g^2$ , on a en développant au premier ordre :

$$\dot{\phi} \simeq \Omega_g \left(1 - \frac{2\delta R}{R_g}\right) = \Omega_g \left[1 - \frac{2X}{R_g} \cos(\kappa t + \alpha)\right] \quad (3.58)$$

En intégrant, il vient :

$$\phi = \Omega_g t + \phi_0 - \gamma \frac{X}{R_g} \sin(\kappa t + \alpha) \quad (3.59)$$

avec :

$$\gamma \equiv \frac{2\Omega_g}{\kappa} = -\frac{\kappa}{2B} \quad (3.60)$$

car  $\Omega = -\kappa^2/(4B)$ . Si on se place au centre-guide  $(R, \phi) = (R_g, \Omega_g t + \phi_0)$  et qu'on passe aux coordonnées cartésiennes  $x, y, z$ , on a les composantes du mouvement dans le plan (en posant  $x \equiv \delta R$  et  $y \equiv R_g(\phi - [\Omega_g t + \phi_0])$ ) :

$$x(t) = X \cos(\kappa t + \alpha) \quad (3.61)$$

$$y(t) = -Y \sin(\kappa t + \alpha) \quad (3.62)$$

Ce sont les solutions des équations du mouvement pour une orbite dans le plan équatorial, dans les limites de validité de l'approximation épicyclique. Le rapport des demi-axes de l'épicycle est :

$$\frac{X}{Y} = \frac{1}{\gamma} = \frac{\kappa}{2\Omega_g} \quad (3.63)$$

Dans le cas du potentiel harmonique, on a vu que  $T_r = \frac{1}{2}T_\psi$ , donc :

$$\kappa = \frac{2\pi}{T_r} = \frac{4\pi}{T_\psi} = 2\Omega \quad \text{donc} \quad \frac{X}{Y} = 1$$

Dans le cas du potentiel de Kepler,  $T_r = T_\psi$  et :

$$\kappa = \Omega_g \quad \text{donc} \quad \frac{X}{Y} = \frac{1}{2}$$

On avait vu que  $\Omega \lesssim \kappa \lesssim 2\Omega \Leftrightarrow Y \gtrsim X$ , donc l'épicycle est allongée en direction tangentielle. On sait aussi que, dans le voisinage solaire (éq. 3.53) :

$$\frac{\kappa_0}{\Omega_0} \sim 1.35 \quad \Rightarrow \quad \frac{X}{Y} \simeq 0.7$$

Le mouvement le long de l'épicycle est en sens opposé de la rotation du centre-guide autour du Centre Galactique.

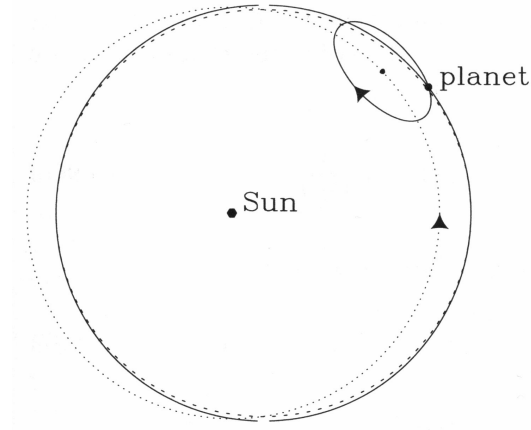


FIG. 3.4 – Une orbite elliptique de Kepler (courbe traitillée) est bien approximée par la superposition d'un mouvement de vitesse angulaire  $\kappa$  autour d'une petite ellipse (épicycle) de rapport d'axe 1/2, avec un mouvement du centre de l'ellipse sur un cercle dans le sens opposé de vitesse angulaire  $\Omega$  (courbe pointillée).

Examinons à présent comment mesurer  $\gamma = 2\Omega/\kappa$  et en tirer des information sur le potentiel galactique.

On peut écrire la différence entre vitesse tangentielle et vitesse circulaire de la manière suivante :

$$v_\phi(R_0) - v_c(R_0) = R_0(\dot{\phi} - \Omega_0) = R_0(\dot{\phi} - \Omega_g + \Omega_g - \Omega_0) \quad (3.64)$$

$$= R_0 \left[ (\dot{\phi} - \Omega_g) - \left( \frac{d\Omega}{dR} \right)_{R_g} x \right] \quad (3.65)$$

avec  $x = R_0 - R_g$ . Et en remplaçant  $\dot{\phi}$  par le développement donné par l'Equ. (3.58) :

$$v_\phi(R_0) - v_c(R_0) \simeq R_0 \left[ \Omega_g \left( 1 - \frac{2x}{R_g} \right) - \Omega_g - \left( \frac{d\Omega}{dR} \right)_{R_g} x \right] \quad (3.66)$$

$$= -R_0 x \left[ \frac{2\Omega}{R} + \frac{d\Omega}{dR} \right]_{R_g} \quad (3.67)$$

Comme  $x \ll R_0, R_g$ , on peut évaluer le coefficient de  $x$  en  $R_0$ , ce qui revient à admettre  $R_0/R_g \sim 1$  et ne commettre qu'une erreur de l'ordre de  $x^2$  sur  $v_\phi$ . Cela conduit à :

$$v_\phi(R_0) - v_c(R_0) \simeq -x \left( 2\Omega + R \frac{d\Omega}{dR} \right)_{R_0} \quad (3.68)$$

et en introduisant les constantes de Oort, on a :

$$v_\phi(R_0) - v_c(R_0) \simeq 2Bx = -\frac{\kappa}{\gamma}x = -\frac{\kappa}{\gamma}X \cos(\kappa t + \alpha) \quad (3.69)$$

On ne peut suivre l'étoile pendant  $T_r$ , mais on peut considérer l'ensemble des étoiles du voisinage solaire, ce qui revient à prendre  $t = \text{cte}$  mais en faisant varier  $\alpha$ . Prenons alors la moyenne quadratique de  $v_\phi - v_c$  :

$$\begin{aligned} \overline{[v_\phi - v_c(R_0)]^2} &= \frac{\kappa^2}{\gamma^2} X^2 \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2(\kappa t + \alpha) d\alpha \\ &= \frac{\kappa^2}{2\gamma^2} X^2 = 2B^2 X^2 \end{aligned} \quad (3.70)$$



On fait de même pour la direction radiale :

$$\begin{aligned} v_R &= \dot{x} = -\kappa X \sin(\kappa t + \alpha) \\ \Rightarrow \overline{v_R^2} &= \frac{1}{2} \kappa^2 X^2 = -2B(A - B)X^2 \end{aligned} \quad (3.71)$$

Le rapport de ces deux grandeurs donne :

$$\frac{[\overline{v_\phi - v_c(R_0)}]^2}{\overline{v_R^2}} \simeq \frac{-B}{A - B} = -\frac{B}{\Omega_0} = \frac{\kappa_0^2}{4\Omega_0^2} = \frac{1}{\gamma^2} \simeq 0.46 \quad (3.72)$$

Ce rapport est l'inverse de celui que l'on obtiendrait en prenant les moyennes quadratiques sur une seule orbite :

$$\frac{\overline{\dot{y}^2}}{\overline{\dot{x}^2}} = \frac{\frac{1}{2}(\kappa Y)^2}{\frac{1}{2}(\kappa X)^2} = \gamma^2$$

Cela est dû au fait que dans ce dernier cas, on prend la moyenne quadratique de la vitesse tangentielle relativement au centre-guide d'une seule étoile donnée. Dans le premier cas, par contre, la moyenne est prise par rapport au rayon instantané du Soleil, et sur des étoiles ayant des centres-guides différents.

## 3.4 Rappels de mécanique

### 3.4.1 Mécanique de Newton

Newton utilise les notions de masse  $m$ , de force  $\vec{F}$ , d'espace euclidien  $\vec{x}$  et de temps  $t$  pour décrire le mouvement. Il définit la vitesse  $\vec{v} = d\vec{x}/dt$  et l'accélération  $\vec{a} = d\vec{v}/dt$  et énonce la deuxième loi :

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \vec{F}$$

Il introduit aussi la notion de référentiel d'inertie, qui se définit comme étant un référentiel par rapport auquel tout point matériel qui ne subit pas de force est animé d'un mouvement rectiligne.

### 3.4.2 Mécanique de Lagrange

Elle est valable dans tous référentiels avec des variables de coordonnées et de vitesses  $(q_i, \dot{q}_i)$  quelconques décrivant le système. La coordonnée  $q_i$  peut par exemple être une longueur, un angle, etc. ...

On définit le **Lagrangien** d'un système par :

$$L(q_i, \dot{q}_i, t) \equiv T(q_i, \dot{q}_i, t) - U(q_i, \dot{q}_i, t)$$

où  $T$  est l'énergie cinétique du système et  $U$  son énergie potentielle.

On définit l'**action** d'un système par :

$$S[q_i] = \int_{t_0}^{t_1} L\left(q_i(t), \frac{d}{dt}q_i(t), t\right) dt$$

$S[q_i]$  est une fonctionnelle qui dépend des fonctions  $q_i(t)$ . Une fonctionnelle dépend de fonctions plutôt que de scalaires comme c'est le cas pour les fonctions.

**Principe de moindre action (ou de Hamilton)** : une trajectoire réellement suivie est celle qui rend l'action extrémale. Autrement dit, pour une trajectoire réelle, on vérifie  $\delta S[q_i] = 0$ , ce qui nous donne les équations du mouvement ou équations d'Euler-Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad \text{pour } i = 1, \dots, n$$

où  $n$  est le nombre de degrés de liberté du système. Ceci est un système de  $n$  équations différentielles ordinaires du deuxième ordre.

Un exemple simple est donné par l'oscillateur harmonique à une dimension. Dans ce cas, le Lagrangien est :  $L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$  et l'équation du mouvement s'écrit :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = m\ddot{x} + m\omega^2 x = 0$$

Les équations du mouvement ci-dessus sont valables lorsque les forces en jeu sont conservatives (i.e., qu'elles dérivent d'un potentiel :  $\vec{F} = -\vec{\nabla}_q V$ ).

Dans un cas plus général, on inclut les forces non-conservatives  $Q_i$  :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i \quad \text{pour } i = 1, \dots, n$$

### 3.4.3 Mécanique de Hamilton

On définit les moments conjugués :

$$p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad \text{pour } i = 1, \dots, n$$

où  $n$  est le nombre de degrés de liberté.

On définit l'**Hamiltonien** comme la transformée de Legendre du Lagrangien, c'est-à-dire :

$$H(q_i, p_i, t) = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - L(q_i, \dot{q}_i, t)$$

On obtient, en effectuant la dérivée totale de  $H$  :

$$dH(q_i, p_i, t) = \sum_{i=1}^n \dot{q}_i dp_i + p_i dq_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

Or, on a de la définition des moments conjugués et des équations d'Euler-Lagrange :

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = p_i \quad \text{et} \quad \frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{d}{dt} (p_i) = \dot{p}_i$$

D'où :

$$dH(q_i, p_i, t) = \sum_{i=1}^n \dot{q}_i dp_i - \dot{p}_i dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

D'autre part, la dérivée totale de  $H(q_i, p_i)$  s'écrit aussi :

$$dH(q_i, p_i, t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial t} dt$$

Par identification, on obtient les équations canoniques du mouvement :

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \text{et} \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

Ceci est un système de  $2n$  équations différentielles ordinaires du premier ordre.

Dans un cas plus général, on inclut les forces  $Q_i$  qui ne dérivent pas de potentiels :

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \text{et} \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} + Q_i$$

On appelle l'espace des  $(q_i, p_i)$  l'espace de phase. Un système hamiltonien est un cas particulier d'un système dynamique, dont l'évolution s'exprime de manière générale par une équation de la forme  $\dot{z} = F(z)$ , où  $z \in \mathbf{R}^m$ .

## 3.5 Les surfaces – ou plans – de section (en lecture)

### 3.5.1 Constantes et intégrales du mouvement

Avant d'aborder les surfaces de section, ouvrons une parenthèse sur les constantes et les intégrales du mouvement.

Toute orbite est un chemin dans l'espace de phase à 6 dimensions  $(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ . Une **constante du mouvement** dans un champ de force donné est toute fonction  $C(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$  des coordonnées de l'espace de phase et du temps qui est constant le long de l'orbite :

$$C[\mathbf{x}(t_1), \mathbf{v}(t_1); t_1] = C[\mathbf{x}(t_2), \mathbf{v}(t_2); t_2] \quad \forall t_1, t_2$$

Un exemple de constante du mouvement : soit une orbite circulaire dans un potentiel sphérique. L'azimut vaut  $\psi = \Omega t + \psi_0$ , donc on a la constante du mouvement  $C(\psi, t) \equiv t - \psi/\Omega$ . Celle-ci dépend bien d'une coordonnée et du temps.

Plus généralement, on peut considérer les conditions initiales  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0)$  comme 6 constantes du mouvement.

Une **intégrale du mouvement** est toute fonction  $I(\mathbf{x}, \mathbf{v})$  des seules coordonnées de l'espace de phase, telle que :

$$I[\mathbf{x}(t_1), \mathbf{v}(t_1)] = I[\mathbf{x}(t_2), \mathbf{v}(t_2)]$$

Toute intégrale du mouvement est aussi une constante du mouvement, mais l'inverse n'est pas vrai.

Trois exemples d'intégrales du mouvement :

- L'hamiltonien  $H(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = \frac{1}{2}v^2 + \Phi$ ,  $\forall \Phi$  statique.
- $L_z$  dans un potentiel axisymétrique  $\Phi(R, z, t)$ .
- $\mathbf{L} = \mathbf{x} \wedge \mathbf{v}$  dans un potentiel sphérique  $\Phi(r, t)$ .

Dans un potentiel sphérique, il y a au moins 4 intégrales du mouvement :  $H$  et  $\mathbf{L}$ . La constante  $\psi_0$ , par exemple dans la solution au potentiel de Kepler "post-newtonien" :

$$\psi_0 = \psi - \frac{1}{\Omega} \arccos \left[ \frac{1}{C} \left( u - \frac{GM}{L^2 \Omega^2} \right) \right] = \psi_0(1/r, \psi)$$

(où  $C$  est une constante arbitraire) est une cinquième intégrale (dans un potentiel sphérique), mais qui peut être :

- **Isolante**, si  $\Omega = 1$ , ce qui implique une orbite fermée et donc unidimensionnelle.
- **Non-isolante**, si  $\Omega$  est irrationnelle, ce qui implique une orbite non fermée et qui finit par couvrir une surface entière.

Une *intégrale isolante* est une intégrale qui réduit véritablement d'une dimension le sous-espace de phase parcouru par une orbite. Par contre, une *intégrale non-isolante* ne réduit pas la dimension de ce sous-espace et s'avère donc inutile en dynamique. En effet, si on reprend l'exemple du potentiel de Kepler post-newtonien, on peut écrire :

$$\psi = \psi_0 + \frac{1}{\Omega} \arccos \left[ \frac{1}{C} \left( u - \frac{GM}{L^2 \Omega^2} \right) \right] + 2\pi \frac{n}{\Omega}$$

Or, si  $\Omega$  est irrationnel, on peut obtenir, pour  $u = 1/r$  donné, n'importe quelle valeur de  $\psi$  modulo  $2\pi$ , en choisissant  $n$  de manière appropriée, et cela vaut  $\forall u = 1/r$ . Par conséquent, l'orbite remplit un espace à deux dimensions.

### 3.5.2 Les surfaces de section

De manière générale, l'espace de phase a six dimensions, si bien qu'il est impossible de se représenter une orbite dans un tel espace, même s'il se réduit, dans le cas des systèmes axisymétriques, au quatre dimensions  $R, z, \dot{R}, \dot{z}$  (dans le cas de mouvements dans le plan méridien en rotation uniforme). On sait que l'hamiltonien est constant, si bien qu'on pourrait considérer un sous-espace de l'espace de phase qui aurait une dimension de moins, la coordonnée "sacrifiée" pouvant être déterminée au signe près connaissant l'hamiltonien. Cependant, même un espace réduit à trois dimensions reste malaisé à représenter.

On se contente alors de représenter, sur un plan (espace, vitesse), les points d'intersection de l'orbite avec, par exemple, le plan  $z = 0$ , et cela uniquement lorsque la vitesse  $\dot{z} > 0$ . Un plan  $(x, \dot{x})$ , par exemple, est appelé **surface de section**. On a ainsi transformé une orbite périodique, qui est une ligne continue dans l'espace de phase, en un point, ou en un ensemble de points discrets. On voit sur la Fig. (3.5) qu'une orbite périodique proprement dite donnera un point sur la surface de section ; une orbite bipériodique donnera deux points, et une orbite n-périodique donnera  $n$  points. Une orbite quasi-périodique, par contre, qui couvre une surface dans l'espace de phase, donnera une courbe fermée dans le plan de section.

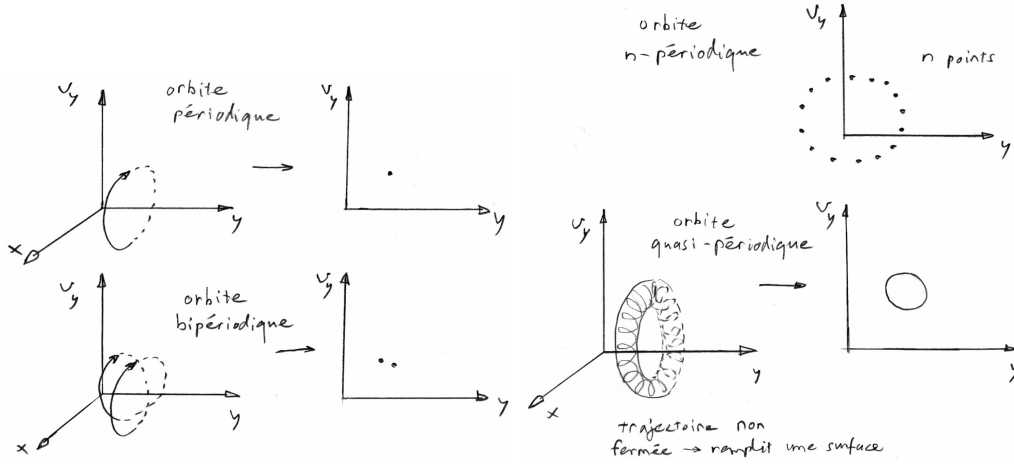


FIG. 3.5 – Différents types d'orbites dans un sous-espace de phase à trois dimensions (deux dimensions spatiales et une de vitesse) et dans la surface de section. On voit que les orbites périodiques donnent lieu à un ou plusieurs points (selon qu'elles se referment après un ou plusieurs tours), tandis que les orbites quasi-périodiques donnent des courbes fermées.

L'intérêt de la surface de section est que deux orbites distinctes de même énergie ne peuvent y être confondues : elles ne peuvent y occuper le même point. Notons aussi que toutes les orbites sont confinées à l'intérieur d'une surface délimitée par la condition de vitesse nulle. Par exemple, imaginons un plan de section adapté aux orbites qui sont limitées au plan méridien en rotation uniforme dans un potentiel axisymétrique. L'hamiltonien s'écrit dans ce cas :

$$H_{\text{eff}} = \frac{1}{2}(p_R^2 + p_z^2) + \Phi_{\text{eff}}(R, z) \quad ; \quad p_R = \dot{R} \quad ; \quad p_z = \dot{z} \quad (3.73)$$

On considère le plan  $z = 0$ , et le plan de section est donc le plan  $(R, p_R)$ , où l'on porte seulement les points de l'orbite pour lesquels  $p_z > 0$  en  $z = 0$ . Les orbites que l'on peut représenter sur le plan de section sont celles pour lesquelles :

$$H_{\text{eff}} \geq \frac{1}{2}\dot{R}^2 + \Phi_{\text{eff}}$$

une zone délimitée par la ligne  $H_{\text{eff}} = \frac{1}{2}\dot{R}^2 + \Phi_{\text{eff}}$ , que l'on appelle la ligne de

vitesse nulle parce que  $\dot{z}$  y est zéro.

Le fait qu'une orbite soit en général représentée par une courbe (appelée *courbe invariante*) fermée dans le plan de section, témoigne de l'existence d'une troisième intégrale du mouvement, en plus des deux premières que sont l'énergie totale  $E$  (ou l'hamiltonien  $H$ ) et le moment cinétique  $L_z$ . Cette troisième intégrale n'a pas d'expression analytique connue et on l'appelle *non-classique*. Toutefois, il existe des cas particuliers où cette intégrale peut être identifiée au moins approximativement. Par exemple, si le potentiel est séparable en  $R$  et en  $z$  :

$$\Phi(R, z) = \Phi_R(R) + \Phi_z(z)$$

alors la troisième intégrale peut être identifiée à l'énergie du mouvement vertical :

$$H_z = \frac{1}{2}p_z^2 + \Phi_z(z).$$

Cette situation s'applique aux orbites quasi-circulaires dans les disques minces.

Le site <http://burro.cwru.edu/JavaLab/SOSweb/main.html> permet de visualiser le plan de section correspondant à une orbite donnée.



### 3.6 Orbites principales dans les systèmes tri-axiaux non-tournants : galaxies elliptiques

De tels systèmes sont décrits par un potentiel qui possède une symétrie par rapport à 3 plans principaux. On écrit ceci de façon abrégée  $\Phi(x^2, y^2, z^2)$  ou encore  $\Phi(x, y, z) = \Phi(\pm x, \pm y, \pm z)$ . Le potentiel de ces systèmes est obtenu par une généralisation à trois dimensions des potentiels de Stäckel (de Zeeuw 1985). La densité correspondante est :

$$\rho(x) = \frac{\rho_0}{(1 + m^2)^2} \quad \text{avec} \quad m^2 \equiv \frac{x^2 + (y/q_1)^2 + (z/q_2)^2}{a_0^2} \quad (3.74)$$

où  $q_1$  et  $q_2$  sont les rapport des axes des surfaces d'iso-densité, et  $a_0$  est la taille caractéristique.

Dans ces systèmes, on observe les cinq familles d'orbites énumérées ci-dessous :

1. orbites périodiques le long des axes  $x, y, z$ .
2. orbites périodiques ovales dans les plans de symétrie. A noter que la direction des élongations de ces orbites sont opposées à celles des zones isopotentielle ( $\Phi = cte$ ).
3. orbites résonantes. Une concentration centrale importante de matière favorise l'apparition d'orbites résonantes. On observe par exemple des orbites résonantes dites bananes ou fish, en référence à la forme de ces orbites qu'on observe par paire.
4. orbites quasi-périodiques qui entourent les orbites résonantes. On distingue principalement deux types d'orbites quasi-périodiques : les types box et loop ; voir Fig. (3.6).
5. orbites chaotiques qui sont confinée par les surface de vitesse nulle (SVN) où pour  $\mathbf{x}_0 \in \text{SVN}$  on a  $\Phi(\mathbf{x}_0) = E$ .

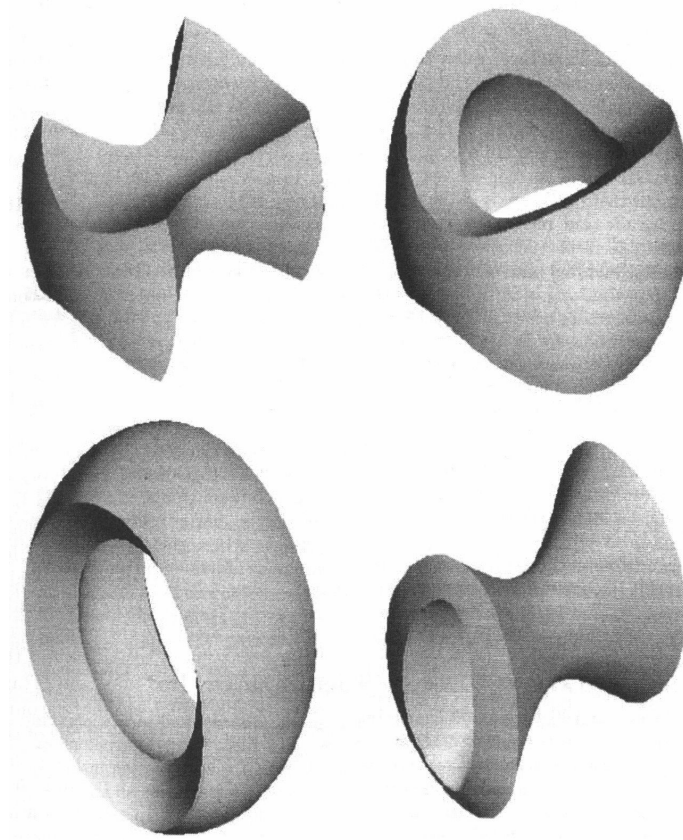


FIG. 3.6 – Orbites quasi-périodiques dans un potentiel dit de l’ellipsoïde parfait. En haut à gauche, une orbite “boîte” : elle touche, par ses 8 coins, l’équipotentielle correspondant à son énergie, de sorte que l’étoile se trouve momentanément au repos en chacun de ces 8 points. Cette orbite est alignée sur le grand axe de l’ellipsoïde, qui traverse ses deux faces convexes. En haut à droite, une orbite annulaire (“loop” ou “tube” orbit) circulant autour du plus petit axe de l’ellipsoïde. En bas, orbites annulaire externe (à gauche) et interne (à droite) encerclant le grand axe. Les orbites annulaires autour de l’axe intermédiaire sont instables. (Source : Statler 1987, ApJ 321, 113).

### 3.7 Orbites principales dans les systèmes tri-axiaux tournants : galaxies spirales barrées

Des systèmes typiques de ce genre sont les galaxies barrées : elles tournent rapidement, contrairement aux elliptiques qui sont plutôt assimilables à des systèmes non tournants. A nouveau il existe une symétrie par rapport à 3 plans principaux, et  $\Phi(x, y, z) = \Phi(\pm x, \pm y, \pm z)$ .

Si  $\Omega_P$  est la vitesse de rotation de la barre (ou du “pattern” : la barre et son potentiels sont stationnaires, mais la matière n’y est pas fixe, elle peut s’écouler, quitter la barre ou y entrer), on peut définir un système de référence qui tourne avec la barre, et dans lequel le potentiel  $\Phi$  est statique. La vitesse dans ce référentiel tournant est  $\dot{\mathbf{x}}$ , et la vitesse correspondante dans le référentiel d’inertie (fixe) est  $\dot{\mathbf{x}} + \Omega_P \wedge \mathbf{x}$ . Le lagrangien s’écrit :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} |\dot{\mathbf{x}} + \Omega_P \wedge \mathbf{x}|^2 - \Phi(\mathbf{x})$$

Le moment correspondant est :

$$\mathbf{p} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{x}}} = \dot{\mathbf{x}} + \Omega_P \wedge \mathbf{x}$$

et représente la quantité de mouvement dans le référentiel d’inertie. On peut écrire l’hamiltonien comme étant :

$$\begin{aligned} H_J &= \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{x}} - \mathcal{L} \\ &= \mathbf{p} \cdot (\mathbf{p} - \Omega_P \wedge \mathbf{x}) - \frac{1}{2} p^2 + \Phi \\ &= \frac{1}{2} p^2 + \Phi - \mathbf{p} \cdot (\Omega_P \wedge \mathbf{x}) \\ &= \frac{1}{2} p^2 + \Phi - \Omega_P \cdot (\mathbf{x} \wedge \mathbf{p}) \end{aligned}$$

car  $\mathbf{p} \cdot (\Omega_P \wedge \mathbf{x}) = \Omega_P \cdot (\mathbf{x} \wedge \mathbf{p})$ . Notons que, comme  $\mathbf{p}$  est la quantité de mouvement dans le référentiel fixe, on peut dire que  $\mathbf{x} \wedge \mathbf{p} = \mathbf{L}$  est le moment cinétique, et que  $H = \frac{1}{2} p^2 + \Phi$  est l’hamiltonien qui gouverne le mouvement dans le référentiel fixe. On peut donc écrire l’hamiltonien  $H_J$  comme :

$$H_J = H - \Omega_P \cdot \mathbf{L}$$

Cet hamiltonien ne dépend pas explicitement du temps,  $\Phi(\mathbf{x})$  étant constant dans le référentiel tournant. C'est donc une intégrale du mouvement, **l'intégrale de Jacobi**. Ni  $H$  ni  $\mathbf{L}$  ne sont des intégrales du mouvement dans le cas d'un potentiel non axisymétrique tournant, mais la quantité  $H - \Omega_P \cdot \mathbf{L}$  l'est.

En coordonnées cartésiennes, le vecteur  $\Omega_P$  n'a qu'une composante selon l'axe  $z$  et l'hamiltonien est de la forme :

$$H_J = \frac{1}{2} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + \Phi(x, y, z) - \Omega_P (xp_y - yp_x)$$

où  $\Omega_P$  est la vitesse angulaire constante du potentiel autour de l'axe de rotation  $z$ . Les moments conjugués sont donnés par :

$$\begin{cases} p_x = \dot{x} - \Omega_P y \\ p_y = \dot{y} + \Omega_P x \\ p_z = \dot{z} \end{cases}$$

De ceci on détermine les équations du mouvement de Hamilton :

$$\begin{cases} \dot{x} = p_x + \Omega_P y \\ \dot{y} = p_y - \Omega_P x \\ \dot{z} = p_z \\ \dot{p}_x = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \Omega_P p_y \\ \dot{p}_y = -\frac{\partial \Phi}{\partial y} - \Omega_P p_x \\ \dot{p}_z = -\frac{\partial \Phi}{\partial z} \end{cases}$$

Comme fréquemment lors de l'étude de tels systèmes, on commence par chercher les points fixes du système, c'est-à-dire les 5 points de Lagrange.

### 3.8 Résonances dans un potentiel tournant presque axisymétrique

On définit dans le plan  $z = 0$  un système de coordonnées cylindriques  $(R, \phi)$ . On considère une petite perturbation  $\Phi_1(R, \phi)$  d'un potentiel axisymétrique  $\Phi_0(R)$ , par hypothèse :

$$\left| \frac{\Phi_1}{\Phi_0} \right| \ll 1 \quad (3.75)$$

Le potentiel total est exprimé par :

$$\Phi = \Phi_0(R) + \Phi_1(R, \phi) \quad (3.76)$$

Les équations du mouvements sont alors :

$$\begin{cases} \ddot{R} - R\dot{\phi}^2 = -\frac{\partial\Phi}{\partial R} + 2R\dot{\phi}\Omega_P + \Omega_P^2 R \\ R\ddot{\phi} + 2\dot{R}\dot{\phi} = -\frac{1}{R}\frac{\partial\Phi}{\partial\phi} - 2\dot{R}\Omega_P \end{cases} \quad (3.77)$$

où  $\Omega_P$  est la vitesse angulaire de la figure tournante. Ce n'est pas nécessairement la même que celle de la matière elle-même, par exemple la vitesse des bras spiraux n'est pas la même que la vitesse de rotation des étoiles. On décompose ensuite le mouvement :

$$\begin{cases} R = R_0 + R_1(t) \\ \phi = \omega t + \phi_1(t) \end{cases} \quad (3.78)$$

où  $R_0$  est le rayon de l'orbite circulaire non-perturbée et  $\omega$  est la vitesse angulaire de cette même orbite. La perturbation est décrite par  $R_1(t)$  et  $\phi_1(t)$ . Cela donne les séries de Taylor suivantes :

$$\begin{cases} \frac{\partial\Phi}{\partial R} = \frac{\partial\Phi_0}{\partial R}(R_0) + R_1 \frac{\partial^2\Phi_0}{\partial R^2}(R_0) + \frac{\partial\Phi_1}{\partial R}(R_0) + \mathcal{O}(2) \\ \frac{\partial\Phi}{\partial\phi} = \frac{\partial\Phi_1}{\partial\phi}(R_0) + \mathcal{O}(2) \end{cases} \quad (3.79)$$

En substituant cela dans les équations du mouvement et en linéarisant, on obtient :

– les termes d'ordre zéro :

$$R_0 (\omega + \Omega_P)^2 = \frac{\partial\Phi_0}{\partial R}(R_0) \quad (3.80)$$

Cette relation exprime simplement l'égalité entre la force centrifuge et la force d'attraction gravitationnelle.

– les termes d'ordre un :

$$\begin{cases} \ddot{R}_1 + \left( \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial R^2}(R_0) - \Omega_0^2 \right) R_1 - 2R_0 \Omega_0 \dot{\phi}_1 = -\frac{\partial \Phi_1}{\partial R}(R_0) \\ \ddot{\phi}_1 + 2\Omega_0 \frac{\dot{R}_1}{R_0} = -\frac{1}{R_0^2} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \phi}(R_0) \end{cases} \quad (3.81)$$

où on a défini la vitesse angulaire dans le référentiel d'inertie par  $\Omega_0 \doteq \omega + \Omega_P$ .

On effectue ensuite une décomposition par Fourier :

$$\Phi_1(R, \phi) = \bar{\Phi}_1(R) \cos(m\phi) \quad (3.82)$$

où  $m$  est la périodicité du potentiel. Par exemple une spirale à 4 bras aura  $m = 4$ . On remplace  $\Phi_1$  :

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi_1}{\partial R} = \frac{\partial \bar{\Phi}_1}{\partial R} \cos(m(\Omega_0 - \Omega_P)t) \\ \frac{\partial \Phi_1}{\partial \phi} = -m \bar{\Phi}_1 \sin(m(\Omega_0 - \Omega_P)t) \end{cases} \quad (3.83)$$

En introduisant 3.83 dans 3.81, cela donne :

$$\begin{cases} \ddot{R}_1 + \left( \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial R^2}(R_0) - \Omega_0^2 \right) R_1 - 2R_0 \Omega_0 \dot{\phi}_1 = -\frac{\partial \bar{\Phi}_1}{\partial R}(R_0) \cos(m(\Omega_0 - \Omega_P)t) \\ \ddot{\phi}_1 + 2\Omega_0 \frac{\dot{R}_1}{R_0} = \frac{m}{R_0^2} \bar{\Phi}_1(R_0) \sin(m(\Omega_0 - \Omega_P)t) \end{cases} \quad (3.84)$$

En intégrant ensuite la deuxième équation :

$$\dot{\phi}_1 = -2\Omega_0 \frac{R_1}{R_0} - \frac{\Phi_1(R_0)}{R_0^2} \frac{\cos(m(\Omega_0 - \Omega_P)t)}{\Omega_0 - \Omega_P} + \text{cte} \quad (3.85)$$

La dernière fraction diverge lorsque  $\Omega_0 = \Omega_P$ . Ceci signifie qu'il y a possibilité d'une résonance de corotation, auquel cas l'approximation d'une petite perturbation n'est plus valable.

Dans le cas où  $\Omega_0 \neq \Omega_P$ , on peut remplacer la valeur de  $\dot{\phi}_1$  dans la première équation :

$$\ddot{R}_1 + \left( \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial R^2}(R_0) + 3\Omega_0^2 \right) R_1 = - \left[ \frac{\partial \bar{\Phi}_1}{\partial R}(R_0) + \frac{2\Omega_0 \bar{\Phi}_1}{R_0(\Omega_0 - \Omega_P)} \right] \cos [m(\Omega_0 - \Omega_P)t] + \text{cte} \quad (3.86)$$

C'est l'équation d'un oscillateur harmonique forcé avec une fréquence de modulation de  $m(\Omega_0 - \Omega_P)$  et une amplitude de modulation valant :

$$\left[ \frac{\partial \bar{\Phi}_1}{\partial R}(R_0) + \frac{2\Omega_0 \bar{\Phi}_1}{R_0(\Omega_0 - \Omega_P)} \right] \quad (3.87)$$

La fréquence épicyclique radiale est donnée par :

$$\kappa^2 = \left( \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial R^2}(R_0) + 3\Omega_0^2 \right) \quad (3.88)$$

En intégrant 3.86, on obtient la solution générale :

$$R_1(t) = c_1 \cos(\kappa t - \Psi) - \left[ \frac{\partial \bar{\Phi}_1}{\partial R}(R_0) + \frac{2\Omega_0 \bar{\Phi}_1}{R_0(\Omega_0 - \Omega_P)} \right] \frac{\cos [m(\Omega_0 - \Omega_P)t]}{\kappa^2 - m^2(\Omega_0 - \Omega_P)^2} \quad (3.89)$$

On voit qu'il existe une autre possibilité de résonance (autre que celle de corotation où  $\Omega_0 = \Omega_P$ ) lorsque  $\kappa^2 = m^2(\Omega_0 - \Omega_P)^2$ . C'est la résonance de Lindblad où :

$$m(\Omega_0 - \Omega_P) = \pm \kappa \quad \Leftrightarrow \quad \Omega_P = \Omega_0 \mp \frac{\kappa}{m} \quad (3.90)$$

A ces résonances, l'étoile rencontre un maximum du potentiel (sur son orbite quasi circulaire) à un rythme égal à sa fréquence radiale. Dans le cas où  $\Omega_0 - \Omega_P = +\kappa/m$ , on a évidemment  $\Omega_0 > \Omega_P$  et l'étoile "rattrape" le potentiel puisqu'elle est douée d'une vitesse angulaire supérieure. Cette situation correspond à la résonance interne de Lindblad (*inner Lindblad resonance*, ILR). Dans le cas où  $\Omega_0 - \Omega_P = -\kappa/m$ , c'est le potentiel qui, tournant plus vite que l'étoile, la "rattrape" en résonance avec la fréquence radiale. C'est la résonance externe de Lindblad (*outer Lindblad resonance*, OLR).

Pour notre Galaxie, qui comporte une barre, il se pourrait que l'OLR soit assez proche de l'orbite solaire, un peu à l'intérieur de celle-ci, comme le montre la Fig. (3.7). Si l'on se réfère à la Fig. (6.9) du Chap. 6 (panneau

de droite), on voit qu'une vitesse angulaire  $\Omega_P$  de l'ordre de  $60 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$  correspondrait assez bien à la situation décrite par la Fig. (3.7).

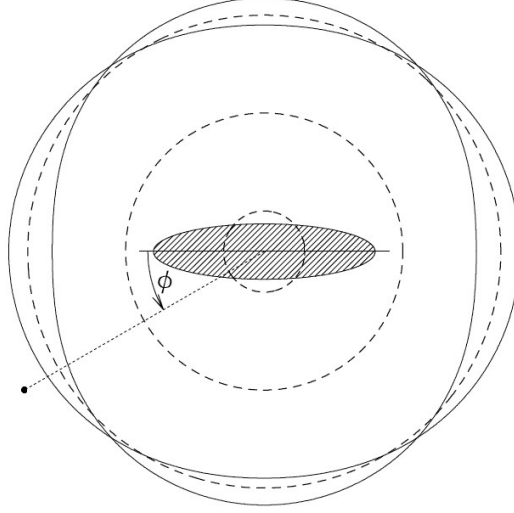


FIG. 3.7 – La barre de notre Galaxie (ellipse grisée), avec la résonance interne de Lindblad, le cercle de corotation et la résonance externe de Lindblad indiqués par des cercles traitillés. La position du Soleil est indiquée par le point. La barre tourne dans le sens des aiguilles d'une montre. Les courbes fermées représentent deux orbites fermées au voisinage de l'OLR. Source : W. Dehnen, astro-ph9911161v1 (1999).

Pour une galaxie barrée typique, comme NGC 2217 visible à la Fig. (3.8), la résonance externe de Lindblad est située sur l'anneau extérieur, tandis que la résonance interne est dans le bulbe, très près du centre.



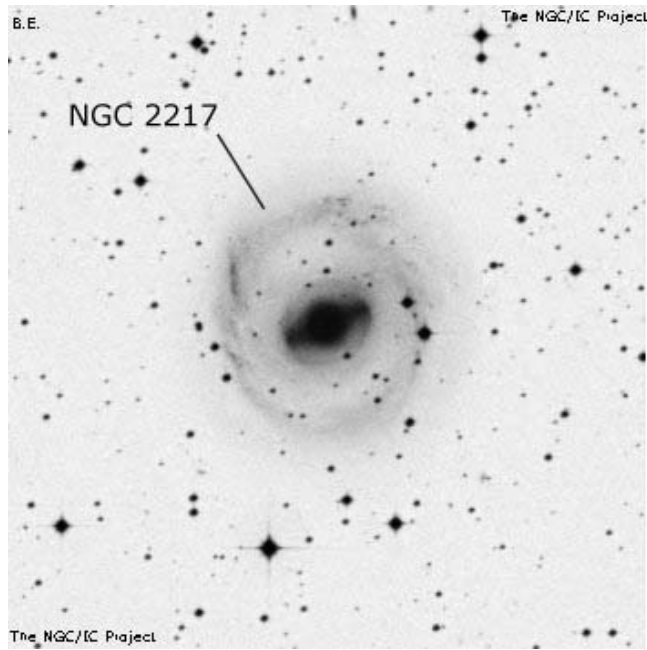


FIG. 3.8 – Galaxie barrée NGC 2217. L’anneau externe correspond à la résonance externe de Lindblad. L’anneau interne, qui limite la barre, correspond à une résonance 4 :1 (la fréquence radiale vaut 4 fois la fréquence azimutale) et la corotation a lieu juste à l’extérieur de cet anneau. La résonance interne de Lindblad est située dans la partie surexposée de la barre.

### 3.9 Surfaces de section dans une galaxie barrée

Lorsqu'on trace les surfaces de section pour une galaxie, dont on fait varier l'excentricité de la barre, ainsi que le rapport de masse entre la barre et le disque, on conclut qu'une barre forte (que se soit en excentricité ou en masse) contient des orbites qui permettent d'expliquer la barre.

Néanmoins, au delà d'une certaine force, les orbites régulières se dissolvent en orbites chaotiques qui ont une forme incompatible avec la matière. C'est pourquoi on n'observe pas de barres fines dans les galaxies, l'excentricité étant trop forte.

## Chapitre 4

# Equilibre des systèmes sans collisions

On a vu que des systèmes stellaires suffisamment grands peuvent être considérés comme produisant un potentiel lisse, comme si la masse était uniformément distribuée plutôt que concentrée dans des étoiles quasi ponctuelles. L'orbite d'une étoile calculée à l'aide de cette approximation sera réaliste tant qu'aucune collision n'aura lieu, et cela sera le cas tant que le système restera plus jeune que le temps de relaxation  $t_{relax}$ , lequel est beaucoup plus long que le temps de traversée (crossing time)  $t_{cross}$ . Plus le système contient un grand nombre d'étoiles, plus  $t_{relax}$  est long, ainsi une galaxie vérifie  $t_{relax} > t_{Hubble}$ . On peut donc représenter très fidèlement une galaxie par un modèle sans collisions.

Il est également possible d'appliquer cette approche aux amas globulaires, bien que leur  $t_{relax}$  soit plus court que leur âge. Mais dans ce contexte là, il faut bien garder à l'esprit que l'équilibre de ces systèmes stellaires va varier lentement au cours du temps de relaxation.

Nous ferons l'hypothèse, dans ce chapitre, que les systèmes stellaires sont constitués de  $N$  particules identiques, en rayon et masse, ce qui paraît une approximation très grossière de la fonction de masse des étoiles. Néanmoins, une telle hypothèse simplifie beaucoup l'analyse et on peut vérifier, a posteriori, qu'elle ne compromet pas les résultats de cette dernière.

## 4.1 L'équation de Boltzmann sans collisions

Un système contenant des milliards de particules rend inutile toute ambition de définir la position et la trajectoire de chacune d'entre elles. On est donc dans une situation semblable à la thermodynamique des gaz : les étoiles remplacent ici les molécules. On définit alors la probabilité de trouver une étoile dans un volume de l'espace de phase à six dimensions  $d^3\mathbf{x}d^3\mathbf{v}$  autour de la position  $\mathbf{x}$  et de la vitesse  $\mathbf{v}$ . Cela revient à définir la **fonction de distribution** (abréviée FD, ou DF en anglais)  $f$  telle que  $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d^3\mathbf{x}d^3\mathbf{v}$  est la probabilité de trouver une étoile donnée à l'instant  $t$  et aux coordonnées de l'espace de phase dans l'intervalle défini. Par hypothèse, toutes les étoiles sont identiques, si bien que cette probabilité est la même pour chaque étoile 1, 2, 3, ...,  $N$ . Comme  $f$  est une probabilité, son intégrale sur tout l'espace de phase, égale à 1, est donnée par :

$$\int d^3\mathbf{x}d^3\mathbf{v} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = 1 \quad (4.1)$$

Définissons les coordonnées cartésiennes habituelles par  $\mathbf{w} = (\mathbf{x}, \mathbf{v})$ , et désignons par  $\mathcal{V}$  une région arbitraire de l'espace de phase. La probabilité de trouver l'étoile 1 dans  $\mathcal{V}$  est donnée par  $P = \int_{\mathcal{V}} d^6\mathbf{w} f(\mathbf{w})$ . La grandeur  $f$  est parfois définie comme la densité numérique des particules (par volume d'espace de phase), ou encore comme la masse par unité de volume de l'espace de phase.

Si  $\mathbf{W}$  représente un ensemble arbitraire de coordonnées de l'espace de phase et si  $F(\mathbf{W})$  est la DF correspondante, la probabilité de trouver l'étoile 1 dans  $\mathcal{V}$  est donnée par  $P = \int_{\mathcal{V}} d^6\mathbf{W} F(\mathbf{W})$ . Si  $\mathcal{V}$  est suffisamment petit,  $f$  et  $F$  seront à peu près constantes dans celui-ci, si bien qu'on peut les sortir de l'intégrale et obtenir :

$$P = f(\mathbf{w}) \int_{\mathcal{V}} d^6\mathbf{w} = F(\mathbf{W}) \int_{\mathcal{V}} d^6\mathbf{W} \quad (4.2)$$

Si les coordonnées  $\mathbf{W}$  sont canoniques, aussi bien que les coordonnées  $\mathbf{w}$ , alors les éléments de volume de l'espace de phase sont les mêmes et l'on peut écrire  $\int_{\mathcal{V}} d^6\mathbf{w} = \int_{\mathcal{V}} d^6\mathbf{W}$ . Par conséquent, selon l'Equ. (4.2),  $F(\mathbf{W}) = f(\mathbf{w})$ . La DF possède donc la même valeur numérique en un point donné de l'espace de phase dans *tout* système de coordonnées canoniques.

**Etablissement de l'équation de Boltzmann sans collisions :** <sup>1</sup> Ici, on va considérer  $f$  d'abord comme une densité numérique de particules. Soit un élément de volume de l'espace de phase  $([q_1, q_1 + dq_1], \dots, [p_3, p_3 + dp_3])$ . On peut le considérer comme un hypercube dont le volume est  $d^6w = dq_1 dq_2 \dots dp_3$ . Une face  $p_i$  de cet hypercube est l'hypersurface orthogonale à l'axe  $p_i$ , qui vaut  $dS = dq_1 dq_2 \dots dp_{i-1} dp_{i+1}$ . Un point représentatif se déplaçant dans l'espace de phase à travers cette hypersurface aura une composante de "vitesse" généralisée  $\dot{p}_i$  perpendiculaire à celle-ci ; le taux d'accroissement de  $f d^6w$  dû au mouvement à travers cette face sera :

$$(f \dot{p}_i dS)_{p_i}$$

et le mouvement au travers de la face opposée donne lieu à une perte :

$$(f \dot{p}_i dS)_{p_i + dp_i}$$

L'accroissement net de la densité dans le cube d'espace de phase, lié à ces deux faces opposées, est donc :

$$-\frac{\partial}{\partial p_i}(f \dot{p}_i) dp_i dS = -\frac{\partial}{\partial p_i}(f \dot{p}_i) d^6w$$

Le signe  $-$  vient de ce que, si le gradient  $\partial(f \dot{p}_i)/\partial p_i$  est positif, alors les particules "fuient" le volume plus vite qu'elles y entrent, ce qui aboutit à une décroissance de la densité. En sommant sur les six paires de faces de l'hypercube, on obtient la variation nette de  $f d^6w$  due à toutes les composantes du mouvement :

$$-\sum_{i=1}^3 \left[ \frac{\partial}{\partial p_i}(f \dot{p}_i) d^6w + \frac{\partial}{\partial q_i}(f \dot{q}_i) d^6w \right] \quad (4.3)$$

Or cette expression n'est autre que l'accroissement de  $f$  dans l'élément de volume de phase  $d^6w$  donné, que l'on peut écrire aussi  $(\partial f / \partial t) d^6w$ . On peut donc écrire :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \left[ \frac{\partial}{\partial p_i}(f \dot{p}_i) + \frac{\partial}{\partial q_i}(f \dot{q}_i) \right] = 0 \quad (4.4)$$

En développant les dérivées partielles, on obtient :

---

<sup>1</sup>selon S. Chandrasekhar, 1942, *Principles of stellar dynamics*, Dover, 1960, p. 83

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \left[ \dot{p}_i \frac{\partial f}{\partial p_i} + \dot{q}_i \frac{\partial f}{\partial q_i} \right] = -f \sum_{i=1}^3 \left[ \frac{\partial \dot{p}_i}{\partial p_i} + \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_i} \right] \quad (4.5)$$

Le membre de droite est nul, car les équations du mouvement exprimées dans le formalisme hamiltonien sont :

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \quad ; \quad \dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \quad (4.6)$$

et de plus :

$$\partial^2 H / \partial \mathbf{q} \partial \mathbf{p} = \partial^2 H / \partial \mathbf{p} \partial \mathbf{q}.$$

Une manière plus simple de voir que le membre de droite est nul consiste à dire que les  $q_i$ ,  $\dot{q}_i$  et les  $p_i$ ,  $\dot{p}_i$  doivent être considérées comme des variables indépendantes. Par conséquent, on a finalement ce que Chandrasekhar appelle le **Théorème de Liouville** et ce que Binney & Tremaine appellent **Equation de Boltzmann sans collisions** :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \left[ \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial f}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial f}{\partial p_i} \right] = 0 \quad (4.7)$$

**Analogie avec l'équation de continuité :** Ici,  $f$  est définie comme une densité de probabilité, que l'on peut considérer comme la densité numérique normalisée au nombre total de particules. Une étoile donnée se déplace dans l'espace de phase, donc sa probabilité de présence en un point donné de l'espace de phase change au cours du temps. Il s'agit d'établir l'équation différentielle que  $f$  doit satisfaire au cours de cette évolution. La probabilité doit être conservée quand  $f$  évolue, exactement comme la masse est conservée dans l'écoulement d'un fluide. Dans le cas d'un fluide, la conservation de la masse est décrite par l'équation de continuité :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot (\rho \dot{\mathbf{x}}) = 0 \quad (4.8)$$

où  $\rho$  est la densité et  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}$  la vitesse du fluide. Par analogie, la conservation de la probabilité dans l'espace de phase s'écrit :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{w}} \cdot (f \dot{\mathbf{w}}) = 0 \quad (4.9)$$

Pour éliminer  $\dot{\mathbf{w}} = (\dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{p}})$ , on recourt aux équation de Hamilton et le second terme de l'Equ. (4.9) devient :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \cdot (f \dot{\mathbf{q}}) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \cdot (f \dot{\mathbf{p}}) &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \cdot \left( f \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \right) - \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \cdot \left( f \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \right) \\ &= \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} \cdot \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} \cdot \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}\end{aligned}\quad (4.10)$$

$$= \dot{\mathbf{q}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} + \dot{\mathbf{p}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} \quad (4.11)$$

Après avoir introduit ce résultat dans l'Equ. (4.9), on aboutit à **l'équation de Boltzmann sans collisions** :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \dot{\mathbf{q}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} + \dot{\mathbf{p}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = 0 \quad (4.12)$$

C'est une équation différentielle partielle pour  $f$  en fonction des six coordonnées de l'espace de phase et en fonction du temps.

En coordonnées cartésiennes, on peut écrire l'Equ. (4.12) avec une autre notation, en généralisant la notion de gradient à l'espace des vitesses :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{x}} f \cdot \frac{d\mathbf{x}}{dt} + \nabla_{\mathbf{v}} f \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} = 0 \quad (4.13)$$

Si  $f$  est définie comme la masse par unité de volume de l'espace de phase, l'analogie avec l'équation de continuité, invoquée plus haut, est encore plus claire.

Une autre manière d'écrire l'équation de Boltzmann sans collisions résulte du fait de remarquer que  $f$  est fonction de  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{v}$  et  $t$  :  $f = f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ . Si la densité numérique ou la probabilité de présence est conservée au cours du temps – comme la masse dans un fluide – alors on peut écrire ce que l'on appelle la **dérivée convective** ou **dérivée lagrangienne**. En coordonnées cartésiennes, on a alors :

$$\begin{aligned}\frac{df}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad & \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \cdot \frac{d\mathbf{x}}{dt} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} = 0 \\ & \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = 0\end{aligned}\quad (4.14)$$

où l'on a introduit le potentiel gravitationnel  $\Phi$  tel que l'accélération  $\dot{\mathbf{v}} = -\partial\Phi/\partial\mathbf{x}$ .

Une illustration simple et intuitive d'un système où le volume de l'espace de phase est conservé est celle d'une course de Marathon (Binney & Tremaine 2008). Au départ de la course, tous les coureurs sont groupés dans un espace restreint mais courent à des vitesses différentes, selon leur force ou leur stratégie. Le système a donc une grande extension dans l'espace des vitesses mais une faible extension dans l'espace proprement dit. A la fin de la course, tous les coureurs sont fatigués et ont des vitesses très proches, mais ils sont répartis sur un espace beaucoup plus vaste, car le peloton s'est effiloché. Le système a cette fois une très petite extension dans l'espace des vitesses, mais une grande extension dans l'espace proprement dit.

L'Equ. (4.14) est valable pour des coordonnées cartésiennes, dans un référentiel d'inertie, où l'hamiltonien s'écrit  $H = \frac{1}{2}v^2 + \Phi(\mathbf{x}, t)$ . Il est utile de considérer aussi un système de coordonnées cylindriques, dans lesquelles l'hamiltonien est  $H = \frac{1}{2}(p_R^2 + p_\phi^2/R^2 + p_z^2) + \Phi$ . En recourant à l'Equ. (4.6) et à l'Equ. (4.12), l'équation de Boltzmann sans collisions devient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + p_R \frac{\partial f}{\partial R} + \frac{p_\phi}{R^2} \frac{\partial f}{\partial \phi} + p_z \frac{\partial f}{\partial z} - \left( \frac{\partial \Phi}{\partial R} - \frac{p_\phi^2}{R^3} \right) \frac{\partial f}{\partial p_R} \\ - \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \frac{\partial f}{\partial p_\phi} - \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial p_z} = 0 \end{aligned} \quad (4.15)$$

Binney & Tremaine (2008) donnent aussi l'expression de l'équation de Boltzmann en coordonnées sphériques (p. 278).

Si le système est isolé, le potentiel obéit à la loi de Poisson  $\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho$ , avec  $\rho(\mathbf{x}, t) = \int f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d^3v$  la densité de matière en  $\mathbf{x}$  et au temps  $t$ . On a aussi :

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = -G \int \frac{\rho(\mathbf{x}', t)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x'$$

et l'Equ. (4.13) devient :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{x}} f \cdot \mathbf{v} + \nabla_{\mathbf{v}} f \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \left( G \int \frac{f(\mathbf{x}', \mathbf{v}', t) d^3v'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x' \right) = 0 \quad (4.16)$$

Il faut donc en même temps dériver et intégrer  $f$ . L'Equ. (4.16) est un système intégral-différentiel non-linéaire en  $f$ . On voit que les grandeurs  $\Phi$ ,  $\rho$  et  $f$  sont



liées ; en d'autres termes, on a un problème d'autoconsistance, que l'on peut aborder des diverses manières suivantes :

- La densité  $\rho$  est donnée, il s'agit alors de trouver le potentiel  $\Phi$  par l'équation de Poisson, puis la distribution  $f$  des particules au travers de l'équation de Boltzmann.
- On connaît  $f$  et on calcule  $\rho$  en intégrant  $f$  sur les vitesses, puis on obtient  $\Phi$ .
- On connaît  $\Phi$ , on calcule  $\rho$  par l'équation de Poisson puis  $f$  via l'équation de Boltzmann.

Si  $\Phi$  est stationnaire, on peut considérer chaque particule individuellement et décrire les orbites possibles dans ce potentiel ; c'est une voie vers la solution du problème d'autoconsistance.

#### 4.1.1 Limites de l'équation de Boltzmann sans collisions

Il faut garder en mémoire que l'équation de Boltzmann a une validité limitée par deux facteurs au moins.

##### (a) Temps de vie fini des étoiles

La conservation des objets qui sont décrits par la fonction de distribution (ci-après DF) est à la base de l'équation de Boltzmann sans collisions. Dans la réalité, les étoiles ne vivent pas éternellement mais naissent et meurent, si bien que leur courant dans l'espace de phase devrait être décrit par une équation du type :

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = N - M \quad (4.17)$$

où  $N(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$  et  $M(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$  sont les taux de naissance et de mort des étoiles par volume d'espace de phase. Jusqu'ici, nous avons considéré implicitement que  $N - M = 0$ . Mais cela n'est justifié que si  $N - M$  est très petit vis-à-vis du terme de gauche de l'Equ. (4.17). Voyons ce qu'il en est dans une galaxie typique : le terme  $\mathbf{v} \cdot \partial f / \partial \mathbf{x} \approx v f / R$ , où  $v$  et  $R$  sont la vitesse et le rayon caractéristiques de la galaxie. Le rapport  $R/v$  est le temps de traversée  $t_{cross}$ . Le terme  $\partial \Phi / \partial \mathbf{x}$  est de l'ordre de l'accélération  $a$  typique, si bien que le terme  $(\partial \Phi / \partial \mathbf{x}) \cdot (\partial f / \partial \mathbf{v})$  est de l'ordre de  $a f / v$ . On a aussi  $a \approx v / t_{cross}$ . Si l'on définit le rapport :

$$\gamma = \left| \frac{N - M}{f / t_{cross}} \right| \quad (4.18)$$

alors il faut que  $\gamma \ll 1$  pour que l'équation de Boltzmann sans collisions soit valable. Autrement dit, il faut que la variation du nombre d'étoiles par temps de traversée soit petite.

Considérons les deux extrémités du temps de vie stellaire, représentées par les étoiles M pour les longues vies, et par les étoiles O pour les éphémères. Les étoiles M ont une durée de vie bien plus longue que l'âge de l'univers, et dans une galaxie elliptique leur taux de formation est négligeable. Pour cette population stellaire, l'équation de Boltzmann sans collisions s'applique sans problème, avec  $\gamma < 0.01$ . Par contre, des étoiles O, dans une galaxie spirale ou irrégulière, ont un temps de vie de l'ordre de quelques millions d'années seulement, si bien qu'elles n'ont pas le temps de s'éloigner beaucoup de leur lieu de naissance avant de mourir. Ce sont donc les processus de formation stellaire qui gouvernent leur DF, et non pas l'équation de Boltzmann :  $\gamma \approx 10$ . En pratique, l'équation de Boltzmann sans collisions s'applique bien aux étoiles de séquence principale dont la masse  $\mathcal{M} \lesssim 1.5 \mathcal{M}_\odot$ , parce que leur temps de vie dépasse le milliard d'années, ce qui représente plusieurs fois  $t_{cross}$ . Cela est intéressant vu que cette population représente la majeure partie de la masse stellaire.

**Question - exercice :** Pourquoi ?

Dans certains cas, on peut appliquer l'équation de Boltzmann sans collisions à des objets très éphémères, comme les nébuleuses planétaires (temps de vie de quelques dizaines de millénaires, au plus) : dans une galaxie elliptique, la DF de ces objets est la même à leur naissance et à leur mort, de sorte que  $N - M = 0$ .

### (b) Corrélation entre étoiles

La densité numérique moyenne d'étoiles dans un volume infinitésimal de l'espace de phase est  $N f d^3x d^3v$ . En pratique, on ne peut mesurer cette densité que dans un volume suffisamment grand pour qu'un grand nombre d'étoiles s'y trouvent. On suppose alors que la densité dans ce volume est  $N \bar{f}$ , où  $\bar{f}$  est la moyenne de  $f$ . Mais cela n'est correct que si les positions des étoiles dans l'espace de phase ne sont pas corrélées, c'est-à-dire que la connaissance de la position d'une étoile donnée ne rend ni plus ni moins probable la présence d'une autre étoile dans une position voisine. En termes de probabilités, cela revient à écrire que la probabilité de trouver l'étoile 1 dans un volume  $d^6\mathbf{w}$  à la position  $\mathbf{w}$  et l'étoile 2 dans  $d^6\mathbf{w}'$  en  $\mathbf{w}'$  est le produit  $f(\mathbf{w})d^6\mathbf{w}f(\mathbf{w}')d^6\mathbf{w}'$  des probabilités de trouver l'étoile 1 en  $\mathbf{w}$  et l'étoile 2 en  $\mathbf{w}'$ . On parle dans

ce cas de DF *séparables*. En réalité, les positions stellaires sont toujours corrélées vu que les étoiles s'attirent mutuellement. Ici, toutefois, on admet que la séparabilité est pertinente, vu que les forces entre étoiles individuelles sont bien plus faibles, dans beaucoup de systèmes stellaires, que la force due au système entier.

#### 4.1.2 Relation entre DF et les observables

La relation est différente s'il s'agit de notre Galaxie ou de galaxies extérieures.

La probabilité par unité de volume de trouver une étoile donnée en  $\mathbf{x}$ , quelle que soit sa vitesse, est donnée par l'intégrale :

$$\nu(\mathbf{x}) \equiv \int d^3\mathbf{v} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \quad (4.19)$$

et la densité numérique s'obtient en multipliant cette grandeur par le nombre total  $N$  d'étoiles de la population considérée :

$$n(\mathbf{x}) \equiv N \nu(\mathbf{x}) \quad (4.20)$$

Dans notre Galaxie, il est possible de compter les étoiles, du moins dans le voisinage solaire, et donc de déterminer  $\nu(\mathbf{x})$ . Dans les autres galaxies, il n'est en général pas possible de compter les étoiles individuelles ; on déduit alors  $\nu(\mathbf{x})$  de la densité de luminosité  $j(\mathbf{x}) = L\nu(\mathbf{x})$ .

Il existe plusieurs définitions de  $f$  dans la littérature, comme nous l'avons signalé plus haut. Ainsi, au lieu de représenter la probabilité de présence d'une étoile dans le volume d'espace de phase  $d^6\mathbf{w}$ , la grandeur  $f d^6\mathbf{w}$  peut être définie comme le nombre, la masse totale ou la luminosité totale des étoiles dans le volume  $d^6\mathbf{w}$ , ce qui revient à multiplier  $f$  par  $N$ ,  $M$  ou  $L$ , respectivement.

La distribution de probabilité des vitesses stellaires au voisinage du point  $\mathbf{x}$  est donnée par :

$$P_x(\mathbf{v}) = \frac{f(\mathbf{x}, \mathbf{v})}{\nu(\mathbf{x})} \quad (4.21)$$

et peut être directement mesurée au voisinage du Soleil. Pour les autres galaxies, on ne peut mesurer que les vitesses intégrées le long de la ligne de vue, donc la distribution des vitesses le long de la ligne de vue (en anglais

“line-of-sight velocity distribution”, LOSVD). C’est la fraction  $F(v_{\parallel})dv_{\parallel}$  des étoiles situées dans une ligne de vue donnée et dont la vitesse est comprise dans l’intervalle  $[v_{\parallel}, v_{\parallel}+dv_{\parallel}]$ . La ligne de vue est la ligne joignant l’observateur à un point  $\mathbf{x}$  de la galaxie. On peut considérer dans la plupart des cas que la galaxie sous-tend un angle suffisamment petit pour que toutes les lignes de vues puissent être considérées comme presque parallèles. On définit un vecteur unité  $\hat{\mathbf{s}}$  pointant vers le centre de la galaxie, tel que  $x_{\parallel} \equiv \hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{x}$  et  $v_{\parallel} \equiv \hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{v}$  sont les composantes de  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{v}$  parallèles à la ligne de vue. Définissons aussi  $\mathbf{x}_{\perp} \equiv \mathbf{x} - x_{\parallel}\hat{\mathbf{s}}$  et  $\mathbf{v}_{\perp} \equiv \mathbf{v} - v_{\parallel}\hat{\mathbf{s}}$  qui sont les composantes tangentielles (parallèles au plan du ciel) de la position et de la vitesse.  $P_x(\mathbf{v})$  et  $F(\mathbf{x}_{\perp}, v_{\parallel})$  sont liés par l’équation intégrale :

$$F(\mathbf{x}_{\perp}, v_{\parallel}) = \frac{\int dx_{\parallel} \nu(\mathbf{x}) \int d^2\mathbf{v}_{\perp} P_x(v_{\parallel}\hat{\mathbf{s}} + \mathbf{v}_{\perp})}{\int dx_{\parallel} \nu(\mathbf{x})} \quad (4.22)$$

$$= \frac{\int dx_{\parallel} d^2\mathbf{v}_{\perp} f(\mathbf{x}, \mathbf{v})}{\int dx_{\parallel} d^3\mathbf{v} f(\mathbf{x}, \mathbf{v})} \quad (4.23)$$

Il y a essentiellement deux quantités utiles à définir le long de la ligne de visée : la vitesse moyenne  $\bar{v}_{\parallel}$  (que les observateurs appellent vitesse radiale) et la dispersion des vitesses  $\sigma_{\parallel}$ . La vitesse totale moyenne autour de la position  $\mathbf{x}$  est :

$$\bar{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) \equiv \int d^3\mathbf{v} \mathbf{v} P_{\mathbf{x}}(\mathbf{v}) \quad (4.24)$$

et la vitesse moyenne le long de la ligne de vue est :

$$\begin{aligned} \bar{v}_{\parallel}(\mathbf{x}_{\perp}) &\equiv \int dv_{\parallel} v_{\parallel} F(\mathbf{x}_{\perp}, v_{\parallel}) = \frac{\int dx_{\parallel} d^3\mathbf{v} v_{\parallel} f(\mathbf{x}, \mathbf{v})}{\int dx_{\parallel} d^3\mathbf{v} f(\mathbf{x}, \mathbf{v})} \\ &= \frac{\int dx_{\parallel} \nu(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{s}} \cdot \bar{\mathbf{v}}}{\int dx_{\parallel} \nu(\mathbf{x})} \end{aligned} \quad (4.25)$$

La dispersion des vitesses le long de la ligne de vue s’écrit :

$$\begin{aligned} \sigma_{\parallel}^2(\mathbf{x}_{\perp}) &\equiv \int dv_{\parallel} (v_{\parallel} - \bar{v}_{\parallel})^2 F(\mathbf{x}_{\perp}, v_{\parallel}) \\ &= \frac{\int dx_{\parallel} d^3\mathbf{v} (\hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{v} - \bar{v}_{\parallel})^2 f(\mathbf{x}, \mathbf{v})}{\int dx_{\parallel} d^3\mathbf{v} f(\mathbf{x}, \mathbf{v})} \end{aligned} \quad (4.26)$$

La dispersion des vitesses observée (le long de la ligne de vue) est donc dépendante non seulement de la dispersion des vitesses intrinsèque des étoiles autour de la valeur moyenne  $\bar{\mathbf{v}}(\mathbf{x})$  en chaque point de la galaxie, mais aussi de la variation de la vitesse moyenne  $\bar{v}_{\parallel}$  le long de la ligne de vue.

## 4.2 Théorème de Jeans

Une intégrale du mouvement dans un potentiel stationnaire  $\Phi$  est une fonction  $I(\mathbf{x}, \mathbf{v})$  dont la dérivée temporelle est nulle le long d'une trajectoire :

$$\frac{d}{dt}I[\mathbf{x}(t), \mathbf{v}(t)] = 0 \quad (4.27)$$

En effectuant la dérivée, on voit que l'on aboutit à une équation de la même forme pour  $I$ , que celle de Boltzmann sans collisions et stationnaire pour  $f$ , i.e., avec  $\partial f / \partial t = 0$  :

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt} = 0 & \Rightarrow \frac{\partial I}{\partial \mathbf{x}} \cdot \frac{d\mathbf{x}}{dt} + \frac{\partial I}{\partial \mathbf{v}} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} = 0 \\ & \Rightarrow \frac{\partial I}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{v} - \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}} \cdot \frac{\partial I}{\partial \mathbf{v}} = 0 \end{aligned} \quad (4.28)$$

Cette constatation mène naturellement au **Théorème de Jeans** :

- *Toute solution stationnaire de l'équation de Boltzmann sans collisions ne dépend des coordonnées de l'espace de phase qu'au travers d'intégrales du mouvement  $I_i$  pour un potentiel donné.*
- *Toute fonction des intégrales du mouvement  $I_i$  est une solution stationnaire possible de l'équation de Boltzmann sans collisions.*

**Démonstration :**

- Si  $f$  est une solution stationnaire de l'équation de Boltzmann sans collisions, alors  $f$  est une intégrale du mouvement.
- Si  $f = f(I_1, I_2, \dots, I_n)$  où  $I_1, I_2, \dots, I_n$  sont  $n$  intégrales du mouvement indépendantes, alors on a

$$\frac{df}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial I_i} \frac{dI_i}{dt} = 0$$

puisque par définition  $\frac{dI_i}{dt} = 0$ .

La première partie du théorème n'est pas très utile en pratique, parce que les orbites stellaires sont dotées d'intégrales du mouvement qui n'ont pas d'expression analytique. C'est la seconde partie du théorème qui est utilisée. A toutes fins utiles, au plus trois intégrales du mouvement peuvent être connues, et suffisent à décrire des systèmes stellaires stationnaires où les orbites stellaires sont en général régulières et non résonnantes. On appelle

cela le *théorème de Jeans fort* (Binney & Tremaine 2008, p. 284). Notons qu'il existe des fonctions qui ne sont pas continues dans l'espace de phase ; on les dit *non isolantes* et ne sont pas retenues comme des solutions physiquement pertinentes quand elle sont constantes du mouvement. Seules les intégrales *isolantes* ont un intérêt physique.

#### 4.2.1 Application : système sphérique stationnaire

Le théorème de Noether dit qu'à toute quantité conservée dans le temps correspond une symétrie du système :

- système stationnaire : l'énergie est conservée ;
- système en rotation : le moment cinétique est conservé ;
- invariance de translation : l'impulsion est conservée.

Si la DF  $f = f(E, \mathbf{L})$  est aussi de symétrie sphérique, on peut alors écrire  $f = f(E, \|\mathbf{L}\|)$ .

L'énergie est donnée par  $E = \frac{1}{2}v^2 + \Phi(r)$  et le module du moment cinétique  $\|\mathbf{L}\| = \|\mathbf{x} \wedge \mathbf{v}\|$ . La densité est  $\rho = M \int f d^3v = \frac{1}{4\pi G} \nabla^2 \Phi$  (Poisson), où  $M$  est la masse totale du système et où le Laplacien en coordonnées sphériques est :

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \text{termes angulaires nuls (sphéricité)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) = 4\pi G M \int f \left( \frac{1}{2}v^2 + \Phi, \|\mathbf{x} \wedge \mathbf{v}\| \right) d^3v \quad (4.29)$$

On a donc affaire à une équation intégrale pour  $f$  si le potentiel  $\Phi$  est connu, ou à une équation intégral-différentielle pour  $\Phi$  si l'on part d'une distribution  $f$  connue.

Dans un système discrétisé, une intégrale  $\int d^3v$  devient une multiplication matricielle  $\sum_{\Delta v_i} f(v_i, x_j) \Delta v_i$  et une dérivée  $\frac{\partial}{\partial r}$  devient une différence finie. Par exemple :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} \rightarrow \frac{\Phi(r_i + \frac{\Delta r_i}{2}) - \Phi(r_i - \frac{\Delta r_i}{2})}{\Delta r}$$

L'opérateur différentiel est aussi une matrice.

Pour simplifier encore, on peut supposer que  $f = f(E)$  (pas de dépendance en  $\|\mathbf{L}\|$ ). On peut décomposer la vitesse carrée  $v^2 = v_r^2 + v_\phi^2 + v_\theta^2$  et définir :

$$\overline{v_r^2} = \frac{\int f v_r^2 d^3v}{\int f d^3v} = \frac{1}{\nu} \int f v_r^2 d^3v$$

De même pour  $\overline{v_\theta^2}$  et  $\overline{v_\phi^2}$ .

On obtient des intégrales qui ont non seulement la même forme, mais aussi la même valeur, à cause de la symétrie sphérique :  $\overline{v_r^2} = \overline{v_\theta^2} = \overline{v_\phi^2}$  et la dispersion des vitesses est isotrope.

Si  $f = f(E, \|\mathbf{L}\|)$ , par le même raisonnement, on trouve une indépendance des angles mais pas du rayon :  $\overline{v_\theta^2} = \overline{v_\phi^2} \neq \overline{v_r^2}$ .

**Résolution de l'équation intégrale de  $f(E)$  :**

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) = 4\pi G M \int f(E) d^3v = 4\pi G M \int f(E) 4\pi v^2 dv$$

avec  $E = \frac{1}{2}v^2 + \Phi(r)$ ,  $f \geq 0$  et en coordonnées sphériques dans l'espace des vitesses.

On définit un *potentiel relatif*  $\Psi$  et une énergie relative  $\mathcal{E}$  tels que :

$$\Psi \equiv \Phi_0 - \Phi \quad \text{et} \quad \mathcal{E} \equiv \Phi_0 - E = \Psi - \frac{1}{2}v^2 \quad (4.30)$$

avec  $\Phi_0$  une constante arbitraire choisie selon les besoins et  $\mathcal{E}$  telle que si  $f > 0$ , alors  $\mathcal{E} > 0$  et si  $f \leq 0$ ,  $\mathcal{E} \leq 0$ . L'équation ci-dessus devient alors :

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) &= -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) = -4\pi G \rho \\ &= -16\pi^2 G M \int_0^{\sqrt{2\Psi}} f \left( \Psi - \frac{1}{2}v^2 \right) v^2 dv \\ &= -16\pi^2 G M \int_0^{\Psi} f(\mathcal{E}) \sqrt{2(\Psi - \mathcal{E})} d\mathcal{E} \end{aligned}$$

Soit une densité  $\rho(r)$  donnée. Pour déterminer la distribution  $f$  consistante avec  $\rho$ , il s'agit de résoudre l'équation intégrale :



$$\rho = 4\pi M \int_0^\Psi f(\mathcal{E}) \sqrt{2(\Psi - \mathcal{E})} d\mathcal{E}$$

En faisant l'hypothèse que  $\rho$  est monotone, ainsi que  $\Psi$ , il suffit de trouver le changement de variable  $\rho(r) \rightarrow \rho(\Psi)$  pour montrer que  $\Psi(r)$  est monotone.

$$\rho(\Psi) = 4\sqrt{2}\pi M \int_0^\Psi f(\mathcal{E}) \sqrt{\Psi - \mathcal{E}} d\mathcal{E}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{d\Psi} &= 4\sqrt{2}\pi M \left\{ \left( f(\mathcal{E}) \sqrt{\Psi - \mathcal{E}} \right)_0^\Psi + \int_0^\Psi f(\mathcal{E}) \frac{1}{2\sqrt{\Psi - \mathcal{E}}} d\mathcal{E} \right\} \\ &= 2\sqrt{2}\pi M \int_0^\Psi f(\mathcal{E}) \frac{1}{\sqrt{\Psi - \mathcal{E}}} d\mathcal{E} \end{aligned}$$

Cette dernière expression est une équation intégrale d'Abel, dont la solution est :

$$f(\mathcal{E}) = \frac{1}{2\sqrt{2}\pi^2 M} \frac{d}{d\mathcal{E}} \int_0^\mathcal{E} \frac{d\rho}{d\Psi} \frac{d\Psi}{\sqrt{\mathcal{E} - \Psi}}$$

### Rappel : équation intégrale d'Abel

**Version 1 :**

$$f(x) = \int_0^x \frac{g(y)}{(x-y)^\alpha} dy \quad (0 < \alpha < 1)$$

Connaissant la fonction  $f$ , on cherche la fonction  $g$ .

La solution est :

$$g(y) = \frac{\sin \pi \alpha}{\pi} \frac{d}{dy} \int_0^y \frac{f(x)}{(y-x)^{1-\alpha}} dx$$

**Version 2 :**

$$f(x) = \int_x^\infty \frac{g(y)}{(y-x)^\alpha} dy \Rightarrow g(y) = -\frac{\sin \pi \alpha}{\pi} \frac{d}{dy} \int_y^\infty \frac{f(x)}{(x-y)^{1-\alpha}} dx$$

## Systèmes sphériques définis par la DF

Reprenons l'Equ. (4.29) et admettons que  $f$  est une fonction de l'énergie relative  $\mathcal{E} = \Psi - \frac{1}{2}v^2$  (avec  $\Psi = \Phi_0 - \Phi$ ) et du module du moment cinétique. Si  $M$  est la masse totale, l'équation de Poisson devient :

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\Psi}{dr} \right) = -4\pi G \rho = -4\pi G M \int f \left( \Psi - \frac{1}{2}v^2, |\mathbf{r} \wedge \mathbf{v}| \right) d^3\mathbf{v} \quad (4.31)$$

La normalisation de  $f$  est impossible tant que nous n'avons pas résolu cette équation différentielle, si on continue à la définir de sorte que l'intégrale de  $f$  sur l'espace de phase soit 1. On va donc, à partir d'ici, redéfinir l'intégrale de  $f$  sur l'espace de phase comme étant la masse totale  $M$  du système. Ainsi,  $\rho = \int d^3\mathbf{v} f$ .

## Polytropes et modèle de Plummer

Donnons-nous une DF de la forme :

$$\begin{aligned} f(\mathcal{E}) &= F \mathcal{E}^{n-3/2} \quad \text{pour } \mathcal{E} > 0 \\ &= 0 \quad \text{pour } \mathcal{E} \leq 0 \end{aligned} \quad (4.32)$$

La densité devient alors, pour des rayons où  $\Psi > 0$  :

$$\rho = 4\pi \int_0^\infty dv v^2 f \left( \Psi - \frac{1}{2}v^2 \right) = 4\pi F \int_0^{\sqrt{2\Psi}} dv v^2 \left( \Psi - \frac{1}{2}v^2 \right)^{n-3/2} \quad (4.33)$$

Comme on intègre dans l'espace des vitesses uniquement,  $\rho$  est une grandeur locale et donc  $\Psi$  peut être considéré comme constant dans l'intégrale. Seules les énergies relatives positives contribuent à l'intégrale, de sorte que  $v^2 \leq 2\Psi$ . Donc il est possible d'envisager le changement de variable  $v^2 = 2\Psi \cos^2 \theta$ , qui donne  $dv = -\sqrt{2\Psi} \sin \theta d\theta$ . On intègre de  $v = 0$  à  $\sqrt{2\Psi}$ , donc de  $\theta = \pi/2$  à 0. On obtient finalement :

$$\rho = 2^{7/2} \pi F \Psi^n \left[ \int_0^{\pi/2} \sin^{2n-2} \theta d\theta - \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} \theta d\theta \right] = c_n \Psi^n \quad (4.34)$$

avec :

$$c_n \equiv 2^{7/2} \pi F \left[ \int_0^{\pi/2} \sin^{2n-2} \theta d\theta - \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} \theta d\theta \right] = \frac{(2\pi)^{3/2} (n - \frac{3}{2})! F}{n!} \quad (4.35)$$

Il apparaît que  $c_n$  ne peut être fini que pour  $n > \frac{1}{2}$

**Question - exercice :** Pourquoi ?

La densité croît comme la puissance  $n$  du potentiel relatif tant que  $\Psi > 0$  et s'annule pour  $\Psi \leq 0$ . Il ne peut exister de système stellaire ergodique<sup>2</sup> homogène (i.e., où la densité est constante), car il faudrait pour cela que  $\rho \propto \Psi^0$  et nécessiterait donc  $n = 0$ , en violation de la condition  $n > \frac{1}{2}$ . Cela signifie qu'il n'existe pas d'analogue, en dynamique stellaire, à une sphère autogravitante de liquide incompressible.

Introduisons l'Equ. (4.34) dans l'équation de Poisson :

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\Psi}{dr} \right) + 4\pi G c_n \Psi^n = 0 \quad (4.36)$$

Par ailleurs, si on a une équation d'état du type  $p = K \rho^\gamma$  (avec  $K$  une constante et  $\gamma$  le rapport des chaleurs spécifiques), alors l'équation d'équilibre hydrostatique d'une sphère de gaz polytropique autogravitante :

$$\frac{dp}{dr} = -\rho \frac{d\Phi}{dr} \quad (4.37)$$

devient :

$$K \gamma \rho^{\gamma-2} \frac{d\rho}{dr} = \frac{d\Psi}{dr} \quad (4.38)$$

Si l'on définit  $\Psi$  tel que  $\Psi = 0$  aux bords du système, la solution de l'Equ. (4.38) est :

$$\rho^{\gamma-1} = \frac{\gamma-1}{K\gamma} \Psi \quad (4.39)$$

---

<sup>2</sup>Une DF ergodique est une fonction positive de l'hamiltonien  $\mathcal{H}$  dans le cas où celui-ci est une intégrale du mouvement, c'est-à-dire pour un potentiel stationnaire  $\Phi(\mathbf{x})$ . En mécanique statistique, l'adjectif "ergodique" caractérise un système qui occupe sa surface d'énergie entière dans l'espace de phase ; cela signifie que la DF est uniforme sur la surface d'énergie. Dans le contexte présent, la DF est ergodique mais en général, le mouvement des étoiles individuelles ne l'est pas.

Cette équation est la même que l'Equ. (4.34), si l'on pose :

$$c_n = \left( \frac{\gamma - 1}{K\gamma} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \quad \text{et} \quad \gamma = 1 + \frac{1}{n}$$

**La distribution de densité d'un système ergodique dont la DF est donnée par l'Equ. (4.32) est la même que celle d'une sphère gazeuse polytrophique ayant  $\gamma = 1 + \frac{1}{n}$ .** C'est pour cela que les systèmes stellaires dont la DF est de la forme données par l'Equ. (4.32) sont appelés polytropes.

Les solutions les plus simples de l'Equ. (4.36) sont de la forme :

$$\rho \propto r^{-\alpha} \quad \Rightarrow \quad \Psi \propto r^{-\alpha/n}$$

puisque  $\rho \propto \Psi^n$  dans un polytrope. Introduisant cela dans l'Equ. (4.36), on a :

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^{-\frac{\alpha}{n}+1} \right) \propto r^{-\alpha}$$

On aboutit à :

$$r^{-(\frac{\alpha}{n}+2)} \propto r^{-\alpha} \quad \rightarrow \quad \alpha = \frac{2n}{n-1}$$

Or, le potentiel ne peut décroître plus vite que celui de Kepler  $\Psi \propto r^{-1}$ , donc  $\alpha/n \leq 1$ . Comme  $\alpha/n = 2/(n-1)$ , une solution de type  $\Psi \propto r^{-\alpha/n}$  n'est donc valable que pour  $n \geq 3$ . La masse contenue à l'intérieur du rayon  $r$  est :

$$M(r) = -\frac{r^2}{G} \frac{d\Psi}{dr} \propto r^{1-\alpha/n} = r^{(n-3)/(n-1)} \quad (4.40)$$

Notons que pour  $n = 3$ ,  $M$  est indépendant du rayon, et  $\alpha/n = 1$ , donc le potentiel est keplérien et la situation est celle d'un halo de masse nulle orbitant autour d'une masse ponctuelle. Si  $n > 3$ ,  $M \rightarrow 0$  quand  $r \rightarrow 0$  et le système est véritablement autogravitant. A la limite  $n \rightarrow \infty$ , l'Equ. (4.40) implique  $d\Psi/dr \propto r^{-1}$  et donc  $\Psi \propto \ln r$ . C'est le cas de la *sphère isotherme singulière* que l'on verra ci-dessous.

Le problème des solutions discutées jusqu'ici est qu'elles ont une singularité à l'origine. Pour contourner cette difficulté, on introduit les variables radiales renormalisées :

$$s \equiv \frac{r}{b} \quad \text{et} \quad \psi \equiv \frac{\Psi}{\Psi_0} \quad \text{avec} \quad b \equiv \left( \frac{4}{3} \pi G \Psi_0^{n-1} c_n \right)^{-1/2} \quad \text{et} \quad \Psi_0 \equiv \Psi(0) \quad (4.41)$$

L'équation de Poisson, donnée par l'Equ. (4.36), devient alors l'**équation de Lane-Emden** :

$$\begin{aligned} \frac{1}{s^2} \frac{d}{ds} \left( s^2 \frac{d\psi}{ds} \right) &= -3\psi^n \quad \psi > 0 \\ &= 0 \quad \psi \leq 0 \end{aligned} \quad (4.42)$$

Les conditions aux limites sont  $\psi(0) = 1$  (par définition) et  $\frac{d\psi}{ds}(0) = 0$ , parce que sans singularité centrale de la densité, la force de gravitation doit s'annuler au centre. L'Equ. (4.42) n'admet pas de solution analytique pour tout  $n$ , mais seulement pour  $n = 1$  (équation linéaire de Helmholtz) et pour  $n = 5$ , le modèle de Schuster, qui est le modèle le plus simple d'un système stellaire autogravitant. En effet, on voit que la fonction :

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{1+s^2}}$$

satisfait l'Equ. (4.42) :

$$\frac{1}{s^2} \frac{d}{ds} \left( s^2 \frac{d\psi}{ds} \right) = -\frac{1}{s^2} \frac{d}{ds} \left( \frac{s^3}{(1+s^2)^{3/2}} \right) = -3\psi^5 \quad (4.43)$$

On voit aussi que  $\psi(0) = 1$ ,  $\frac{d\psi}{ds}(0) = 0$ , donc les conditions aux limites sont satisfaites. Enfin, on voit que  $\psi$  n'est autre que la forme sans dimensions du **modèle de Plummer** introduit au Chap. 2. La densité de ce modèle est non nulle partout mais décroît en  $r^{-5}$  pour  $r \gg b$ . La masse totale est finie :

$$M = \frac{1}{G} \left( r^2 \frac{d\Phi}{dr} \right)_{r \rightarrow \infty} = -\frac{b}{G} \left( s^2 \frac{d\Psi}{ds} \right)_{s \rightarrow \infty} = \frac{b\Psi_0}{G} \quad (4.44)$$

Plus  $n$  est grand, plus l'extension spatiale du modèle est grande. Pour  $n < 5$ , la densité devient nulle à un rayon fini ; pour  $n = 5$ , la densité est non nulle partout mais la masse totale reste finie ; pour  $n > 5$ , la densité décroît si lentement que la masse totale diverge à grand  $r$ .

## La sphère isotherme

On a vu qu'à toute sphère de gaz polytropique ayant  $\gamma < 3$  correspond un système stellaire polytropique d'indice  $n = 1/(\gamma - 1) > 1/2$ . Par conséquent, un système stellaire polytropique pour lequel  $n \rightarrow \infty$  correspond à un système gazeux ayant  $\gamma = 1$ , ce qui implique une équation d'état  $p = K\rho$ . C'est l'équation d'un gaz isotherme. Bien qu'on puisse partir de l'équation de Lane-Emden en faisant tendre  $n$  vers l'infini, il est plus instructif de partir de l'équilibre hydrostatique :

$$\frac{dp}{dr} = \frac{k_B T}{m} \frac{d\rho}{dr} = -\rho \frac{d\Phi}{dr} = -\rho \frac{G M(r)}{r^2} \quad (4.45)$$

où  $k_B$  est la constante de Boltzmann,  $p$  et  $T$  sont la pression et la température du gaz,  $m$  est la masse par particule et  $M(r)$  est la masse totale à l'intérieur du rayon  $r$ . Retenant l'égalité entre le deuxième et le quatrième terme de l'équation ci-dessus, on a :

$$\frac{r^2}{\rho} \frac{d\rho}{dr} = -\frac{GM(r)m}{k_B T} \Rightarrow \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d \ln \rho}{dr} \right) = -\frac{Gm}{k_B T} \frac{dM(r)}{dr} \quad (4.46)$$

Or :

$$\frac{dM(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho \Rightarrow \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d \ln \rho}{dr} \right) = -\frac{4\pi Gm}{k_B T} r^2 \rho \quad (4.47)$$

Admettons que l'on ait un système stellaire avec une DF donnée par :

$$f(\mathcal{E}) = \frac{\rho_1}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}} e^{\mathcal{E}/\sigma^2} = \frac{\rho_1}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}} \exp \left( \frac{\Psi - v^2/2}{\sigma^2} \right) \quad (4.48)$$

En intégrant sur les vitesses, on obtient la densité  $\rho = \rho_1 e^{\Psi/\sigma^2}$ , ce qui implique  $\Psi = \sigma^2 \ln(\rho/\rho_1)$  et  $d\Psi/dr = \sigma^2 d \ln \rho / dr$ . Par conséquent, l'équation de Poisson du système peut s'écrire :

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\Psi}{dr} \right) = -4\pi G \rho \Rightarrow \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d \ln \rho}{dr} \right) = -\frac{4\pi G}{\sigma^2} r^2 \rho \quad (4.49)$$

On voit que l'Equ. (4.47) est identique à l'Equ. (4.49) dès que :

$$\sigma^2 = \frac{k_B T}{m} \quad (4.50)$$

On peut donc dire que *la structure d'un système stellaire sans collisions, dont la DF est de la forme donnée par l'Equ. (4.48), est identique à la structure d'une sphère autogravitante de gaz isotherme*. En effet, la distribution des vitesses en chaque point de la sphère d'étoiles isotherme n'est autre que celle de Maxwell :

$$dn \propto \exp\left(-\frac{|\mathbf{v}|^2}{2\sigma^2}\right) d^3\mathbf{v}$$

Mais la théorie cinétique nous dit aussi que c'est la distribution de Maxwell-Boltzmann qui régnerait à l'équilibre, si les étoiles subissaient des collisions élastiques mutuelles ; pour un système dont la DF est donnée par l'Equ. (4.48), il importe donc peu que les étoiles subissent ou non des collisions.

Calculons la vitesse quadratique moyenne en un point quelconque d'une sphère isotherme. Elle est définie par :

$$\bar{v}^2 = \frac{\int_0^\infty dv v^4 \exp\left(\frac{\Psi - \frac{1}{2}v^2}{\sigma^2}\right)}{\int_0^\infty dv v^2 \exp\left(\frac{\Psi - \frac{1}{2}v^2}{\sigma^2}\right)} = 2\sigma^2 \frac{\int_0^\infty dx x^4 e^{-x^2}}{\int_0^\infty dx x^2 e^{-x^2}} = 3\sigma^2 \quad (4.51)$$

**Question - exercice :** Montrer la relation ci-dessus.

Ainsi,  $\bar{v}^2$  **ne dépend pas de la position**. De plus, la vitesse quadratique moyenne selon une dimension quelconque (par exemple  $\bar{v}_r^2$ ) est égale à la dispersion  $\sigma$ .

### La sphère isotherme singulière

Il existe une solution simple de l'Equ. (4.49) : en posant  $\rho = C r^{-b}$ , on a  $\ln \rho = \ln C - b \ln r$  et  $d \ln \rho / dr = -b/r$ , donc :

$$\frac{d}{dr}(-br) = -b = -\frac{4\pi G}{\sigma^2} r^2 C r^{-b} = -\frac{4\pi G}{\sigma^2} C r^{2-b}$$

Comme cette égalité doit être valable pour tout  $r$ , on doit avoir  $b = 2$  et  $C = \frac{\sigma^2}{2\pi G}$ , et finalement :

$$\rho(r) = \frac{\sigma^2}{2\pi G r^2} \quad (4.52)$$

C'est la **sphère isotherme singulière**. La masse à l'intérieur du rayon  $r$  vaut :

$$dM(r) = 4\pi r^2 \rho dr \quad \Rightarrow \quad M(r) = \frac{2\sigma^2}{G} r$$

et tend donc vers l'infini quand  $r \rightarrow \infty$  !

La vitesse circulaire est donnée par  $v_c^2 = GM/r$ , ce qui donne, en utilisant l'expression de  $M$  :

$$v_c^2(r) = 2\sigma^2 \quad \Rightarrow \quad v_c(r) = \sqrt{2}\sigma = \text{constante}$$

Le potentiel vaut :

$$\Phi(r) = v_c^2 \ln \left( \frac{r}{r_0} \right) + \text{const} = 2\sigma^2 \ln r + \text{const}$$

Enfin, la densité de surface est donnée par (Binney & Tremaine 2008, p. 69 et p. 305) :

$$\Sigma(R) = \frac{\rho_0 r_0^2}{R} \frac{(-\frac{1}{2})! (-\frac{1}{2})!}{0!} = \frac{C}{R} \pi = \frac{\sigma^2}{2GR}$$

car  $(-\frac{1}{2})! = \sqrt{\pi}$  et  $0! = 1$ .

Comme la densité diverge en  $r = 0$ , il est avantageux de définir les grandeurs sans dimension :

$$\tilde{\rho} \equiv \frac{\rho}{\rho_0} \quad \tilde{r} \equiv \frac{r}{r_0} \quad (4.53)$$

avec le **rayon de King** :

$$r_0 \equiv \sqrt{\frac{9\sigma^2}{4\pi G \rho_0}} \quad (4.54)$$

Le rayon  $r_0$  correspond à une densité projetée proche de la moitié de sa valeur centrale (valeur relative réelle : 0.5013). Avec ces nouvelles variables, on a  $d/dr = (1/r_0)d/d\tilde{r}$  et l'Equ. (4.49) devient, compte tenu de l'Equ. (4.54) :



$$\frac{d}{d\tilde{r}} \left( \tilde{r}^2 \frac{d \ln \tilde{\rho}}{d\tilde{r}} \right) = -9\tilde{r}^2 \tilde{\rho} \quad (4.55)$$

Une intégration numérique de l'Equ. (4.55) à partir de  $\tilde{r} = 0$ , avec les conditions aux limites  $\tilde{\rho}(0) = 1$  et  $d\tilde{\rho}/d\tilde{r}(0) = 0$  donne la courbe inférieure de la Fig. (4.1), qui est la solution de la **sphère isotherme** proprement dite. On voit qu'à partir de  $\tilde{r} \sim 10 - 15$ , la courbe décroît linéairement et approche de très près le cas de la sphère isotherme singulière. Celle-ci est donnée, dans ces nouvelles variables, par la relation :

$$\tilde{\rho}(\tilde{r}) = \frac{\rho}{\rho_0} = \frac{\sigma^2}{2\pi G r_0^2 \rho_0 \tilde{r}^2} = \frac{2}{9\tilde{r}^2}$$

On voit que la sphère isotherme rejoint asymptotiquement la sphère isotherme singulière. La vitesse circulaire  $v_c(r)$ , en fonction de la masse  $M(r)$  intérieure au rayon  $r$ , vaut :

$$v_c^2(r) = \frac{GM(r)}{r}$$

En partant de l'Equ. (4.49), on a :

$$\begin{aligned} r \frac{d \ln \rho}{d \ln r} &= -\frac{4\pi G}{\sigma^2} \int_0^r \rho r'^2 dr' = -\frac{G}{\sigma^2} M(r) \\ \Rightarrow v_c^2(r) &= -\sigma^2 \frac{d \ln \rho}{d \ln r} \end{aligned}$$

Une intégration numérique montre que, pour  $r \gg r_0$ ,  $d \ln \rho / d \ln r \rightarrow -2$ , si bien que  $v_c \rightarrow \sqrt{2}\sigma$  qui est la valeur pour la sphère isotherme singulière. Pour  $\tilde{r} \lesssim 2$ , le modèle de Hubble modifié introduit au Chap. 2 fournit une approximation de  $\tilde{\rho}(\tilde{r})$ , à mieux de 7% pour  $\tilde{r} < 4$  :

$$\tilde{\rho}(\tilde{r}) \approx \tilde{\rho}_h(\tilde{r}) \equiv (1 + \tilde{r}^2)^{3/2} \quad (4.56)$$

La densité de surface correspondant à  $\tilde{\rho}_h$  est (Binney & Tremaine 2008, p. 68) :

$$\Sigma_h(\tilde{R}) = \frac{2}{1 + \tilde{R}^2} \quad \text{avec} \quad \tilde{R} \equiv \frac{R}{r_0}$$

L'intérêt principal de la sphère isotherme est qu'elle donne une vitesse circulaire constante aux grands rayons, conformément aux observations des galaxies spirales.

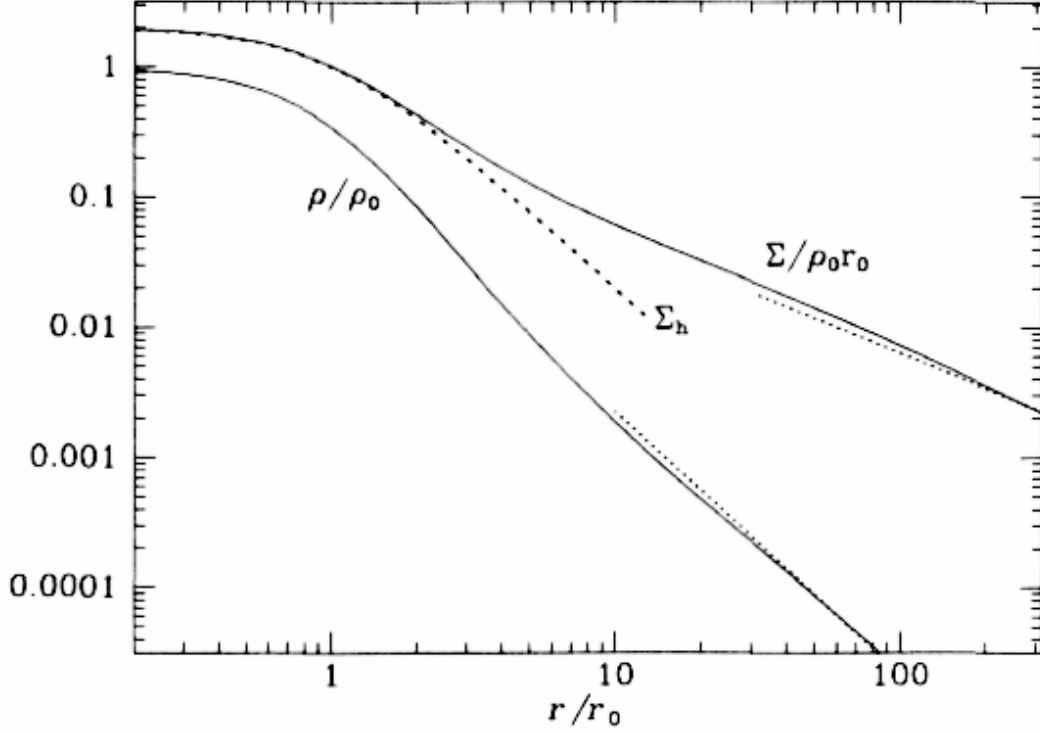


FIG. 4.1 – Densité  $\tilde{\rho}$  et densité de surface  $\Sigma$  en fonction de  $\tilde{r}$  pour la sphère isotherme (lignes continues). Les lignes pointillées donnent les mêmes quantités pour la sphère isotherme singulière. La ligne traitillée donne la densité de surface du modèle de Hubble modifié.

### Les modèles de King (aussi étudiés par Michie)

Le gros défaut de la sphère isotherme est sa masse non bornée. On a donc besoin, pour plus de réalisme, d'un modèle qui approche celle-ci aux faibles rayons, mais dont la densité décroît plus vite aux grands rayons, de sorte que la masse reste finie. L'idée est donc de réduire la DF de la sphère isotherme aux faibles valeurs de  $\mathcal{E}$ , de sorte que  $f_K = 0$  pour  $\mathcal{E} < \mathcal{E}_0$ , en exploitant la constante arbitraire  $\Phi_0$  de l'Equ. (4.30). On choisit  $f_K(\mathcal{E})$  de sorte qu'elle soit de la même forme que l'Equ. (4.48) pour  $\mathcal{E} \gg 0$  et soit nul pour  $\mathcal{E} < 0$  :

$$\begin{aligned}
f_K(\mathcal{E}) &= \rho_1 (2\pi\sigma^2)^{-3/2} \left( e^{\mathcal{E}/\sigma^2} - 1 \right) \quad \text{pour } \mathcal{E} > 0 \\
&= 0 \quad \text{pour } \mathcal{E} \leq 0
\end{aligned} \tag{4.57}$$

Calculons la densité en fonction du potentiel  $\Psi$ . En remplaçant  $\mathcal{E}$  par  $\Psi - \frac{1}{2}v^2$  dans l'Equ. (4.57) et en intégrant sur les vitesses, on voit qu'il suffit d'intégrer de  $v = 0$  à  $v = \sqrt{2\Psi}$ . En effet, pour  $v > \sqrt{2\Psi}$ ,  $f_K = 0$ . On a donc :

$$\begin{aligned}
\rho_K(\Psi) &= \frac{4\pi\rho_1}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}} \int_0^{\sqrt{2\Psi}} dv v^2 \left[ \exp\left(\frac{\Psi - \frac{1}{2}v^2}{\sigma^2}\right) - 1 \right] \\
&= \rho_1 \left[ e^{\Psi/\sigma^2} \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{\Psi}}{\sigma}\right) - \sqrt{\frac{4\Psi}{\pi\sigma^2}} \left(1 + \frac{2\Psi}{3\sigma^2}\right) \right]
\end{aligned} \tag{4.58}$$

avec la fonction d'erreur :

$$\operatorname{erf}(x) \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x dt e^{-t^2}$$

**Question - exercice :** Montrer la relation ci-dessus.

Compte tenu de cette expression de la densité, on tire l'équation de Poisson pour  $\Psi$  :

$$\frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\Psi}{dr} \right) = -4\pi G \rho_1 r^2 \left[ e^{\Psi/\sigma^2} \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{\Psi}}{\sigma}\right) - \sqrt{\frac{4\Psi}{\pi\sigma^2}} \left(1 + \frac{2\Psi}{3\sigma^2}\right) \right] \tag{4.59}$$

Pour intégrer cette équation, on part du centre en posant  $d\Psi/dr = 0$ , et en choisissant une valeur arbitraire pour  $\Psi$ . La masse totale et le potentiel central  $\Phi(0)$  sont ainsi déterminés. En effet,  $d\Psi/dr$  décroît avec  $r$ , car  $d\Psi/dr(0) = 0$  et  $d^2\Psi/dr^2 < 0$ . Au fur et à mesure que  $\Psi$  tend vers zéro, l'intervalle  $(0, \sqrt{\Psi})$  des vitesses des étoiles en un rayon donné se rétrécit et la densité stellaire décroît. La densité s'annule en même temps que  $\Psi$ , au rayon  $r_t$ , nommé "tidal radius" (rayon de marée) selon le terme qu'utilisent les observateurs pour désigner les limites d'une galaxie ou d'un amas.

La masse totale et le potentiel au rayon de marée sont donnés par :

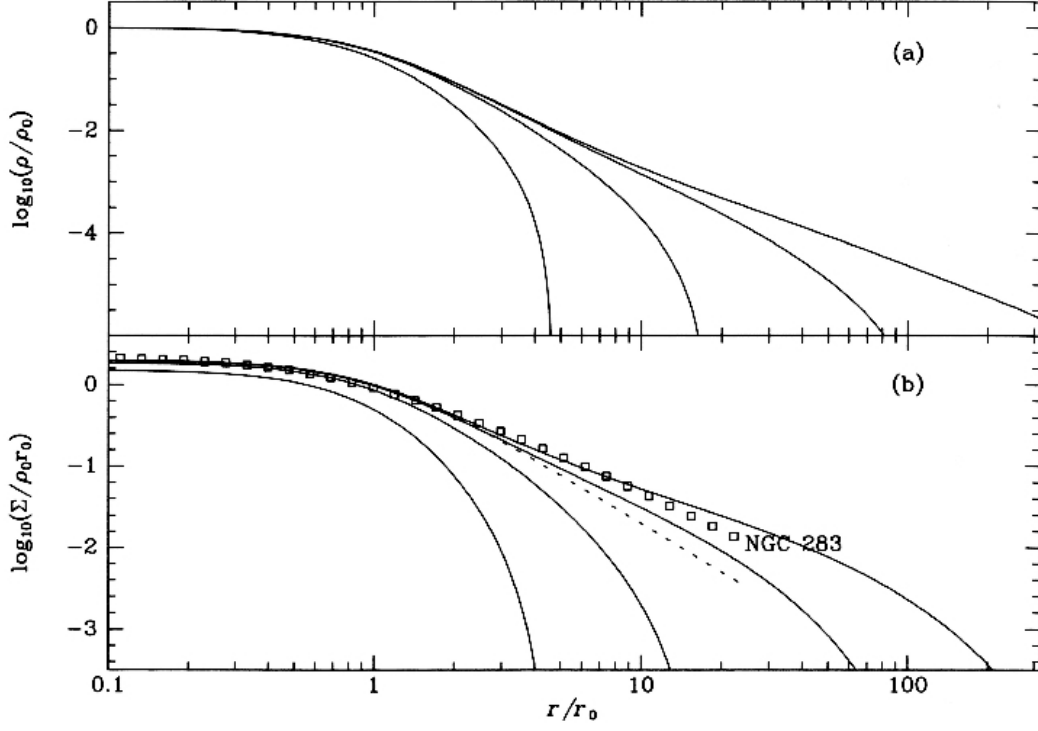


FIG. 4.2 – Densité  $\tilde{\rho}$  et densité de surface en fonction de  $\tilde{r}$  pour quatre modèles de King (lignes continues), caractérisés par  $\Psi(0)/\sigma^2 = 12, 9, 6, 3$  (de haut en bas). La ligne traitillée donne la densité de surface du modèle de Hubble modifié, tandis que les carrés montrent la brillance de surface de la galaxie elliptique NGC 283, d'après Lauer et al. (1995).

$$M(r_t) = 4\pi \int_0^{r_t} dr r^2 \rho_K \quad \text{et} \quad \Phi(r_t) = -\frac{G M(r_t)}{r_t} \quad (4.60)$$

Le potentiel central est  $\Phi(0) = \Phi(r_t) - \Psi(0)$ . Plus  $\Psi(0)$  est grand, plus grands seront le rayon de marée, la masse totale et  $|\Phi(0)|$ . La Fig. (4.2) montre les profils de densité et de densité de surface pour différentes valeurs de  $\Psi(0)$ . Le profil de densité de surface mesuré de la galaxie elliptique NGC 283 correspond assez bien à un modèle de King avec  $\Psi(0) \simeq 10 \sigma^2$ .

Le **paramètre de concentration**  $c$  est défini par le rapport du rayon de marée au rayon de King :

$$c \equiv \log \frac{r_t}{r_0} \quad (4.61)$$

On peut paramétrer les modèles de King par  $c$  ou, de manière équivalente, par  $\Psi(0)/\sigma^2$ . Notons que, contrairement au cas de la sphère isotherme, le paramètre  $\sigma$  qui apparaît ici ne doit pas être identifié avec la dispersion des vitesses des étoiles. En effet, comme on le voit sur la Fig. 4.3, cette dernière décroît avec  $r$  et s'annule en  $r_t$ , parce que l'énergie potentielle des étoiles en ce point atteint déjà l'énergie totale maximale possible.

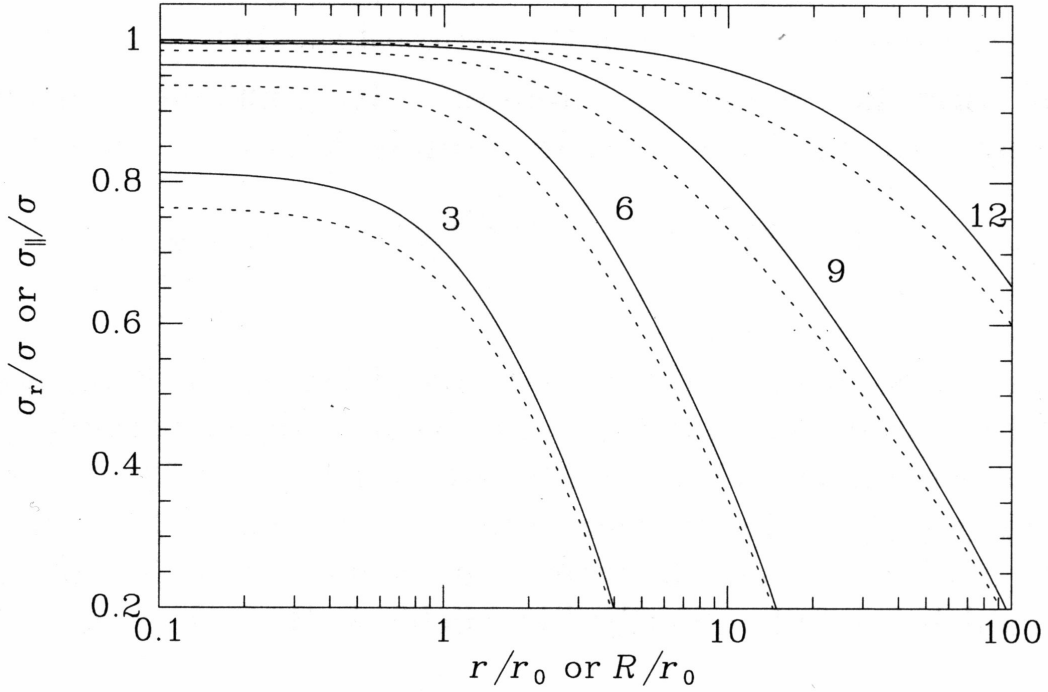


FIG. 4.3 – Dispersion des vitesses selon une dimension ( $r$ ,  $\theta$  ou  $\phi$  – lignes continues) et dispersion des vitesses selon la ligne de vue ( $\sigma_{\parallel}$  – lignes traitillées) en fonction du rayon projeté  $R$ , pour les modèles de King de la Fig. (4.2). La valeur de  $\Psi(0)/\sigma^2$  est donnée pour chaque courbe.

Les trois paragraphes suivants sont tirés du cours de Gary Mamon (Institut d'Astrophysique de Paris) *Dynamique gravitationnelle des systèmes à  $N$  corps*, version 2008-2009.

## Les modèles de Wilson

L'étudiant de King, Wilson (1975), a proposé une famille de modèles de fonctions de distribution, dont la version isotrope s'écrit

$$f(E) = cte \left[ \exp(-E/\sigma_r^2) - 1 + E/\sigma_r^2 \right] \quad , \quad (4.62)$$

Le dernier terme de l'équation 4.62 élimine le terme linéaire de la limite de  $f(E)$  vers  $E = 0$ , ne gardant que le terme quadratique, ce qui rend ainsi la dérivée  $df/dE$  continue en  $E = 0$ . L'intérêt du modèle isotrope de Wilson est qu'il ajuste encore mieux que le modèle de King les profils de brillance de surface des amas globulaires (McLaughlin & van der Marel 2005).

## Le modèle de Michie (1963)

Il est semblable au modèle de King, mais anisotrope :

$$f(E) = cte \left[ \exp(-E/\sigma_v^2) - 1 \right] \exp \left[ -J^2/(2r_a^2\sigma_v^2) \right] \quad , \quad (4.63)$$

où  $r_a$  correspond au *rayon d'anisotropie* et où  $3\sigma_v^2 = \sigma_r^2 + 2\sigma_\theta^2$  est le carré de la dispersion totale des vitesses, qui est indépendant de la position. Dans le coeur du système,  $E$  est très négatif et  $f$  varie plus rapidement avec  $E$  qu'avec  $J$ . On se retrouve dans le cas d'un modèle de King, et par conséquent, le centre d'un tel modèle doit être isotrope. Aux bords du système, c'est le terme en  $J$  qui domine, et comme il n'est important que lorsque  $J$  est petit, on déduit une *anisotropie radiale* ( $\sigma_r > \sigma_t$ , où  $\sigma_t = \sigma_\theta = \sigma_\phi$ ) pour  $r \gg r_a$ . Dans la limite  $r_a \rightarrow \infty$ , on retrouve le modèle de King.

## Les modèles d'Osipkov-Merritt

Ces modèles (Osipkov 1979 ; Merritt 1985a, 1985b) représentent une famille de fonctions de distribution anisotropes, qui présente l'avantage d'exprimer la fonction de distribution en termes d'une variable unique :

$$f(E, J) = f \left( E + \frac{J^2}{2r_a^2} \right) \quad , \quad (4.64)$$

où  $r_a$  est encore un rayon d'anisotropie. On peut donc appliquer les modèles d'Osipkov-Merritt à n'importe quel profil de densité physique. A nouveau,  $E$  domine au centre et  $J$  au bord, de sorte qu'un système Osipkov-Merritt est isotrope au centre et possède une anisotropie radiale aux bords.

La figure 4.4 illustre les fonctions de distribution exponentielle, King et Wilson, avec les problèmes de discontinuité en  $E = 0$  de  $f$  ou de  $df/dE$ .

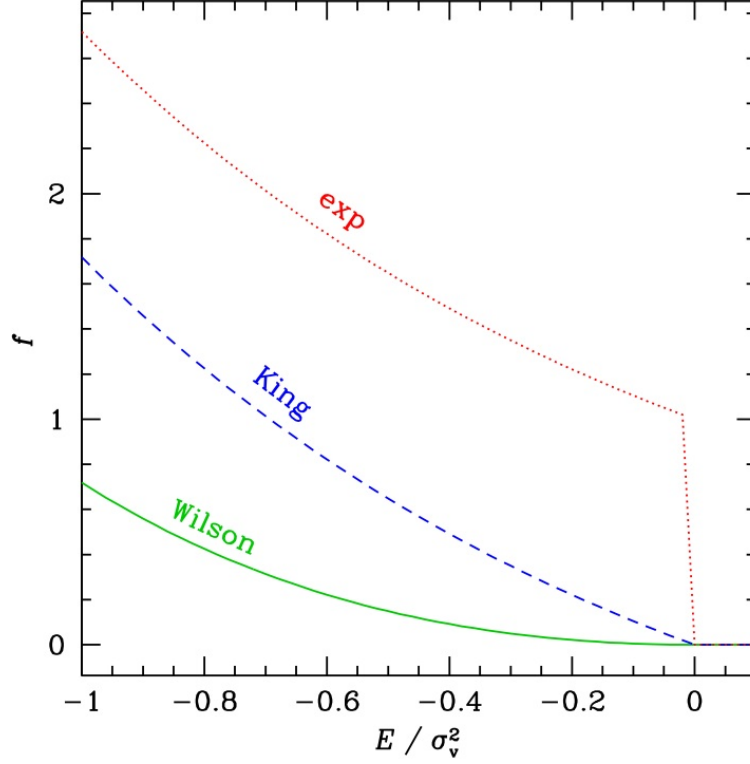


FIG. 4.4 – Fonctions de distribution exponentielle, King et Wilson. (D’après G. Mamon 2008-2009).

### 4.3 Les équations de Jeans

Pour comparer la théorie avec l’observation, il est utile de définir des valeurs moyennes, comme la vitesse moyenne et la dispersion des vitesses. Ici, on définit des **moments de la DF**, sans chercher à retrouver la DF elle-même.

On part d’abord de l’équation de Boltzmann sans collisions, i.e., l’Equ. (4.14), que l’on intègre sur les vitesses :

$$\int d^3\mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial t} + \int d^3\mathbf{v} v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} - \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \int d^3\mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial v_i} = 0$$

avec la convention de sommation implicite, par exemple :

$$v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \equiv \sum_{i=1}^3 v_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

Le domaine des vitesses sur lequel on intègre ne dépend pas du temps, si bien que l'on peut intervertir l'intégrale et la dérivée par rapport au temps aussi bien que la dérivée par rapport à  $x_i$ . Ainsi, en utilisant le fait que  $\nu \equiv \int d^3\mathbf{v} f$ , que  $\bar{v}_i = \int d^3\mathbf{v} v_i f / \int d^3\mathbf{v} f$  et en faisant appel, pour le troisième terme, au théorème de la divergence qui permet de remplacer l'intégrale sur le volume par une intégrale sur une surface arbitrairement éloignée du centre<sup>3</sup>, on obtient :

$$\frac{\partial \nu}{\partial t} + \frac{\partial \nu \bar{v}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (4.65)$$

C'est le premier ensemble d'**équations de Jeans**. Cette équation ressemble à l'équation de continuité, où l'on aurait remplacé la densité de matière  $\rho$  par la probabilité de présence  $\nu$  et la vitesse  $\mathbf{v}$  du fluide par la vitesse stellaire moyenne  $\bar{\mathbf{v}}$ .

Un autre ensemble d'équations s'obtient en multipliant l'équation de Boltzmann sans collisions, i.e., l'Equ. (4.14) par  $v_j$  avant de l'intégrer sur les vitesses :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int d^3\mathbf{v} f v_j + \int d^3\mathbf{v} v_j \frac{\partial f}{\partial x_i} - \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \int d^3\mathbf{v} v_j \frac{\partial f}{\partial v_i} = 0 \quad (4.66)$$

Le premier terme n'est autre que  $\nu \bar{v}_j$  ; le deuxième est égal à  $\frac{\partial}{\partial x_i} (\nu \bar{v}_i \bar{v}_j)$ . Quant au troisième terme, qui est en réalité la somme

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \int d^3\mathbf{v} v_j \frac{\partial f}{\partial v_i} \quad ,$$

---

<sup>3</sup>il s'agit de montrer que le dernier terme est nul, sachant que c'est une somme. On peut le faire de deux manières. 1) on considère isolément l'intégrale de chaque terme de la somme et on montre qu'elle est nulle :  $\int d^3\mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial v_i} = \int d^2\mathbf{v} \int_{-\infty}^{+\infty} dv \frac{\partial f}{\partial v_i} = \int d^2\mathbf{v} [f]_{-\infty}^{+\infty} = 0$  car  $f$  s'annule à l'infini. 2) On exploite le fait que ni  $\Phi$ , ni son gradient ne dépend de la vitesse, si bien que l'on peut réarranger les termes et appliquer le théorème de la divergence :

$$\sum_i \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \int d^3\mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial v_i} = \int d^3\mathbf{v} \sum_i \frac{\partial}{\partial v_i} \left( f \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right) = \int d^3\mathbf{v} \nabla_{\mathbf{v}} (f \nabla_{\mathbf{x}} \Phi) = \int d^2\mathbf{v} f \nabla_{\mathbf{x}} \Phi = 0$$



on peut écrire que, pour chaque terme de la somme :

$$\int d^3\mathbf{v} \frac{\partial}{\partial v_i} (v_j f) = \int d^3\mathbf{v} v_j \frac{\partial f}{\partial v_i} + \int d^3\mathbf{v} \frac{\partial v_j}{\partial v_i} f = 0$$

En effet, cette quantité est nulle, car on peut l'écrire

$$\int d^2\mathbf{v} \int_{-\infty}^{\infty} dv_i \frac{\partial}{\partial v_i} (v_j f) = \int d^2\mathbf{v} [(v_j f)]_{-\infty}^{\infty} = 0$$

compte tenu du fait que le produit  $v_j f$  s'annule à l'infini<sup>4</sup> ( $f$  décroît plus vite que  $v_j$  n'augmente). Par conséquent, chaque intégrale du troisième membre de l'équation 4.66 devient :

$$\int d^3\mathbf{v} v_j \frac{\partial f}{\partial v_i} = - \int d^3\mathbf{v} \frac{\partial v_j}{\partial v_i} f = - \int d^3\mathbf{v} \delta_{ij} f = -\delta_{ij} \nu$$

Le troisième terme cesse ainsi d'être une somme et l'équation 4.66 se réduit alors à :

$$\frac{\partial(\nu \bar{v}_j)}{\partial t} + \frac{\partial(\nu \bar{v}_i \bar{v}_j)}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} = 0 \quad (4.67)$$

On soustrait maintenant  $\bar{v}_j$  fois l'équation de continuité Equ. (4.65) à l'Equ. (4.67), ce qui donne :

$$\nu \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial t} - \bar{v}_j \frac{\partial(\nu \bar{v}_i)}{\partial x_i} + \frac{\partial(\nu \bar{v}_i \bar{v}_j)}{\partial x_i} = -\nu \frac{\partial \Phi}{\partial x_j}$$

On peut éliminer  $\bar{v}_i \bar{v}_j$  en introduisant le **tenseur de dispersion des vitesses** :

---

<sup>4</sup>Comme pour la première équation, on peut aussi réarranger les termes puis appliquer le théorème de la divergence :

$$\int d^3\mathbf{v} \sum_i \frac{\partial}{\partial v_i} \left( v_j f \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right) = \int d^3\mathbf{v} \nabla_{\mathbf{v}} (v_j f \nabla_{\mathbf{x}} \Phi) = \int d^2\mathbf{v} v_j f \nabla_{\mathbf{x}} \Phi = 0$$

Par ailleurs, on a  $\nabla_{\mathbf{v}} (v_j f \nabla_{\mathbf{x}} \Phi) = v_j \nabla_{\mathbf{v}} (f \nabla_{\mathbf{x}} \Phi) + \nabla_{\mathbf{v}} v_j \cdot f \nabla_{\mathbf{x}} \Phi$ , de sorte que

$$\int d^3\mathbf{v} v_j \nabla_{\mathbf{v}} (f \nabla_{\mathbf{x}} \Phi) = - \int d^3\mathbf{v} f \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \delta_{ij} = - \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \int d^3\mathbf{v} f = -\nu \frac{\partial \Phi}{\partial x_j}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{ij}^2(\mathbf{x}) &\equiv \frac{1}{\nu(\mathbf{x})} \int d^3\mathbf{v} (v_i - \bar{v}_i)(v_j - \bar{v}_j) f(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \\
&= \overline{v_i v_j} - \bar{v}_i \bar{v}_j \quad \Rightarrow \quad \overline{v_i v_j} = \sigma_{ij}^2 + \bar{v}_i \bar{v}_j
\end{aligned}$$

Il nous reste alors la seconde **équation de Jeans**, qui est en fait un ensemble de trois équations :

$$\nu \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial t} + \nu \bar{v}_i \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} = -\nu \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} - \frac{\partial(\nu \sigma_{ij}^2)}{\partial x_i} \quad (4.68)$$

Cette équation peut être comparée à l'équation d'Euler :

$$\rho \frac{\partial v_j}{\partial t} + \rho v_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} = -\rho \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} - \frac{\partial p}{\partial x_j} \quad (4.69)$$

(dans le cas statique, l'équation d'Euler se réduit à l'équation d'équilibre hydrostatique) : la densité de masse  $\rho$  est remplacée par la densité de probabilité  $\nu$  et la vitesse du fluide est remplacée par la vitesse moyenne des étoiles. Le gradient de pression est remplacé par le gradient de  $\nu \sigma_{ij}^2$ , qui est une sorte de **tenseur des tensions** décrivant une pression **anisotrope**. La dispersion des vitesses stellaires joue donc le rôle d'une pression.

Les deux ensembles d'équations de Jeans forment un total de quatre équations. Dans le cas où l'on connaît le potentiel  $\Phi(\mathbf{x}, t)$  et la densité de probabilité  $\nu(\mathbf{x}, t)$ , on a au total neuf inconnues : les trois composantes de la vitesse moyenne, plus les six composantes indépendantes (trois diagonales et trois non diagonales) du tenseur symétrique  $\sigma_{ij}$ . Il y a donc davantage d'inconnues que d'équations, mais le système de quatre équations peut s'avérer suffisant dans les cas où des symétries permettent de réduire le nombre d'inconnues.

## 4.4 Identité de Lagrange, critère de Jacobi et théorème du viriel

### 4.4.1 Identité de Lagrange, critère de Jacobi

On définit le moment d'inertie :

$$I = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{x}_i^2 \quad (4.70)$$

Cette grandeur est une mesure de l'extension du système. En dérivant par rapport au temps, on obtient :

$$\dot{I} = 2 \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{x}_i \cdot \dot{\mathbf{x}}_i \quad (4.71)$$

$$\ddot{I} = 2 \sum_{i=1}^N (m_i \mathbf{x}_i \cdot \ddot{\mathbf{x}}_i + m_i \dot{\mathbf{x}}_i^2) = -2 \sum_{i=1}^N \mathbf{x}_i \cdot \nabla_{\mathbf{x}_i} W + 4K \quad (4.72)$$

Si  $W$  est une fonction  $k$ -homogène, alors :

$$\ddot{I} = -2kW + 4K \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\ddot{I} = 2K - kW \quad (4.73)$$

Cette dernière équation est connue sous le nom **d'identité de Lagrange**.

Remarquons que pour une énergie potentielle de la forme  $W = W_1 + W_2 + W_3 + \dots$ , où les  $W_j$  sont des fonctions  $k_j$ -homogènes alors :

$$\frac{1}{2}\ddot{I} = 2K - k_1 W_1 - k_2 W_2 - k_3 W_3 + \dots$$

De tels potentiels se rencontrent par exemple en chimie, où le potentiel entre deux molécules est décrit par le potentiel de Lennard-Jones (donné en énergie par unité de masse) :

$$\Phi_{LJ} = 4\epsilon \left[ \left( \frac{\sigma}{r} \right)^{12} - \left( \frac{\sigma}{r} \right)^6 \right]$$

Le terme positif décrit la répulsion des molécules à courtes distances, alors que le terme négatif décrit l'attraction (via le moment dipolaire des molécules)

à grande distance. Il est donc possible, dans certains cas, de décomposer un potentiel compliqué en deux potentiels  $k$ -homogènes.

Dans le cas gravitationnel, on a déjà vu que  $k = -1$  et que  $W \leq 0$ , ainsi :

$$\frac{1}{2}\ddot{I} = 2K + W = 2(K + W) - W = 2E - W > 2E \quad (4.74)$$

En intégrant ensuite par rapport au temps, on obtient le **critère de Jacobi** :

$$\dot{I}(t) > 4Et + \dot{I}(0) \quad \text{et} \quad I(t) > 2Et^2 + \dot{I}(0)t + I(0) \quad (4.75)$$

Ainsi si  $E > 0$ , on voit que  $I(t) \rightarrow \infty$  pour  $t \rightarrow \infty$ , c'est-à-dire que le système, en moyenne, s'étend à l'infini, il y a donc une instabilité moyenne. Par contre si  $E < 0$ , le système peut être confiné pour toutes les valeurs du temps (ex : problèmes à deux corps sur des orbites elliptiques). Il s'agit d'une condition nécessaire à la stabilité, mais non suffisante.

#### 4.4.2 Théorème du viriel

Une moyenne temporelle  $\langle A \rangle$  sur une durée  $\tau$  d'une grandeur  $A$  peut se définir par :

$$\langle A \rangle(t) = \frac{1}{\tau} \int_{t-\tau/2}^{t+\tau/2} A(t') dt'$$

On peut aussi pondérer cette moyenne en convoluant  $A$  par des poids  $W(t)$  :

$$\langle A \rangle(t) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} W(t-t') A(t') dt'}{\int_{-\infty}^{\infty} W(t') dt'}$$

Les moyennes permettent de lisser les aspérités de courtes durées. Ceci est semblable aux idées développées en mécanique statistique.

De l'identité de Lagrange on avait :

$$\frac{1}{2}\ddot{I} = 2K - kW$$

En prenant les moyennes temporelles des trois fonctions, on obtient le **théorème du viriel** :

$$\frac{1}{2}\langle\ddot{I}\rangle = 2\langle K\rangle - k\langle W\rangle \quad (4.76)$$

Si le système est stationnaire en moyenne alors :

$$0 = \frac{1}{2}\langle\ddot{I}\rangle = 2\langle K\rangle - k\langle W\rangle \quad (4.77)$$

Dans le cas de la gravitation, où  $k = -1$ , on a :

$$2\langle K\rangle + \langle W\rangle = 0 \quad \leftrightarrow \quad \langle E\rangle = -\langle K\rangle \quad (4.78)$$

Dans le cas d'un oscillateur harmonique, où  $k = 2$ , il vient :

$$K \simeq \frac{1}{2}M (v_{rot}^2 + \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2)$$

$$2\langle K\rangle - 2\langle W\rangle = 0 \quad \leftrightarrow \quad \langle E\rangle = 2\langle K\rangle \geq 0$$

On peut établir une forme plus générale pour le théorème du viriel :

$$\frac{1}{2}\langle\ddot{I}\rangle = 2\langle K\rangle + \langle W_{grav}\rangle + 3\langle P_{int}V\rangle - 3\langle P_{ext}V\rangle + \frac{\langle B^2V\rangle}{8\pi} + \dots$$

dans laquelle on voit qu'un confinement ne peut se faire que par la gravitation ou par une pression externe puisque seuls les termes  $W_{grav}$  et  $-3\langle P_{ext}V\rangle$  sont négatifs.

### 4.4.3 Applications du théorème du viriel

L'énergie du système est donnée par :

$$E = K + W \simeq \frac{3}{2}M\langle v_x^2\rangle - \frac{GM^2}{\tilde{r}} \quad (4.79)$$

où  $\tilde{r}$  est défini par la moyenne harmonique :

$$\frac{\left(\sum_{i=1}^N m_i\right)^2}{\tilde{r}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{m_i m_j}{\|\vec{x}_i - \vec{x}_j\|} \quad (4.80)$$

et où on a supposé que  $\langle v_x^2\rangle = \langle v_y^2\rangle = \langle v_z^2\rangle$  et que  $\langle \vec{v}^2\rangle = 3\langle v_x^2\rangle$ . Dans bien des cas on peut déterminer la dispersion  $\langle v_r^2\rangle$  des vitesses le long de la ligne

de visée (i.e., via les vitesses radiales) par spectroscopie. La source étant en mouvement par rapport à l'observateur, les raies du spectre subissent un effet Doppler, directement mesurable  $\Delta\lambda/\lambda = v_r/c$ .

Pour un système lié gravitationnellement, on a  $E < 0$ , ce qui permet d'obtenir une borne inférieure pour la masse :

$$GM > \frac{3}{2}\langle v_r^2 \rangle \tilde{r} \quad (4.81)$$

Ceci permet à Zwicky, dans les années 1930 de remarquer que la masse virielle dans l'amas de galaxies de Coma est environ 50 à 100 fois plus grande que la masse visible (Zwicky, F., 1933, *Helv. Phys. Acta* 6, 110). La masse visible étant estimée à partir de la quantité de lumière reçue par un objet et en posant des hypothèses sur les populations d'étoiles et leur masse.

Si on suppose qu'un système dynamique donné est en contraction ou en expansion uniforme (et pas nécessairement en équilibre), le théorème du viriel donne :

$$\frac{1}{2}\ddot{I} = 0 = 2K + W \simeq 2\frac{3}{2}M\langle v_r^2 \rangle - \frac{GM^2}{\tilde{r}} \quad \Rightarrow \quad M \simeq \frac{3\langle v_r^2 \rangle \tilde{r}}{G} \quad (4.82)$$

### 1. Galaxies spirales

Par spectroscopie, il est possible d'obtenir la courbe de rotation (i.e., la vitesse radiale  $v_{rad}$  en fonction de la distance  $r$  au centre de la galaxie) des galaxies spirales.

En supposant que la matière est distribuée de manière sphérique, la force centripète est donnée par l'attraction gravitationnelle et s'écrit :

$$\frac{v_{rot}^2}{r} = \frac{GM(r)}{r^2}$$

où  $M(r)$  est la masse incluse dans la sphère de rayon  $r$ . La même relation aurait pu être obtenue à partir du théorème du viriel :

$$2K + W = 0 \Rightarrow 2\frac{1}{2}Mv_{rot}^2 \simeq \frac{GM^2}{r}$$

Si  $v_{rot} \simeq cte$  alors  $M(r)$  est proportionnel à  $r$  et diverge à l'infini, autrement dit la masse dynamique est infinie. Au contraire, d'après les

observations, on constate que la masse visible est finie. Ceci conduit au problème de la masse manquante ou matière sombre.

$$K \simeq \frac{1}{2}M (v_{rot}^2 + \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2)$$

Au lieu de supposer une distribution sphérique de la matière, on considère une distribution plus compliquée dans un disque, on ne change la valeur de la masse dynamique  $M$  que d'un facteur proche de 1, ce qui ne résoud pas le problème.

## 2. Galaxies elliptiques

Les observations de ces galaxies montrent qu'en général leur vitesse de rotation est faible mais que leur dispersion des vitesses est importante. La dispersion des vitesses dans une direction  $x$  donnée se détermine par :

$$M\sigma_x^2 = \sum_{i=1}^N m_i (v_{x,i} - \langle v_{x,i} \rangle)^2$$

Une estimation de l'énergie cinétique s'obtient par :

$$K \simeq \frac{1}{2}M (v_{rot}^2 + \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2)$$

On observe en général que la dispersion des vitesses le long de la ligne de visée  $\sigma_r$  est beaucoup plus importante que la vitesse de rotation.

Dans le spectre de ces galaxies, on observe plusieurs phénomènes. Premièrement un décalage spectral global des raies, traduisant un déplacement le long de la ligne de visée de la galaxie dans son ensemble, et deuxièmement un élargissement des raies provenant de la dispersion des vitesses radiales des étoiles de la galaxie elliptique.

Dans ces galaxies elliptiques, il est moins aisé d'estimer la quantité de matière sombre, puisque d'une part, une dispersion des vitesses est plus difficile à mesurer qu'une vitesse radiale, et puisque d'autre part, les galaxies elliptiques possèdent très peu de gaz. En effet, ceci implique que les courbes de rotation des elliptiques sont essentiellement données par les vitesses des étoiles. Malheureusement, les étoiles ne s'étendent pas aussi loin du centre de la galaxie elliptique que le gaz  $H$  dans les galaxies spirales (observable dans le domaine radio par la raie en

émission à 21 cm). Il nous manque donc une estimation de la dynamique loin des centres des galaxies elliptiques.

### 3. Amas de galaxies

Le théorème du viriel appliqué au amas de galaxies dévoile la présence d'importantes quantités de matière sombre.

Un résultat surprenant a été obtenu par les observations dans les rayons X. En effet, on a constaté la présence d'un gaz chaud de protons et d'électrons de  $10^7$  à  $10^8$  K situé entre les galaxies de l'amas. En reprenant alors le théorème du viriel pour le gaz chaud intergalactique, on obtient :

$$2K + W + 3PV = 0$$

où on introduit un terme de pression. Le gaz ne se déplaçant pratiquement pas dans son ensemble, son énergie cinétique est très faible. Les observations donnent une estimation des termes  $2K$  et  $3PV$ , ce qui permet ensuite d'évaluer  $W$ , puis finalement la masse virielle.

La masse virielle est concordante entre les mesures X et les vitesses radiales des galaxies.

La masse du gaz X représente environ 20 % de la masse gravitationnelle, ce qui signifie qu'il reste encore 80% de cette masse dont l'origine doit être expliquée.

### 4. Amas globulaires et galaxies naines sphéroïdales

Certains de ces objets gravitent autour de la Voie Lactée, notre Galaxie, et sont donc assez proches pour être étudiés individuellement. Lorsqu'on applique le théorème du viriel aux amas globulaires, on n'obtient pas de quantité significative de matière sombre.

Par contre, pour les galaxies naines sphéroïdales (dSph), les résultats sont très variables, indiquant peu à beaucoup de matière sombre, selon la dSph considérée. Mais on s'est rendu compte qu'il pouvait y avoir d'autres explications pour les évidences de matière sombre dans ces systèmes.

Une première explication provient des importantes queues de marée observées notamment dans les galaxies sphéroïdales. En effet, au-delà d'un certain rayon du centre de ces galaxies, c'est le champ gravitationnel de la Voie Lactée qui domine. Ce qui implique qu'un certain



nombre d'étoiles ne sont plus liées gravitationnellement à la galaxie sphéroïdale. Ceci induit potentiellement des erreurs lors de l'application du théorème du viriel. En effet, on pourrait prendre en compte des étoiles avec des vitesses importantes qui n'appartiennent plus à la galaxie sphéroïdale, conduisant ainsi à surestimer la masse dynamique. Une seconde explication émane du fait que les étoiles sont souvent binaires. Fréquemment une des deux étoiles est nettement plus brillante que l'autre. Par conséquent on aura l'impression de n'en voir qu'une seule. Or les vitesses orbitales (de l'ordre de 1 à 10 km/s) auront pour effet d'augmenter la dispersion des vitesses, sachant que la vitesse moyenne des étoiles dans un amas globulaire se situe autour de 5 km/s. Cet effet peut conduire à surestimer la masse dynamique. Néanmoins ce second phénomène demeure moins important que les effets induit par les queues de marée.

#### 4.4.4 Projection et déprojection (G. Mamon, 2008-2009)

Cette partie est tirée du cours de Gary Mamon (Institut d'Astrophysique de Paris) "Dynamique gravitationnelle des systèmes à N corps", version 2008-2009.

L'observateur ne peut voir son système dynamique qu'en projection, si bien que la connaissance de la structure 3D suppose l'adoption d'un modèle. Ici, nous allons considérer uniquement des objets doués de symétrie sphérique. On va donner les relations qui permettent d'une part de projeter les modèles, d'autre part de déprojeter les observations.

##### Profil de densité

Le profil de densité projetée de masse (ou de lumière, ce qui donne alors une brillance de surface) est donné par

$$\Sigma(R) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(r) dz = 2 \int_R^{\infty} \frac{\rho(r) r dr}{(r^2 - R^2)^{1/2}} \quad (4.83)$$

avec  $z = (r^2 - R^2)^{1/2}$  (Fig. 4.5). En termes mathématiques, *la densité de masse projetée est donc la **transformée d'Abel** de la densité spatiale.*

Pour déprojeter, il faut inverser l'équation intégrale d'Abel 4.83. A cette

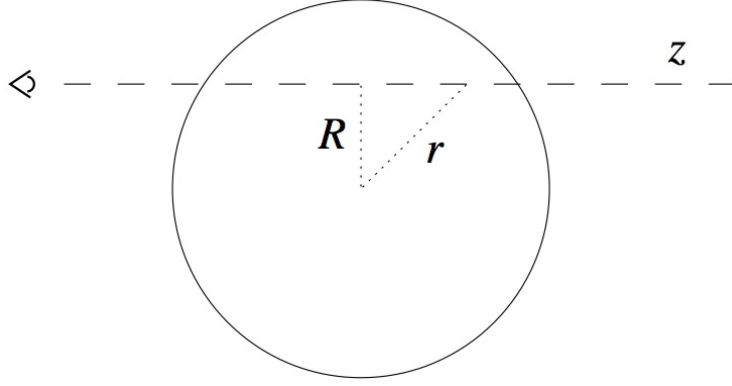


FIG. 4.5 – Projection de la densité.

fin, considérons la quantité auxiliaire

$$J(s) = \int_s^\infty \frac{\Sigma(R) R \, dR}{(R^2 - s^2)^{1/2}} \quad (4.84)$$

En remplaçant  $\Sigma(R)$  par sa définition 4.83, on obtient :

$$J(s) = 2 \int_s^\infty \frac{R \, dR}{(R^2 - s^2)^{1/2}} \int_R^\infty \frac{\rho(r) r \, dr}{(r^2 - R^2)^{1/2}} \quad (4.85)$$

$$= 2 \int_s^\infty \rho(r) r \, dr \int_s^r \frac{R \, dR}{(R^2 - s^2)^{1/2} (r^2 - R^2)^{1/2}} \quad (4.86)$$

où la seconde égalité découle de l'inversion de l'ordre d'intégration.

En posant  $\sin^2 \theta = (R^2 - s^2)/(r^2 - s^2)$ , l'intégrale interne de la seconde expression de 4.86 se réduit à

$$\int_0^{\pi/2} d\theta = \frac{\pi}{2} \quad (4.87)$$

(en effet, on a  $(R^2 - s^2)^{1/2} = \sin \theta (r^2 - s^2)^{1/2}$  et  $R \, dR = \sin \theta \cos \theta (r^2 - s^2) d\theta$ ) si bien que

$$J(s) = \pi \int_s^\infty \rho(r) r \, dr \quad (4.88)$$

et par conséquent

$$\rho(r) = -\frac{1}{\pi r} \frac{dJ}{dr} \quad . \quad (4.89)$$

Pour calculer la dérivée de  $J$ , on intègre par parties la forme 4.84 de  $J$ , et seule reste l'intégrale

$$J(r) = - \int_r^\infty \frac{d\Sigma}{dR} (R^2 - r^2)^{1/2} dR \quad , \quad (4.90)$$

car  $R\Sigma(R) \rightarrow 0$  quand  $R \rightarrow \infty$  pour tous les profils réalistes de densité de surface, qui tombent plus rapidement que  $1/R$ , ce qui est le cas pour les amas globulaires, les galaxies elliptiques et les amas de galaxies. Pour  $\Sigma(R)$  tombant exactement comme  $1/R$ , le terme de surface  $\lim_{R \rightarrow \infty} R\Sigma(R)$  est une constante finie, mais  $dJ/dr$  n'en est pas affecté.

Au vu de 4.90, l'équation 4.89 devient

$$\rho(r) = -\frac{1}{\pi} \int_r^\infty \frac{d\Sigma}{dR} \frac{dR}{(R^2 - r^2)^{1/2}} \quad . \quad (4.91)$$

Les équation de projection 4.83 et de déprojection 4.91 montrent que toute incertitude sur  $\rho(r)$  est lissée dans  $\Sigma(R)$  et surtout, pour ceux qui cherchent à modéliser des observations, que *toute incertitude sur  $\Sigma(R)$  est amplifiée dans  $\rho(r)$* .

## Déprojection cinématique

**Systèmes sphériques isotropes** Le carré de la dispersion de vitesses mesurée par l'observateur est la moyenne, pondérée par l'émissivité, des dispersions de vitesse le long de la ligne de vue. On a

$$\Sigma(R) \sigma_{ldv}^2(R) = \int_{-\infty}^\infty \rho(r) \sigma_r^2(r) dz = 2 \int_R^\infty \frac{\rho(r) \sigma_r^2(r) r dr}{(r^2 - R^2)^{1/2}} \quad . \quad (4.92)$$

Le terme  $\rho(r)$  est obtenu par inversion standard des équations de projection (éq. 4.91). Le terme  $\rho(r) \sigma_r^2(r)$  se projette comme dans l'équation 4.83 de projection. La déprojection de l'équation 4.92 se fait de manière analogue à la déprojection 4.91 de la densité :

$$\rho(r) \sigma_r^2(r) = -\frac{1}{\pi} \int_r^\infty \frac{d[\Sigma(R) \sigma_{ldv}^2(R)]}{dR} \frac{dR}{(R^2 - r^2)^{1/2}} \quad . \quad (4.93)$$

**Systèmes sphériques anisotropes** Quand le tenseur des vitesses est *anisotrope*, la situation se complique. Comme on le voit sur la Fig. 4.6, qui montre l'ellipsoïde des vitesses et sa projection le long de la ligne de vue, la composante de la vitesse le long de la ligne de vue est

$$v_{ldv} = v_r \cos \theta - v_\theta \sin \theta \quad (4.94)$$

où  $v_r$  est la composante radiale de la vitesse tandis que  $v_\theta$  est l'une des composantes tangentielles (on a choisi un repère dans lequel le vecteur  $v_\phi$  est perpendiculaire au plan défini par l'observateur, le centre du système et le point considéré). Alors, avec  $\cos \theta = \sqrt{r^2 - R^2}/r$  et  $\sin \theta = R/r$ , la projection donne (Binney & Mamon 1982) :

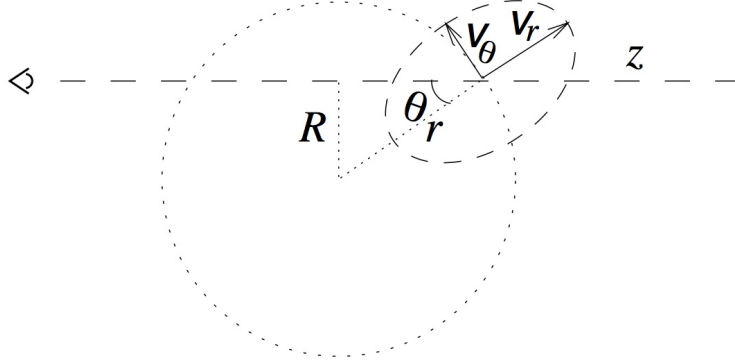


FIG. 4.6 – Projection des dispersions de vitesse. La vitesse  $v_\phi$  est perpendiculaire à la figure.

$$\begin{aligned} \Sigma(R) \sigma_{ldv}^2(R) &= 2 \int_R^\infty \overline{(v_r \cos \theta - v_\theta \sin \theta)^2} \frac{\rho(r) r dr}{(r^2 - R^2)^{1/2}} \\ &= 2 \int_R^\infty (\sigma_r^2 \cos^2 \theta + \sigma_\theta^2 \sin^2 \theta) \frac{\rho(r) r dr}{(r^2 - R^2)^{1/2}} \\ &= 2 \int_R^\infty \left[ 1 - \beta(r) \frac{R^2}{r^2} \right] \frac{\rho(r) \sigma_r^2(r) r dr}{(r^2 - R^2)^{1/2}} \end{aligned} \quad (4.95)$$

où la deuxième égalité découle de l'hypothèse d'absence de mouvements d'ensemble et du fait que les termes croisés du tenseur d'anisotropie sont nuls (puisque ce tenseur est issu d'une diagonalisation).

Dans l'équation 4.95,  $\beta(r) = 1 - \sigma_\theta^2/\sigma_r^2$  est le facteur *d'anisotropie des vitesses* :  $\beta = 1$  pour les dispersions de vitesses radiales,  $\beta = 0$  pour les vitesses isotropes et  $\beta \rightarrow -\infty$  pour les dispersions de vitesses tangentielles.

On pourrait croire que  $\beta$  doive être connu pour pouvoir poursuivre. En fait, il est possible de déterminer directement et séparément les profils de dispersion radiale de vitesses  $\sigma_r$  et d'anisotropie des vitesses  $\beta(r)$ . Pour cela, on réduit l'équation de Jeans 4.68 au cas stationnaire ( $\partial/\partial t = 0$ ) et on l'écrit en coordonnées sphériques, ce qui donne (Mamon 2008-2009, pp. 21–23)

$$\frac{d(\overline{\rho v_r^2})}{dr} + \frac{\rho}{r} \left[ 2\overline{v_r^2} - (\overline{v_\theta^2} + \overline{v_\phi^2}) \right] = -\rho \frac{d\Phi}{dr} \quad (4.96)$$

En faisant apparaître  $\beta$ , on a

$$\frac{d(\rho\sigma_r^2)}{dr} + 2\beta \frac{\rho\sigma_r^2}{r} = -\rho \frac{d\Phi}{dr} \quad (4.97)$$

et on en tire  $\beta$  :

$$2\beta \rho\sigma_r^2 = -\rho \frac{GM}{r} - r \frac{d(\rho\sigma_r^2)}{dr} \quad (4.98)$$

En introduisant cette expression dans 4.95, on obtient

$$\int_R^\infty \frac{2r \rho\sigma_r^2 + R^2 d(\rho\sigma_r^2)/dr}{(r^2 - R^2)^{1/2}} dr = \Sigma(R) \sigma_{ldv}^2(R) - R^2 G \int_R^\infty \frac{\rho M dr}{r^2 (r^2 - R^2)^{1/2}} \quad (4.99)$$

où  $M$  est la masse contenue dans le rayon  $r$ . Si on connaît le profil de masse  $M(r)$  ou, de façon équivalente, le profil de  $M/L$  (car on connaît le profil de luminosité par l'intégration du profil d'émissivité déduit par déprojection du profil de brillance de surface avec l'éq. 4.91), alors le terme de droite de l'équation 4.99 est connu.

L'inversion de l'équation intégrale 4.99 est difficile. Elle a été résolue de cinq façons différentes par Binney & Mamon (1982), Tonry (1983), Bicknell et al. (1989), Solanes & Salvador-Solé (1990) et Dejonghe & Merritt (1992). La méthode d'inversion la plus employée est celle de Solanes & Salvador-Solé (1990). Cette démarche est appelée *inversion d'anisotropie*. On peut procéder dans l'autre sens, supposer  $\beta(r)$ , déprojeter, puis déterminer  $M(r)$  par l'équation de Jeans. Cette démarche-là (Mamon & Boué 2010) s'appelle *inversion de masse*.

# Chapitre 5

## Stabilité des systèmes sans collisions

### 5.1 Introduction

Tout modèle décrivant de manière satisfaisante un système stellaire qui existe dans la nature devrait être (relativement) stable, puisque le fait même que l'on observe un système donné implique que sa durée de vie n'est pas négligeable. Dans le cas contraire, on n'en observerait pratiquement pas. Or, il se trouve que de nombreux modèles de systèmes stellaires autogravitants, en équilibre, sont instables et donc peu utiles. Par exemple, un disque stellaire "infinitement" fin, constitué d'étoiles se mouvant en orbites circulaires, est violemment instable. Il faut un certain degré minimum de mouvements aléatoires (c'est-à-dire avoir un disque chaud plutôt que froid) pour stabiliser un disque. Ainsi, il est impératif de tester la stabilité de tout modèle que la théorie suggère.

On discute ici de la persistance d'instabilités causées par des effets collectifs : une perturbation de densité cause une force de gravité supplémentaire, qui dévie les orbites stellaires de façon à amplifier la perturbation initiale. Il s'agit donc d'un autre type d'instabilités que celles examinées au Chapitre 3, où il était question de stabilité d'orbites dans un potentiel gravitationnel fixe.

La réponse d'un disque galactique à une telle perturbation dépend très fortement de la rotation différentielle, car celle-ci fait subir un cisaillement aux perturbations. Ce cas est examiné au Chapitre 6, qui discute la cause de

la structure spirale des galaxies. Dans ce Chapitre 5, on se limite aux systèmes stellaires statiques et en rotation uniforme (i.e., de vitesse angulaire unique et constante avec le temps).

Il y a une analogie entre les systèmes stellaires et :

1. *les fluides autogravitants* : dans les fluides, c'est le gradient de pression scalaire  $p$  qui s'oppose à la gravitation, alors que dans les systèmes stellaires, ce sont les gradients du tenseur des tensions  $\nu\sigma_{ij}^2$  (stress tensor, Chapitre 4, Equations de Jeans). Si le gradient de pression d'un fluide résiste à l'effondrement gravitationnel, un système stellaire le fait parce que la dispersion de vitesses en chaque point permet de diluer une augmentation locale de densité avant qu'elle ait eu le temps de croître.
2. *les plasmas électrostatiques* : comme dans les systèmes stellaires, le champ moyen, dans un plasma peu dense, est plus important que les interactions entre particules voisines. Certains aspects de la physique des plasmas peuvent donc servir à la dynamique stellaire. La différence majeure réside dans le fait que les plasmas comportent des charges positives et négatives et sont donc neutres aux grandes échelles. Ils peuvent former des équilibres homogènes. La gravitation étant toujours attractive, les systèmes autogravitants, par contre, doivent toujours être inhomogènes.

### 5.1.1 Réponse linéaire

Soit un système en équilibre de densité  $\rho_s(\mathbf{x})$  qui subit un champ gravitationnel externe  $-\epsilon\nabla\Phi_e$ , où  $|\nabla\Phi_e|$  est du même ordre que le champ dans le système en équilibre, et où  $\epsilon \ll 1$ . La distribution de densité qu'engendrerait ce champ,  $\epsilon\rho_e(\mathbf{x}, t)$  est solution de l'équation de Poisson :

$$\nabla^2\Phi_e = 4\pi G\rho_e. \quad (5.1)$$

La perturbation gravitationnelle étant faible, la réponse est linéaire et donc proportionnelle à  $\epsilon$ . La perturbation de densité dans le système peut alors s'écrire  $\epsilon\rho_{s1}(\mathbf{x}, t)$ , que l'on peut exprimer à l'aide d'une **fonction de réponse**  $R = R(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \tau)$  définie par la relation :

$$\rho_{s1}(\mathbf{x}, t) = \int d^3\mathbf{x}' dt' R(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t - t') \rho_e(\mathbf{x}', t') \quad (5.2)$$

Comme le système en équilibre est indépendant du temps, la réponse au temps  $t$  à une perturbation instantanée en  $t'$  ne dépend que du délai  $t - t'$ . De plus, comme l'effet ne peut précéder la cause, on a  $R(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \tau) = 0$  pour  $\tau < 0$ .

La perturbation de densité  $\rho_e$  et la réponse  $\rho_{s1}$  contribuent toutes deux au potentiel gravitationnel, et la dynamique du système est déterminée par le potentiel perturbant **total**  $\Phi_1 = \Phi_e + \Phi_{s1}$ . La densité correspondante est  $\rho_1 = \rho_e + \rho_{s1}$ . On définit la **fonction de polarisation**  $P = P(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \tau)$  par la relation entre la densité-réponse  $\rho_{s1}$  et la perturbation totale de densité  $\rho_1$  :

$$\rho_{s1}(\mathbf{x}, t) = \int d^3\mathbf{x}' dt' P(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t - t') \rho_1(\mathbf{x}', t') \quad (5.3)$$

Ici aussi,  $P(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \tau) = 0$  pour  $\tau < 0$ .

Il est important de comprendre la différence physique entre la **fonction de réponse** et la **fonction de polarisation**. La fonction de réponse décrit la réponse de la densité à une force perturbante extérieure, tandis que la fonction de polarisation décrit la réponse de la densité à la force perturbante totale, qui inclut la contribution de la gravité de la réponse elle-même. Si cette dernière est négligeable, alors les fonctions de réponse et de polarisation sont égales.

Il est utile d'introduire la transformée de Fourier temporelle d'une fonction  $y(\tau)$  qui s'annule pour  $\tau < 0$  :

$$\tilde{y}(\omega) = \int_0^\infty d\tau y(\tau) e^{i\omega\tau} \quad ; \quad y(\tau) = \int_{ic-\infty}^{ic+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \tilde{y}(\omega) e^{-i\omega\tau} \quad (5.4)$$

avec le nombre réel  $c > 0$  suffisamment grand pour que  $\int d\tau \exp(-c\tau) y(\tau)$  converge. En utilisant les transformées de Fourier de  $R$  et de  $P$ , la convolution sur le temps dans l'Equ. (5.2) ou (5.3) se simplifie en une multiplication :

$$\tilde{\rho}_{s1}(\mathbf{x}, \omega) = \int d^3\mathbf{x}' \tilde{R}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \omega) \tilde{\rho}_e(\mathbf{x}', \omega) = \int d^3\mathbf{x}' \tilde{P}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \omega) \tilde{\rho}_1(\mathbf{x}', \omega) \quad (5.5)$$

En général on peut définir les fonctions  $\tilde{R}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \omega)$  et  $\tilde{P}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \omega)$  sur tout le plan complexe  $\omega$ , sauf pour des pôles isolés. En pratique, la fonction de réponse ne peut être déterminée analytiquement que pour des systèmes simples. Des techniques numériques puissantes existent pour les autres cas.



### 5.1.2 Equations linéarisées

Les systèmes stellaires sans collisions obéissent à l'équation de Boltzmann sans collisions :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + [f, H] = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = 0 \quad (5.6)$$

et à l'équation de Poisson

$$\nabla^2 \Phi_s(\mathbf{x}, t) = 4\pi G \int d^3\mathbf{v} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \quad (5.7)$$

où  $\Phi(\mathbf{x}, t)$  est le potentiel total,  $H = \frac{1}{2}v^2 + \Phi(\mathbf{x}, t)$  l'hamiltonien, [..., ...] le crochet de Poisson et  $\Phi_s(\mathbf{x}, t)$  le potentiel gravitationnel du système stellaire, qui peut différer du potentiel total  $\Phi(\mathbf{x}, t)$  s'il existe une force extérieure.

Il est important de remarquer que, dans ce Chapitre 5, la DF  $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$  est définie comme *la masse des étoiles par unité de volume de l'espace de phase* et non plus comme une densité de probabilité comme c'était le cas au Chapitre 4.

Un système stellaire isolé en équilibre est décrit par une DF indépendante du temps  $f_0(\mathbf{x}, \mathbf{v})$  et un potentiel  $\Phi_0(\mathbf{x})$  qui sont solutions des deux équations ci-dessus :

$$[f_0, H_0] = 0 \quad ; \quad \nabla^2 \Phi_0 = 4\pi G \int d^3\mathbf{v} f_0 \quad (5.8)$$

avec  $H_0 = \frac{1}{2}v^2 + \Phi_0(\mathbf{x})$ .

On soumet à présent ce système à une légère force gravitationnelle émanant de quelque potentiel extérieur  $\epsilon\Phi_e(\mathbf{x}, t)$ , avec  $|\nabla\Phi_e|$  du même ordre que  $|\nabla\Phi_0|$  et  $\epsilon \ll 1$ . En réaction à cette perturbation, la DF du système stellaire et le potentiel émanant de ses étoiles deviennent :

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = f_0(\mathbf{x}, \mathbf{v}) + \epsilon f_1(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \quad ; \quad \Phi_s(\mathbf{x}, t) = \Phi_0(\mathbf{x}) + \epsilon\Phi_{s1}(\mathbf{x}, t) \quad (5.9)$$

Le potentiel gravitationnel total devient :

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = \Phi_0(\mathbf{x}, t) + \epsilon\Phi_1(\mathbf{x}, t) \quad \text{avec} \quad \Phi_1(\mathbf{x}, t) = \Phi_{s1}(\mathbf{x}, t) + \Phi_e(\mathbf{x}, t) \quad (5.10)$$

et l'hamiltonien de l'Equ. (5.6) devient  $H = H_0 + \epsilon\Phi_1$ . En introduisant tout cela dans les Equations (5.6) et (5.7), on aboutit à :

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + [f_1, H_0] + [f_0, \Phi_1] = 0 \quad ; \quad \nabla^2 \Phi_{s1} = 4\pi G \int d^3\mathbf{v} f_1 \quad (5.11)$$

**Question - exercice :** Démontrer cela.

La première équation ci-dessus est **l'équation de Boltzmann sans collisions** (Equ. (5.6) ) **linéarisée**. La seconde est l'équation de Poisson Equ. (5.7), mais qui lie  $\Phi_{s1}$  à  $f_1$  au lieu de lier  $\Phi_s$  à  $f$ .

L'Equ. (4.14) dit que :

$$\frac{df_1}{dt} = \frac{\partial f_1}{\partial t} + [f_1, H_0] \quad (5.12)$$

est le taux de changement de  $f_1$  vu par un observateur qui se déplacerait dans l'espace de phase le long de l'orbite non perturbée. Par conséquent, les deux premiers termes de la première Equ. (5.11) peuvent être remplacés par  $df_1/dt$ . Puis en intégrant, il vient :

$$f_1(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = - \int_{-\infty}^t dt' [f_0, \Phi_1]_{\mathbf{x}(t'), \mathbf{v}(t'), t'} \quad (5.13)$$

où le crochet de Poisson est évalué le long de l'orbite non perturbée  $\mathbf{x}(t'), \mathbf{v}(t')$  qui atteint  $\mathbf{x}, \mathbf{v}$  au temps  $t$ .

Dans le cas d'un fluide, le système est caractérisé par une densité  $\rho_s(\mathbf{x}, t)$ , une pression  $p(\mathbf{x}, t)$ , une vitesse  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  et un potentiel  $\Phi(\mathbf{x}, t)$ . Ces grandeurs sont reliées par l'équation de continuité (Appendice F, Fluid Mechanics, Binney & Tremaine) :

$$\frac{\partial \rho_s}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_s \mathbf{v}) = 0, \quad (5.14)$$

par l'équation d'Euler :

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho_s} \nabla p - \nabla \Phi \quad (5.15)$$

et par l'équation de Poisson :

$$\nabla^2 \Phi_s = 4\pi G \rho_s \quad (5.16)$$

où :

$$\Phi = \Phi_s + \epsilon\Phi_e \quad (5.17)$$

est la somme des potentiels issus du système fluide lui-même et de la distribution de masse perturbatrice.

L'équation d'état, reliant la pression et la densité, doit être définie et on la choisira simple, en se contentant de celle des fluides barotropiques, où la pression n'est fonction que de la densité :

$$p(\mathbf{x}, t) = p[\rho_s(\mathbf{x}, t)] \quad (5.18)$$

De cette manière, l'équation d'Euler Equ. (5.15) devient :

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla(h + \Phi) \quad (5.19)$$

où l'on a introduit l'enthalpie spécifique :

$$h(\rho_s) \equiv \int_0^{\rho_s} \frac{dp(\rho)}{\rho}. \quad (5.20)$$

En l'absence d'autogravité, dans un fluide barotropique quelconque, les faibles perturbations de courte longueur d'onde se propagent à la vitesse du son  $v_s$  :

$$v_s^2(\mathbf{x}) \equiv \left[ \frac{dp(\rho)}{d\rho} \right]_{\rho_0(\mathbf{x})} \quad (5.21)$$

Un système fluide à l'équilibre et isolé est décrit par les grandeurs indépendantes du temps  $\rho_0(\mathbf{x})$ ,  $h_0(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{v}_0(\mathbf{x})$  et  $\Phi_0(\mathbf{x})$ , solutions des Equations (5.14)–(5.19). La réponse du système à un faible potentiel extérieur  $\epsilon\Phi_e(\mathbf{x}, t)$  est :

$$\begin{aligned} \rho_s(\mathbf{x}, t) &= \rho_0(\mathbf{x}) + \epsilon\rho_{s1}(\mathbf{x}, t) & ; & \quad h(\mathbf{x}, t) = h_0(\mathbf{x}) + \epsilon h_1(\mathbf{x}, t) \\ \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{v}_0(\mathbf{x}) + \epsilon\mathbf{v}_1(\mathbf{x}, t) & ; & \quad \Phi(\mathbf{x}, t) = \Phi_0(\mathbf{x}) + \epsilon\Phi_1(\mathbf{x}, t) \end{aligned} \quad (5.22)$$

Le potentiel  $\Phi_1 = \Phi_{s1} + \Phi_e$  est la perturbation totale du potentiel, la somme du potentiel extérieur  $\Phi_e$  et du potentiel  $\Phi_{s1}$  qui résulte de la perturbation de densité  $\rho_{s1}$ . Substituant l'Equ. (5.22) dans les Equations (5.14)–(5.21), on obtient au premier ordre :

$$\frac{\partial \rho_{s1}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{v}_1) + \nabla \cdot (\rho_{s1} \mathbf{v}_0) = 0 \quad (5.23)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} + (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \mathbf{v}_1 + (\mathbf{v}_1 \cdot \nabla) \mathbf{v}_0 = -\nabla(h_1 + \Phi_{s1} + \Phi_e) \quad (5.24)$$

$$\nabla^2 \Phi_{s1} = 4\pi G \rho_{s1} \quad (5.25)$$

$$h_1 = \frac{p_1}{\rho_0} = \left( \frac{dp}{d\rho} \right)_{\rho_0} \frac{\rho_{s1}}{\rho_0} = v_s^2 \frac{\rho_{s1}}{\rho_0} \quad (5.26)$$

Ce sont là les équations linéaires qui gouvernent la réponse d'un fluide barotrope à de faibles perturbations.

**Question - exercice :** Démontrer les Equations (5.23) à (5.26).

## 5.2 Réponse des systèmes homogènes

### 5.2.1 Bases physiques de l'instabilité de Jeans

On peut aborder l'instabilité de Jeans de manière simple. On considère un fluide uniforme de densité  $\rho_0$  et de pression  $p_0$ . Le fluide est également considéré comme statique (i.e., sans champ de vitesse :  $\mathbf{v}_0 = 0$ ). Dans ce milieu, définissons une sphère de rayon  $r$  et comprimons-la légèrement jusqu'au rayon  $(1 - \varepsilon)r$ , avec  $\varepsilon \ll 1$ . L'ordre de grandeur de la perturbation, en termes de densité et de pression, est donné par :

$$\begin{aligned}\rho_1 &\sim \varepsilon \rho_0 \\ p_1 &\sim \frac{dp}{d\rho} \varepsilon \rho_0\end{aligned}$$

**Question - exercice :** Pourquoi ?

La force due à la pression, par unité de masse, vaut :

$$\mathbf{F}_p = -\frac{\nabla p}{\rho}$$

Le fait que le matériau ait été comprimé implique une pression supplémentaire dirigée vers l'extérieur,  $\mathbf{F}_{p1}$ , qui vaut alors, en remplaçant le gradient par  $1/r$  :

$$|\mathbf{F}_{p1}| \sim \frac{p_1}{\rho_0 r} \sim \varepsilon \frac{v_s^2}{r}$$

Mais par ailleurs, l'augmentation de densité due à la perturbation donne lieu à un incrément de force gravitationnelle égal à :

$$|\mathbf{F}_{g1}| \sim \varepsilon \frac{GM}{r^2} \sim G\rho_0 r \varepsilon$$

où l'on a substitué la masse initialement contenue à l'intérieur du rayon  $r$ , par son expression  $M = \frac{4}{3}\pi\rho_0 r^3$ . Il y a donc instabilité si :

$$\begin{aligned}|\mathbf{F}_{g1}| &> |\mathbf{F}_{p1}| \\ G\rho_0 r \varepsilon &\gtrsim \varepsilon \frac{v_s^2}{r} \quad \Leftrightarrow \quad r^2 \gtrsim \frac{v_s^2}{G\rho_0}\end{aligned}$$

**Instabilité de Jeans :** *Les perturbations qui possèdent une échelle plus grande que  $\approx v_s/(G\rho_0)^{1/2}$  sont instables.* On va examiner plus en détail cette instabilité dans le cas de systèmes plus réalistes.

### 5.2.2 Systèmes homogènes et “duperie de Jeans”

Bien qu’un système gravitationnel, homogène et infini, ne puisse être en équilibre statique, il est utile de construire de tels systèmes vu que les propriétés de leur stabilité linéaire sont assez faciles à analyser. Si l’on considère la fonction de réponse  $R(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \tau)$  définie par l’Equ. (5.2), on voit que dans un système homogène elle ne peut dépendre de  $\mathbf{x}$  et de  $\mathbf{x}'$  qu’au travers de leur différence, de sorte que cette fonction est de la forme  $R(\mathbf{x} - \mathbf{x}', \tau)$ . Ainsi, l’Equ. (5.2) se réduit à une convolution dans les dimensions spatiales aussi bien que dans la dimension temporelle.

De même qu’une convolution dans le temps suggère l’utilisation de transformées de Fourier temporelles, une convolution dans l’espace suggère l’utilisation de transformées de Fourier spatiales du type suivant :

$$\bar{g}(\mathbf{k}) = \int d^3\mathbf{x} g(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \quad ; \quad g(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \bar{g}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \quad (5.27)$$

On suppose que toutes les fonctions en question s’annulent à l’infini, de sorte que leur transformée de Fourier existe.

En remplaçant, dans l’Equ. (5.2),  $R(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \tau)$  par  $R(\mathbf{x} - \mathbf{x}', \tau)$  et en procédant de même pour la fonction de polarisation donnée par l’Equ. (5.3), puis en multipliant les deux équations par  $\exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})$  et en intégrant sur  $d^3\mathbf{x}$ , on trouve :

$$\bar{\rho}_{s1}(\mathbf{k}, t) = \int dt' \bar{R}(\mathbf{k}, t - t') \bar{\rho}_e(\mathbf{k}, t') = \int dt' \bar{P}(\mathbf{k}, t - t') \bar{\rho}_1(\mathbf{k}, t') \quad (5.28)$$

Prenons à présent la transformée de Fourier temporelle :

$$\tilde{\rho}_{s1}(\mathbf{k}, \omega) = \tilde{R}(\mathbf{k}, \omega) \tilde{\rho}_e(\mathbf{k}, \omega) = \tilde{P}(\mathbf{k}, \omega) \tilde{\rho}_1(\mathbf{k}, \omega) \quad (5.29)$$

En utilisant la relation  $\rho_1 = \rho_{s1} + \rho_e$  (voir Equ. (5.10)), la dernière équation devient :

$$\tilde{\rho}_{s1}(\mathbf{k}, \omega) = \tilde{R}(\mathbf{k}, \omega) \tilde{\rho}_e(\mathbf{k}, \omega) = \tilde{P}(\mathbf{k}, \omega) [\tilde{\rho}_{s1}(\mathbf{k}, \omega) + \tilde{\rho}_e(\mathbf{k}, \omega)] \quad (5.30)$$

et l'on obtient des relations simples entre les fonctions de réponse et de polarisation :

$$\tilde{\tilde{R}}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{\tilde{\tilde{P}}(\mathbf{k}, \omega)}{1 - \tilde{\tilde{P}}(\mathbf{k}, \omega)} \quad ; \quad \tilde{\tilde{P}}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{\tilde{\tilde{R}}(\mathbf{k}, \omega)}{1 + \tilde{\tilde{R}}(\mathbf{k}, \omega)} \quad (5.31)$$

On construit un équilibre artificiel d'un système homogène en commettant ce que l'on appelle la **duperie de Jeans (Jeans swindle)**. En termes mathématiques, la difficulté à contourner est la suivante : la densité  $\rho_0$  et la pression  $p_0$  du milieu sont constantes et la vitesse moyenne  $\mathbf{v}_0$  est nulle, si bien que l'équation d'Euler Equ. (5.15) implique  $\nabla\Phi_0 = 0$ . D'autre part, l'équation de Poisson Equ. (5.16) implique  $\nabla^2\Phi_0 = 4\pi G\rho_0$ , donc ces deux exigences ne peuvent être satisfaites simultanément que si  $\rho_0 = 0$ . En termes physiques, il n'y a pas, dans un milieu homogène, de gradient de pression qui permette de contrebalancer l'attraction gravitationnelle, et une incohérence semblable apparaît dans un système stellaire homogène.

On supprime l'incohérence en postulant, de manière *ad hoc*, que l'équation de Poisson ne décrit que la relation entre la densité *perturbée* et le potentiel *perturbé*, alors que le potentiel non perturbé serait nul. De manière équivalente, on pourrait supposer qu'un potentiel gravitationnel émanant d'une source à définir annule  $\nabla\Phi_0$ . C'est cela que l'on nomme la duperie de Jeans.

### 5.2.3 Réponse d'un système fluide homogène

Partons des Equations (5.23) à (5.26). L'état d'équilibre est  $\rho_0 = cte$ ,  $\mathbf{v}_0 = 0$ , et la duperie de Jeans permet de poser  $\Phi_0 = 0$ . Cela donne :

$$\frac{\partial\rho_{s1}}{\partial t} + \rho_0\nabla \cdot \mathbf{v}_1 = 0 \quad ; \quad \frac{\partial\mathbf{v}_1}{\partial t} = -\nabla(h_1 + \Phi_{s1} + \Phi_e) \quad (5.32)$$

$$\nabla^2\Phi_{s1} = 4\pi G\rho_{s1} \quad ; \quad h_1 = v_s^2\rho_{s1}/\rho_0 \quad (5.33)$$

où la vitesse du son  $v_s$  est constante. En prenant la dérivée par rapport au temps de la première équation et la divergence de la seconde, puis en éliminant  $\mathbf{v}_1$ ,  $\Phi_{s1}$  et  $h_1$  à l'aide d'autres équations, on aboutit à l'équation :

$$\frac{\partial^2\rho_{s1}}{\partial t^2} - v_s^2\nabla^2\rho_{s1} - 4\pi G\rho_0\rho_{s1} = 4\pi G\rho_0\rho_e \quad (5.34)$$

On prend la transformée de Fourier en multipliant par  $\exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})$  et en intégrant sur  $d^3\mathbf{x}$ , puis on applique deux fois le théorème de la divergence afin d'éliminer  $\nabla^2$ , en utilisant le fait que toutes les quantités perturbées s'annulent à l'infini :

$$\frac{\partial^2 \bar{\rho}_{s1}(\mathbf{k}, t)}{\partial t^2} + v_s^2 k^2 \bar{\rho}_{s1}(\mathbf{k}, t) - 4\pi G \rho_0 \bar{\rho}_{s1}(\mathbf{k}, t) = 4\pi G \rho_0 \bar{\rho}_e(\mathbf{k}, t) \quad (5.35)$$

Cherchons les **modes** impliqués par cette équation, sachant qu'un mode est une perturbation qui peut se maintenir sans force extérieure. En posant ainsi  $\bar{\rho}_e(\mathbf{k}, t) = 0$  et en postulant une solution périodique du type  $\bar{\rho}_{s1}(\mathbf{k}, t) \propto \exp(-i\omega t)$  dans l'équation ci-dessus, on trouve une relation de dispersion :

$$\omega^2 = \omega_0^2(k) \equiv v_s^2 k^2 - 4\pi G \rho_0 = v_s^2 (k^2 - k_J^2) \quad (5.36)$$

où apparaît le **nombre d'onde de Jeans** :

$$k_J^2 \equiv \frac{4\pi G \rho_0}{v_s^2} \quad (5.37)$$

Si  $k > k_J$ , alors  $\omega^2 > 0$  et la solution est périodique (courtes longueurs d'onde) ; si  $k < k_J$ , alors  $\omega^2 < 0$ , la solution est exponentielle croissante ou décroissante (grandes longueurs d'onde).

Si la densité externe est donnée par une fonction delta :  $\bar{\rho}_e(\mathbf{k}, t) = \delta(t - t_0)$ , l'Equ. (5.28) implique que  $\bar{\rho}_{s1}(\mathbf{k}, t) = \bar{R}(\mathbf{k}, t - t_0)$ . Introduisons cela dans l'Equ. (5.35), on a :

$$\frac{\partial^2 \bar{R}(\mathbf{k}, \tau)}{\partial \tau^2} + v_s^2 k^2 \bar{R}(\mathbf{k}, \tau) - 4\pi G \rho_0 \bar{R}(\mathbf{k}, \tau) = 4\pi G \rho_0 \delta(\tau) \quad (5.38)$$

avec  $\bar{R}(\mathbf{k}, \tau) = 0$  pour  $\tau < 0$  (causalité). Résolvons cette équation, en prenant d'abord le cas oscillatoire  $k > k_J$ . Pour  $\tau > 0$  le potentiel extérieur est nul, donc  $\bar{R}(\mathbf{k}, \tau)$  doit satisfaire l'équation de dispersion Equ. (5.36) :

$$\begin{aligned} \bar{R}(\mathbf{k}, \tau) &= A \sin[\omega_0(k)\tau] + B \cos[\omega_0(k)\tau] & \tau > 0 \\ &= 0 & \tau \leq 0 \end{aligned} \quad (5.39)$$

où les constantes  $A$  et  $B$  doivent satisfaire les conditions aux limites en  $\tau = 0$  (voir Fig. 5.1).



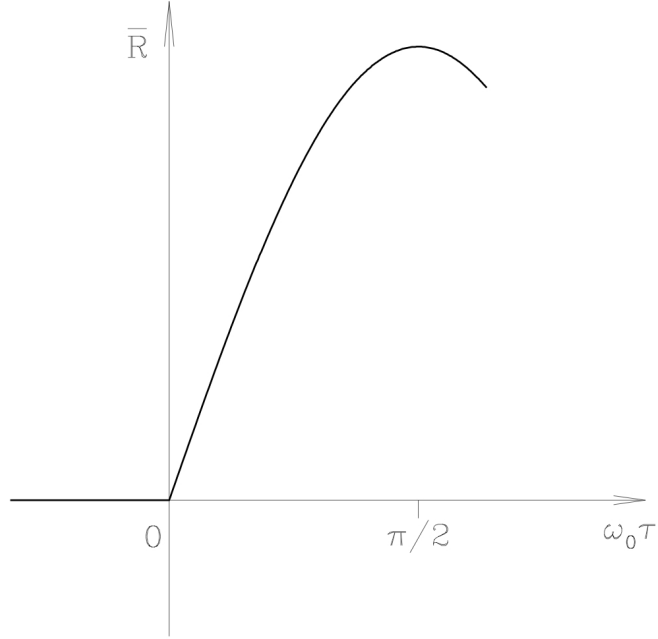


FIG. 5.1 – Fonction  $\bar{R}(\mathbf{k}, \tau)$  donnée par l'Equ. (5.40).

La fonction de réponse doit être une fonction continue de  $\tau$ , même si l'excitation est instantanée. Comme  $\bar{R}(\mathbf{k}, \tau < 0) = 0$ , on doit avoir  $B = 0$  (en effet, si  $\tau \rightarrow \varepsilon \ll 1$ ,  $\bar{R} \sim A\omega_0\varepsilon + B \rightarrow 0$ ). Intégrons l'équation différentielle Equ. (5.38) de  $\tau = -\epsilon$  à  $+\epsilon$  (où  $\epsilon$  est un nombre positif très petit). La fonction  $\bar{R}$  étant continue, les deuxième et troisième termes du membre de gauche de l'Equ. (5.38) s'annulent pour  $\epsilon \rightarrow 0$ . De plus :

$$\int_{-\epsilon}^{+\epsilon} d\tau \delta(\tau) = 1$$

donc :

$$\left| \frac{\partial \bar{R}(\mathbf{k}, \tau)}{\partial \tau} \right|_{-\epsilon}^{+\epsilon} = 4\pi G \rho_0 \quad (5.40)$$

ce qui implique  $A\omega_0 = 4\pi G \rho_0$ . En effet, on a :

$$\left| \frac{\partial \bar{R}(\mathbf{k}, \tau)}{\partial \tau} \right|_{-\epsilon}^{+\epsilon} = A\omega_0 [\cos(\omega_0 \tau)]_{-\epsilon}^{+\epsilon} = A\omega_0 \left[ \underbrace{\cos(\omega_0 \epsilon)}_{\sim 1} - 0 \right]$$

puisque la dérivée de  $\bar{R}$  est nulle pour  $\tau < 0$ . Par conséquent, la fonction de réponse pour  $k > k_J$  est :

$$\bar{R}(\mathbf{k}, \tau) = \frac{4\pi G\rho_0}{\omega_0(k)} H(\tau) \sin[\omega_0(k)\tau] \quad (5.41)$$

où  $H(\tau)$  est la fonction escalier. Dans le cas  $k < k_J$ , la fréquence  $\omega_0(k)$  est purement imaginaire, si bien qu'il est plus simple d'utiliser la grandeur :

$$\gamma_0^2 \equiv -\omega_0^2(k) = v_s^2(k_J^2 - k^2) \quad (5.42)$$

Un développement semblable donne alors une fonction de réponse :

$$\bar{R}(\mathbf{k}, \tau) = \frac{4\pi G\rho_0}{\gamma_0(k)} H(\tau) \sinh[\gamma_0(k)\tau] \quad (5.43)$$

Prenons maintenant la transformée de Fourier temporelle Equ. (5.4) des deux derniers résultats, ce qui donne :

$$\tilde{\bar{R}}(\mathbf{k}, \omega) = -\frac{4\pi G\rho_0}{\omega^2 - \omega_0^2(k)} \quad k > k_J, \text{ Im}(\omega) > 0 \quad (5.44)$$

$$= -\frac{4\pi G\rho_0}{\omega^2 + \gamma_0^2(k)} \quad k < k_J, \text{ Im}(\omega) > \gamma_0(k) \quad (5.45)$$

Pour obtenir la fonction de polarisation, il suffit d'utiliser les relations de l'Equ. (5.31) :

$$\tilde{\bar{P}}(\mathbf{k}, \omega) = -\frac{4\pi G\rho_0}{\omega^2 - v_s^2 k^2} \quad \text{Im}(\omega) > 0 \quad (5.46)$$

et la transformée de Fourier inverse est :

$$\bar{P}(\mathbf{k}, \tau) = \frac{4\pi G\rho_0}{v_s k} H(\tau) \sin(v_s k \tau) \quad (5.47)$$

On arrive au même résultat en posant  $k_J/k \rightarrow 0$  dans l'Equ. (5.41) via l'Equ. (5.36), qui est la limite d'autogravité négligeable. On avait vu que dans ce cas là, les fonction de réponse et de polarisation sont égales.

La relation de dispersion pour les modes peut être obtenue en posant la densité extérieure  $\rho_e = 0$  dans l'Equ. (5.30), ce qui implique :

$$\tilde{\tilde{P}}(\mathbf{k}, \omega) = 1 \quad (5.48)$$

Les solutions de la relation de dispersion sont données par les singularités de la fonction de réponse de l'Equ. (5.31). En effet, un mode a une réponse en densité non nulle même sans sollicitation extérieure.

En résumé, on voit qu'une impulsion extérieure de nombre d'onde  $k > k_J$  provoque une oscillation sinusoïdale dans le fluide, dont la fréquence est  $\omega_0(k)$ . Tant que la densité  $\rho_0$  reste suffisamment faible, les oscillations consistent en ondes accoustiques puisque l'Equ. (5.36) se réduit alors à  $\omega^2 = v_s^2 k^2$ . Quand la densité augmente,  $\omega$  diminue et atteint finalement zéro lorsque  $k = k_J$ . Pour  $k < k_J$ , la perturbation extérieure induit une réponse en densité qui varie comme  $\exp(\gamma_0(k)t)$  et le système est instable.

En termes de longueur d'onde, la perturbation est instable si sa longueur d'onde dépasse la **longueur d'onde de Jeans**  $\lambda_J = 2\pi/k_J$ , donc si :

$$\lambda^2 > \lambda_J^2 = \frac{\pi v_s^2}{G\rho_0}. \quad (5.49)$$

Définissons enfin la **masse de Jeans**  $M_J$  comme étant la masse contenue initialement à l'intérieur d'une sphère de diamètre  $\lambda_J$  :

$$M_J = \frac{4\pi}{3} \rho_0 \left( \frac{1}{2} \lambda_J \right)^3 = 2.92 \frac{v_s^3}{G^{3/2} \rho_0^{1/2}} \quad (5.50)$$

Il est intéressant d'envisager cette instabilité en termes d'énergie : normalement, la densité d'énergie d'une onde sonore est positive. Mais la densité d'énergie gravitationnelle d'une onde sonore est négative, car l'augmentation de l'énergie potentielle des régions comprimées est plus importante que la diminution de l'énergie potentielle des régions dilatées. L'instabilité de Jeans apparaît à la longueur d'onde  $\lambda_J$  pour laquelle la densité d'énergie totale devient négative et permet alors à l'onde de s'amplifier.

#### 5.2.4 Réponse d'un système stellaire homogène

Soit une densité de masse dans l'espace de phase, de forme maxwellienne :

$$f_0(\mathbf{v}) = \frac{\rho_0}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}} e^{-v^2/2\sigma^2} \quad (5.51)$$

La vitesse du son  $v_s$  dans un gaz parfait est intimement lié à la dispersion de vitesse ( $v_s = \sqrt{\frac{1}{3}\gamma v^2}$ ), il est raisonnable de définir le nombre d'onde de Jeans d'un système stellaire homogène et maxwellien par analogie avec l'Equ. (5.37) :

$$k_J^2 \equiv \frac{4\pi G \rho_0}{\sigma^2} \quad (5.52)$$

On peut montrer (Binney & Tremaine 2008, p. 407 et suivantes) que cette analogie est justifiée, et que les perturbations de systèmes stellaires pour lesquelles  $\lambda < 2\pi/k_J$  sont stables, alors que celles pour lesquelles  $\lambda > 2\pi/k_J$  ne le sont pas. Il y a toutefois de grandes différences. En particulier, les perturbations de la plupart des systèmes stellaires homogènes (avec  $\lambda < 2\pi/k_J$ ) sont fortement amorties, alors que ce n'est pas le cas pour les fluides. Cela est surprenant, vu que l'équation de Boltzmann sans collisions ne comporte aucun terme de dissipation et le système est donc en principe réversible. Cela est une propriété fondamentale de la plupart des systèmes stellaires.

### 5.2.5 Discussion

**En résumé**, on peut dire que les systèmes stellaires homogènes et infinis se comportent, en ce qui concerne leur stabilité, de manière similaire aux systèmes fluides homogènes et infinis : dans les deux cas, ils sont instables si et seulement si le nombre d'onde de la perturbation est inférieur au nombre d'onde de Jeans  $k_J$  (donné par l'Equ. (5.37) pour les fluides maxwelliens et par l'Equ. (5.52) pour les systèmes stellaires maxwelliens). Par contre, pour  $k > k_J$ , les fluides admettent des ondes sonores non amorties, alors que les systèmes stellaires voient leurs perturbations subir un fort amortissement (amortissement de Landau et mélange de phase).

Examinons les implications des hypothèses admises à la base de l'analyse qui précède, à savoir un milieu homogène et infini d'une part, et la duperie de Jeans qui consiste à négliger le potentiel du système non perturbé.

Le théorème du viriel (Chapitre 4) dit qu'un système stellaire de masse  $M$  et de vitesse quadratique moyenne  $v^2$  possède une extension typique de l'ordre de :

$$\lambda_0 \approx \frac{GM}{v^2}$$

ce qui se traduit, en termes de densité moyenne  $\rho \sim M/\lambda_0^3$ , par :

$$\lambda_0^2 \approx \frac{v^2}{G\rho}$$

Or, selon l'Equ. (5.49), la longueur d'onde de Jeans est du même ordre de grandeur que  $\lambda_0$ , puisqu'elle est donnée par :

$$\lambda_J^2 \approx \frac{v^2}{G\rho}.$$

Ainsi la longueur de Jeans est-elle du même ordre que la dimension du système, si bien que l'hypothèse d'homogénéité n'est pas valable en toute généralité. Par conséquent, l'analyse de Jeans ne suffit pas à démontrer qu'un système stellaire isolé est réellement instable. Cependant, cette analyse reste le fondement de la théorie de la stabilité des systèmes stellaires pour les raisons suivantes :

- L'hypothèse d'homogénéité reste valide, tant que l'on considère des dimensions  $\lambda \ll \lambda_0$ , les effets de l'autogravité et de l'inhomogénéité restant faibles à de telles échelles. Ainsi, l'analyse précédente permet de conclure que les systèmes stellaires stationnaires dont la DF est à peu près maxwellienne sont stables sur les petites échelles.
- On peut utiliser l'analyse de Jeans pour explorer si des DF non maxwelliennes peuvent introduire des instabilités à petite échelle. Par exemple, on peut regarder s'il existe dans les systèmes stellaire une instabilité semblable à l'instabilité de double courant (two-stream instability) qui peut apparaître dans un plasma.
- La généralisation de l'analyse de Jeans à des fluides relativistes dans un univers en expansion est essentielle en cosmologie, pour décrire la formation des structures qui résulte d'instabilités gravitationnelles. Dans ce cas, la duperie de Jeans n'a pas besoin d'être utilisée.
- La physique de l'instabilité de Jeans permet d'interpréter les instabilités qui apparaissent à petite échelle dans les disques en rotation.

## 5.3 Stabilité séculaire

Le critère de l'énergie d'un système permet d'étudier sa stabilité sans avoir à résoudre les équations du mouvement linéarisées. On dira qu'un système jouit d'une **stabilité séculaire** si toutes les configurations voisines de son état correspondent à une énergie plus grande. La stabilité séculaire est une condition suffisante, mais pas nécessaire, à la stabilité dynamique, comme l'analogie suivante permet de le voir : une bille reposant au fond d'un récipient hémisphérique est stable, puisque toute autre position correspondrait à une énergie supérieure. D'autre part, si cette bille décrit une trajectoire circulaire horizontale, à une certaine hauteur de l'hémisphère, elle est dynamiquement stable (tant qu'il n'y a pas de frottement), bien qu'elle n'occupe pas un état d'énergie minimal ; de plus, elle ne peut atteindre l'état d'énergie minimal (le fond de l'hémisphère) en conservant son moment cinétique.

Il s'agit donc de trouver le changement d'énergie d'un système lorsqu'il est soumis à une petite perturbation. On n'abordera pas les développements ici. On se contentera de citer brièvement quelques résultats concernant les systèmes sphériques, les systèmes en rotation uniforme et les sphéroïdes. L'analyse conduit à mettre en évidence des *modes*, qui dans des systèmes stellaires sphériques (voire sphéroïdaux) sont analogues aux modes de pulsation des étoiles, par exemple, et peuvent être représentés par des harmoniques sphériques.

### 5.3.1 Réponse des systèmes sphériques

**Systèmes sphériques avec DF ergodiques** Dire que la DF d'équilibre d'un système est ergodique est équivalent à dire qu'elle ne dépend que de l'hamiltonien du système :

$$f_0 = f_0(H_0) = f_0 \left[ \frac{1}{2}v^2 + \Phi_0(r) \right]$$

Le principe variationnel de Chandrasekhar (pas abordé ici) permet d'obtenir le résultat suivant, appelé :

**Théorème d'Antonov-Lebovitz :** *Tous les modes non radiaux d'une étoile barotropique ayant  $dp(\rho)/d\rho > 0$  sont stables.*

Autrement dit, seuls les modes radiaux peuvent menacer l'équilibre d'une étoile sphérique.

Par ailleurs, tout système stellaire sphérique ayant une DF ergodique et dont  $f'_0(H_0) \equiv df/dH < 0$  doit avoir  $d\rho_0/dr < 0$  (non démontré ici). Cela implique le résultat suivant, appelé :

**Seconde loi d'Antonov :** *Tous les modes non radiaux d'un système stellaire qui a une DF d'équilibre ergodique  $f_0(H_0)$  telle que  $f'_0(H_0) < 0$ , sont stables.*

Mais cela ne suffit pas à nous renseigner sur la stabilité des modes radiaux, qui a fait l'objet de travaux débouchant sur le résultat important suivant :

**Théorème de Doremus–Feix–Baumann :** *Tous les modes radiaux d'un système stellaire qui a une DF d'équilibre ergodique  $f_0(H_0)$  telle que  $f'_0(H_0) < 0$ , sont stables.*

Par conséquent, pratiquement tous les systèmes stellaires sphériques ayant une DF ergodique sont stables. En particulier, tous les systèmes stellaires polytropiques avec  $n > \frac{3}{2}$ , y compris le modèle de Plummer. La sphère isotherme est stable aussi. De même, tous les modèles de King sont stables, puisque leur DF décroît avec l'énergie croissante.

**Systèmes sphériques anisotropes** Par anisotrope, on entend que la DF de tels systèmes dépend non seulement de l'énergie, mais aussi du moment cinétique :  $f_0 = f_0(H_0, L)$ . On peut montrer que le théorème de Doremus–Feix–Baumann se généralise à :

*Tous les modes radiaux d'un système stellaire sphérique ayant  $\partial f_0/\partial H_0 < 0$  sont stables.*

Le cas de la stabilité des systèmes stellaires sphériques anisotropes vis-à-vis des modes non radiaux est plus difficile. Tandis que les systèmes ergodiques sont en général stables vis-à-vis des modes non radiaux grâce à la Seconde loi d'Antonov, les systèmes anisotropes ayant des orbites quasi radiales sont sujets à **l'instabilité d'orbites radiales (radial-orbit instability)**. Cette instabilité peut être vue intuitivement comme une variante de l'instabilité de Jeans : en imaginant le système comme un porc-épic dont les piquants seraient les orbites radiales, on peut imaginer qu'une légère perturbation puisse rapprocher des piquants voisins en une sorte de touffe, ou de mèche, et que le potentiel gravitationnel ainsi modifié finisse par attirer les autres piquant dans ce faisceau. Cette tendance est contrebalancée par les vitesses de précession différentes des orbites individuelles, qui jouent le même rôle que la dispersion de vitesse de l'instabilité de Jeans proprement dite. La découverte de l'instabilité d'orbites radiales est relativement récente (Antonov 1973), et son importance n'a été pleinement réalisée qu'à partir

du milieu des années 1980, notamment après sa mise en évidence dans des simulations N-corps (Fig. 5.2). Cette instabilité peut être supprimée par une masse centrale ponctuelle.

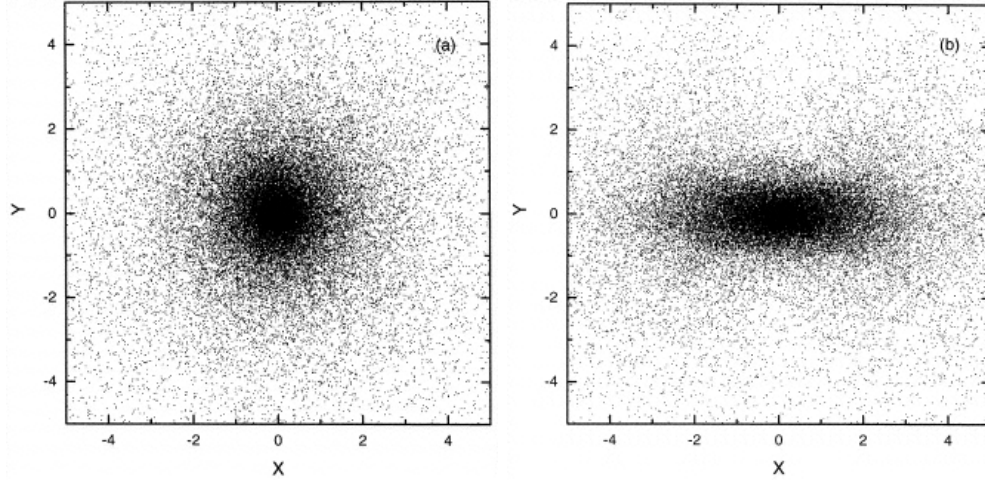


FIG. 5.2 – Instabilité d’orbite radiale dans un système ayant une DF de Hernquist. L’instabilité convertit le système initialement à symétrie sphérique (à gauche) en un système triaxial (à droite), et cela en quelques temps de traversées seulement. (Source : Meza & Zamorano 1997).

L’instabilité d’orbites radiales revêt une importance cosmologique, puisque les halos de matière sombre des galaxies se sont formés, croit-on, par effondrement et coalescence de halos plus petits, processus qui favorisent, précisément, des orbites radiales. Il est probable que ce type d’instabilité opère durant ces événements de coalescence, et cela pourrait expliquer pourquoi les simulations N-corps de la formation des halos (dans le contexte cosmologique) tendent à former des halos triaxiaux.

**Systèmes en rotation uniforme** Leur cas est plus difficile à traiter que celui des systèmes sphériques, en particulier parce les systèmes en rotation disposent d’un réservoir d’énergie de rotation qui peut éventuellement nourrir des modes instables.

Discutons brièvement le cas d’une **feuille mince en rotation uniforme** : on imagine un disque infini, d’épaisseur nulle et de densité de surface  $\Sigma_0$  constante. L’analyse aboutit à une relation de dispersion de la forme :



$$\omega^2 = 4\Omega^2 - 2\pi G\Sigma_0|k| + v_s^2 k^2 \quad (5.53)$$

(donnée sans démonstration) où  $\Omega$  est la fréquence de la rotation uniforme. La feuille est stable tant que  $\omega^2 > 0$ , et instable pour  $\omega^2 < 0$ . Cette relation de dispersion est extrêmement importante pour comprendre la stabilité des disques. Examinons d'abord le cas sans rotation : avec  $\Omega = 0$ , la feuille est instable pour  $v_s^2 k^2 - 2\pi G\Sigma_0|k| < 0$ , donc si :

$$|k| < k_J \equiv \frac{2\pi G\Sigma_0}{v_s^2} \quad (5.54)$$

et l'on retrouve le nombre d'onde de Jeans  $k_J$ , valable cette fois pour la feuille mince. De manière analogue au système homogène à trois dimensions, ce système à deux dimensions est sujet à instabilité pour les grandes longueurs d'onde.

Voyons maintenant le cas d'une feuille en rotation, mais où la vitesse du son est nulle. Le système est alors instable si  $|k| > 2\Omega^2/(\pi G\Sigma_0)$ . Si  $k \rightarrow \infty$ , la perturbation croît comme  $\exp(\gamma t)$ , avec  $\gamma^2 = -\omega^2 = 2\pi G\Sigma_0|k|$ . Ainsi, le taux même de croissance  $\gamma \rightarrow \infty$  quand  $\lambda \rightarrow 0$  ! Autrement dit, un disque mince est violemment instable aux petites échelles. On peut comprendre cela à partir du cas à trois dimensions, où la croissance de l'instabilité de Jeans dans un fluide ayant une vitesse du son nulle est  $\gamma = (4\pi G\rho_0)^{1/2}$  (voir l'Equ. 5.36). En effet, la densité moyenne de la feuille mince à l'intérieur d'une sphère de rayon  $\lambda$  est  $\bar{\rho}_0 \sim \Sigma_0/\lambda$ , donc le taux de croissance de l'instabilité de Jeans dans la feuille est  $\gamma \sim (G\bar{\rho}_0)^{1/2} \sim (G\Sigma_0/\lambda)^{1/2} \sim (G\Sigma_0|k|)^{1/2}$ .

On voit que la rotation à elle seule reste incapable de stabiliser la feuille, et il en va de même de la pression. Une feuille en rotation ayant une vitesse du son nulle est instable aux courtes longueurs d'onde, tandis qu'une feuille sans rotation ayant une vitesse du son non nulle est instable aux grandes longueurs d'onde. Par contre, l'action conjointe de la rotation et de la pression peut conduire à la stabilité. On voit d'après l'Equ. (5.53) que la forme du membre de droite est quadratique en  $k$ , et présente un minimum en ce que l'on pourrait appeler "le nombre d'onde le plus instable"  $|k| = \pi G\Sigma_0/v_s^2 = \frac{1}{2}k_J$ . La feuille est stable pour toutes les longueurs d'onde à condition que le minimum soit positif, ce qui arrive pour :

$$\frac{v_s\Omega}{G\Sigma_0} \geq \frac{1}{2}\pi = 1.5708 \quad (5.55)$$

L'interprétation physique de ce critère a été donnée par Toomre (1964). Soit une petite portion circulaire de la feuille, de rayon  $h$  et de masse  $M = \pi \Sigma_0 h^2$ . Supposons ensuite que le rayon de cette portion subisse une diminution d'un facteur  $(1 - \varepsilon)$ , avec  $\varepsilon \ll 1$ . La perturbation, en termes de pression, vaudra  $p_1 \approx \varepsilon p_0 \approx \varepsilon v_s^2 \Sigma_0$ . La force de pression par unité de masse vaut  $\mathbf{F} = -\nabla p / \Sigma$ , si bien que la force de pression exercée vers l'extérieur est de l'ordre de  $|\mathbf{F}_{p1}| \approx p_1 / (\Sigma_0 h) \approx \varepsilon v_s^2 / h$ . Par ailleurs, la compression implique une force gravitationnelle supplémentaire et orientée vers l'intérieur telle que, par unité de masse :

$$|\mathbf{F}_{g1}| \approx GM\varepsilon/h^2 \approx G\Sigma_0\varepsilon$$

Si aucun autre effet n'intervient, la feuille sera stable si  $|\mathbf{F}_{p1}| > |\mathbf{F}_{g1}|$ , ce qui se traduit par :

$$h \lesssim \frac{v_s^2}{G\Sigma_0} \equiv h_l \quad (5.56)$$

Mais cela n'est pas tout : la feuille tourne, et chaque portion de celle-ci tend à conserver son moment cinétique de rotation autour de son propre centre. La valeur de ce moment cinétique de spin est, par unité de masse, de l'ordre de  $S \approx \Omega h^2$ , où  $\Omega$  est la vitesse angulaire de la feuille. Il apparaît alors une force centrifuge qui vaut, par unité de masse,  $|\mathbf{F}_c| \approx \Omega^2 h \approx S^2/h^3$ . Mais la compression accompagnée de la conservation de  $S$  va augmenter la force centrifuge ressentie par chaque élément de masse, d'un incrément  $|\mathbf{F}_{c1}| \approx \varepsilon S^2/h^3 \approx \varepsilon \Omega^2 h$ . Pour qu'il y ait stabilité, il faut que :

$$|\mathbf{F}_{c1}| > |\mathbf{F}_{g1}| \quad \Rightarrow \quad h \gtrsim \frac{G\Sigma_0}{\Omega^2} \equiv h_u. \quad (5.57)$$

Les Equations (5.56) et (5.57) impliquent que les régions de petite taille sont stabilisées par la pression, tandis que celles de grande taille le sont par la force centrifuge. Pour que la stabilité règne aussi aux échelles intermédiaires, il faut que la dimension minimale pour la stabilité de rotation,  $h_u$ , soit inférieure à la dimension maximale pour la stabilité de pression  $h_l$  :

$$h_u \lesssim h_l \quad \Rightarrow \quad \frac{v_s \Omega}{G\Sigma_0} \gtrsim 1 \quad (5.58)$$

On retrouve donc, à peu près, le critère de l'Equ. ( 5.55) !

Le critère donné par l'Equ. (5.55) avait été établi pour un fluide, mais Toomre (1964) a montré que, pour un disque stellaire fin doté d'une distribution maxwellienne des vitesses, on a :

$$\frac{\sigma\Omega}{G\Sigma_0} \geq 1.68 \quad (5.59)$$

où  $\sigma$  est la dispersion de vitesse des étoiles selon une dimension. On voit que le cas stellaire est, de ce point de vue, presque identique au cas du fluide.

Des modèles plus réalistes de disque d'épaisseur non nulle ont été calculés, qui sont homogènes dans le plan (densité de surface uniforme selon  $xy$ ), mais qui ont une structure verticale  $\rho_0(z)$  obéissant à l'équilibre hydrostatique et à une équation d'état. L'analyse de stabilité aboutit à des critères très proches de ceux dérivés ci-dessus, parce que les modes les plus instables ont des longueurs d'ondes nettement supérieures à l'épaisseur du disque et sont donc insensibles à la structure verticale de celui-ci.

**En résumé**, rappelons les trois caractéristiques essentielles des **disques infiniment minces en rotation uniforme** :

1. un disque froid est violemment instable,
2. le disque peut être stabilisé par une vitesse du son  $v_s$ , ou par une dispersion de vitesse  $\sigma$ , qui satisfait le critère de stabilité donné par l'Equ. (5.55) ou l'Equ. (5.59), respectivement pour un système fluide ou pour un système stellaire ;
3. les disques infiniment minces, qu'ils soient fluides ou stellaires, ont des propriétés très voisines quant à la stabilité.

Mentionnons brièvement le cas des **disques de Kalnajs**, qui sont les disques autogravitants et infiniment minces les plus simples, dont la densité de surface et le potentiel sont donnés par :

$$\Sigma_0(R) = \Sigma_c \sqrt{1 - \frac{R^2}{a^2}} \quad ; \quad \Phi_0(R) = \frac{1}{2}\Omega_0^2 R^2 \quad (5.60)$$

avec :

$$\Omega_0^2 = \frac{\pi^2 G \Sigma_c}{2a} \quad (5.61)$$

et  $a$  le rayon du disque. La vitesse angulaire moyenne  $\Omega$  des étoiles dans le disque ne dépend pas de la position et leur dispersion de vitesse par rapport à cette position est isotrope dans le plan du disque.

On distingue, dans les disques de Kalnajs, les modes horizontaux d'oscillation, que l'on appelle aussi **ondes de densité** et où la densité de surface varie, et les **ondes de gauchissement (bending waves)** qui font osciller le disque dans la direction verticale (i.e., perpendiculairement au plan du disque).

Les modes horizontaux sont caractérisés par les nombres quantiques  $\ell$  et  $m$ , et les modes de fréquence nulle avec  $\ell = 1$ ,  $m = \pm 1$  correspondent à des translations uniformes du disque. Un troisième mode de fréquence nulle à  $\ell = 2$ ,  $m = 0$  et correspond à une variation du rayon  $a$  du disque. Le mode  $\ell = 2$ ,  $m = 0$  de fréquence non nulle correspond à une oscillation stable du rayon  $a$  du disque, la densité de surface gardant la forme donnée par l'Equ. (5.60).

Les modes avec  $\ell = 2$ ,  $m = \pm 2$  correspondent à une perturbation du disque en forme de barre. On peut les analyser analytiquement, sans même faire appel à l'équation de Boltzmann sans collisions. On pourrait penser que les galaxies barrées peuvent s'expliquer à l'aide de ce mécanisme. Toutefois, les grandes barres des galaxies SB se forment plutôt dans un disque en rotation différentielle, selon un mécanisme différent.

Les **sphéroïdes et les disques de MacLaurin** sont des systèmes formés d'un fluide incompressible en rotation uniforme. Ces systèmes forment une famille à un paramètre, lequel peut être la vitesse de rotation, le moment cinétique ou le rapport des axes polaire et équatorial. Ils sont axisymétriques.

Cependant, en 1834, Jacobi a montré qu'un fluide incompressible, auto-gravitant et en rotation n'est pas nécessairement axisymétrique, mais peut très bien être un ellipsoïde à trois axes différents. Poincaré, entre autres, a montré que ces **ellipsoïdes de Jacobi** sont des configurations d'énergie minimale pour un moment cinétique donné et qu'un sphéroïde de MacLaurin en rotation rapide, bien que dynamiquement stable, est instable à long terme et évoluera en ellipsoïdes de Jacobi, sitôt que le fluide a une viscosité non nulle, si petite soit-elle. On peut comprendre cela en rappelant que l'énergie cinétique de rotation d'un corps en rotation uniforme est  $\frac{1}{2}L^2/I$  : le passage de la forme sphéroïde à la forme ellipsoïde augmente le moment d'inertie  $I$  et diminue donc l'énergie, même si la déformation entraîne aussi une augmentation de l'énergie potentielle de gravitation. Cette dernière est toutefois plus petite que le gain d'énergie cinétique, d'où l'instabilité du sphéroïde.

Riemann a montré en 1860 que les ellipsoïdes de Jacobi ne sont eux-mêmes qu'un cas particulier d'une famille de systèmes triaxiaux fluides auto-gravitants, les **ellipsoïdes de Riemann**, qui ont des courants internes. Ces

ellipsoïdes de Riemann montrent la distinction qu'il convient de faire entre la vitesse de rotation de la **matière** à l'intérieur du système, et la vitesse de la **forme** ou de la **figure** (en anglais **pattern**) immatérielle du système. Cette distinction est particulièrement pertinente dans le cas des ondes de densité spirales des galaxies, examinées au chapitre suivant.

# Chapitre 6

## Dynamique des disques et structure spirale

La plupart des galaxies de notre voisinage ont un disque. Ce fait observationnel s'explique de la même manière que la coplanarité des orbites planétaire du système solaire : par la conservation du moment cinétique. Pour un moment cinétique donné, l'état d'énergie minimum est atteint pour un disque plat perpendiculaire à l'axe de rotation.

### 6.1 Géométrie

#### 6.1.1 Intensité et nombre de bras

Soit une galaxie vue de face. On peut définir sa *brillance de surface*  $I(R, \phi)$  (voir cours *Astrophysique II : Bases physiques de l'Astrophysique*). Si  $I$  reste inchangée sous une rotation de  $2\pi/m$  radians :

$$I\left(R, \phi + \frac{2\pi}{m}\right) = I(R, \phi)$$

alors la galaxie possède une symétrie rotationnelle d'ordre  $m$  et comporte  $m$  bras ( $m > 0$ ).

La “force” des bras spiraux peut être caractérisée par l'*amplitude des composantes de Fourier*. Exprimons  $I(R, \phi)$  en série de Fourier :

$$\frac{I(R, \phi)}{\bar{I}(R)} = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} A_m(R) \cos m[\phi - \phi_m(R)] \quad (6.1)$$

avec  $A_m(R) > 0$  et où

$$\bar{I}(R) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} I(R, \phi) d\phi \quad (6.2)$$

est la brillance de surface moyenne sur les azimuts au rayon  $R$ , et où  $A_m, \phi_m$  sont respectivement l'amplitude et la phase de la  $m^e$  composante de Fourier. Si une seule composante domine la structure, on peut aussi utiliser une sorte de contraste, en définissant le rapport des brillances de surface dans le bras et dans les régions inter-bras :

$$K = \frac{1 + A_m}{1 - A_m} \quad (6.3)$$

La plupart du temps,  $m = 2$  et  $0.15 < A_2 < 0.6$ ,  $1.4 < K < 4$ .

### 6.1.2 Les bras spiraux sont-ils “leading” ou “trailing” ?

A priori, on peut se demander si les bras spiraux sont “leading”, c’est-à-dire si leur extrémité pointe dans le sens du mouvement, ou au contraire “trailing”, si leur extrémité pointe dans le sens contraire du mouvement de rotation de la galaxie. (voir Fig. 6.1) Il n’est pas facile de répondre à cela par l’observation, car si l’on peut mesurer la vitesse de rotation des étoiles ou du gaz d’une galaxie vue obliquement par effet Doppler, on ne sait pas quel côté de la galaxie est le plus proche de nous, et quel côté est le plus éloigné (voir Figs. 6.2 et 6.4). Un des moyens de savoir est d’utiliser l’absorption par la poussière de la lumière du bulbe de la galaxie (un cas célèbre est la galaxie Sombrero, mais ses bras sont si enroulés que la structure n’en est pas claire), ou de la lumière des amas globulaires distribués dans le halo (voir Fig. 6.3). De cette manière, on a pu déterminer que dans pratiquement tous les cas sans ambiguïté, les bras sont “trailing”, conformément à ce que l’intuition suggère. Notre Galaxie a également des bras “trailing”. Il existe des exceptions, mais elles peuvent s’expliquer par des collisions récentes avec des galaxies voisines.

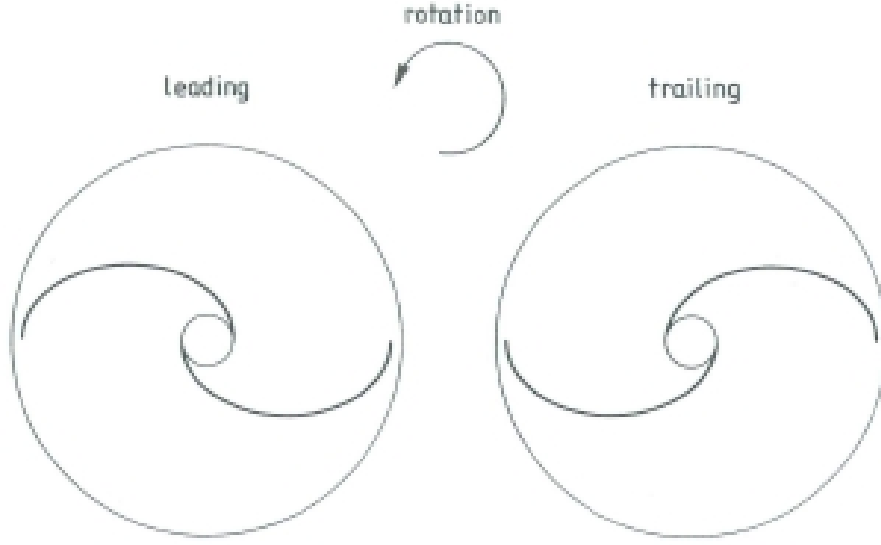


FIG. 6.1 – Bras “leading” et “trailing”.

### 6.1.3 Ouverture des bras et problème de l’enroulement

L’angle d’ouverture  $\alpha$  d’un bras (“pitch angle”) est l’angle entre la tangente au bras en un rayon  $R$  donné et la direction perpendiculaire au rayon. On a  $0 < \alpha < 90^\circ$  (voir Fig. 6.5).

Comment représenter mathématiquement la forme des bras spiraux dans le plan du disque ? On part d’une expression du type :

$$\phi + g(R, t) = \text{constante} \quad \text{le long du bras}$$

où  $t$  est le temps et  $g$  une fonction à définir. Si la galaxie a une symétrie de rotation d’ordre  $m$  – ce qui veut dire que son aspect reste inchangé si on tourne la galaxie de  $2\pi/m$  radians – alors il convient d’utiliser une expression plus pratique vu qu’elle définit d’emblée la position de tous les  $m$  bras :

$$m\phi + f(R, t) = \text{constante} \quad \text{modulo } 2\pi \quad (6.4)$$

où  $f(R, t) \equiv m g(R, t)$  est la *fonction de forme*. Il convient aussi d’introduire le *nombre d’onde radial* :



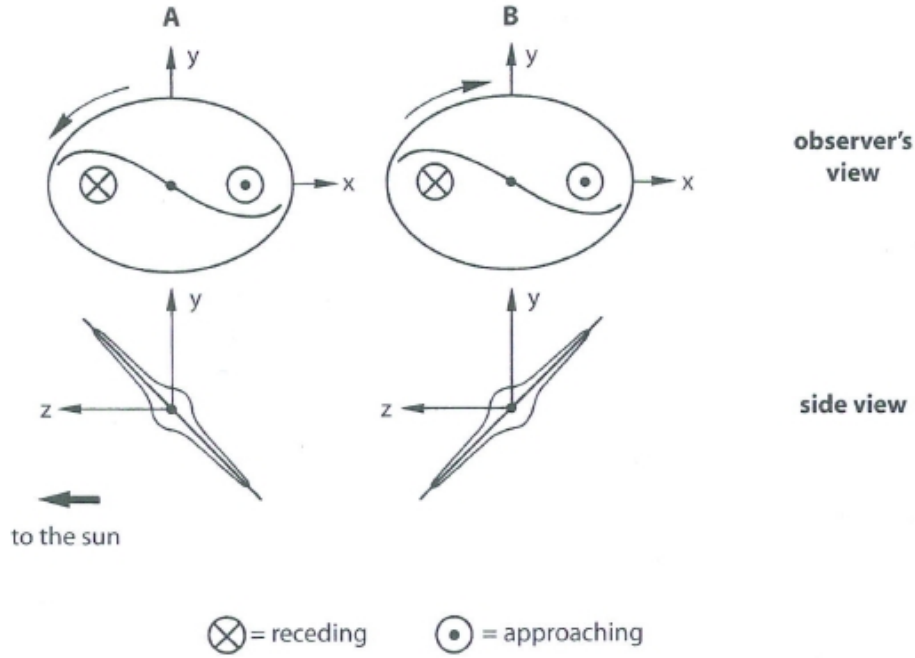


FIG. 6.2 – Bras “leading” et “trailing”.

$$k(R, t) = \frac{\partial f(R, t)}{\partial R}. \quad (6.5)$$

On peut mieux comprendre qu’il s’agit bien d’un nombre d’onde en dérivant l’Equ. (6.4) par rapport à  $R$  :

$$\begin{aligned} m \frac{\partial \phi}{\partial R} + \frac{\partial f(R, t)}{\partial R} &= 0 \\ \Rightarrow \frac{\partial f(R, t)}{\partial R} &= -m \frac{\partial \phi}{\partial R} \end{aligned}$$

On voit que la dimension physique de  $k$  est bien celle d’un nombre d’onde,  $\text{rad m}^{-1}$ , et que  $k \rightarrow \infty$  si le “pitch angle”  $\alpha \rightarrow 0$ ,  $k \rightarrow 0$  si  $\alpha \rightarrow 90^\circ$ . On voit aussi que, si le bras est “trailing” et que  $\phi$  augmente dans le sens de la rotation,  $\partial \phi / \partial R < 0$ , donc  $k = -m \partial \phi / \partial R > 0$ . Pour un bras “leading” par contre, on a  $k < 0$ .

Par ailleurs, le “pitch angle” est donné par :

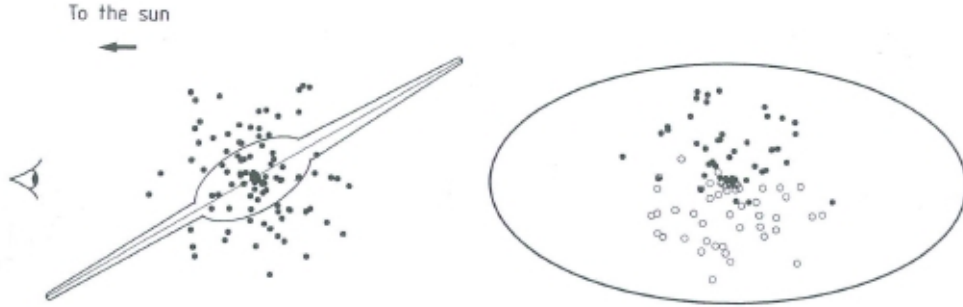


FIG. 6.3 – Un moyen de savoir quelle extrémité de la galaxie est la plus proche. Les points représentent des objets de Population II : amas globulaires ou novae. La poussière interstellaire est concentrée dans le plan galactique, représentée à gauche par l'axe de symétrie de la galaxie. Le schéma de droite montre la galaxie telle que vue par l'observateur, les cercles pleins représentant les objets qui sont au-dessus du plan galactique, les cercles ouverts ceux qui sont au-dessous et qui, par conséquent, subissent une extinction due à la poussière de la galaxie.

$$\cot \alpha = \left| R \frac{\partial \phi}{\partial R} \right| \Rightarrow \cot \alpha = \left| \frac{k R}{m} \right| \quad (6.6)$$

Une spirale typique a  $\alpha \simeq 10 - 15^\circ$ .

Imaginons à présent comme situation initiale, un bras purement radial et rectiligne, dont l'équation est simplement  $\phi = \phi_0$  (ligne traitillée dans la Fig. (6.5)). Le disque tourne de manière *différentielle* avec une vitesse angulaire  $\Omega(R)$ ,  $R$  étant la distance au centre. Le bras ne va donc pas rester radial au cours de la rotation, mais se déformer à cause de la rotation différentielle, et l'équation du bras s'écrit alors :

$$\phi(R, t) = \phi_0 + \Omega_0(R) t \quad (6.7)$$

En dérivant cette dernière équation par rapport à  $R$  et en l'introduisant dans l'Equ. (6.6), on obtient :

$$\cot \alpha = R t \left| \frac{\partial \Omega}{\partial R} \right| \quad (6.8)$$



FIG. 6.4 – Galaxie spirale NGC 7331. Cette pose profonde permet de deviner un bulbe assez étendu, et la netteté des bandes de poussière située en bas de l'image de la galaxie laisse penser qu'elles sont en avant-plan.

Pour une galaxie typique ayant une courbe de vitesse plate, avec  $v_c = R\Omega(R) = 200 \text{ km s}^{-1}$ ,  $R = 5 \text{ kpc}$  et  $t = 10 \text{ Gyr}$ , on a :

$$\cot \alpha = t \frac{v_c}{R}$$

et le pitch angle vaut  $\alpha = 0.00014^\circ$  ! Autrement dit, le bras devrait être complètement enroulé sur lui-même et le disque offrir une structure pratiquement uniforme. C'est ce que l'on a appelé le modèle de la “tasse de café”, dans laquelle on fait tourner la cuillère pour dissoudre le sucre, puis où on laisse tomber un peu de crème : une structure spirale se forme, qui s'enroule très vite et disparaît. C'est cela qu'on appelle le “**winding problem**” (problème de l'enroulement), déjà formulé il y a plus d'un siècle par Wilczinski (1896) : si la matière qui constitue un bras reste dans le bras, alors la rotation différentielle enroule le bras en un temps bien plus court que l'âge de la galaxie.

On peut invoquer trois solutions à ce problème :

1. Un disque de galaxie sujet à de fréquents sursauts de formation stellaire pourrait présenter des bras dont la durée de vie ne soit pas plus

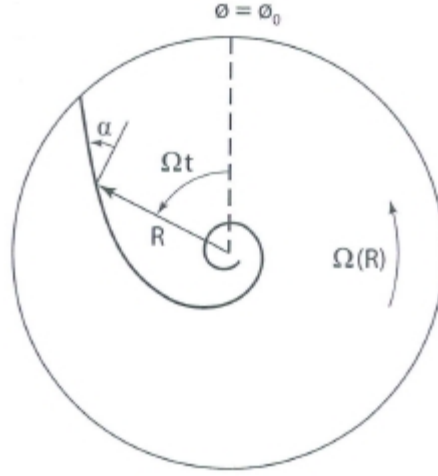


FIG. 6.5 – Définition du “pitch angle” pour un bras spiral trailing. La forme du bras est donnée sous l’hypothèse qu’il est dû à la rotation différentielle de la galaxie, cette rotation obéissant à la loi  $\Omega(R) \propto R^{-1}$ .

longue que celle des étoiles massives qui viennent de se former localement. Si les sursauts (“bursts”) de formation stellaire apparaissent de manière aléatoire en position et en temps, la galaxie présenterait en tout temps plusieurs bras, même si ces derniers sont éphémères. Cette solution pourrait expliquer les galaxies dites “flocculentes”, mais pas les galaxies dites “grand design” qui présentent typiquement deux bras bien symétriques et réguliers.

2. Hypothèse de Lin et Shu (1966) : la structure spirale est une onde de densité stationnaire. Dans ce modèle, les étoiles *ne restent pas* dans les bras, mais les traversent, bien que plus lentement que les régions inter-bras. Ainsi le “winding problem” est-il évité.
3. La structure spirale n’est qu’un phénomène temporaire, résultant de rencontres entre galaxies. Cela est certainement vrai dans certains cas, et même la galaxie “grand design” type, M51, a récemment subi une rencontre avec sa voisine NGC 5195. Toutefois, le très grand nombre de galaxies spirales laisse penser que ce mécanisme purement contingent ne suffit pas.

#### 6.1.4 Vitesse de rotation de la structure spirale (“pattern”)

Selon l’hypothèse de Lin et Shu, la structure spirale est une onde qui tourne de manière rigide, comme un corps solide. On la voit tourner, d’un référentiel d’inertie, à la vitesse du “pattern”  $\Omega_P$ . Si l’amplitude de l’onde spirale est faible, la matière de la galaxie circule sur des orbites quasi-circulaires à une vitesse angulaire qui varie avec le rayon,  $\Omega(R)$ , que l’on considérera comme positive. Le rayon pour lequel  $\Omega(R) = \Omega_P$  est appelé *rayon de corotation* ou *résonance de corotation*. Comme la vitesse angulaire de la matière  $\Omega(R)$  décroît avec  $R$  dans pratiquement toutes les galaxies, un “pattern” spiral à rayon  $R$  tel que  $\Omega(R) > \Omega_P$  est dit se trouver à *l’intérieur de la corotation*, tandis qu’un “pattern” tel que  $\Omega(R) < \Omega_P$  est dit se trouver à *l’extérieur de la corotation*.

Dans les galaxies “grand design”, les traînées de poussière sont généralement situées à l’intérieur des bras tracés par les étoiles brillantes, et on peut interpréter ce déplacement comme étant dû au délai qui sépare la compression maximale du gaz et la formation des étoiles. Mais pour cela, il faut que le gaz et les étoiles approchent les bras *de l’intérieur*. Or, comme les bras sont “trailing”, le gaz doit tourner plus vite que l’onde spirale. Par conséquent, le “pattern” des spirales “grand-design” est habituellement à *l’intérieur de la corotation*.

Plusieurs méthodes plus ou moins fiables ont été utilisées pour estimer la vitesse du “pattern” :

1. On peut ajuster le “pattern” spiral à des modèles analytiques ou numériques donnant le pitch angle en fonction du rayon et de la vitesse du “pattern”. Cela implique de comprendre la dynamique du disque, d’avoir de bonnes estimations de la densité de surface du disque, de la dispersion de vitesse et de la courbe de rotation.
2. On peut calculer le potentiel gravitationnel du disque, y compris sa composante non axisymétrique due aux bras spiraux, à partir de la distribution de densité de surface déduite de la lumière proche-infrarouge. On calcule ensuite les lignes de courant du gaz froid dans ce potentiel en fonction de la vitesse du “pattern”, et on détermine la vitesse pour laquelle les prédictions du modèle s’ajustent le mieux aux vitesses radiales (i.e., le long de la ligne de vue) observées pour les raies de H I et CO.

3. On a vu précédemment les rayons de Lindblad, où la fréquence apparente d'une perturbation à  $m$  bras,  $m(\Omega - \Omega_p)$ , entre en résonance avec la fréquence épicycle  $\kappa$  d'une étoile. A ces rayons, le gaz froid va subir de fortes contraintes radiales provoquant des chocs et donc peut-être une formation stellaire rapide. Ces régions d'intense formation stellaire pourraient être visibles sous forme d'anneaux. La vitesse du "pattern" peut être déterminée à partir des rayons de Lindblad une fois que la courbe de vitesse circulaire est connue.
4. Supposons qu'une composante de la galaxie telle que les étoiles du vieux disque, satisfassent l'équation de continuité. On peut déterminer la vitesse le long de la ligne de vue  $v_{\parallel}$  et la densité de surface (ou la brillance de surface)  $\Sigma$  de cette population en chaque point du disque. Soit le plan  $(x, y)$  du disque, et soient  $(x', y')$  les coordonnées qui tournent avec la vitesse du "pattern"  $\Omega_p = \Omega_p \hat{\mathbf{e}}_z$ . Le "pattern" est stationnaire dans le référentiel en rotation, si bien que dans ce référentiel l'équation de continuité s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial x'}(\Sigma v'_x) + \frac{\partial}{\partial y'}(\Sigma v'_y) = 0 \quad (6.9)$$

La vitesse dans un référentiel d'inertie est  $\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \Omega_p \wedge \mathbf{x}'$ , donc :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x'} [\Sigma(v_x + \Omega_p y')] + \frac{\partial}{\partial y'} [\Sigma(v_y - \Omega_p x')] \\ &= \frac{\partial}{\partial x} (\Sigma v_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\Sigma v_y) + \Omega_p y \frac{\partial \Sigma}{\partial x} - \Omega_p x \frac{\partial \Sigma}{\partial y} = 0 \end{aligned} \quad (6.10)$$

où on a supprimé les primes sur  $x$  et sur  $y$ , dans la dernière ligne, parce qu'on peut choisir de faire coïncider les coordonnées fixes ou en rotation à n'importe quel instant.

Intégrons cette équation sur  $x$  de  $-\infty$  à  $+\infty$  : les premier et troisième termes disparaissent car  $\Sigma \rightarrow 0$  quand  $|x| \rightarrow \infty$ . Il reste ainsi :

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \int_{-\infty}^{\infty} dx \Sigma v_y - \Omega_p \int_{-\infty}^{\infty} dx \Sigma x \right) = 0 \quad (6.11)$$

Par conséquent, la quantité entre parenthèses est indépendante de  $y$ . De plus, elle doit s'annuler quand  $|y| \rightarrow \infty$ , donc on a :

$$\Omega_p = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} dx \Sigma v_y}{\int_{-\infty}^{\infty} dx \Sigma x} \quad (6.12)$$

Pour l'observateur, le plus simple est de choisir l'axe  $x$  le long de la ligne des noeuds du disque (i.e., l'intersection du disque avec le plan du ciel). Dans ce cas,  $v_y = v_{\parallel} / \sin i$ , où  $v_{\parallel}$  est la vitesse le long de la ligne de vue par rapport au centre de la galaxie et  $i$  l'inclinaison (i.e., l'angle entre la normale au disque et la ligne de vue). Ainsi, toutes les quantités du membre de droite de l'Equ. (6.12) sont en principe mesurables. Chaque valeur de  $y$  donne une valeur indépendante de  $\Omega_p$ , et toutes ces valeurs devraient être cohérentes.

Les hypothèses cruciales de cette méthode sont qu'il *existe* une vitesse de "pattern" bien définie – c'est-à-dire que la densité de surface  $\Sigma$  et le champ de vitesse  $\mathbf{v}$  sont stationnaires dans le temps, abstraction faite de la rotation d'ensemble – et que la population que l'on utilise satisfait l'équation de continuité – c'est-à-dire que ses membres ne peuvent être ni créés ni détruits. La seconde condition est satisfaite par les étoiles du vieux disque, mais non par les étoiles jeunes et lumineuses (donc massives), qui ont une durée de vie courte, ni par le gaz H I, puisque le gaz atomique peut être converti en gaz moléculaire et vice-versa.

Jusqu'ici la méthode a été surtout utilisée pour mesurer la vitesse de "pattern" des barres dans les galaxies SB0 et SBa n'ayant que peu ou pas de formation stellaire récente. Il est plus difficile de l'appliquer aux galaxies spirales parce que la luminosité des étoiles jeunes dilue fortement la contribution des étoiles vieilles dans le spectre observé. Rand & Wallin (2004) ont appliqué la méthode aux spirales dans lesquelles le gaz interstellaire est dominé par la phase moléculaire, car dans ce cas on peut admettre que la plus grande fraction du gaz ne peut apparaître ou disparaître rapidement, et doit donc satisfaire à l'équation de continuité. Ils obtiennent la vitesse du "pattern" pour cinq galaxies spirales dont M100, pour laquelle ils trouvent  $\Omega_p = (28 \pm 5) \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$ , en accord avec d'autres méthodes (voir Fig. 6.6).

5. La rotation des barres est plus aisée à mesurer que la rotation des "pattern" spiraux. Comme les bras spiraux semblent en général émerger des extrémités des barres, et comme on s'attend à ce que les barres prononcées entretiennent la structure spirale, il est naturel de supposer que la vitesse de "pattern" des barres et des spirales est la même. Malheureu-

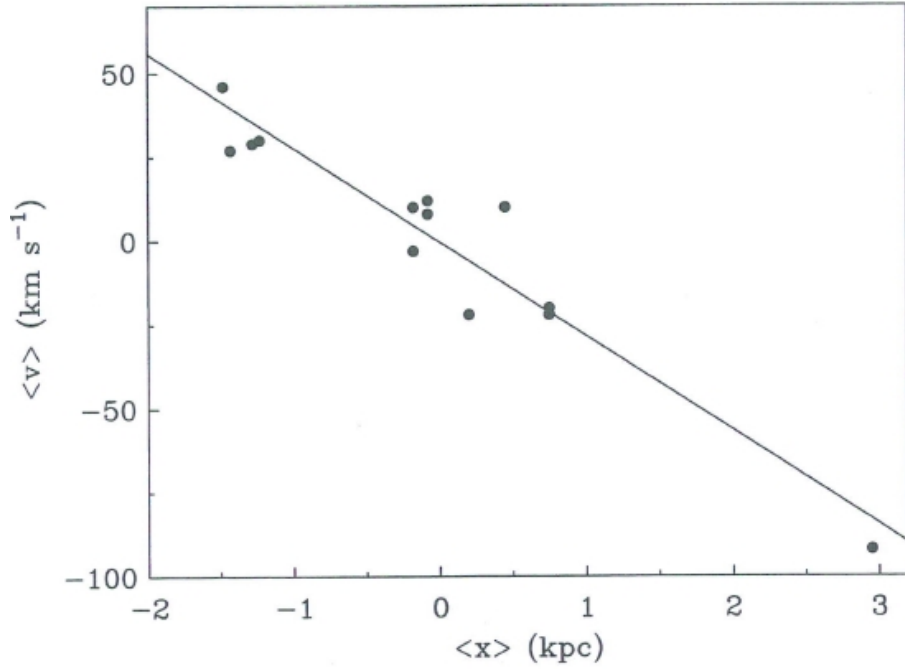


FIG. 6.6 – Mesure de la vitesse de l'onde de densité dans la galaxie M100, sur la base de l'émission du gaz moléculaire. Source : Rand & Wallis (2004).

sement, cet argument apparemment séduisant se heurte au fait que, en général, le rayon de corotation d'une barre est situé près du bout de la barre, ce qui impliquerait que la majeure partie du "pattern" spiral se situerait *au-delà* de la corotation. Or cela contredit l'argument évoqué plus haut, selon lequel les bras spiraux devraient être à *l'intérieur* de la corotation. Sellwood & Sparke (1988) proposent que l'erreur dans cette chaîne d'arguments est qu'en réalité, les bras spiraux ont une vitesse de "pattern" beaucoup plus faible que la barre. A partir de simulations N-corps, ils montrent que les bras spiraux semblent connectés aux bouts de la barre durant la plus grande partie de la période de battement entre les deux vitesses, même quand elles sont très différentes.

Toutes ces méthodes se basent sur l'hypothèse de la structure spirale stationnaire, donc que le "pattern" spiral possède une vitesse bien définie. Même si la Fig. (6.6) semble confirmer cette hypothèse, celle-ci manque encore de confirmation définitive.



### 6.1.5 Le théorème anti-spiral

Les équation du mouvement de Newton ne dépendent pas du signe de la variable temps. Si on change de signe le temps, les trajectoires sont également possibles dynamiquement. Par conséquent, si la dynamique d’une galaxie spirale est gouvernée par les équations de Newton et que la galaxie est en état stationnaire (i.e., il existe une structure tournant à vitesse  $\Omega_p$  dans laquelle la fonction de distribution ne dépend pas du temps), alors un film de la galaxie passé à l’envers devrait aussi représenter une solution stationnaire possible des équations. Mais une inversion du temps transforme des bras “trailing” en bras “leading”, en changeant le signe de toutes les vitesses sans changer la brillance de surface instantanée. Cela est la base du **théorème anti-spiral**, selon lequel *si une solution stationnaire d’un ensemble d’équations pour lesquelles on peut changer le signe du temps a la forme d’une spirale “trailing”, alors il doit exister une solution identique donnant une spirale “leading”* (Lynden-Bell & Ostriker 1967).

Ce théorème implique que les galaxies spirales ne peuvent être comprises uniquement comme des solutions stationnaires de l’équation de Boltzmann sans collisions et des lois de la gravité de Newton, puisqu’on observe que les bras sont “trailing”. Il y a des phénomènes physiques supplémentaires, par exemple des processus dissipatifs (donc irréversibles) dans le gaz interstellaire ou à une résonance de Lindblad. Ou alors, il faudrait admettre que les spirales ne sont pas dans un état stationnaire mais résultent de perturbations récentes, ou sont continuellement régénérées.

## 6.2 Mécanique des ondes dans un disque en rotation différentielle

### 6.2.1 Introduction

#### (a) Cinématique des ondes de densité

La distance galactocentrique d'une particule qui orbite dans le plan équatorial d'une galaxie axisymétrique est une fonction périodique du temps de période  $T_r$ . Durant  $T_r$ , l'angle azimutal croît de  $\Delta\phi$ . Les fréquences d'oscillation radiale et azimutales sont respectivement  $\Omega_r = 2\pi/T_r$  et  $\Omega_\phi = \Delta\phi/T_r$ . En général,  $\Delta\phi/2\pi$  est irrationnel, donc les orbites ont une forme de rosette non fermée.

Supposons que nous regardions l'orbite à partir d'un repère tournant à la vitesse angulaire  $\Omega_p$ . Dans ce repère, l'angle azimutal vaut  $\phi_p = \phi - \Omega_p t$  et il croît de  $\Delta\phi_p = \Delta\phi - \Omega_p T_r$  en une période radiale. Par conséquent, on peut choisir  $\Omega_p$  de telle manière que l'orbite soit fermée : si  $\Delta\phi_p = 2\pi n/m$ , où  $m$  et  $n$  sont des entiers, l'orbite se ferme après  $m$  oscillations radiales. Dans ce cas :

$$\Omega_p = \Omega_\phi - \frac{n\Omega_r}{m} \simeq \Omega - \frac{n\kappa}{m} \quad (6.13)$$

où  $\Omega_\phi$  et  $\Omega_r$  ont été approximées par leurs valeurs pour des orbites quasi circulaires, la fréquence circulaire  $\Omega$  et la fréquence épicycle  $\kappa$  respectivement. L'apparence des orbites fermées dans le repère en rotation est montré en Fig. (6.7).

En règle générale,  $\Omega(R) - n\kappa(R)/m$  est fonction du rayon, si bien qu'une valeur unique de  $\Omega_p$  ne garantit pas que les orbites soient fermées quel que soit le rayon. On montre en Fig. (6.9) comment varie  $\Omega(R) - n\kappa(R)/m$  en fonction de  $R$  pour différentes valeurs de  $m$  et de  $n$ . Les courbes sont données pour deux courbes de vitesse circulaire représentatives, celle du potentiel isochrone et celle du Modèle I de notre Galaxie (voir Table 2.6). Lindblad remarqua, il y a quelques décennies, que les courbes de  $\Omega(R) - n\kappa(R)/m$  sont presque constantes sur une large fraction de la galaxie pour  $n = 1$ ,  $m = 2$  (ou  $n = 2$ ,  $m = 4$ , etc.), alors qu'elles varient rapidement avec  $R$  pour les autres valeurs de  $m$  et  $n$ . Pour comprendre l'importance de ce point, supposons pour l'instant que  $\Omega(R) - n\kappa(R)/m$  soit *exactement* constant et égal à une valeur  $\Omega_p$ . Dans ce cas les orbites sont fermées à tous les rayons,

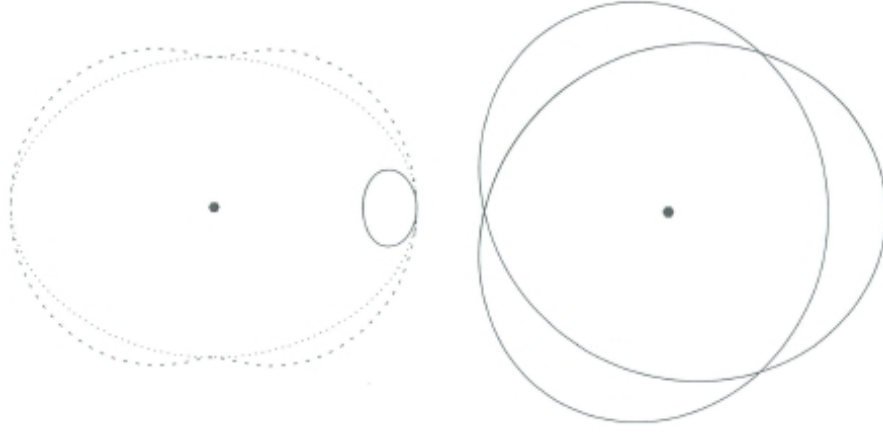


FIG. 6.7 – Aspect que prennent des orbites elliptiques dans un référentiel tournant à la vitesse  $\Omega_p = \Omega - n\kappa/m$ , pour différentes valeurs de  $n$  et  $m$ . A gauche : ligne continue,  $(n, m) = (0, 1)$  ; ligne pointillée,  $(n, m) = (1, 2)$  ; ligne traitillée,  $(n, m) = (1, -2)$ . A droite :  $(n, m) = (2, 3)$ .

et selon l'orientation des axes des orbites elliptiques, une structure spirale peut apparaître, qui tourne à vitesse  $\Omega_p$  (Fig. 6.8). Mais, dans une galaxie réelle,  $\Omega - n\kappa/m$  n'est pas parfaitement constant : l'orientation des différentes orbites change lentement (dans le référentiel tournant à vitesse  $\Omega_p$ ), si bien que l'on retrouve le “winding problem”, bien que fortement atténué. Si  $\phi_p(R, t)$  est l'azimut du grand axe de l'orbite, vu du référentiel tournant, et si les grands axes sont alignés au temps  $t = 0$  (auquel  $\phi_p(R, 0) = \phi_0$ ), alors la vitesse angulaire de migration du grand axe en azimut est donnée par la différence des vitesses angulaires absolues  $\partial\phi/\partial t = \Omega - \frac{1}{2}\kappa - \Omega_p$  (on a supposé  $n = 1, m = 2$  ou  $n = 2, m = 4$ ). Donc :

$$\phi_p(R, t) = \phi_0 + \left[ \Omega(R) - \frac{1}{2} \kappa(R) - \Omega_p \right] t$$

En passant par l'Equ. (6.6), le pitch angle est donné par :

$$\cot \alpha = R t \left| \frac{d(\Omega - \frac{1}{2} \kappa)}{dR} \right|$$

Dans le Modèle I du potentiel de la Galaxie, la valeur moyenne de  $|Rd(\Omega -$

$\frac{1}{2}\kappa)/dR|$  est de l'ordre de  $7 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$  pour  $5 < R < 10 \text{ kpc}$ , et après  $t = 10 \text{ Gyr}$ ,  $\alpha \simeq 0.8^\circ$  dans cette région. Par rapport à un bras de matière pour lequel nous avons estimé  $\alpha < 0.2^\circ$ , cela représente déjà un progrès d'un facteur 5 environ. Le problème de l'enroulement subsiste (on est encore à un facteur 10 ou 20 de la solution), mais la situation est bien meilleure. On peut en conclure que, dans les galaxies ayant une courbe de vitesse semblable à la nôtre, *les ondes de densité avec  $n = 1$ ,  $m = 2$  résistent bien mieux à l'enroulement que des bras de matière*. Cela suggère une explication naturelle de la prévalence des spirales à deux bras, pourvu que l'on trouve un moyen d'ajuster les lentes vitesses de glissement des orbites à une valeur commune.

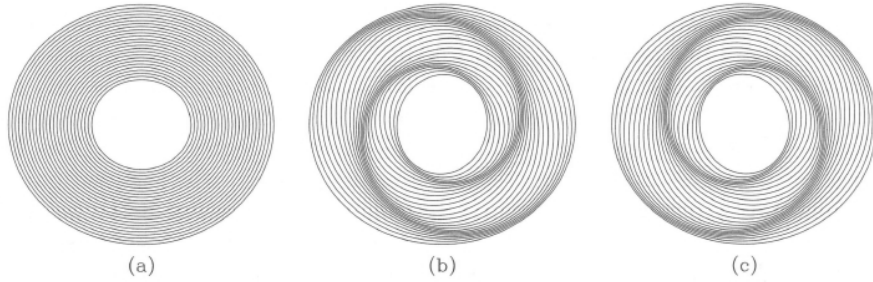


FIG. 6.8 – Différentes disposition d'orbites fermées dans une galaxie ayant  $\Omega - \frac{1}{2}\kappa$  indépendant du rayon (d'après Kalnajs 1973). On voit qu'une spirale à deux bras peut résulter d'orbites elliptiques légèrement inclinées les unes par rapport aux autres.

On appelle **ondes de densité cinématiques** les ondes de densité décrites plus haut parce qu'elles ne mettent en jeu que la cinématique des orbites dans un potentiel axisymétrique. Dans une galaxie réelle, les orbites dévièrent des chemins que nous avons supposés, parce que le "pattern" spiral lui-même est la source d'une composante non axisymétrique du champ gravitationnel. Un but majeur de la théorie de la structure spirale est de déterminer si le champ gravitationnel non axisymétrique dû aux bras spiraux est capable de coordonner les vitesses de glissement des orbites de façon à produire des structures spirales de longue durée de vie.

## (b) Résonances

Les orbites ont des fréquences de résonance naturelles. Si le champ gravitationnel engendré par la structure spirale perturbe une orbite près d'une de ses fréquences de résonance, alors la réponse de l'orbite est forte, même si le champ perturbateur est faible. Le premier pas essentiel est donc de localiser les orbites résonnantes.

Un potentiel gravitationnel stationnaire dans un repère tournant peut être écrit sous la forme  $\Phi_1(R, \phi, t) = \Phi(R, \phi - \Omega_p t)$ , où  $\Omega_p$  est la vitesse de la structure du potentiel. Des systèmes qui engendrent de tel potentiels sont par exemple des barres tournantes au centre de galaxies disques, une galaxie satellite sur une orbite circulaire dans le plan du disque, ou toute structure spirale stationnaire. On peut représenter des potentiels plus compliqués en superposant des modèles doués de différentes vitesses de "pattern".

Examinons maintenant l'effet d'un faible potentiel de cette forme sur un disque composé d'étoiles sur des orbites circulaires ou quasi circulaires. Comme le potentiel est périodique en  $\phi - \Omega_p t$ , il peut être décomposé en une série de termes proportionnels à  $\cos[m(\phi - \Omega_p t) + f_m(R)]$ , où  $m > 0$  est un entier. Nous avons étudié des orbites dans des potentiels de cette forme au Chapitre 3, et avons trouvé que des résonances apparaissent lorsque la fréquence circulaire  $\Omega$  et la fréquence épicycle  $\kappa$  dans le potentiel axisymétrique non perturbé satisfait l'une des trois conditions :  $\Omega = \Omega_p$  (résonance de corotation),  $m(\Omega - \Omega_p) = \kappa$  (résonance de Lindblad interne), ou  $m(\Omega - \Omega_p) = -\kappa$  (résonance de Lindblad externe). Ces résonances apparaissent à des rayons spécifiques dans un disque en rotation différentielle. La position et même l'existence de ces rayons, appelés rayons de corotation et de Lindblad, dépend de la courbe de rotation circulaire et de la vitesse du "pattern". Par exemple, on voit en Fig. (6.9) que le potentiel isochrone a zéro ou deux rayons de Lindblad avec  $m = 2$ , selon la valeur de  $\Omega_p$ , alors que le Modèle I pour la Galaxie a un rayon de Lindblad interne si  $\Omega_p > 0$ , et zéro sinon.

Il faut remarquer que la condition donnée par l'Equ. (6.13) pour une onde de densité stationnaire cinématique avec  $n = \pm 1$  est la même que la condition d'une résonance de Lindblad. Cela est normal : près de la résonance, une faible perturbation munie d'une symétrie de rotation d'ordre  $m$  peut produire une réponse forte douée de la même symétrie, donc on s'attend à ce que, quand la condition d'une résonance de Lindblad est satisfaite exactement, une structure d'onde stationnaire symétrique d'ordre  $m$  puisse persister même en l'absence de toute perturbation.

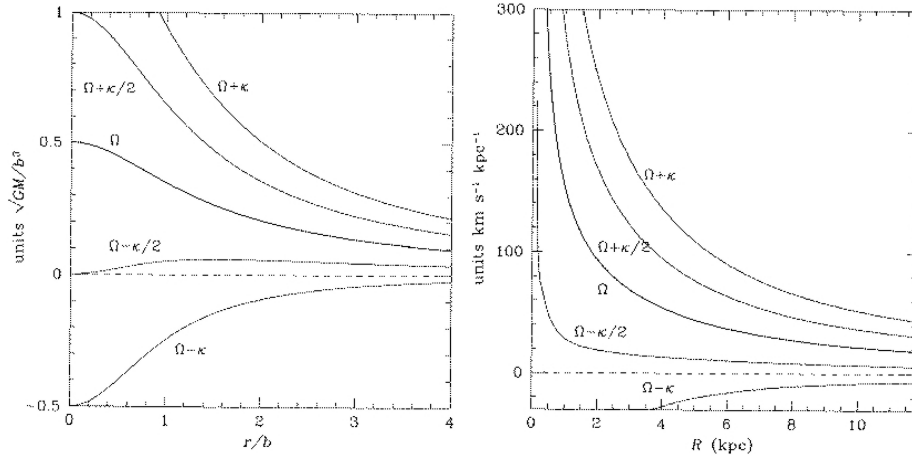


FIG. 6.9 – Comportement de  $\Omega - n\kappa/m$  dans un potentiel isochrone (à gauche) et dans le Modèle I de notre Galaxie (à droite).

### 6.2.2 Relation de dispersion pour des bras spiraux serrés (en lecture)

Il s'agit d'analyser le comportement des ondes de densité dans les disques en trois étapes. D'abord on fait appel à l'équation de Poisson pour calculer le potentiel gravitationnel d'un "pattern" de densité de surface supposé a priori. Deuxièmement, on veut déterminer comment ce potentiel affecte les orbites stellaires et donc la densité de surface dans la galaxie. Finalement, on fait coïncider cette densité de surface résultante avec celle introduite au début pour obtenir une onde de densité auto-cohérente.

On considère le disque comme très fin ("razor-thin"), de sorte que l'on puisse travailler en deux dimensions spatiales plutôt que trois. On suppose aussi que les perturbations de densité imposées au disque initialement axisymétrique sont faibles, de sorte que l'on puisse appliquer une théorie linéaire des perturbations. Des ondes de densité auto-cohérentes sont alors des modes linéaires du disque galactique.

**(a) L'approximation de l'enroulement serré** La gravité est une force à longue portée, donc les perturbations de toutes les parties du système sont couplées. Mais, pour des ondes de densité fortement enroulées, le couplage à longue portée est négligeable, la réponse est déterminée localement, et les so-

lutions pertinentes sont analytiques. Cette **approximation d'enroulement serré, de courte longueur d'onde ou WKB**<sup>1</sup>, est un outil indispensable pour comprendre les propriétés des ondes de densité dans les disques en rotation différentielle.

Dans les galaxies observées, la séparation radiale entre deux bras adjacents, pour un azimuth donné, est  $\Delta R$  tel que  $|f(R + \Delta R, t) - f(R, t)| = 2\pi$ , avec  $f(R, t)$  la fonction de forme (Equ. (6.4)). Dans le cas de bras serrés, on peut poser :

$$f(R + \Delta R, t) \simeq f(R, t) + \frac{\partial f}{\partial R} \Delta R$$

Puis, en recourant aux Eqs. (6.5) et (6.6), on remplace  $\partial f / \partial R$  par le nombre d'onde  $k$  :

$$\Delta R = \frac{2\pi}{|k|} = \frac{2\pi R}{m} \tan \alpha \quad (6.14)$$

Pour des bras très enroulés, la longueur d'onde radiale est  $2\pi/|k|$ . L'observation montre que les pitch angles dans les galaxies spirales typiques sont de l'ordre de 10 à 15°. Pour les spirales à deux bras, cela correspond à  $|kR| \simeq 7 - 11$ . L'approximation WKB exige  $|kR| \gg 1$ , bien que dans certaines situations elle s'applique même pour  $|kR| \simeq 1$ . L'approximation WKB est donc applicable à la plupart des galaxies spirales, bien que la marge soit étroite. Les résultats de cette approximation doivent être considérés davantage comme une aide à l'interprétation des simulations N-corps que comme une théorie achevée.

**(b) Potentiel d'une spirale serrée** La densité de surface d'un disque d'épaisseur nulle peut être représentée comme la somme d'une densité de surface non perturbée (donc axisymétrique)  $\Sigma_0(R)$  et d'une densité de surface perturbée  $\Sigma_1(R, \phi, t)$  représentant le "pattern" spiral. Pour un bras bien enroulé, il est pratique d'écrire  $\Sigma_1$  sous une forme qui sépare la variation rapide de densité lorsqu'on passe d'un bras au suivant, de la variation plus lente de l'intensité de la spirale quand on se déplace le long d'un bras. On écrit alors :

$$\Sigma_1(R, \phi, t) = H(R, t) e^{i[m\phi + f(R, t)]} \quad (6.15)$$

---

<sup>1</sup>Wentzel, Kramers, Brillouin, utilisée en mécanique quantique

où  $f(R, t)$  est la fonction de forme définie par l'Equ. (6.4), et  $H(R, t)$  est une fonction donnant l'amplitude du schéma spiral et qui varie lentement avec  $R$ . La densité de surface physique est donnée par la partie réelle de l'Equ. (6.15). Cette expression suppose que la variation de la densité de surface est à peu près sinusoidale en fonction du rayon, ce qui est correct dans le cadre de la théorie des perturbations linéarisées.

Il s'agit maintenant de déterminer le potentiel gravitationnel dû au "pattern" défini par l'Equ. (6.15). Comme la perturbation de la densité de surface oscille rapidement autour d'une moyenne nulle, il va y avoir annulation presque exacte des contributions lointaines du "pattern" au potentiel local. Autrement dit, le potentiel perturbé en un point donné sera presque entièrement défini par les propriétés du "pattern" à moins de quelques longueurs d'onde de ce point. Au voisinage d'un point  $(R_0, \phi_0)$ , on peut donc remplacer la fonction de forme  $f(R, t)$  par les deux premiers termes de son expansion de Taylor,  $f(R_0, t) + k(R_0, t)(R - R_0)$  :

$$\Sigma_1(R, \phi, t) \simeq \Sigma_a e^{ik(R_0, t)(R - R_0)} \quad \text{où} \quad \Sigma_a = H(R, t) e^{i[m\phi_0 + f(R_0, t)]} \quad (6.16)$$

On a négligé les variations selon l'angle  $\phi$  car elles sont beaucoup plus lentes que les variations radiales quand la spirale est bien enroulée. L'Equ. (6.16) montre qu'au voisinage de  $(R_0, \phi_0)$ , l'onde spirale ressemble à une onde plane de nombre d'onde vectoriel  $\mathbf{k} = k \hat{\mathbf{e}}_R$ . Le potentiel d'une onde plane dans un disque d'épaisseur négligeable est de la forme (Binney & Tremaine 2008, Chap. 5, p. 441) :

$$\Phi_1(R, \phi, z, t) \simeq \Phi_a e^{ik(R_0, t)(R - R_0) - |k(R_0, t)z|} \quad \text{où} \quad \Phi_a = -\frac{2\pi G \Sigma_a}{|k|} \quad (6.17)$$

On peut alors poser  $R = R_0$ ,  $\phi = \phi_0$  et  $z = 0$ , ce qui donne le potentiel dans le plan dû à la densité de surface donnée par l'Equ. (6.15) :

$$\Phi_1(R, \phi, t) = -\frac{2\pi G}{|k|} H(R, t) e^{i[m\phi + f(R, t)]} \quad (6.18)$$

L'erreur relative sur ce résultat est de l'ordre de  $|kR|^{-1}$ . On peut obtenir une autre expression en dérivant cette Equ. (6.18) par rapport au rayon et en négligeant la dérivée de  $H(R, t)$  par rapport à celle de  $f(R, t)$ , ce qui implique aussi une erreur de l'ordre de  $|kR|^{-1}$  et ne dégrade donc pas l'approximation. On obtient :



$$\Sigma_1(R, \phi, t) = \frac{i \operatorname{sgn}(k)}{2\pi G} \frac{\partial}{\partial R} \Phi_1(R, \phi, t) \quad (6.19)$$

toujours avec une erreur relative  $\mathcal{O}(|kR|^{-1})$ . Comme ce résultat n'inclut le nombre d'onde  $k$  que par son signe, il est valable pour toute spirale enroulée dont les composantes de Fourier comportent essentiellement soit des ondes "leading" ( $kR \ll -1$ ), soit des ondes "trailing" ( $kR \gg 1$ ). Shu (1970) a donné une version plus exacte dont l'erreur n'est que de l'ordre de  $|kR|^{-2}$  :

$$\Sigma_1(R, \phi, t) = \frac{i \operatorname{sgn}(k)}{2\pi G \sqrt{R}} \frac{\partial}{\partial R} \left[ \sqrt{R} \Phi_1(R, \phi, t) \right] \quad (6.20)$$

**(c) Relation de dispersion dans les disques fluides** Déterminons la réponse d'un disque galactique à une perturbation du potentiel. Les disques fluides étant plus simples que les disques stellaires, on considère la structure spirale dans les disques fluides avant d'aborder les disques stellaires plus compliqués. Les résultats que nous allons obtenir ici préfigurent ceux des disques stellaires.

On peut commencer sans invoquer l'hypothèse des bras très enroulés ; on le fera plus tard, afin d'éviter des calculs numériques. Par contre on néglige à nouveau l'épaisseur du disque et on suppose que la pression ne s'exerce que dans son plan : le mouvement est donc limité au plan  $z = 0$ . Partant de l'équation donnant  $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}$  en coordonnées cylindriques, les équations d'Euler s'écrivent :

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_R}{\partial t} + v_R \frac{\partial v_R}{\partial R} + \frac{v_\phi}{R} \frac{\partial v_R}{\partial \phi} - \frac{v_\phi^2}{R} &= -\frac{\partial \Phi}{\partial R} - \frac{1}{\Sigma_d} \frac{\partial p}{\partial R} \\ \frac{\partial v_\phi}{\partial t} + v_R \frac{\partial v_\phi}{\partial R} + \frac{v_\phi}{R} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_\phi v_R}{R} &= -\frac{1}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} - \frac{1}{\Sigma_d R} \frac{\partial p}{\partial \phi} \end{aligned} \quad (6.21)$$

où l'on a remplacé la densité volumique  $\rho$  par la densité de surface du disque  $\Sigma_d$ . On choisit de plus une équation d'état simple :

$$p = K \Sigma_d^\gamma \quad (6.22)$$

Avec une telle équation d'état, le son se déplace dans un disque de densité  $\Sigma_0$  à une vitesse  $v_s$  donnée par :

$$v_s^2(\Sigma_0) = \left( \frac{dp}{d\Sigma} \right)_{\Sigma_0} = \gamma K \Sigma_0^{\gamma-1} \quad (6.23)$$

Les équations du mouvement Equ. (6.21) se simplifient si on remplace la pression  $p$  par l'enthalpie spécifique :

$$h = \frac{\gamma}{\gamma-1} K \Sigma_d^{\gamma-1} \quad (6.24)$$

Par exemple, le côté droit de la première équation du mouvement devient :

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial R} - \frac{1}{\Sigma_d} \frac{\partial p}{\partial R} = -\frac{\partial \Phi}{\partial R} - \gamma K \Sigma_d^{\gamma-2} \frac{\partial \Sigma_d}{\partial R} = -\frac{\partial}{\partial R}(\Phi + h) \quad (6.25)$$

avec une simplification semblable dans la seconde équation.

Supposons maintenant que l'onde spirale est une petite perturbation dans un disque axisymétrique stationnaire, de sorte qu'on puisse linéariser les équations du mouvement. Si les quantités relatives au disque non perturbé sont notées par l'indice 0, on a  $v_{R0} = 0$  et  $\partial \Phi_0 / \partial \phi = \partial p_0 / \partial \phi = 0$ . Les équations d'Euler du disque non perturbé deviennent simplement :

$$\frac{v_{\phi 0}^2}{R} = \frac{d}{dR}(\Phi_0 + h_0) = \frac{d\Phi_0}{dR} + v_s^2 \frac{d}{dR} \ln \Sigma_0 \quad (6.26)$$

qui égale l'accélération centripète  $v_{\phi 0}^2/R$  de gauche aux forces de gravité et de pression par unité de masse à droite. Dans les cas qui nous intéressent ici, la vitesse du son  $v_s$  est beaucoup plus faible que la vitesse de rotation  $v_{\phi 0}$  : par exemple, dans le gaz interstellaire de notre Galaxie,  $v_s \simeq 10 \text{ km s}^{-1}$  alors que  $v_{\phi 0} \simeq 220 \text{ km s}^{-1}$ . Ainsi, on peut négliger le terme  $v_s^2 \frac{d \ln \Sigma_0}{dR}$  dans l'Equ. (6.26), et :

$$v_{\phi 0} \simeq \sqrt{R \frac{d\Phi_0}{dR}} = R\Omega(R) \quad (6.27)$$

où  $\Omega(R)$  est la vitesse circulaire.

Ecrivons à présent  $v_R = \epsilon v_{R1}$ ,  $v_\phi = v_{\phi 0} + \epsilon v_{\phi 1}$ ,  $h = h_0 + \epsilon h_1$ ,  $\Sigma_d = \Sigma_0 + \epsilon \Sigma_{d1}$ ,  $\Phi = \Phi_0 + \epsilon \Phi_1$ , avec  $\epsilon \ll 1$ , et où les quantités munies de l'indice 1 sont du même ordre de grandeur que celles ayant l'indice 0. En ne gardant que les termes au premier ordre en  $\epsilon$ , les expressions dans l'Equ. (6.21) donnent :

$$\begin{aligned}\frac{\partial v_{R1}}{\partial t} + \Omega \frac{\partial v_{R1}}{\partial \phi} - 2\Omega v_{\phi 1} &= -\frac{\partial}{\partial R}(\Phi_1 + h_1) \\ \frac{\partial v_{\phi 1}}{\partial t} + \left[ \frac{d(\Omega R)}{dR} + \Omega \right] v_{R1} + \Omega \frac{\partial v_{\phi 1}}{\partial \phi} &= -\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \phi}(\Phi_1 + h_1)\end{aligned}\quad (6.28)$$

Le terme entre crochets de la seconde équation peut s'écrire  $-2B(R)$ , où  $B(R)$  est défini par l'Equ. (3.50) et est relié à la fréquence épicycle  $\kappa$ .

Toute solution de l'Equ. (6.28) est une somme de termes de la forme :

$$\begin{aligned}v_{R1} &= Re [v_{Ra}(R)e^{i(m\phi - \omega t)}] \quad ; \quad v_{\phi 1} = Re [v_{\phi a}(R)e^{i(m\phi - \omega t)}] \\ \Phi_1 &= Re [\Phi_a(R)e^{i(m\phi - \omega t)}] \quad ; \quad h_1 = Re [h_a(R)e^{i(m\phi - \omega t)}] \\ \Sigma_{d1} &= Re [\Sigma_{da}(R)e^{i(m\phi - \omega t)}]\end{aligned}\quad (6.29)$$

où  $m \geq 0$  est un entier et la perturbation a une symétrie de rotation d'ordre  $m$ . En substituant ces définitions dans l'Equ. (6.28) et en isolant  $v_{Ra}$  et  $v_{\phi a}$  on trouve :

$$\begin{aligned}v_{Ra}(R) &= \frac{i}{\Delta} \left[ (\omega - m\Omega) \frac{d}{dR}(\Phi_a + h_a) - \frac{2m\Omega}{R}(\Phi_a + h_a) \right] \\ v_{\phi a}(R) &= -\frac{1}{\Delta} \left[ 2B \frac{d}{dR}(\Phi_a + h_a) + \frac{m(\omega - m\Omega)}{R}(\Phi_a + h_a) \right]\end{aligned}\quad (6.30)$$

avec (sachant que  $\kappa^2 = -4B\Omega$ ) :

$$\Delta \equiv \kappa^2 - (\omega - m\Omega)^2 \quad (6.31)$$

où  $\kappa$ ,  $\Omega$ ,  $\Delta$  sont toutes fonction du rayon, de même que  $\Phi_a$  et  $h_a$ . En combinant les équations 6.23 et 6.24, l'équation d'état linéarisée devient :

$$h_a = \gamma K \Sigma_0^{\gamma-2} \Sigma_{da} = v_s^2 \Sigma_{da} / \Sigma_0 \quad (6.32)$$

où la vitesse du son  $v_s \Sigma_0$  est fonction de la densité non perturbée.

Si  $\omega$  est réel, il peut y avoir des rayons auxquels  $\Delta = 0$ , ce qui fait diverger les Eqs. 6.30. On peut comprendre l'origine de cette singularité en écrivant l'exposant des Eqs. (6.29) sous la forme  $i(m\phi - \omega t) = im(\phi - \Omega_p t)$  avec

$\Omega_p = \omega/m$  la vitesse du "pattern". Ainsi, la singularité dans les vitesses perturbées apparaît quand :

$$\Omega_p = \Omega \pm \frac{\kappa}{m} \quad (6.33)$$

qui est la condition d'une résonance de Lindblad, ou d'une onde de densité cinématique avec  $n \pm 1$  (Equ. (6.13)). Cette singularité apparaît parce que des perturbations non axisymétriques peuvent être entretenues à ces résonances même quand les fonctions entre crochets dans l'Equ. (6.30) sont nulles. La présente analyse échoue au voisinage de ces résonances et un traitement particulier doit être fait pour surmonter cela (Goldreich & Tremaine 1979).

La densité de surface perturbée est liée aux vitesses perturbées par l'équation de continuité. En ne gardant que les termes linéaires en  $\epsilon$ , on obtient alors :

$$\frac{\partial \Sigma_{d1}}{\partial t} + \nabla \cdot (\Sigma_{d1} \mathbf{v}_0) + \nabla \cdot (\Sigma_0 \mathbf{v}_1) = 0 \quad (6.34)$$

que l'on peut écrire en coordonnées cylindriques :

$$\frac{\partial \Sigma_{d1}}{\partial t} + \Omega \frac{\partial \Sigma_{d1}}{\partial \phi} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R v_{R1} \Sigma_0) + \frac{\Sigma_0}{R} \frac{\partial v_{\phi 1}}{\partial \phi} = 0 \quad (6.35)$$

En tenant compte des Eqs. (6.29), cette équation devient :

$$-i(\omega - m\Omega) \Sigma_{da} + \frac{1}{R} \frac{d}{dR} (R v_{Ra} \Sigma_0) + \frac{im\Sigma_0}{R} v_{\phi a} = 0 \quad (6.36)$$

Les trois équations, Eqs. (6.30), (6.32) et (6.36), imposent quatre contraintes aux cinq variables  $\Sigma_{da}$ ,  $v_{Ra}$ ,  $v_{\phi a}$ ,  $h_a$  et  $\Phi_a$ . Ainsi, elles déterminent la *réponse* dynamique  $\Sigma_{da}$  du disque au potentiel  $\Phi_a$  *imposé*. Si ce potentiel est engendré par l'équation de Poisson par une densité de surface  $\Sigma_1 = \text{Re} [\Sigma_a(R) e^{i(m\phi - \omega t)}]$ , on peut écrire formellement :

$$\Sigma_{da}(R) = \int dR' \tilde{P}_m(R, R', \omega) \Sigma_a(R') \quad (6.37)$$

où  $\tilde{P}_m(R, R', \omega)$  est la fonction de polarisation qui lie la densité de réponse  $\Sigma_{da}(R)$  à la densité totale  $\Sigma_a(R)$ . Une onde de densité auto-consistante exige  $\Sigma_a = \Sigma_{da}$ . Ainsi les trois équations, Eqs. (6.30), (6.32) et (6.36), ainsi que l'équation de Poisson peuvent être résolues numériquement pour donner les formes et les fréquences des modes dans un disque donné.

Ici nous nous limiterons à l'obtention de solutions analytiques et *locales*. Comme de coutume, le potentiel d'une onde bien enroulée peut s'écrire sous la forme :

$$\Phi_a(R) = F(R) e^{if(R)} = F(R) e^{i \int^R k \, dR} \quad (6.38)$$

où  $k = df(R)/dR$  et  $|kR| \gg 1$ . Le potentiel et la densité de surface sont liés par l'équation de Poisson, Equ. (6.18), qui est valide à une erreur  $\mathcal{O}(|kR|^{-1})$  près. La réponse du disque  $\Sigma_{da}$  et – à travers l'Equ. (6.32) –  $h_a$  partagent avec  $\Phi_a$  le facteur  $\exp[if(R)]$ , qui varie rapidement avec le rayon. Par conséquent, dans l'Equ. (6.30), les termes proportionnels à  $(\Phi_a + h_a)/R$  sont plus petits que ceux qui contiennent  $d(\Phi_a + h_a)/dR$  d'un facteur  $\simeq kR$ , et on peut les négliger sans dégrader la précision du développement. Donc, l'Equ. (6.30) se simplifie en :

$$v_{Ra} = -\frac{\omega - m\Omega}{\Delta} k(\Phi_a + h_a) \quad ; \quad v_{\phi a} = -\frac{2iB}{\Delta} k(\Phi_a + h_a) \quad (6.39)$$

De même, on remplace  $d(R\Sigma_0 v_{Ra})/dR$  par  $ikR\Sigma_0 v_{Ra}$ . Comme l'Equ. (6.39) montre que  $v_{Ra}$  et  $v_{\phi a}$  sont du même ordre, le deuxième terme domine sur le troisième dans l'Equ. (6.36) de  $\mathcal{O}(|kR|)$ , si bien que l'on peut laisser tomber ce troisième terme. L'équation de continuité prend alors la forme :

$$-(\omega - m\Omega)\Sigma_{da} + k\Sigma_0 v_{Ra} = 0 \quad (6.40)$$

Éliminons  $v_{Ra}$  en utilisant la première équation dans l'Equ. (6.39), puis  $h_a$  en utilisant l'Equ. (6.32) et enfin  $\Phi_a$  en utilisant l'Equ. (6.17). On trouve :

$$\Sigma_{da}(R) = \tilde{P}_m(k, R, \omega) \Sigma_a(R) \quad (6.41)$$

$$\text{où } \tilde{P}_m(k, R, \omega) = \frac{2\pi G \Sigma_0 |k|}{\kappa^2 - (\omega - m\Omega)^2 + v_s^2 k^2} \quad (6.42)$$

est la fonction de polarisation pour des ondes de densité serrées. L'approximation de la spirale serrée nous a permis de réduire l'équation intégrale Equ. (6.37) à une expression analytique simple pour la fonction de polarisation. Pour des ondes de densité auto-cohérentes,  $\tilde{P}_m(k, R, \omega)$  doit être égal à 1, ce qui donne la relation de dispersion pour un disque fluide à la limite de l'enroulement serré :

$$(\omega - m\Omega)^2 = \kappa^2 - 2\pi G\Sigma|k| + v_s^2 k^2 \quad (6.43)$$

où pour alléger, on a laissé tomber l'indice dans la densité de surface d'équilibre  $\Sigma_0$ . Dans le cas des ondes  $m = 0$  dans un disque en rotation uniforme (vitesse angulaire constante, pour laquelle  $\kappa = 2\Omega$  – Chap. 3, p. 65), l'Equ. (6.43) se réduit à la relation de dispersion d'un feuillet en rotation (chap. 5).

**(d) Relation de dispersion dans les disques stellaires** La relation de dispersion WKB pour un disque d'étoiles peut être calculée à l'aide des mêmes principes utilisés ci-dessus pour le disque fluide : on utilise les équations du mouvement pour calculer la perturbation de densité de surface  $\Sigma_{d1}$  résultant d'une perturbation  $\Phi_1$  du potentiel de la forme donnée par l'Equ. (6.29), puis on pose que  $\Sigma_{d1}$  doit être lié à  $\Phi_1$  par l'équation de Poisson. Le pas le plus difficile dans ce calcul est de déterminer la perturbation  $\bar{v}_{R1}$  de la vitesse radiale moyenne des étoiles qui est induite par  $\Phi_1$  en un point  $(R, \phi)$  donné. Si le disque était complètement froid, c'est-à-dire si les orbites non perturbées étaient toutes circulaires, on pourrait obtenir  $\bar{v}_{R1}$  de l'Equ. (6.39) avec  $h_a = 0$ , parce qu'un disque stellaire froid est dynamiquement équivalent à un disque fluide de pression nulle. Ainsi, pour un disque stellaire froid :

$$\bar{v}_{Ra} = -\frac{\omega - m\Omega}{\Delta} k\Phi_a \quad (6.44)$$

où  $\Delta$  est défini par l'Equ. (6.31).

Cette expression est exacte si le disque est assez froid pour que l'amplitude épicycle typique soit beaucoup plus petite que la longueur d'onde  $2\pi/k$  de la structure spirale imposée : si cette condition n'est pas satisfaite, les étoiles qui passent par un point donné  $(R, \phi)$  à un instant donné, et qui viennent d'un ensemble de rayons de largeur égale à deux fois l'amplitude épicycle, seront représentatives de portions entièrement différentes du potentiel spiral. Par conséquent, les effets du potentiel spiral sur la perturbation de la vitesse moyenne se compenseront partiellement. Formellement, on peut rendre compte de cette compensation en réécrivant l'Equ. (6.44) sous la forme :

$$\bar{v}_{Ra} = -\frac{\omega - m\Omega}{\Delta} k\Phi_a \mathcal{F} \quad (6.45)$$

où  $\mathcal{F} \leq 1$  est le **facteur de réduction**, i.e., le facteur par lequel la réponse du disque à une perturbation spirale donnée est réduite à une valeur inférieure à celle d'un disque froid. On ne calculera pas  $\mathcal{F}$  ici.

Une fois qu'on a  $\bar{v}_{Ra}$ , il est facile de calculer la réponse  $\Sigma_{da}$  de la densité, puisque l'Equation de Jeans (Chap. 4) est identique à l'équation de continuité du disque fluide. Ainsi, l'analogue de l'Equ. (6.40) s'écrit :

$$-(\omega - m\Omega)\Sigma_{da} + k\Sigma_0\bar{v}_{Ra} = 0 \quad (6.46)$$

L'étape finale est d'éliminer  $\bar{v}_{Ra}$  entre les Eqs. (6.45) et (6.46), et de combiner l'équation qui en résulte avec la forme WKB de l'équation de Poisson (6.17) pour obtenir la fonction de polarisation des disques stellaires (cf. Equ. (6.42)) :

$$\tilde{P}_m(k, R, \omega) = \frac{2\pi G\Sigma_0|k|\mathcal{F}}{\kappa^2 - (\omega - m\Omega)^2} \quad (6.47)$$

Des ondes de densité auto-consistantes exigent  $\tilde{P}_m(k, R, \omega) = 1$ , ce qui donne la relation de dispersion d'un disque stellaire à la limite des bras très enroulés :

$$(\omega - m\Omega)^2 = \kappa^2 - 2\pi G\Sigma|k|\mathcal{F} \quad (6.48)$$

qui est l'équivalent de l'Equ. (6.43) du disque fluide.

On peut évaluer (voir Binney & Tremaine 2008, Appendix K, pp. 830-833) le facteur de réduction  $\mathcal{F}$  pour un disque infiniment fin doté de la fonction de distribution de Schwarzschild (discutée au Chap. 4 du Binney & Tremaine 2008), et qui a la forme suivante :

$$f_0(R, v_R, v_\phi) = \frac{\gamma\Sigma(R)}{2\pi\sigma_R^2(R)} \exp\left[-\frac{v_R^2 + \gamma^2\tilde{v}_\phi^2}{2\sigma_R^2(R)}\right] \quad (6.49)$$

où  $\Sigma(R)$  est la densité de surface,  $\tilde{v}_\phi = v_\phi - v_c(R)$ ,  $v_c(R) = R\Omega(R)$  est la vitesse circulaire,  $\sigma_R(R)$  est la dispersion de vitesse radiale et  $\gamma(R) = 2\Omega(R)/\kappa(R)$ . On suppose que  $\sigma_R \ll v_c$ , comme requis par l'approximation épicycle. Pour cette fonction de distribution, le facteur de réduction peut être écrit sous la forme (voir les Eqs. (K.24) et (K.21) du Binney & Tremaine 2008) :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left(\frac{\omega - m\Omega}{\kappa}, \frac{\sigma_R^2 k^2}{\kappa^2}\right) &\equiv \mathcal{F}(s, \chi) = \frac{2}{\chi}(1 - s^2)e^{-\chi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I_n(\chi)}{1 - s^2/n^2} \\ &= \frac{1 - s^2}{\sin \pi s} \int_0^\pi d\tau e^{-\chi(1 + \cos \tau)} \sin s\tau \sin \tau \end{aligned} \quad (6.50)$$

Ici,  $I_n(\chi)$  est une fonction de Bessel modifiée (voir Appendice C.7 du Binney & Tremaine 2008). Ces formules ont été obtenues indépendamment par Lin & Shu (1966) et par Kalnaj (1965). La définition de  $\mathcal{F}$  implique que  $\mathcal{F}(s, 0) = 1$ . La signification physique des deux arguments de  $\mathcal{F}$  est assez simple. Le premier,  $(\omega - m\Omega)/\kappa$  est la fréquence imposée  $\omega$ , vue par une étoile orbitant à la fréquence circulaire  $\Omega$ , et donc modifiée comme par un effet Doppler, et divisée par la fréquence radiale  $\kappa$ . Le second est proportionnel au carré du rapport de la taille épicycle typique  $\sigma_R/\kappa$  à la longueur d'onde spirale  $2\pi/|k|$ ; on s'attend à ce que la réponse soit faible quand ce terme est grand.

Les relations de dispersion des Eqs. (6.43) et (6.48) sont les équations-clés dans l'étude analytique des ondes de densité dans les disques. Et, bien que les conditions d'application de l'approximation WKB soient satisfaites avec une marge modeste dans les disques galactiques typiques, ces relations constituent un guide extrêmement précieux pour comprendre le comportement des ondes de densité dans les galaxies, quand elles sont appuyées par des simulations numériques. Comme toute relation de dispersion locale, elles établissent la relation entre nombre d'onde et fréquence, qui est satisfaite par une onde qui se propage dans le disque. Elles ne *prouvent pas* pour autant qu'un "pattern" permanent d'ondes stationnaires peut s'établir dans le disque; montrer cela demande davantage de données physiques, en particulier les conditions aux limites au centre et au bord du disque, ainsi qu'une compréhension du comportement des ondes aux résonances de Lindblad et à la corotation, où les relations de dispersion perdent leur validité.

### 6.2.3 Stabilité locale des disques en rotation différentielle

Les relations de dispersion pour les disques fluides et stellaires peuvent nous dire si un disque est stable vis-à-vis de perturbations axisymétriques (le cas des perturbations non axisymétriques est plus compliqué et n'est pas traité ici). L'analyse faite jusqu'ici concernait des perturbations non axisymétriques en forme de spirales serrées ( $|kR/m| \gg 1$ ), mais les relations de dispersion que nous avons établies sont valables aussi pour  $m = 0$ , donc pour des perturbations axisymétriques, tant que  $kR \gg 1$ .

Considérons un disque fluide froid; dans ce cas,  $v_s = 0$ , donc pour des perturbations axisymétriques, l'Equ. (6.43) se réduit à :



$$\omega^2 = \kappa^2 - 2\pi G\Sigma|k| \quad (6.51)$$

Pour un disque stellaire froid,  $\sigma_R = 0$ , et comme  $\mathcal{F}(s, 0) = 1$ , la relation de dispersion donnée par l'Equ. (6.48) se réduit aussi à l'Equ. (6.51) – comme on doit s'y attendre, vu qu'un disque fluide froid équivaut à un disque stellaire froid.

Comme les quantités du côté droit de l'Equ. (6.51) sont réelles,  $\omega^2$  doit aussi être réel. Si  $\omega^2 > 0$ , alors  $\omega$  est réel et le disque est stable. Si par contre  $\omega^2 < 0$  – posons  $\omega^2 = -p^2$  – alors  $\omega = \pm ip$ , et  $\exp(-i\omega t) = \exp(\pm pt)$ . Dans ce dernier cas, il y a donc une perturbation dont l'amplitude croît exponentiellement, et le disque est instable. Ainsi toutes les perturbations de nombre d'onde  $|k| > k_{crit}$  ou de longueur d'onde  $\lambda < \lambda_{crit}$  sont instables, avec :

$$k_{crit} \equiv \frac{\kappa^2}{2\pi G\Sigma} \quad ; \quad \lambda_{crit} \equiv \frac{2\pi}{k_{crit}} = \frac{4\pi^2 G\Sigma}{\kappa^2} \quad (6.52)$$

De plus, l'instabilité est violente : lorsque la longueur d'onde de la perturbation tend vers zéro, le taux de croissance  $p = (4\pi^2 G\Sigma/\lambda - \kappa^2)^{1/2}$  augmente sans limite : un disque froid d'épaisseur nulle se désintègre sur des petites échelles en un temps arbitrairement court !

Considérons à présent un disque fluide avec une vitesse du son non nulle. Pour des perturbations axisymétriques, l'Equ. (6.43) devient :

$$\omega^2 = \kappa^2 - 2\pi G\Sigma|k| + v_s^2 k^2 \quad (6.53)$$

Une fois de plus, le disque est instable si et seulement si  $\omega^2 < 0$ , et la limite de stabilité neutre est :

$$\kappa^2 - 2\pi G\Sigma|k| + v_s^2 k^2 = 0 \quad (6.54)$$

Le disque fluide est stable s'il n'y a pas de solution de l'Equ. (6.54) pour  $|k| > 0$ . Comme l'équation est quadratique en  $|k|$ , on peut la résoudre facilement et l'on trouve que la stabilité axisymétrique impose :

$$Q \equiv \frac{v_s \kappa}{\pi G\Sigma} > 1 \quad (\text{pour les fluides}) \quad (6.55)$$

La courbe de stabilité neutre ainsi définie est montrée en Fig. (6.10), en termes des rapports sans dimension  $Q$  et  $\lambda/\lambda_{crit}$ .

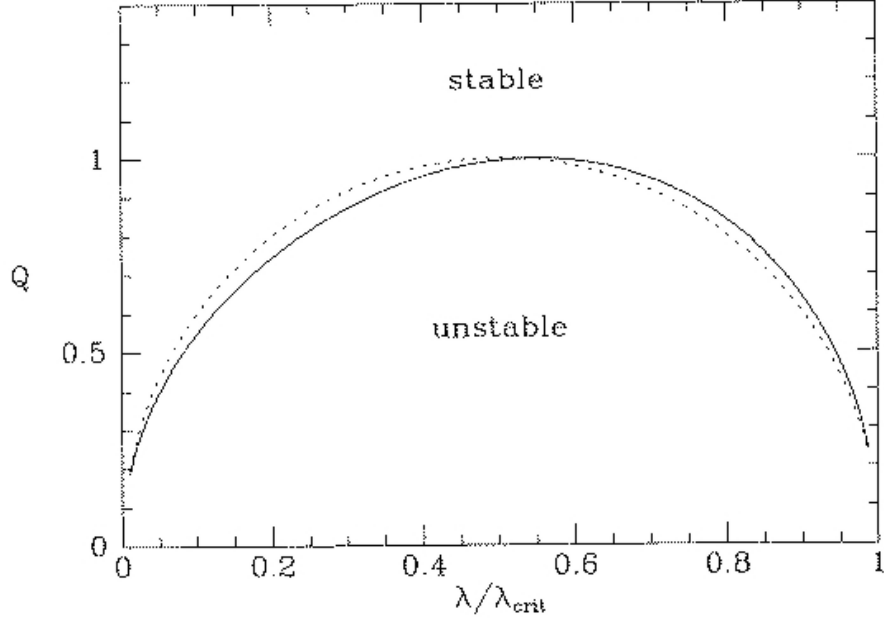


FIG. 6.10 – Courbe de stabilité vis-à-vis de perturbations axisymétriques dans un disque fluide (ligne traitillée, Equ. (6.54)) et dans un disque stellaire (ligne pleine, Equ. (6.57)).

Le critère de stabilité du Chap. 5 pour une feuille en rotation uniforme est un cas particulier de l'Equ. (6.55) pour  $\kappa = 2\Omega$ . Bien entendu, de manière générale, dans un disque  $v_s$ ,  $\kappa$  et  $\Sigma$  sont tous fonction du rayon, si bien que  $Q$  l'est aussi. Dans ce cas,  $Q(R) < 1$  n'implique qu'une instabilité axisymétrique *locale* au voisinage du rayon  $R$ , dans le sens qu'une onde de courte longueur qui traverse une région où  $Q(R) < 1$  sera amplifiée en traversant cette région.

L'analyse de la stabilité d'un disque stellaire (de température non nulle, cette fois) est semblable. Par analogie, on s'attend à ce que la limite entre des ondes axisymétriques stables et instables soit donnée par  $\omega = 0$ , comme dans le cas d'un disque fluide. Ainsi, de l'Equ. (6.48), la limite de stabilité est donnée par :

$$\kappa^2 = 2\pi G \Sigma |k| \mathcal{F}(0, \sigma_R^2 k^2 / \kappa^2) \quad (6.56)$$

où, en utilisant la première des Eqs. (6.50) et l'identité :

$$e^{z \cos \theta} = I_0(z) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} I_n(z) \cos n\theta = \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n(z) \cos n\theta$$

relative aux fonctions de Bessel modifiées, on aboutit à cette relation que Toomre (1964) a été le premier à découvrir et établir :

$$\frac{|k| \sigma_R^2}{2\pi G \Sigma} = \left[ 1 - e^{-\sigma_R^2 k^2 / \kappa^2} I_0 \left( \frac{\sigma_R^2 k^2}{\kappa^2} \right) \right] \quad (6.57)$$

Le disque stellaire est stable s'il n'y a pas de solution à l'Equ. (6.57), et cela est le cas lorsque :

$$Q \equiv \frac{\sigma_R \kappa}{3.36 G \Sigma} > 1 \quad (\text{pour les étoiles}) \quad (6.58)$$

La limite de stabilité correspondante est tracée sur la Fig. (6.10). Remarquez l'analogie étroite entre les disques fluide et stellaire : les courbes de stabilité traitillée (fluide) et pleine (stellaire) coïncident presque, et l'on obtient le critère de stabilité de l'Equ. (6.58) pour les disques stellaires à partir du critère de stabilité de l'Equ. (6.55) pour les disques fluides, en remplaçant simplement la vitesse du son  $v_s$  par la dispersion radiale des vitesses  $\sigma_R$  et le coefficient  $\pi \simeq 3.14$  par la valeur 3.36. On appelle **critère de Toomre** l'inégalité donnée par les Eqs. (6.55) ou (6.58). On peut rapprocher la grandeur  $Q$  d'une échelle de température pour les disques de galaxies. Les disques "chauds" ont une grande dispersion de vitesse et une grande valeur de  $Q$ , alors que les disques "tièdes" ont une faible dispersion et une faible valeur de  $Q$ ; enfin, les disques "froids" ont une dispersion nulle et  $Q = 0$ .

Lorsque  $Q$  tombe sous la valeur 1, l'instabilité apparaît d'abord à une seule longueur d'onde que nous désignerons par  $\lambda(\text{instable}) \equiv p \lambda_{crit}$  où la constante  $p$  vaut respectivement 0.5 ou 0.55 pour un fluide sans épaisseur ou pour un disque stellaire. Le critère de Toomre est valable seulement si  $\lambda(\text{instable})$  est petit devant la taille du système – puisqu'on a utilisé l'approximation WKB – et grand par rapport à l'épaisseur du disque – puisqu'on a postulé un disque d'épaisseur nulle – mais en pratique il marche assez bien même un peu au-delà du régime où il est formellement valable.

Il est possible d'estimer la valeur de  $Q$  pour notre Galaxie, dans le voisinage solaire. La densité de surface totale des étoiles est  $\Sigma_* \simeq (36 \pm 5) \text{ M}_\odot \text{ pc}^{-2}$ , la fréquence épicycle est  $\kappa_0 \simeq (37 \pm 3) \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$ . On adopte la dispersion

radiale des vitesses des étoiles rouges de séquence principale, qui sont en général vieilles et contribuent de manière majeure à la masse stellaire totale dans le voisinage solaire ; on a  $\sigma_R = (38 \pm 2) \text{ km s}^{-1}$ . Cela donne  $Q_* = 2.7 \pm 0.4$ . Le gaz interstellaire a une densité de surface  $\Sigma_g \simeq 13 \text{ M}_\odot \text{ pc}^{-2}$  et une vitesse du son  $v_s = 7 \text{ km s}^{-1}$ . Avec ces paramètres, le gaz seul a  $Q_g = 1.5$  (il faut néanmoins se rappeler qu'en réalité, le gaz interstellaire a plusieurs phases et est beaucoup plus complexe que le fluide simple qui est postulé ici). Comme le gaz et les étoiles sont couplés par la gravité, il faudrait en toute rigueur combiner les analyses séparées faites ici. Il apparaît que le gaz, malgré sa densité de surface moindre, a un effet déstabilisant sur le système complet parce qu'il est froid ( $v_s \ll \Sigma_R$ ). La longueur d'onde la plus instable est de l'ordre de 2 kpc, ce qui satisfait l'approximation WKB.

Les grandes incertitudes de cette analyse de la stabilité du voisinage solaire sont (i) la simplification du gaz interstellaire, comme déjà signalé, et (ii) l'effet, encore mal connu, de la variation de la densité de surface stellaire avec l'azimut (due à la structure spirale), sur la stabilité locale.

Enfin, signalons le paramètre  $X$ , qui quantifie la validité de l'approximation de bras très enroulés :

$$X \equiv \frac{k_{crit} R}{m} = \frac{\kappa^2 R}{2\pi G \Sigma m} = \cot [\alpha(k_{crit})] \quad (6.59)$$

où l'on a utilisé la relation 6.14. Il y a stabilité si  $X \gg 1$  et le phénomène de “swing amplification” (forte amplification de l'onde spirale lorsqu'on passe d'une structure *leading* à une structure *trailing*) a lieu pour  $1 \lesssim X \lesssim 3$  et  $Q \lesssim 2$ .

# Chapitre 7

## Théorie cinétique

Jusqu'ici, on a considéré des systèmes sans collisions, avec un potentiel lisse. L'équation de Boltzmann sans collisions pouvait être utilisée avec profit, tant que la durée de vie du système étudié restait bien inférieure au *temps de relaxation*. Cependant, il existe, comme on l'a vu en introduction, des systèmes dont le temps de relaxation est environ égal ou inférieur à leur âge. De tels exemples sont donnés par les amas ouverts ou globulaires. Dans ces systèmes, les collisions jouent un rôle majeur, en effaçant la mémoire qu'auraient autrement les étoiles de leur mouvement initial. Ce chapitre est consacré aux systèmes sphériques avec collisions.

### 7.1 Processus de relaxation

Le temps de relaxation est donné par :

$$t_{relax} \approx \frac{0.1 N}{\ln N} t_{cross} \quad (7.1)$$

où  $N$  est le nombre d'étoiles du système et  $t_{cross}$  le temps de traversée. Le temps de relaxation est supérieur au temps de traversée quand  $N > 40$ . On a vu que pour les galaxies, le temps de relaxation est bien plus long que leur temps de vie, si bien que les collisions peuvent être négligées. Par contre, les amas globulaires, avec  $N \sim 10^5$  et  $t_{cross} \sim 10^5$  yr, possèdent une structure profondément affectée par les collisions. C'est également le cas pour les amas ouverts ( $N \sim 10^2$ ,  $t_{cross} \sim 1$  Myr,  $t_{vie} \sim 100$  Myr), le parsec central des galaxies ( $N \sim 10^6$ ,  $t_{cross} \sim 10^4$  yr,  $t_{vie} \sim 10$  Gyr) et le centre des amas de galaxies ( $N \sim 10^3$ ,  $t_{cross} \sim 1$  Gyr,  $t_{vie} \sim 10$  Gyr).

Dans les systèmes sans collision, les deux équations fondamentales sont l'équation de Boltzmann sans collisions et l'équation de Poisson. Dans cette approximation, chaque étoile conserve son énergie et son moment cinétique. Mais dans un système dont le nombre d'étoiles  $N$  est fini, l'énergie et le moment cinétique d'une étoile donnée ne sont pas strictement conservés, puisque chaque étoile est sujette à des rencontres proches à l'occasion desquelles elle échange de l'énergie et du moment cinétique avec ses voisines. Dans ce contexte-là, l'équation de Boltzmann sans collisions perd sa pertinence.

Les manières dont les collisions affectent l'évolution d'un système peuvent être classées en six catégories :

1. **La relaxation** : Chaque étoile s'écarte progressivement de son orbite initiale et l'entropie du système stellaire augmente au gré de cette diffusion dans l'espace de phase. La structure du système devient insensible aux conditions initiales. Les états d'un gaz autogravitant à entropie élevée correspondent à une structure très inhomogène, avec un noyau dense entouré d'un halo de faible densité et de grande taille.
2. **L'équipartition** : Ce phénomène bien connu en mécanique statistique consiste en l'échange d'énergie cinétique entre les particules : celles qui ont une grande énergie cinétique tendent à la céder à celles qui en ont moins. Dans un gaz habituel, on aboutit à un état où la vitesse quadratique moyenne est inversement proportionnelle à la masse de la particule.  
Par contre, dans un système stellaire, les étoiles massives qui perdent de l'énergie cinétique tombent plus bas dans le potentiel gravitationnel et acquièrent encore plus d'énergie cinétique alors que les étoiles de petite masse tendent à occuper la périphérie de l'amas, où la dispersion de vitesse est en général inférieure à celle des parties centrales.
3. **L'évaporation** : Il peut arriver, au gré des rencontres, qu'une étoile acquiert suffisamment d'énergie cinétique pour s'échapper du système. Ainsi, tout amas se dépouille lentement de ses étoiles, en un temps caractéristique lié au temps de relaxation. Rappelons que la vitesse d'évasion d'une étoile située en  $\mathbf{x}$  dans un potentiel  $\Phi(\mathbf{x})$  est donnée par  $v_e^2(\mathbf{x}) = -2\Phi(\mathbf{x})$ , si bien que la vitesse quadratique moyenne d'évasion dans un système de densité  $\rho(\mathbf{x})$  vaut :

$$\langle v_e^2 \rangle = \frac{\int d^3\mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) v_e^2(\mathbf{x})}{\int d^3\mathbf{x} \rho(\mathbf{x})} = -2 \frac{\int d^3\mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) \Phi(\mathbf{x})}{M} = -\frac{4W}{M} \quad (7.2)$$

où  $M$  est la masse totale et  $W$  l'énergie potentielle du système telle que donnée par l'Equ. (2.17). Or, selon le théorème du viriel,  $-W = 2K$  où  $K = \frac{1}{2}M \langle v^2 \rangle$  est l'énergie cinétique totale, si bien que :

$$\langle v_e^2 \rangle^{1/2} = 2 \langle v^2 \rangle^{1/2} \quad (7.3)$$

La vitesse quadratique moyenne d'évasion est donc le double de la dispersion de vitesse. Si l'on a une distribution maxwellienne des vitesses, on peut calculer que la fraction  $\gamma$  des étoiles dont la vitesse dépasse le double de la vitesse quadratique moyenne est  $\gamma = 7.38 \times 10^{-3}$ . Comme le temps de relaxation est celui après lequel l'effet cumulé des rencontres devient significatif, on peut raisonnablement s'attendre à ce que le système perde une fraction  $\gamma$  de ses étoiles durant chaque temps de relaxation. Le taux d'évaporation est alors :

$$\frac{dN}{dt} = -\frac{\gamma N}{t_{relax}} \equiv -\frac{N}{t_{evap}} \quad (7.4)$$

où le **temps d'évaporation**  $t_{evap} = t_{relax}/\gamma \simeq 140 t_{relax}$  est le temps caractéristique d'évaporation des étoiles. De manière générale, tout système stellaire perd une proportion significative de ses membres en un temps qui se monte à environ  $100 t_{relax}$ .

4. **Les rencontres inélastiques :** Elles ont lieu si les étoiles s'approchent de si près qu'il y a **dissipation d'énergie** par effet de marée, ce qui permet la formation de systèmes binaires. Il peut même y avoir collision frontale, dont peut résulter une coalescence, qui produit des étoiles pouvant être plus massives que celles du turn-off de l'amas, appelées *blue stragglers*.

Pour estimer le temps moyen qui sépare deux collisions, considérons le volume balayé par une étoile se déplaçant parmi les autres à vitesse relative  $v$  pendant l'intervalle de temps  $t_{coll}$  qu'il s'agit de déterminer. Comme par définition il n'y a qu'une collision durant ce temps, le volume balayé ne contient qu'une étoile et doit donc être égal au volume occupé en moyenne par une seule étoile, c'est-à-dire  $1/n$  ( $n$  étant la

densité numérique d'étoiles dans le système). En introduisant la section efficace  $\Sigma$  de l'étoile, on voit que le volume balayé vaut :

$$v t_{coll} \Sigma = \frac{1}{n} \Rightarrow t_{coll} \simeq \frac{1}{n \Sigma v} \quad (7.5)$$

L'ordre de grandeur reste correct si l'on prend pour  $v$  la vitesse quadratique moyenne. En posant  $n \sim N/r^3$ , où  $r$  est le rayon du système, et  $\Sigma \sim \pi(2r_*)^2$  avec  $r_*$  le rayon physique d'une étoile (en négligeant la focalisation gravitationnelle), on a :

$$\frac{t_{coll}}{t_{cross}} \approx \frac{r^2}{4\pi N r_*^2} \quad (7.6)$$

On peut éliminer  $r$  en remarquant que, selon le théorème du viriel, on a  $v^2 \approx G N m / r$  avec  $m$  la masse d'une étoile. De même, on peut éliminer  $r_*$  au profit de la vitesse d'évasion à partir de la surface d'une étoile,  $v_* = \sqrt{2 G m / r_*}$ . Le rapport ci-dessus devient alors :

$$\frac{t_{coll}}{t_{cross}} \approx 0.02 N \left( \frac{v_*}{v} \right)^4 \quad (7.7)$$

et en introduisant le temps de relaxation donné par l'Equ. (7.1), on a :

$$\frac{t_{coll}}{t_{relax}} \approx 0.2 \left( \frac{v_*}{v} \right)^4 \ln N \quad (7.8)$$

Dans les amas ouverts et globulaires, ainsi que dans la plupart des galaxies, la vitesse d'évasion à partir de la surface d'une étoile est bien supérieure (pour le Soleil,  $v_* = 618 \text{ km s}^{-1}$ ) à la vitesse quadratique moyenne des étoiles dans le système, si bien que les collisions inélastiques ne jouent qu'un rôle marginal dans la structure du système. Mais dans le centre des amas globulaires par exemple, de telles collisions peuvent de temps à autre produire des binaires serrées ou des *blue stragglers*.

## 5. Formation de systèmes binaires par rencontres à trois corps :

S'il n'y a pas de dissipation – et il n'y en a que dans le cas des rencontres inélastiques discutées au point précédent – une rencontre à deux corps ne peut jamais aboutir à un système binaire puisque la trajectoire relative sera toujours une hyperbole. Par contre, une rencontre à trois



corps peut mener deux des protagonistes à se retrouver liés. Evaluons la probabilité d'un tel évènement.

On a vu par l'Equ. (1.17) que la variation de vitesse lors d'une rencontre de deux étoiles de masse  $m$ , de vitesse relative  $v$  et avec un paramètre d'impact  $b$  est  $\delta v \approx Gm/bv$ . Ecrivons cela sous la forme :

$$\frac{\delta v}{v} \approx \frac{b_{90}}{b} \quad \text{avec} \quad b_{90} \approx \frac{Gm}{v^2} \quad (7.9)$$

où  $b_{90}$  est le paramètre d'impact tel que la déflexion vaut  $90^\circ$ . Si trois étoiles se trouvent à une distance mutuelle de l'ordre de  $b$  et si une binaire doit en résulter, on ne peut pas s'attendre à ce que la déviation soit infinitésimale : on aura, au moins pour l'une d'entre elles,  $\delta v \approx v$ , autrement dit  $b \approx b_{90}$ . Or, on a vu que pour une étoile donnée, l'intervalle de temps moyen qui sépare deux rencontres telles que  $b \leq b_{90}$  est de l'ordre de  $(nb_{90}^2 v)^{-1}$  (voir Equ. (7.5), où l'on a remplacé  $\Sigma$  par  $b_{90}^2$ ). Quelle est la probabilité de trouver un troisième corps dans les parages – c'est-à-dire dans un rayon de l'ordre de  $b_{90}$  – au moment de cette rencontre ? Le nombre moyen d'étoiles par unité de volume étant  $n$ , cette probabilité, ou plutôt le nombre moyen de troisièmes corps présent sera  $nb_{90}^3$ . Le temps moyen écoulé entre deux collisions à trois corps est donc égal à celui entre deux collisions à deux corps, divisé par ce nombre :  $t_3 \approx (n^2 b_{90}^5 v)^{-1}$ . En remplaçant  $b_{90}$  par son expression de l'Equ. (7.9), on obtient le temps typique de formation d'une binaire par une rencontre à trois corps :

$$t_3 \approx \frac{v^9}{n^2 G^5 m^5} \quad (7.10)$$

Si l'on fait à nouveau appel au théorème du viriel,  $v^2 \approx GNm/r$ , on a la relation entre  $t_3$  et le temps de relaxation :

$$\frac{t_3}{t_{relax}} \approx 10 N^2 \ln N \quad (7.11)$$

Par conséquent, le nombre total de binaires formées pendant un temps de relaxation est donné par :

$$\frac{N t_{relax}}{t_3} \approx \frac{0.1}{N \ln N} \quad (7.12)$$

On peut se demander pour quelles valeurs de  $N$  le nombre de binaires ainsi formées a des chances d'être significatif. En effet, le temps de vie du système est ici pertinent : si  $t_3 > t_{evap}$ , l'efficacité de ce mécanisme est nulle. Or, comme  $t_{evap} \sim 100 t_{relax}$ , on voit que le système ne peut contenir beaucoup plus de  $N = 10$  étoiles si l'on veut que les rencontres à trois corps contribuent à la formation de systèmes binaires.

6. **Interactions avec des binaires primordiales :** Les binaires primordiales sont celles qui se sont formées en même temps que les étoiles et non à cause de processus dynamiques tels que les rencontres à trois corps décrites au point précédent. Une fraction appréciable des étoiles appartiennent à de telles binaires, et l'importance dynamique de ces dernières est considérable, car des échanges d'énergie peuvent avoir lieu lors de leurs rencontres avec d'autres étoiles de l'amas. L'énergie de liaison des binaires peut être bien supérieure à l'énergie cinétique d'une étoile simple typique, si bien que même un petit nombre de binaires peuvent affecter le bilan énergétique d'un amas. Par exemple, un amas globulaire de masse totale  $M = 10^5 M_\odot$  et de dispersion de vitesse  $\langle v^2 \rangle^{1/2} = 10 \text{ km s}^{-1}$  possède une énergie potentielle de liaison égale à  $\sim M \langle v^2 \rangle \simeq 10^{50} \text{ erg}$  (selon le théorème du viriel). D'autre part, un système binaire constitué de deux étoiles de  $1 M_\odot$  séparées par  $2 R_\odot$  possède une énergie de liaison de  $10^{48} \text{ erg}$ . Par conséquent, cent binaires de ce type représentent une énergie de liaison aussi grande qu'un amas entier de  $10^5$  étoiles simples.

### Note sur la relaxation violente (G. Mamon, 2008-2009)

Ce paragraphe est tiré du cours de Gary Mamon (Institut d'Astrophysique de Paris) *Dynamique gravitationnelle des systèmes à  $N$  corps*, version 2008–2009.

Les galaxies elliptiques sont réputées pour leurs distributions très lisses en densité. Elles apparaissent donc relaxées, alors que d'après l'équation 7.1, leur temps de relaxation à 2 corps est extrêmement long. L'explication provient de la formation des galaxies elliptiques, soit par effondrement gravitationnel, soit par coalescence de galaxies de masses comparables, ce qui dans les deux cas engendre des variations rapides du potentiel gravitationnel.

L'énergie d'une particule varie comme

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d(v^2)}{dt} + \frac{d\Phi}{dt} = \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{\partial\Phi}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial t} \quad (7.13)$$

où la dernière égalité provient de l'équation du mouvement  $dv/dt = -\nabla\Phi$ . En général, la variation temporelle intrinsèque du potentiel,  $\partial\Phi/\partial t$ , est négligeable et l'énergie d'une particule est conservée. Mais dans les cas où tout le système s'effondre en même temps ou bien lorsque deux systèmes entrent en collision, le terme  $\partial\Phi/\partial t$  est non-négligeable et l'énergie d'une particule n'est plus conservée. Alors, la particule échange de l'énergie avec le potentiel gravitationnel et par ce fait oublie ses conditions initiales *en un temps de chute libre*. On est en présence d'un mécanisme de relaxation qui a lieu indépendamment de la relaxation à 2 corps : c'est la *relaxation violente*, qui a été décrite pour la première fois par Lynden-Bell (1967).

## 7.2 Théorème de Liouville (en lecture)

L'équation de Boltzmann sans collisions ne permet pas de décrire un système dynamique de  $N$  particules de manière complète, puisque, justement, les collisions sont négligées. Formellement, on remédie à cette difficulté en considérant l'espace de phase  $\Gamma$  à  $6N$  dimensions (où  $N$  est le nombre de particules) au lieu de l'espace de phase proprement dit à 6 dimensions. Ainsi, l'état d'un système dynamique est-il décrit par un unique point dans l'espace  $\Gamma$ , mais on introduit quand même la densité de probabilité  $f^{(N)}$  que le système se trouve dans un élément de volume de l'espace  $\Gamma$ . Cela revient à généraliser l'équation de Boltzmann sans collisions à un espace à  $6N$  dimensions, ce qui donne formellement :

$$\frac{df^{(N)}}{dt} = 0$$

On montre ci-dessous, pour le cas tout à fait général de  $n$  coordonnées d'espace et de  $n$  coordonnées d'impulsion (qui correspondraient à  $n = 3N$  dimensions pour le système envisagé ci-dessus), qu'un élément de volume de l'espace  $\Gamma$  ne change pas au cours de l'évolution du système, pour le cas où :

$$f^{(N)}(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, t) = f^{(N)}(H(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n))$$

Les équations variationnelles permettent une description des petites déviations autour d'une solution connue d'un système donné. Donc connaissant  $H(q_i, p_i, t)$  avec des valeurs  $q_{i,0}$ ,  $p_{i,0}$  en  $t_0$ , il est possible de déterminer  $q_i(t)$  et  $p_i(t)$ .

Le calcul variationnel consiste à considérer des trajectoires  $q'_i(t)$  et  $p'_i(t)$  légèrement différentes :

$$q'_i(t) = q_i(t) + \delta q_i(t) \quad \text{et} \quad p'_i(t) = p_i(t) + \delta p_i(t)$$

ce qui permet la linéarisation des équations canoniques :

$$\begin{cases} \delta \dot{q}_i = \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial^2 H}{\partial q_j \partial p_i} \delta q_j + \frac{\partial^2 H}{\partial p_j \partial p_i} \delta p_j \right) \\ \delta \dot{p}_i = - \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial^2 H}{\partial q_j \partial q_i} \delta q_j + \frac{\partial^2 H}{\partial p_j \partial q_i} \delta p_j \right) + \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial^2 Q_i}{\partial q_j \partial q_i} \delta q_j + \frac{\partial^2 Q_i}{\partial p_j \partial q_i} \delta p_j \right) \end{cases}$$

où les  $Q_i$  sont des forces qui ne dérivent pas d'un potentiel. Dans ces équations, on a une dépendance linéaire en les inconnues  $\delta q_j$  et  $\delta p_j$ .

Le volume de l'espace de phase occupé par un domaine de conditions initiales se conserve dans le temps (ceci dans le cas où  $Q_i = 0$ ).

Les équations canoniques linéarisées, qu'on vient d'établir ci-dessus, peuvent s'écrire :

$$\begin{pmatrix} \delta \dot{q}_1 \\ \delta \dot{q}_2 \\ \dots \\ \delta \dot{q}_n \\ \delta \dot{p}_1 \\ \delta \dot{p}_2 \\ \dots \\ \delta \dot{p}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 H}{\partial q_1 \partial p_1} & \frac{\partial^2 H}{\partial q_2 \partial p_1} & \dots & \frac{\partial^2 H}{\partial q_n \partial p_1} & \frac{\partial^2 H}{\partial p_1 \partial p_1} & \frac{\partial^2 H}{\partial p_2 \partial p_1} & \dots & \frac{\partial^2 H}{\partial p_n \partial p_1} \\ \frac{\partial^2 H}{\partial q_1 \partial p_2} & \frac{\partial^2 H}{\partial q_2 \partial p_2} & \dots & \frac{\partial^2 H}{\partial q_n \partial p_2} & \frac{\partial^2 H}{\partial p_1 \partial p_2} & \frac{\partial^2 H}{\partial p_2 \partial p_2} & \dots & \frac{\partial^2 H}{\partial p_n \partial p_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 H}{\partial q_1 \partial p_n} & \frac{\partial^2 H}{\partial q_2 \partial p_n} & \dots & \frac{\partial^2 H}{\partial q_n \partial p_n} & \frac{\partial^2 H}{\partial p_1 \partial p_n} & \frac{\partial^2 H}{\partial p_2 \partial p_n} & \dots & \frac{\partial^2 H}{\partial p_n \partial p_n} \\ -\frac{\partial^2 H}{\partial q_1 \partial q_1} & -\frac{\partial^2 H}{\partial q_2 \partial q_1} & \dots & -\frac{\partial^2 H}{\partial q_n \partial q_1} & -\frac{\partial^2 H}{\partial p_1 \partial q_1} & -\frac{\partial^2 H}{\partial p_2 \partial q_1} & \dots & -\frac{\partial^2 H}{\partial p_n \partial q_1} \\ -\frac{\partial^2 H}{\partial q_1 \partial q_2} & -\frac{\partial^2 H}{\partial q_2 \partial q_2} & \dots & -\frac{\partial^2 H}{\partial q_n \partial q_2} & -\frac{\partial^2 H}{\partial p_1 \partial q_2} & -\frac{\partial^2 H}{\partial p_2 \partial q_2} & \dots & -\frac{\partial^2 H}{\partial p_n \partial q_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{\partial^2 H}{\partial q_1 \partial q_n} & -\frac{\partial^2 H}{\partial q_2 \partial q_n} & \dots & -\frac{\partial^2 H}{\partial q_n \partial q_n} & -\frac{\partial^2 H}{\partial p_1 \partial q_n} & -\frac{\partial^2 H}{\partial p_2 \partial q_n} & \dots & -\frac{\partial^2 H}{\partial p_n \partial q_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta q_1 \\ \delta q_2 \\ \dots \\ \delta q_n \\ \delta p_1 \\ \delta p_2 \\ \dots \\ \delta p_n \end{pmatrix}$$

Définissons la matrice  $Z$ , de dimension  $2n \times 2n$ , telle que :

$$Z = I_{(2n \times 2n)} \cdot (\delta q_1 \delta q_2 \dots \delta q_n \delta p_1 \delta p_2 \dots \delta p_n)$$

Les équations linéarisées se résument à :

$$\dot{Z} = AZ$$

Les matrices  $A$  et  $\dot{Z} = dZ/dt$  sont également de dimension  $2n \times 2n$ .

Le volume de l'espace de phase occupé par un domaine  $D_0$  de conditions initiales est donné par :

$$V = \int_{D_0} dq_1 dq_2 \dots dq_n dp_1 dp_2 \dots dp_n = \delta q_1 \delta q_2 \dots \delta q_n \delta p_1 \delta p_2 \dots \delta p_n = \det(Z)$$

La variation du volume vaut :

$$\frac{d}{dt} \det(Z) = \det(\dot{Z}) = \det(AZ) = \det(A) \det(Z)$$

Selon un lemme issu de l'algèbre linéaire :

$$d(\ln[\det(M)]) = \text{Tr}(M^{-1}dM)$$

Ceci nous permet d'exprimer la variation relative du volume :

$$\frac{\det(\dot{Z})}{\det(Z)} = \frac{d}{dt} (\ln[\det(Z)]) = \text{Tr} \left( Z^{-1} \frac{d}{dt} Z \right) = \text{Tr} (Z^{-1} A Z) = \text{Tr} (A)$$

On voit aisément que la trace de  $A$  est effectivement nulle pour les systèmes où  $Q_i = 0$ . Pour les autres systèmes, on constate une variation relative du volume de :

$$\frac{\det(\dot{Z})}{\det(Z)} = \text{Tr} (A) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial Q_i}{\partial p_i}$$

On remarque que la variation du volume ne dépend que de la dépendance en  $p_i$  de la force  $Q_i$  correspondante.

L'équation de Liouville permet de définir l'opérateur de rencontre, que l'on définira de manière plus intuitive dans le contexte de l'approximation de Fokker-Planck.

## 7.3 Thermodynamique des systèmes autogravitants

### 7.3.1 Chaleur spécifique négative

Il est toujours possible de définir la température locale d'un système autogravitant par analogie avec le cas du gaz parfait :

$$\frac{1}{2}m\overline{v^2} = \frac{3}{2}k_B T \quad (7.14)$$

où  $m$  est la masse d'une étoile et  $k_B$  la constante de Boltzmann. La quantité  $\overline{v^2}$ , et donc  $T$ , dépend de la position dans le système. En définissant la température moyenne comme une moyenne pondérée par la masse, on peut donner l'énergie cinétique totale du système en fonction de celle-ci :

$$\bar{T} \equiv \frac{\int d^3\mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) T}{\int d^3\mathbf{x} \rho(\mathbf{x})} \Rightarrow K = \frac{3}{2}Nk_B\bar{T} \quad (7.15)$$

En faisant intervenir le théorème du viriel, on sait que l'énergie mécanique totale du système  $E = -K$ , si bien que :

$$E = -\frac{3}{2}Nk_B\bar{T} \quad (7.16)$$

Par conséquent, la chaleur spécifique du système est :

$$C \equiv \frac{dE}{d\bar{T}} = -\frac{3}{2}Nk_B \quad (7.17)$$

Or cette chaleur spécifique est **négative** ! Cela signifie que **le système devient plus chaud lorsqu'il perd de l'énergie**<sup>1</sup>. Un tel système est thermodynamiquement instable. En effet, supposons qu'un système autogravitant (fluide ou stellaire) puisse être mis en contact avec un réservoir de chaleur. Supposons encore que le réservoir possède initialement la même température que le système, mais qu'une petite perturbation ait pour effet de transmettre un peu de chaleur  $dQ > 0$  du système au réservoir. La température du système va passer de  $\bar{T}$  à  $\bar{T} - dQ/C > \bar{T}$ , si bien qu'il devient plus chaud que le réservoir, et la chaleur va donc continuer à diffuser du système vers le réservoir. La température du système va continuer à augmenter et finit par

---

<sup>1</sup>Cela est vrai de tout système dominé par la force de gravitation, y compris une étoile : quand celle-ci se contracte, son cœur s'échauffe.

diverger. Dans le cas contraire, c'est-à-dire si de la chaleur se transmet du réservoir vers le système, ce dernier verra sa température diminuer jusqu'à zéro.

### 7.3.2 La “catastrophe gravothermique”

Examinons plus en détail le comportement d'un système autogravitant. Pour cela, on considère un gaz parfait de  $N$  particules ponctuelles identiques et de masse  $m$ , la masse totale du système étant alors  $M = Nm$ . Le système est contenu dans un réservoir sphérique de rayon  $r_b$  et le gaz est supposé conducteur, si bien que tout gradient de température tend à s'y effacer : le système est isotherme à l'état d'équilibre et on peut l'identifier à la sphère isotherme décrite par l'Equ. (4.52), mais tronquée au rayon  $r_b$  du réservoir (voir aussi la Fig. (4.1)). La loi des gaz parfaits donne la pression en fonction de la température :

$$p(r) = \frac{\rho(r)k_B T}{m} = \frac{\rho(r)}{m\beta} \quad \text{avec} \quad \beta \equiv \frac{1}{k_B T} \quad (7.18)$$

On appelle  $\beta$  la *température réciproque* bien qu'elle ait les dimensions de l'inverse d'une énergie. On néglige ici toute collision inélastique et toute formation de binaires, afin de mettre en évidence les effets de la relaxation seule.

La constante arbitraire dans la définition du potentiel est choisie de sorte que  $\Phi(r_b) = -GM/r_b$ ; ainsi,  $\Phi \rightarrow 0$  quand  $r \rightarrow \infty$  si le réservoir a une masse négligeable. L'énergie totale du système est  $E = K + W$ , avec l'énergie cinétique  $K = \frac{3}{2}Nk_B T = \frac{3}{2}M/(m\beta)$  et l'énergie potentielle  $W = 2\pi \int_0^{r_b} dr r^2 \rho(r) \Phi(r)$ . Pour évaluer l'énergie potentielle, il est possible d'utiliser le fait (non démontré ici) que :

$$2K + W = E + K = 4\pi r_b^3 p(r_b) \quad (7.19)$$

où  $p = \rho \bar{v}_r^2$  est la pression exercée par le système sur les parois du récipient. Cela conduit à :

$$E = 4\pi r_b^3 p(r_b) - K = \frac{4\pi r_b^3 \rho(r_b)}{m\beta} - \frac{3M}{2m\beta} \quad (7.20)$$

On écrit la température réciproque  $\beta$  en fonction du rayon de King  $r_0$  et en fonction de la densité centrale  $\rho_0$  de la sphère isotherme à partir des Eqs. (4.50) et (4.54). Cela donne :



$$\beta = \frac{9}{4\pi Gm\rho_0 r_0^2} \quad (7.21)$$

Introduisons maintenant  $\tilde{r} \equiv r/r_0$ ,  $\tilde{r}_b \equiv r_b/r_0$ ,  $\tilde{\rho} \equiv \rho/\rho_0$  et  $\tilde{M}$  une masse sans dimension ; on peut alors remplacer  $\rho_0$  en utilisant une masse exprimée à l'aide de :

$$M = 4\pi\rho_0 r_0^3 \int_0^{\tilde{r}_b} d\tilde{r} \tilde{r}^2 \tilde{\rho}(\tilde{r}) \equiv 4\pi\rho_0 r_0^3 \tilde{M}(\tilde{r}_b) \quad (7.22)$$

On peut alors récrire la température réciproque sous la forme :

$$\beta = \frac{9r_0}{Gm} \frac{\tilde{M}(\tilde{r}_b)}{M} = 9 \frac{r_b}{GMm} \frac{\tilde{M}(\tilde{r}_b)}{\tilde{r}_b} \quad (7.23)$$

On peut alors utiliser cette relation pour éliminer  $\beta$  dans l'Equ. (7.20), qui devient :

$$E = \frac{GM^2}{r_b} \left[ \frac{\tilde{r}_b^4 \tilde{\rho}(\tilde{r}_b)}{9\tilde{M}^2(\tilde{r}_b)} - \frac{\tilde{r}_b}{6\tilde{M}(\tilde{r}_b)} \right] \quad (7.24)$$

avec  $\tilde{\rho}(\tilde{r})$  donné par l'Equ. (4.55).

Pour un réservoir de masse  $M$  donnée et de rayon  $r_b$  donné, les Eqs. (7.23) et (7.24) sont deux équations paramétriques, le paramètre étant  $r_b$ . Elles permettent donc aussi de calculer l'énergie  $E$  en fonction de la température réciproque  $\beta$ , ou bien  $E$  en fonction de la température  $T$ . Sur la Fig. (7.1), on a choisi plutôt de représenter les grandeurs sans dimension  $E r_b / GM^2$  en fonction de  $r_b / GMm\beta$ , de telle manière que le diagramme soit valable quel que soit le rayon  $r_b$  et la masse totale  $M$ . Les couples de nombres donnés aux points A, B, C, D, E sont les valeurs  $(\tilde{r}_b, \mathcal{R})$  où  $\mathcal{R}$  est le contraste de densité entre le centre du système et la paroi du réservoir :

$$\mathcal{R} \equiv \frac{\rho_0}{\rho(r_b)} = \frac{1}{\tilde{\rho}(\tilde{r}_b)} \quad (7.25)$$

Pour comprendre cette figure, faisons successivement deux "Gedankenexperimente" :

1. **Les parois du réservoir conduisent la chaleur**, et le réservoir est immergé dans un bain de chaleur à très haute température. Ainsi, l'énergie potentielle de gravitation du gaz est petite vis-à-vis de son

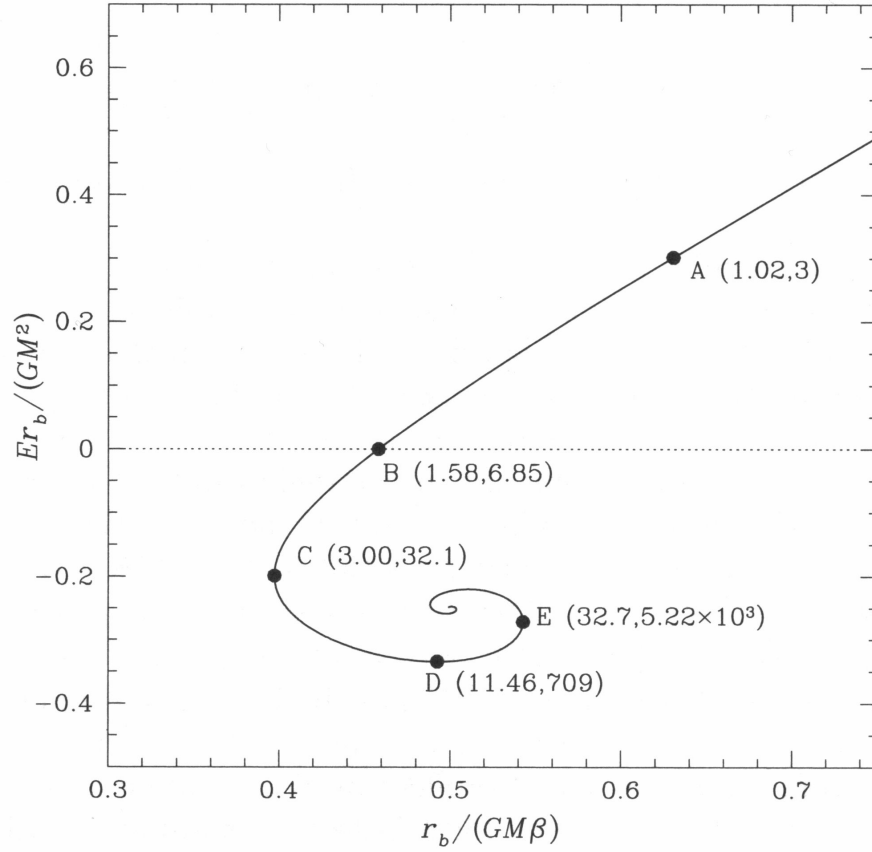


FIG. 7.1 – Energie sans dimension en fonction de la température sans dimension pour un gaz isotherme autogravitant de masse  $M$ , confiné dans un réservoir de rayon  $r_b$ . Les points indiqués A–B–C–D–E sont accompagnés chacun de la valeur du rayon sans dimension du réservoir,  $\tilde{r}_b = r_b/r_0$ , et du contraste de densité  $\mathcal{R} = \rho_0/\rho(r_b)$ . Le point vers lequel la courbe converge représente la sphère isotherme singulière, aux coordonnées  $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4})$ .

énergie cinétique due aux mouvements aléatoires. Le gaz se comporte alors presque en gaz parfait, sa chaleur spécifique est positive et il est presque homogène, avec un contraste  $\mathcal{R}$  proche de l'unité : nous sommes en haut à droite du diagramme, au voisinage du point A.

Réduisons lentement la température du bain : le gaz reste isotherme, l'énergie passe du gaz au bain, et le point représentatif du système

descend le long de la courbe vers les faibles énergies et les faibles températures. Au point B, l'énergie passe d'une valeur positive à une valeur négative, mais la chaleur spécifique du gaz reste positive (c'est la pente de la courbe). En continuant à réduire la température du bain, on conduit le système au point C, où le contraste  $\mathcal{R} = 32.125$  et où la chaleur spécifique  $C = dE/dT$  devient infinie. Il *n'existe pas* d'état d'équilibre pour des températures inférieures à  $T(C) = 0.40 GMm/(k_B r_b)$ . Les systèmes entre les points C et D possèdent une chaleur spécifique négative et sont donc instables, comme on l'a vu : si le gaz est plus chaud que le bain, l'énergie va passer du gaz au bain et le gaz deviendra plus chaud à cause de sa chaleur spécifique négative. Le transfert de chaleur s'intensifie et le gaz voit sa température augmenter sans limite. Inversement, si le gaz se trouve être un peu plus froid que le bain, de la chaleur va passer du bain au gaz, ce qui va provoquer un refroidissement irréversible du gaz.

Les systèmes situés entre les points D et E ont une chaleur spécifique à nouveau positive, mais on a pu montrer qu'ils sont aussi instables. *Un gaz isotherme dans un réservoir sphérique et conducteur en contact avec un bain thermique est instable sitôt que son contraste de densité dépasse  $\mathcal{R} = 32.125$ .*

2. **Les parois du réservoir sont isolantes, mais souples :** le réservoir est susceptible de se dilater. Initialement, le gaz a une énergie  $E$ , une masse  $M$  et un rayon  $r_{b0}$ . Supposons que le réservoir se dilate rapidement à un rayon  $r_b$  ; le gaz n'effectue pas de travail sur les parois, à cause de la rapidité de la dilatation, si bien que son énergie totale  $E$  reste constante. Après l'expansion, une fois le gaz à nouveau à l'équilibre, sa température peut être lue sur la Fig. 7.1. Si l'énergie du gaz est positive, alors la valeur de l'ordonnée  $Er_b/(GM)^2$  et amplifiée d'un facteur  $r_b/r_{b0}$ , donc le système se déplace sur la courbe vers le haut et la droite. Le contraste  $\mathcal{R}$  s'approche de l'unité et le gaz devient donc plus homogène.

Par contre, si l'énergie est négative, l'ordonnée devient plus négative d'un facteur  $r_b/r_{b0}$ . Et si sa valeur finale devient inférieure (plus négative) à  $Er_b/(GM)^2 = -0.335$  (ordonnée du point D), alors il n'y a pas d'équilibre possible après l'expansion. On peut montrer qu'*un gaz isotherme confiné dans un réservoir sphérique isolant est instable si le contraste de densité entre centre et bord dépasse  $\mathcal{R} = 708.61$* . Voir

Antonov (1962). Lynden-Bell & Wood (1968) ont appelé cette instabilité la **catastrophe gravothermique**. Celle-ci arrive parce que la sphère isotherme avec  $\mathcal{R} > 708.61$  est un extremum local d'entropie, mais non un maximum, pour  $E$ ,  $M$  et  $r_b$  donnés : le système instable peut atteindre des états d'entropie plus élevée en s'écartant de l'état isotherme.

On peut comprendre qualitativement la catastrophe gravothermique à l'aide du théorème du viriel, en séparant le système (quelque peu arbitrairement) en deux parties, le coeur et le halo. Le halo étant peu lié gravitationnellement, il a une chaleur spécifique positive, tandis que le coeur, fortement lié, a une chaleur spécifique négative. Si au gré d'une perturbation quelconque le coeur devient plus chaud que le halo, de la chaleur va s'écouler du coeur au halo et la température du coeur *et* du halo va augmenter. Comme on a :

$$C = \frac{dE}{dT} \quad \Rightarrow \quad dT = \frac{dE}{C}$$

la température du halo va croître davantage que celle du coeur si  $C_h < |C_c|$ , la différence  $dT$  va s'annuler et l'échange de chaleur aussi. Par contre, si  $C_h > |C_c|$ , le halo ne peut s'échauffer aussi vite que le coeur, et la différence de température entre le coeur et le halo augmente.

## 7.4 L'approximation de Fokker-Planck

### 7.4.1 L'équation maîtresse

La DF  $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$  satisfait l'équation de Boltzmann sans collisions, tant que le potentiel  $\Phi(\mathbf{x})$  est lisse :  $df/dt = 0$ . La densité de probabilité des étoiles autour d'une étoile donnée reste toujours la même. Mais lorsque des rencontres ont lieu, cette densité varie avec le temps, à un taux défini par ce que l'on appelle l'opérateur de rencontres  $\Gamma[f]$  :

$$\frac{df}{dt} = \Gamma[f] \quad (7.26)$$

On va déterminer cet opérateur ici.

Désignons par  $\Psi(\mathbf{w}, \Delta\mathbf{w})d^6(\Delta\mathbf{w})\Delta t$  la probabilité qu'une étoile dont les coordonnées dans l'espace de phase sont  $(w) = ((q), (p))$  soit diffusée dans le volume de l'espace de phase  $d^6(\Delta\mathbf{w})$  autour de la "position"  $\mathbf{w} + \Delta\mathbf{w}$  durant le court intervalle de temps  $\Delta t$ . On appelle  $\Psi$  la **probabilité de transition**, qui prend en compte les rencontres stellaires mais non l'accélération produite par le potentiel lisse du système stellaire, qui est déjà pris en compte dans l'équation de Boltzmann sans collisions.

Appelons "étoiles sujets" celles dont nous suivons la trajectoire et "étoiles de champ" celles qui provoquent la diffusion des étoiles sujets. Faisons le bilan des étoiles qui sont éjectées d'un volume unité de l'espace de phase à cause des rencontres et de celles qui au contraire y entrent. Le taux d'éjection d'un volume unité centré en  $\mathbf{w}$  s'écrit :

$$\left. \frac{\partial f(\mathbf{w})}{\partial t} \right|_- = -f(\mathbf{w}) \int d^6(\Delta\mathbf{w}) \Psi(\mathbf{w}, \Delta\mathbf{w}) \quad (7.27)$$

Mais les rencontres alimentent aussi ce volume unité, à partir de tous les éléments de volume voisins :

$$\left. \frac{\partial f(\mathbf{w})}{\partial t} \right|_+ = \int d^6(\Delta\mathbf{w}) \Psi(\mathbf{w} - \Delta\mathbf{w}, \Delta\mathbf{w}) f(\mathbf{w} - \Delta\mathbf{w}) \quad (7.28)$$

La somme de ces deux termes est égale à l'opérateur de rencontres, et c'est ainsi qu'on obtient **l'équation maîtresse** :

$$\begin{aligned}\Gamma[f] &= \left. \frac{\partial f(\mathbf{w})}{\partial t} \right|_- + \left. \frac{\partial f(\mathbf{w})}{\partial t} \right|_+ = \frac{df}{dt} \\ \Gamma[f] &= \int d^6(\Delta \mathbf{w}) [\Psi(\mathbf{w} - \Delta \mathbf{w}, \Delta \mathbf{w}) f(\mathbf{w} - \Delta \mathbf{w}) - \Psi(\mathbf{w}, \Delta \mathbf{w}) f(\mathbf{w})]\end{aligned}\tag{7.29}$$

Notons que cette équation maîtresse n'est pas réversible par rapport au temps, c'est-à-dire qu'une distribution concentrée autour d'un point de l'espace de phase se dilue sous l'effet de l'opérateur de rencontres, alors qu'une distribution étendue ne peut être confinée en un point. L'irréversibilité se cache dans l'hypothèse que les distributions statistiques des étoiles sujets et des étoiles de champ sont indépendantes, ou, ce qui revient au même, que la probabilité de transition  $\Psi(\mathbf{w}, \Delta \mathbf{w})$  et la DF  $f(\mathbf{w})$  sont statistiquement indépendantes, de sorte que les taux de diffusion peuvent être écrits comme des produits de ces deux fonctions.

### 7.4.2 L'équation de Fokker-Planck

On avait vu au Chap. 1 que les rencontres produisent une perturbation de la vitesse quadratique moyenne :

$$\Delta v^2 \approx \frac{8v^2}{N} \ln \Lambda \quad \text{avec} \quad \Lambda \approx \frac{R}{b_{90}}\tag{7.30}$$

Ce résultat provenait d'une intégration sur tous les paramètres d'impact entre les limite  $b_{90} \approx Gm/v^2$  et le rayon caractéristique du système  $R$ . Quel est la contribution d'un domaine d'impact  $(b_1, b_2)$  quelconque à  $\Delta v^2$  ? Pour le voir, il suffit de remplacer, dans l'Equ. (7.30),  $\ln(R/b_{90})$  par  $\ln(b_2/b_1)$ . On voit alors que des octaves égales de paramètres d'impact contribuent de manière égale à  $\Delta v^2$ . En d'autres termes, les rencontres avec des paramètres d'impact compris entre  $b_{90}$  et  $2b_{90}$  ont la même contribution que celles dont les paramètres d'impact sont compris entre  $2b_{90}$  et  $4b_{90}$ , ou entre  $4b_{90}$  et  $8b_{90}$ , etc., ou enfin entre  $\frac{1}{2}R$  et  $R$ . On comprend cela aisément : si l'on définit des paramètres d'impact  $b_1, b_2, b_3, b_n$  tels que  $b_{90} < b_1 < b_2 < b_3 \dots < b_n < R$ , on voit bien que :

$$\ln \frac{R}{b_{90}} = \ln \left( \frac{b_1}{b_{90}} \frac{b_2}{b_1} \frac{b_3}{b_2} \dots \frac{R}{b_n} \right) = \ln \frac{b_1}{b_{90}} + \ln \frac{b_2}{b_1} + \ln \frac{b_3}{b_2} + \dots + \ln \frac{R}{b_n}$$

Comme le théorème du viriel implique  $v^2 \approx GmN/R$  ( $m$  étant la masse stellaire), on a  $R/b_{90} \approx N$ . Or pour un amas globulaire,  $N \sim 10^5$ , et cela représente 17 octaves. Ce grand nombre permet certaines approximations dont nous allons voir un exemple.

**Rencontres faibles (weak encounters) :** Comme le changement de vitesse consécutif à une rencontre est  $\delta v/v \approx b_{90}/b$  et que la plupart des octaves entre  $b_{90}$  et  $R$  correspondent à  $b \gg b_{90}$ , la plus grande partie de la diffusion est due à des rencontres faibles, i.e., des rencontres pour lesquelles  $\delta v \ll v$ . Cela permet de simplifier l'expression de l'opérateur de rencontres. En effet,  $|\Delta \mathbf{w}|$  est faible, ce qui permet de développer en série de Taylor le premier terme de l'intégrant de l'Equ. (7.30) :

$$\begin{aligned} & \Psi(\mathbf{w} - \Delta \mathbf{w}, \Delta \mathbf{w}) f(\mathbf{w} - \Delta \mathbf{w}) = \Psi(\mathbf{w}, \Delta \mathbf{w}) f(\mathbf{w}) \\ & - \sum_{i=1}^6 \Delta w_i \frac{\partial}{\partial w_i} [\Psi(\mathbf{w}, \Delta \mathbf{w}) f(\mathbf{w})] \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^6 \Delta w_i \Delta w_j \frac{\partial^2}{\partial w_i \partial w_j} [\Psi(\mathbf{w}, \Delta \mathbf{w}) f(\mathbf{w})] + \mathcal{O}(\Delta \mathbf{w}^3) \end{aligned} \quad (7.31)$$

L'approximation de Fokker-Planck consiste à tronquer la série après le deuxième terme. En introduisant les coefficients de diffusion suivants :

$$D[\Delta w_i] \equiv \int d^6(\Delta \mathbf{w}) \Psi(\mathbf{w}, \Delta \mathbf{w}) \Delta w_i \quad (7.32)$$

$$D[\Delta w_i \Delta w_j] \equiv \int d^6(\Delta \mathbf{w}) \Psi(\mathbf{w}, \Delta \mathbf{w}) \Delta w_i \Delta w_j \quad (7.33)$$

on obtient pour l'Equ. (7.30) :

$$\Gamma[f] = - \sum_{i=1}^6 \frac{\partial}{\partial w_i} (D[\Delta w_i] f(\mathbf{w})) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^6 \frac{\partial^2}{\partial w_i \partial w_j} (D[\Delta w_i \Delta w_j] f(\mathbf{w})) \quad (7.34)$$

où  $D[\Delta w_i]$  représente la moyenne du changement de  $w_i$  par unité de temps. Notons que  $D[\Delta w_i \Delta w_j]$  n'est pas une fonction de ce qui serait une variable

$\Delta w_i \Delta w_j$  (d'où les crochets carrés plutôt que les parenthèses); c'est une moyenne de  $\Delta w_i \Delta w_j$  sur  $\Delta \mathbf{w}$  et une fonction de la position dans l'espace de phase où la moyenne est prise.

Le coefficient  $D[\Delta w_i \Delta w_j]$  représente le taux auquel l'étoile sujet subit une diffusion de type brownien dans l'espace de phase (marche aléatoire ou random walk), tandis que le coefficient  $D[\Delta w_i]$  représente une déviation systématique dans l'espace de phase.

Ce que l'on appelle **l'équation de Fokker–Planck** est l'ensemble des deux équations Equ. (7.26) et Equ. (7.34). Toute la dépendance à l'égard de la DF des étoiles de champ est contenue dans les coefficients de diffusion, lesquels ne dépendent que des coordonnées de l'étoile sujet dans l'espace de phase. L'équation de Fokker–Planck est donc une équation différentielle, au lieu d'être une équation intégral-différentielle comme l'équation maîtresse.

**Rencontres locales :** La plupart des octaves entre  $b_{90}$  et  $R$  ont  $b \ll R$ , si bien que la plus grande partie de la diffusion est due à des rencontres à petite échelle, donc locales, en ce sens qu'elles correspondent à  $b \ll R$ . Cela induit trois conséquences :

1. La durée  $\sim b/v$  de la rencontre étant courte, c'est-à-dire bien plus courte qu'un temps de traversée, la rencontre affecte seulement la vitesse et non la position des étoiles en jeu ;
2. Le caractère local de la rencontre autorise à considérer que les étoiles en interaction suivent des hyperboles keplériennes, les trajectoires n'étant pas significativement affectées par le potentiel à grande échelle du système stellaire ;
3. les effets des rencontres sur une étoile située en  $\mathbf{x}$  peuvent être évalués convenablement sous l'hypothèse que l'étoile sujet est immergée dans un milieu homogène et infini, où la DF est égale à celle qui règne en  $\mathbf{x}$ .

Reprenons l'Equ. (7.34) et remplaçons les coordonnées canoniques de l'espace de phase  $\mathbf{w}$  par les coordonnées cartésiennes  $(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ . Ainsi, l'opérateur de rencontre  $\Psi(\mathbf{w}, \Delta \mathbf{w})$  s'annule partout sauf en  $\Delta \mathbf{x} = 0$ . Par conséquent, on voit d'après les Eqs. (7.32) et (7.33) que tous les coefficients de diffusion de la forme  $D[\Delta x_i]$ ,  $D[\Delta x_i \Delta x_j]$  ou  $D[\Delta x_i \Delta v_j]$  sont nuls. L'opérateur de rencontres devient alors :



$$\Gamma[f] = - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial v_i} (D [\Delta v_i] f(\mathbf{w})) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial v_i \partial v_j} (D [\Delta v_i \Delta v_j] f(\mathbf{w})) \quad (7.35)$$

## 7.5 Evolution des systèmes stellaires sphériques

On décrit ici brièvement quelques-uns des mécanismes importants qui commandent l'évolution d'un amas globulaire sous l'effet des collisions.

### 7.5.1 Perte de masse due à l'évolution stellaire

Arrivées en fin de vie, les étoiles subissent une perte de masse importante, particulièrement au cours de la phase AGB (pour les étoiles de masse intermédiaire, qui n'explosent pas en supernova). Le gaz ainsi éjecté par les étoiles évoluées a de grandes chances de quitter l'amas, soit parce que la vitesse d'éjection est supérieure à la vitesse de libération, soit parce que le gaz est balayé hors de l'amas par des collisions avec le gaz galactique lors du passage de l'amas dans le disque.

Comme l'évolution stellaire est beaucoup plus longue que le temps de traversée de l'amas, les invariants adiabatiques des orbites stellaires sont conservés. On peut montrer que les orbites gardent leur forme au cours de la perte de masse, mais que si la masse  $M$  de l'amas change d'un facteur  $\psi$ , leur demi-grand axe  $a$  est dilaté d'un facteur  $1/\psi$ . Pour un vieil amas globulaire, les modèles suggèrent un facteur  $\psi \sim 0.7$  sur toute la vie de l'amas. Bien que ce nombre soit relativement proche de 1, l'effet sur la densité moyenne de l'amas est bien plus grand. En effet, supposons que l'amas ait une loi de densité correspondant au modèle de Plummer, donnée par l'Equ. (2.34). La densité moyenne à l'intérieur du rayon  $r$  vaut :

$$\bar{\rho}(r) = \frac{M(r)}{\frac{4}{3}\pi r^3} = \frac{3M}{4\pi b^3} \left(1 + \frac{r^2}{b^2}\right)^{-3/2} \quad (7.36)$$

où  $M$  est la masse totale et  $b$  l'échelle du modèle de Plummer. Si la masse des étoiles est réduite lentement d'un facteur  $\psi$ , les orbites se dilatent adiabatiquement d'un facteur  $1/\psi$ , si bien que le profil de densité va être celui d'un modèle de Plummer de masse  $M' = \psi M$  et d'échelle de longueur  $b' = b/\psi$ . La densité moyenne devient alors :

$$\bar{\rho}'(r) = \frac{3M'}{4\pi b'^3} \left(1 + \frac{r^2}{b'^2}\right)^{-3/2} = \frac{3\psi^4 M}{4\pi b^3} \left(1 + \frac{\psi^2 r^2}{b^2}\right)^{-3/2} \quad (7.37)$$

Si la masse décroît d'un facteur  $\psi$ , la densité décroît donc d'un facteur bien plus important  $\psi^4$  !

On peut montrer que les forces de marée exercées par la Galaxie sur un amas lui imposent un rayon limite  $r_J$  tel que  $\bar{\rho}(r_J) \sim \bar{\rho}_h$ , où  $\bar{\rho}_h$  est la densité moyenne de la Galaxie à l'intérieur de la distance de l'amas au centre galactique. On peut faire une estimation grossière du facteur avec lequel  $r_J$  est modifié par la perte de masse, en supposant que :

- les forces de marée n'affectent pas la distribution de masse à l'intérieur de  $r_J$  ;
- la distance au centre galactique (donc  $\bar{\rho}(r_h)$ ) reste constante durant la perte de masse.

En posant  $\bar{\rho}'(r'_J) = \bar{\rho}(r_J)$ , on obtient au travers de l'Equ. (7.37) :

$$r_J'^2 = \psi^{2/3} r_J^2 + b^2 \left( \psi^{2/3} - \frac{1}{\psi^2} \right) \quad (7.38)$$

Si  $r_J \gg b$ , alors  $r'_J \simeq \psi^{1/3} r_J$ , si bien que le rayon de l'amas ne diminue que très peu, d'un facteur 0.89 si  $\psi = 0.7$ . Mais si  $r_J$  est plus petit, l'effet peut devenir beaucoup plus important : si  $r_J/b < 1.26$ , il n'y a pas de solution pour  $\psi \leq 0.7$ , ce qui signifie que l'amas est complètement détruit. Ce sont les amas qui ont une faible concentration centrale qui sont les plus vulnérables à cet effet. Les amas globulaires observés ont des concentrations telles qu'ils ne peuvent être détruits, en moyenne, à moins que  $\psi \leq 0.08$ , ce qui laisse penser que la perte de masse n'a eu que peu d'effet sur leur évolution. Toutefois on ignore ce qui en était de la population initiale des amas, qui contenait peut-être des amas faiblement concentrés aujourd'hui disparus.

### 7.5.2 Evaporation et éjection

On parle d'éjection quand une étoile acquiert assez d'énergie lors d'une seule rencontre, tandis qu'on parle d'évaporation lorsqu'une étoile acquiert progressivement, par le hasard favorable d'un grand nombre de rencontre, juste assez d'énergie pour s'échapper finalement de l'amas. Hénon (1960, 1969) a montré que pour un amas constitué d'étoiles de masses identiques, le taux d'éjection est de l'ordre de :

$$\frac{dN}{dt} = -1.05 \times 10^{-3} \frac{N}{t_{rh} \ln(\lambda N)} \quad (7.39)$$

où  $t_{rh}$  est le *half-mass relaxation time*<sup>2</sup> et  $\lambda$  un paramètre qui vaut  $\sim 0.1$ . Le

---

<sup>2</sup>Ce temps est basé, non sur l'expression approximative du Chap. 1, mais sur un coeffi-

temps typique d'éjection est donc :

$$t_{ej} = - \left( \frac{1}{N} \frac{dN}{dt} \right)^{-1} = 1 \times 10^3 \ln(\lambda N) t_{rh} \quad (7.40)$$

Pour la valeur typique  $\ln(\lambda N) \sim 10$ , on peut montrer que  $t_{ej} \gg t_{evap}$ , si bien qu'on peut négliger les effets d'éjection devant ceux d'évaporation.

Le processus d'évaporation est plus compliqué. Des calculs détaillés de Fokker–Planck pour des amas isolés comprenant des étoiles identiques donnent un temps d'évaporation :

$$t_{evap} = -N \left( \frac{dN}{dt} \right)^{-1} = f t_{rh} \quad (7.41)$$

avec  $f \approx 300$  et où  $t_{rh}$  est le *half-mass relaxation time*. On verra que l'effondrement du coeur a lieu après environ 16 fois le temps  $t_{rh}$  initial, si bien que très peu d'étoiles auront eu le temps de s'évaporer avant. Après l'effondrement du coeur, un amas isolé se dilate, le temps de relaxation augmente et donc le taux d'évaporation diminue. Un amas isolé aurait ainsi besoin de bien plus que l'âge de l'univers pour s'évaporer complètement.

En réalité, les effets de marée dus à la Galaxie modifient la situation de manière significative, en réduisant fortement le temps d'évaporation. Si on en tient compte, une valeur plus réaliste de  $f$  est égale à :

$$f \sim 20 - 60 \quad (7.42)$$

Contrairement au cas des amas isolés, l'évaporation est plus rapide après l'effondrement du coeur, la dilatation de l'amas amenant nombre d'étoiles au-delà du rayon de marée.

---

cient de diffusion qui lui-même est défini dans le contexte de l'équation de Fokker-Planck. Comme le temps de diffusion est, selon cette dérivation, inversement proportionnel à la densité, et que celle-ci n'est pas directement observable, on considère le système comme une sphère isotherme. On peut remplacer alors la densité par la dispersion de vitesses  $\sigma$ , selon l'Equ. (4.52). Le temps de relaxation ainsi défini demeure une fonction du rayon, alors qu'une valeur unique et typique pour le système est souhaitée : on remplace donc la densité locale par la densité moyenne à l'intérieur du rayon de demi-masse, d'où le terme *half-mass relaxation time*.

### 7.5.3 Effondrement du coeur

L'évolution d'un amas globulaire constitué de  $N = 65536$  étoiles est montrée dans la Fig. 7.2, calculée avec une méthode N-corps et aussi par une solution approximative de l'équation de Fokker-Planck.

On voit que le halo se dilate, alors que le coeur se contracte, d'un facteur de plusieurs dizaines pour le rayon contenant 1% de la masse. La densité du coeur croît donc d'un facteur de l'ordre de  $3 \times 10^4$ . En négligeant le rôle des étoiles binaires, l'effondrement aboutirait à une singularité.

La Fig. (7.3) montre, pour un calcul plus précis, l'évolution du profil de densité, en échelle logarithmique, l'évolution du profil du gradient de densité  $-\alpha \equiv \frac{d \ln \rho}{d \ln r}$  et l'évolution du profil du paramètre d'isotropie des vitesses :

$$\beta \equiv 1 - \frac{\overline{v_\theta^2}}{\overline{v_r^2}}$$

Dans le diagramme du haut, les courbes se succèdent dans le temps, d'en bas à droite vers en haut à gauche. Au-delà du coeur, le profil de densité est proche d'une loi de puissance  $\rho \propto r^{-2.23}$ . L'évolution du profil de l'exposant est montrée sur la panneau du milieu. En bas, le paramètre  $\beta$  est proche de 1 aux grands rayons, ce qui signifie que la plupart des étoiles du halo ont des orbite pratiquement radiales. Aux rayons les plus faibles, c'est-à-dire à l'intérieur du coeur en contraction,  $\beta = 0$ , ce qui signifie que les vitesses sont isotropes. Une faible anisotropie de  $\beta = 0.08$  existe dans le domaine des rayons où la densité suit une loi de puissance.

On peut montrer que le temps  $\tau$  qui s'écoule avant l'effondrement du coeur est un multiple donné du temps de relaxation au centre :

$$\tau \simeq 300 t_{relax}(r = 0) \quad (7.43)$$

L'effondrement du coeur est une manifestation de la catastrophe gravothermique discutée plus haut. En général la dispersion de vitesse est toujours plus grande dans les parties centrales de l'amas. Les rencontres transportent de l'énergie vers l'extérieur, mais comme le coeur a une chaleur spécifique négative, il s'échauffe à mesure qu'il perd de l'énergie. S'il n'est pas stoppé, ce processus aboutit à une singularité.

Il s'avère que l'effondrement est arrêté par les étoiles binaires. En général ce sont des binaires primordiales, mais il peut aussi y avoir des binaires formées par des rencontres à trois corps. Le mécanisme est le suivant. Soient

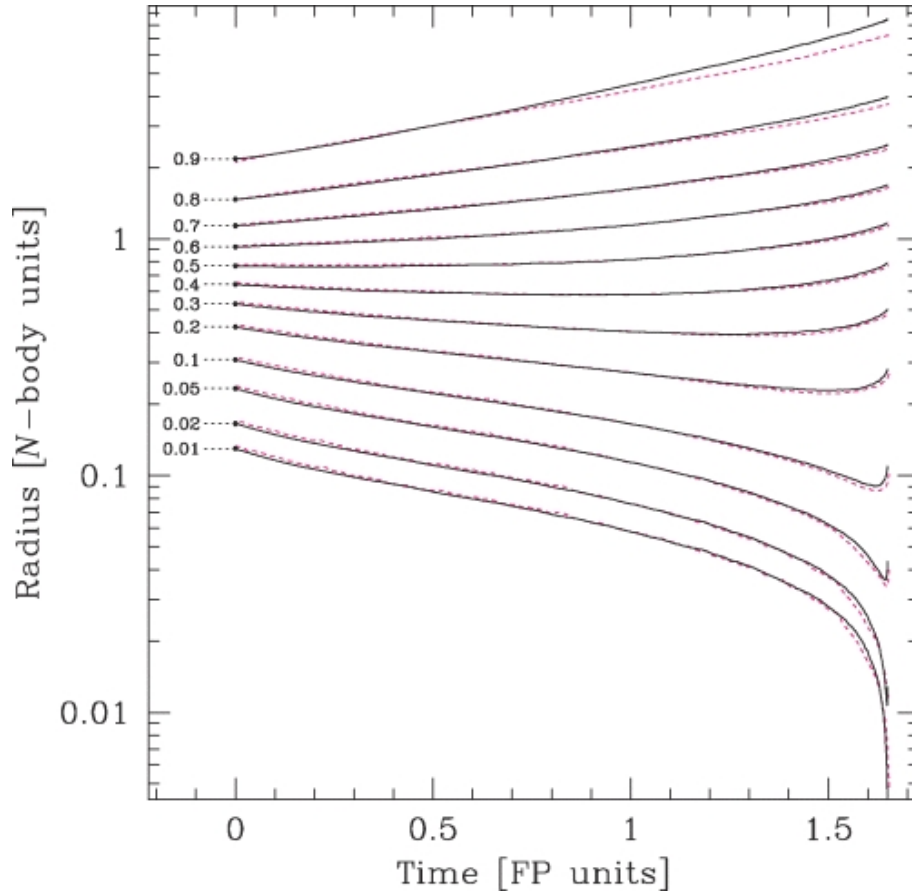


FIG. 7.2 – Evolution d’un modèle de Plummer, calculée en résolvant l’équation de Fokker-Planck avec une méthode de Monte-Carlo (lignes continues) et avec une simulation N-corps avec  $N = 65536$  (lignes traitillées). Les rayons incluant une fraction donnée de la masse totale (indiquée à gauche, de 1% à 90%) sont donnés en fonction du temps. Les “unités N-corps” sont telles que  $G = 1$ ,  $M = 1$  et  $-4E = 1$  (voir Freitag, Rasio & Baumgardt 2006). Le temps est donné en unités de  $T_r \equiv T_0 N / \ln(\lambda N)$  avec  $T_0 = GM^{5/2}(-4E)^{-3/2}$ ;  $T_r$  est comparable au temps de relaxation.

trois étoiles intervenant dans une rencontre à trois corps, ayant des énergies cinétiques initiales  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $K_3$ . Supposons qu’après l’interaction, les étoiles 1 et 2 forment une binaire, dont le centre de masse aura une énergie cinétique

$K_b$ . L'énergie interne de la binaire est  $E_b < 0$ , et l'énergie cinétique de l'étoile 3 est  $K'_3$ . La conservation de l'énergie exige  $K_b + E_b + K'_3 = K_1 + K_2 + K_3$ , donc  $K_b + K'_3 > K_1 + K_2 + K_3$  (notons qu'on ne considère pas l'énergie potentielle dans le potentiel de l'amas, puisqu'elle est la même pour tous les objets impliqués dans la rencontre). Ainsi, l'énergie cinétique portée par le centre de masse de la binaire et par l'étoile simple est supérieure à l'énergie cinétique initiale des trois étoiles, et cela d'autant plus que la binaire est serrée. Autrement dit, *la formation de binaires fournit une source de chaleur à l'amas*. Or, un apport d'énergie au coeur le *refroidit*, ce qui tend à effacer le gradient de température et donc à stopper l'effondrement.

Après l'effondrement, les binaires nouvellement formées peuvent insuffler de l'énergie cinétique aux étoiles simples qui passent près d'elles, ce qui produit la dilatation de l'amas. Ce processus peut être instable et produit alors des **oscillations gravothermiques**, qui voient la densité centrale osciller de plusieurs ordres de grandeur, comme illustré par la Fig. (7.4).

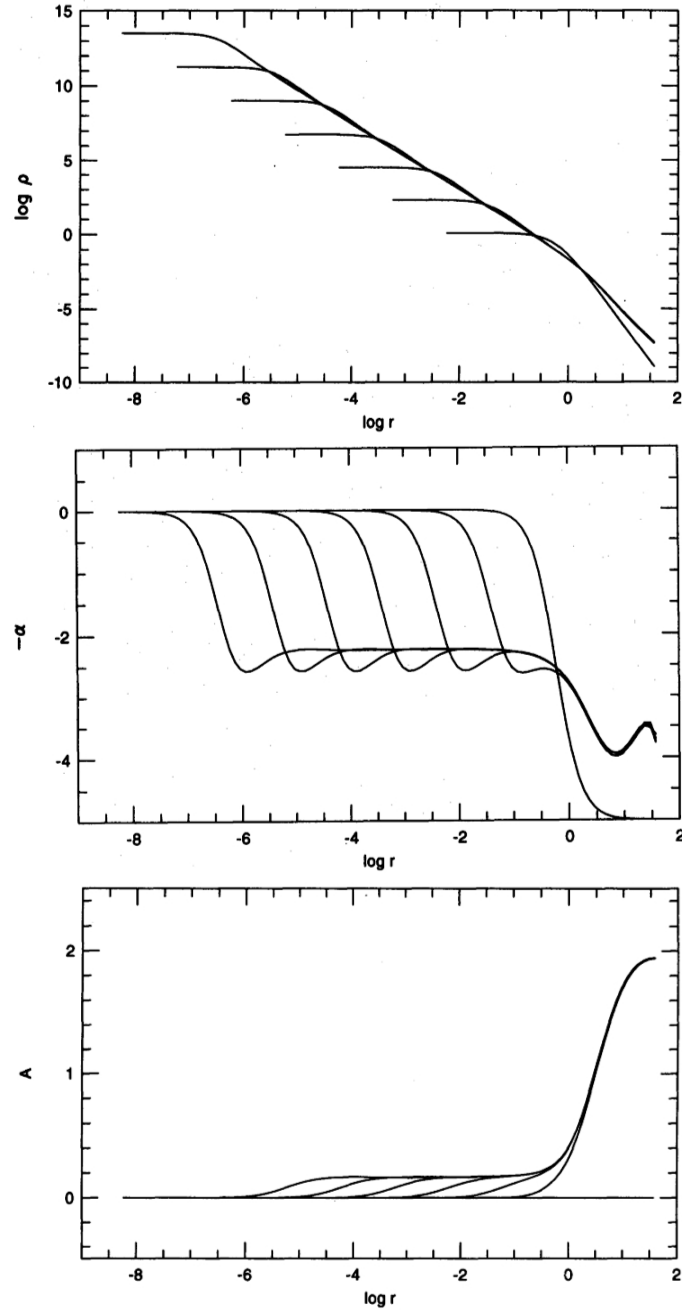


FIG. 7.3 – Evolution du profil de densité, du profil du gradient de densité  $-\alpha$ , et du profil du paramètre d'anisotropie des vitesses  $\beta$  (en fait, du paramètre  $A = 2\beta$ ) au cours du temps. Source : Takahashi (1995, PASJ 47, 561).



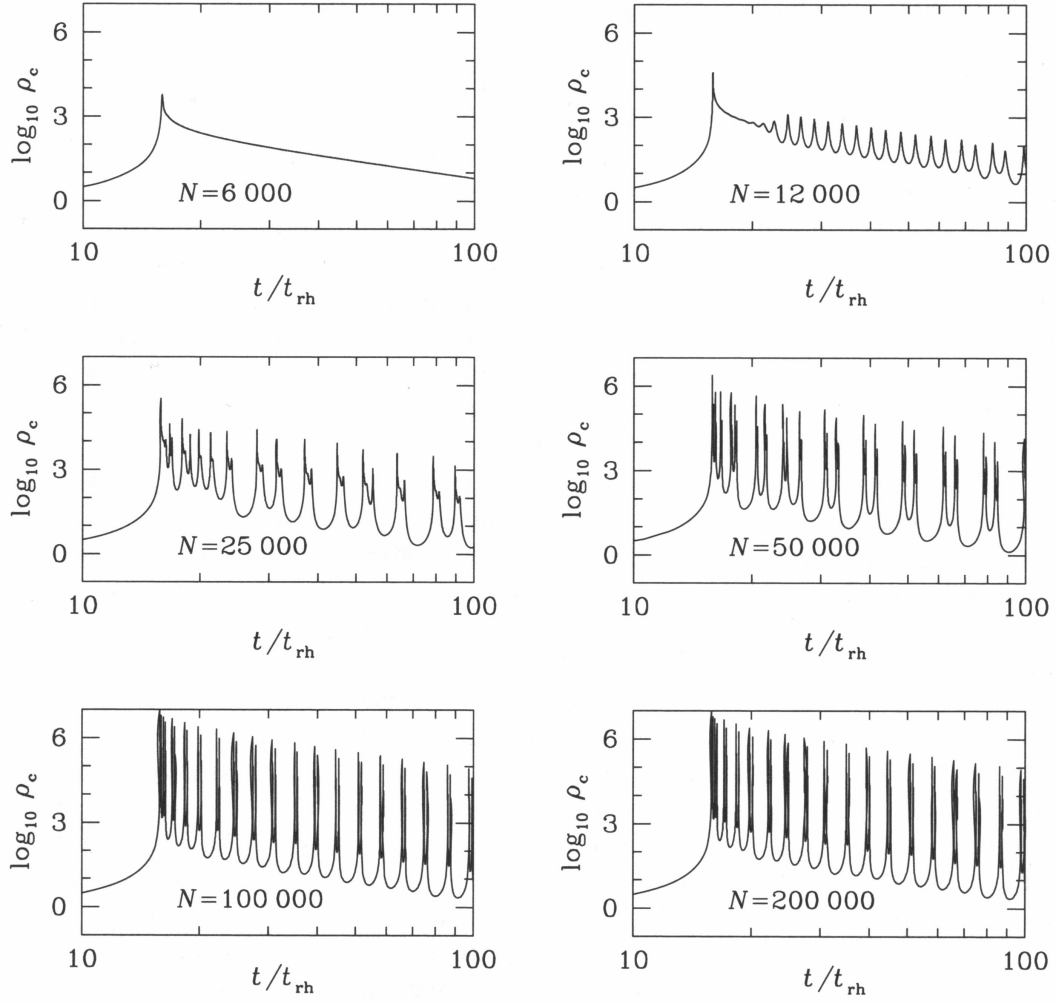


FIG. 7.4 – Oscillations gravothermiques d'amas contenant différents nombres d'étoiles. Source : Breeden & Cohn (1995).

# Chapitre 8

## Collisions et rencontres de systèmes stellaires

Ce chapitre est largement inspiré, voire directement copié du cours de **Gary Mamon** (Institut d'Astrophysique de Paris), "Dynamique gravitationnelle des systèmes à N corps" (version 2008-2009).

### 8.1 Friction dynamique

Les rencontres avec d'autres particules engendrent des variations de vitesse. Par symétrie, les variations *moyennes* des vitesses perpendiculaires  $\langle \delta \mathbf{v}_\perp \rangle = 0$ ; par contre, on a vu que la valeur typique  $\delta v_\perp \equiv \langle \delta \mathbf{v}_\perp^2 \rangle^{1/2}$  n'est pas nulle. Qu'en est-il de  $\langle \delta \mathbf{v}_\parallel \rangle$ ? Les déviations des trajectoires des particules de champ par une particule test font que les particules de champ auront tendance à se concentrer derrière la particule test (voir Fig. 8.1). Ce surplus de particules derrière la particule test va entraîner une *friction dynamique*, d'abord établie par Chandrasekhar (1943). En d'autres termes on aura  $\delta \mathbf{v}_\parallel = -cte \mathbf{v}$ . La figure 8.2 montre que la déviation d'une particule de champ  $\delta v_\perp = v \sin \alpha$ , tandis que  $\delta v_\parallel = -v(1 - \cos \alpha)$ . Pour de petites déviations, on trouve donc

$$\frac{\delta v_\parallel}{v} \simeq -\frac{1}{2} \left( \frac{\delta v_\perp}{v} \right)^2 \quad (8.1)$$

Pour une masse test  $m_0$  et des particules de champ de masse  $m$ , en passant de la vitesse relative à la vitesse de la particule de masse  $m_0$  et en partant

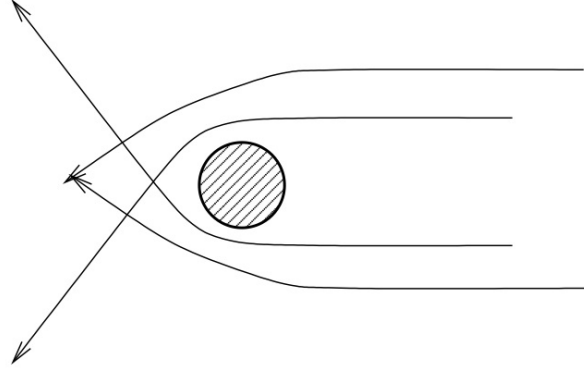


FIG. 8.1 – Trajectoires de particules déviées par une particule test massive, dans le repère de cette particule test.

de l'équation 1.17, on trouve

$$\delta v_{\parallel} = -2 \frac{G^2 m(m_0 + m)}{b^2 v^3} . \quad (8.2)$$

où  $b$  est le paramètre d'impact. Un calcul plus précis donne (Binney & Tremaine 1987, chap. 7.1, p. 422)

$$\delta v_{\parallel} = - \frac{2m/(m_0 + m)}{1 + b^2 v^4 / [G^2(m_0 + m)^2]} v , \quad (8.3)$$

et on retrouve l'équation 8.2 dans la limite des grandes vitesses.

Le temps caractéristique de friction dynamique est par définition

$$\tau_{fric} = - \left\langle \frac{1}{v} \frac{dv_{\parallel}}{dt} \right\rangle^{-1} . \quad (8.4)$$

Sur une orbite circulaire, on a alors une variation moyenne

$$\begin{aligned} \langle \Delta v_{\parallel} \rangle_{orbite} &= \int \delta v_{\parallel} d\mathcal{N} \\ &= - \frac{8\pi^2 f r \rho(r) v}{m_0 + m} \int_0^{b_{max}} \frac{b db}{1 + b^2 v^4 / [G^2(m_0 + m)^2]} \\ &= - \frac{4\pi^2 f r \rho(r) G^2(m_0 + m)}{v^3} \ln(1 + \Lambda^2) , \end{aligned} \quad (8.5)$$

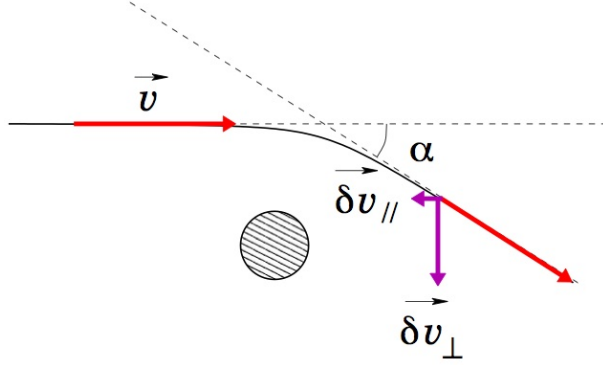


FIG. 8.2 – Trajectoires d’une particule déviée par une particule test massive dans le repère de cette particule test, illustrant les changements de vitesse perpendiculaire et parallèle.

où  $\Lambda = b_{max}v^2/[G(m_0 + m)]$  et où le nombre de particules de masse  $m$  rencontrées le long de l’orbite, avec des paramètres d’impact compris entre  $b$  et  $b + db$ , est donné par

$$d\mathcal{N} \simeq (2\pi b db) \times (2\pi r) \times \frac{f \rho(r)}{m} , \quad (8.6)$$

avec  $f$  la fraction de masse du système sous forme de particules de champ de masse  $m$  (on peut calculer l’effet causé par différentes familles de particules) et  $\rho(r)$  est la densité de masse totale du système au rayon  $r$ . On peut écrire

$$\frac{\tau_{fric}}{\tau_{circ}} = -\frac{v}{\langle \Delta v_{\parallel} \rangle_{orbite}} . \quad (8.7)$$

En identifiant  $v$  avec la vitesse circulaire et en posant  $M(r) = 4\pi r^3 \bar{\rho}/3$ , on a

$$v^4 = \left( \frac{GM(r)}{r} \right)^2 = \frac{4\pi}{3} G^2 r \bar{\rho} M(r) . \quad (8.8)$$

De plus, avec  $b_{max} \simeq r$  et à la limite  $m_0 \gg m$ , l’équation 8.7 devient (en supposant encore que  $(M(r)/m_0)^2 \gg 1$ ) :

$$\frac{\tau_{fric}}{\tau_{circ}} = \frac{\bar{\rho}/\rho}{6\pi f} \frac{M(r)/m_0}{\ln[M(r)/m_0]} \propto \frac{M(r)/m_0}{\ln[M(r)/m_0]} . \quad (8.9)$$

Il est important de noter que le temps de friction dynamique est similaire au temps de relaxation à 2 corps, sauf que c'est la masse de la particule test qui rentre en jeu dans la friction dynamique (éq. 8.9) et non la masse de la particule de champ comme c'est le cas pour la relaxation à 2 corps (éq. VI-12 du cours de Gary Mamon). Donc, l'équation 8.9 indique que *sur des orbites circulaires, la friction dynamique est efficace sur un nombre d'orbites à peu près égal au rapport entre la masse de l'objet primaire (i.e. le système dans lequel évolue la particule test) incluse à l'intérieur du rayon de l'orbite et la masse de la particule test*. Plus massive est la particule test, plus rapide est la friction dynamique.

Cette friction dynamique engendre une perte d'énergie et par conséquent un *déclin orbital* qui va conduire les objets au centre du potentiel dans lequel ils évoluent.

Ainsi, la friction dynamique agit sur les amas globulaires qui, orbitant autour des galaxies, finissent par tomber au centre (Tremaine, Ostriker & Spitzer 1975). Elle est aussi très efficace sur les orbites des galaxies dans les groupes (mais voir Domínguez-Tenreiro & Gomez-Flechoso 1998), ainsi que sur les groupes de galaxies tombant sur des amas de galaxies, mais elle est inefficace lorsque des galaxies individuelles tombent sur des amas de galaxies.

Pour une orbite quelconque, le temps de friction dynamique s'écrit (comme le suggère l'équation 8.5)

$$\tau_{fric} \propto \frac{v^3}{m \rho} = cte \frac{v^3}{G^2 \rho m_0 \ln \Lambda} \quad , \quad (8.10)$$

et avec l'équation 2.31, on retrouve facilement l'équation 8.9 pour les orbites circulaires.

Quant l'orbite de la particule test est allongée, la friction dynamique ne peut se calculer en faisant une moyenne sur l'orbite du taux de friction dynamique instantanée, car le temps de variation apparente de la densité locale est plus court que le temps de friction dynamiques "local" (éq. 8.10). Le taux de friction dynamique pour des orbites elliptiques a été étudié par van den Bosch et al. (1999) et Colp, Mayer & Governato (1999) et on retrouve des formules analogues avec un facteur gérant l'ellipticité de l'orbite.

Si toutefois, on applique le taux classique de friction dynamiques le long d'une orbite allongée, on déduit que celle-ci est la plus forte au péricentre de l'orbite, et la réduction subséquente d'énergie orbitale va conduire à une décroissance de l'apocentre de l'orbite. On parle alors de *circularisation* de

l'orbite, et il est raisonnable de penser que *le temps de circularisation est du même ordre que le temps de friction dynamique*.

Il faut noter que si l'objet secondaire (i.e. celui qui subit la friction dans un système plus grand, désigné comme *primaire*) subit des effets de marée (voir plus bas) qui limitent sa masse au cours de la décroissance de l'apocentre de son orbite, on s'attend alors à ce que ce taux de déclin orbital par friction dynamique soit ralenti. Des expériences numériques (Prugniel & Combes 1992, Colpi, Mayer & Governato 1999) montrent, au contraire, que le déclin orbital se fait de façon environ 5 fois plus rapide que prévue par les formulations classiques comme celles données ci-dessus. Cela est dû à des résonances entre la réponse de la primaire (système le plus grand) au passage du secondaire (système le plus petit, qui évolue dans la primaire et subit la friction dynamique) lorsque celui-ci accomplit un tour.

Toutefois, Domínguez-Tenreiro & Gómez-Flechoso (1998) suggèrent, au contraire, que la formulation classique surestime le taux de friction dynamique pour des objets dont la dispersion de vitesses interne est du même ordre que leur dispersion de vitesses dans le plus grand système qui les contient.

Finalement, le surplus de masse autour de la primaire vient d'être calculé par Mohayaee, Colin & Silk (2008) et varie à peu près comme  $1/\sqrt{r}$ .

## 8.2 Marées

Etant donné une particule d'un système dynamique, la *force de marée* ("tide" en anglais) agissant sur elle est la *différence* entre la force causée par un autre système dynamique et la force que cet autre système dynamique exerce sur le système de la particule.

### 8.2.1 Marées instantanées

Considérons une particule à une distance  $\mathbf{r}$  d'un système test, situé à une distance  $\mathbf{R}$  d'un système perturbant. La force de marée subie par la particule est

$$\mathbf{F}_{maree} = \mathbf{F}(\mathbf{R} - \mathbf{r}) - \mathbf{F}(\mathbf{R}) \quad , \quad (8.11)$$

où  $\vec{F}$  est la force gravitationnelle exercée par le système perturbant. L'équation 8.11 peut s'écrire (pour les accélérations de marée) :

$$\mathbf{a}_{maree} = \frac{GM_p(S)}{S^3} (\mathbf{R} - \mathbf{r}) - \frac{GM_p(R)}{R^3} \mathbf{R} \quad , \quad (8.12)$$

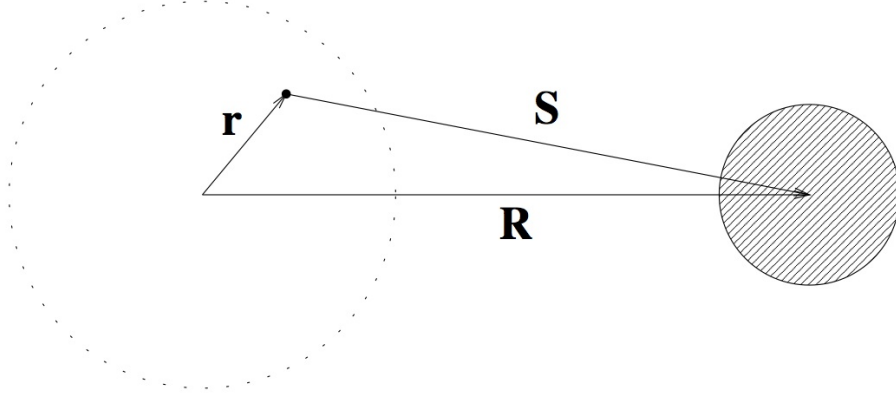


FIG. 8.3 – Perturbation de marées. Le système test est à gauche, le système perturbant à droite.

où  $M_p(R)$  est le profil de masse du perturbant, et  $R$  et  $S$  sont des valeurs absolues.

Dans la limite de perturbation lointaine, la force de marée par unité de masse (l'accélération de marée) peut s'exprimer simplement après un développement limité au premier ordre de  $r/R$ . Ainsi, le vecteur séparation

$$\mathbf{S} = \mathbf{R} - \mathbf{r}$$

a pour module

$$\begin{aligned} S = (R^2 + r^2 - 2\mathbf{R} \cdot \mathbf{r})^{1/2} &= R \left[ 1 - 2(\mathbf{e}_R \cdot \mathbf{e}_r) \left( \frac{r}{R} \right) + \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right]^{1/2} \\ &\simeq R \left[ 1 - (\mathbf{e}_R \cdot \mathbf{e}_r) \left( \frac{r}{R} \right) \right] \quad , \end{aligned} \quad (8.13)$$

au 1er ordre, où  $\mathbf{e}_R$  et  $\mathbf{e}_r$  sont les vecteurs unitaires correspondant aux vecteurs  $R$  et  $r$ . L'équation 8.13 mène alors à

$$S^3 \simeq R^3 \left[ 1 - 3(\mathbf{e}_R \cdot \mathbf{e}_r) \left( \frac{r}{R} \right) \right] \quad , \quad (8.14)$$

au 1er ordre, et

$$\begin{aligned}
M_p(S) &\simeq M_p(R) + (S - R) \frac{dM_p}{dR} \\
&= M_p(R) - 4\pi(\mathbf{e}_R \cdot \mathbf{e}_r) \rho_p(R) R^2 r \\
&= M_p(R) \left[ 1 - 3(\mathbf{e}_R \cdot \mathbf{e}_r) \frac{\rho_p(R)}{\bar{\rho}_p(R)} \left( \frac{r}{R} \right) \right]
\end{aligned} \tag{8.15}$$

où  $\rho_p$  et  $\bar{\rho}_p$  sont les densités de masse locale et moyenne du perturbant. Les expansions des équations 8.14 et 8.15 conduisent à

$$\frac{M_p(S)}{S^3} = \frac{M_p(R)}{R^3} \left[ 1 + 3(\mathbf{e}_R \cdot \mathbf{e}_r) \left( 1 - \frac{\rho_p(R)}{\bar{\rho}_p(R)} \right) \left( \frac{r}{R} \right) \right] . \tag{8.16}$$

Avec l'expansion de l'équation 8.16, l'accélération de marée (éq. 8.12) devient

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}_{maree} &= \left[ \frac{G M_p(S)}{S^3} - \frac{G M_p(R)}{R^3} \right] \mathbf{R} - \frac{G M_p(S)}{S^3} \mathbf{r} \\
&= \frac{G M_p(R) r}{R^3} \left[ 3(\mathbf{e}_R \cdot \mathbf{e}_r) \left( 1 - \frac{\rho_p}{\bar{\rho}_p} \right) \mathbf{e}_R - \mathbf{e}_r \right] ,
\end{aligned} \tag{8.17}$$

où la seconde égalité est une approximation du 1er ordre dans la limite  $r \ll R$ . Ainsi, l'équation 8.17 montre que l'accélération de marée varie comme

$$a_m \propto \frac{M_p(R)}{R^3} r \tag{8.18}$$

Considérons un perturbateur sphérique avec un profil de *densité moyenne*  $\bar{\rho}_p(R) \propto R^{-\alpha}$ . En fonction de la densité moyenne, la densité locale s'écrit généralement

$$\rho(R) = \frac{1}{4\pi R^2} \frac{dM}{dR} = \frac{1}{4\pi R^2} \frac{d(4\pi \bar{\rho} R^3/3)}{dR} = \bar{\rho}(R) \left( 1 + \frac{1}{3} \frac{R}{\bar{\rho}} \frac{d\bar{\rho}}{dR} \right) , \tag{8.19}$$

si bien que l'équation 8.19 conduit à  $\rho_p/\bar{\rho}_p = 1 - \alpha/3$  (et cela même pour  $\alpha = 3$ , qui représente le cas de la masse ponctuelle), et l'équation 8.17 devient

$$\mathbf{a}_{maree} = \frac{4\pi}{3} G \bar{\rho}_p(R) r [\alpha (\mathbf{e}_R \cdot \mathbf{e}_r) \mathbf{e}_R - \mathbf{e}_r] . \tag{8.20}$$

Dans le cas d'un perturbant ponctuel ( $\alpha = 3$ ), l'équation 8.17 démontre clairement que *la force de marée à grande distance est proportionnelle à  $r/R^3$* ,



donc décroît rapidement avec la distance et affecte surtout les particules aux bords du système perturbé. La solution générale de l'équation 8.20 est illustrée dans la Figure 8.4. La déformation est quadrupolaire dans le cas d'un perturbant ponctuel ( $\alpha = 3$ ). Mais, comme l'ont d'abord remarqué Dekel, Devor & Hetzroni (2003), la déformation est purement compressive dans la limite  $\alpha = 0$  (perturbant homogène). En effet, la marée projetée sur l'axe reliant le système test au perturbant s'écrit d'après l'équation 8.20

$$a_m = \frac{4\pi}{3} (\alpha - 1) G \bar{\rho}_p(R) r (\mathbf{e}_R \cdot \mathbf{e}_r) \quad (8.21)$$

et change de signe pour  $\alpha = 1$ , pour passer d'expansif à compressif lorsqu'on passe de  $\alpha > 1$  à  $\alpha < 1$ .

## 8.2.2 Orbites circulaires

Jusque là, nous avons supposé que le système test n'a pas de rotation interne synchronisée avec sa révolution circulaire autour du centre de masse commun avec le perturbant. On dit que le système est *irrotationnel*. Dans le cas contraire, il faut ajouter à la marée  $\mathbf{a}_m$  la différence des accélérations centrifuges :

$$\Delta [\Omega^2 \mathbf{R}] = \Omega^2(R) \mathbf{r} = \frac{v_{circ}^2(R)}{R^2} \mathbf{r} = \frac{4\pi}{3} G \bar{\rho}_p(R) r \mathbf{e}_r \quad , \quad (8.22)$$

où la vitesse angulaire  $\Omega$  est celle du système, donc définie au rayon  $R$ . A partir des équations 8.20 et 8.22, l'accélération de marée s'écrit plus simplement comme

$$\mathbf{a}_{maree} = \frac{4\pi}{3} \alpha G \bar{\rho}_p(R) r (\mathbf{e}_R \cdot \mathbf{e}_r) \mathbf{e}_R \quad . \quad (8.23)$$

Cette équation donne alors un effet toujours expansif à la marée pour  $\alpha > 0$  (Figure 8.5). Cependant, les systèmes auto-gravitants en astrophysique sont rarement verrouillés en phase. Sur des orbites circulaires, *l'accélération de marée sera constante si le système test est verrouillé en phase avec le perturbant*, c'est-à-dire si le système test pointe toujours les mêmes particules vers le perturbant (comme c'est le cas de la Lune perturbée par la Terre). Alors, le système test aura un rayon limite appelé *rayon de marée* à l'extérieur duquel la force de marée sera supérieure à la force gravitationnelle liant la particule à son système. En écrivant l'égalité des forces par unité de masse

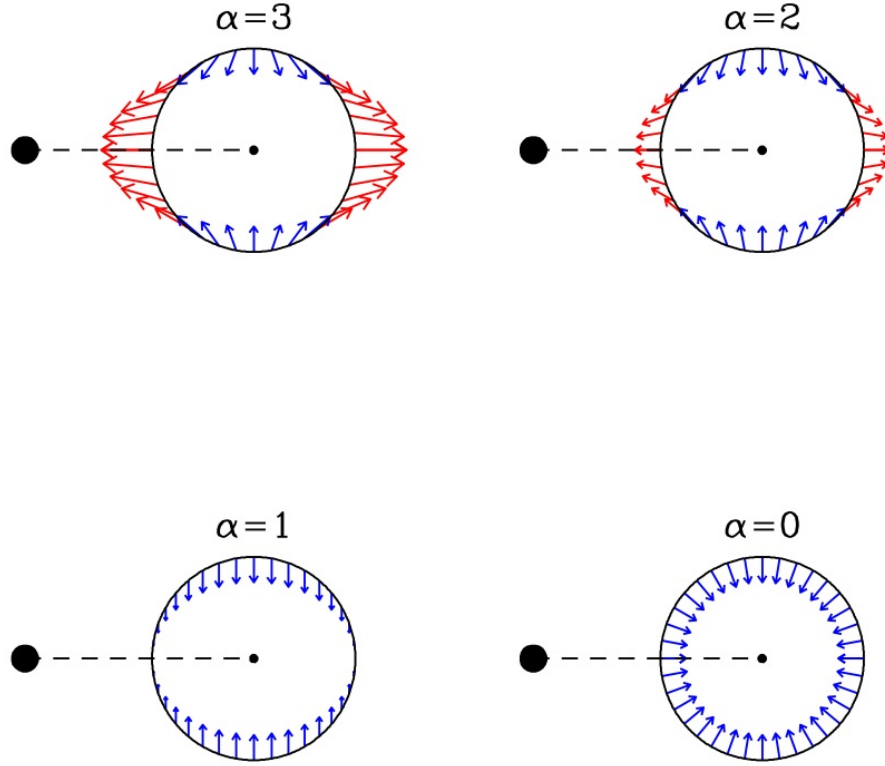


FIG. 8.4 – Effets de marée causés par un perturbant sphérique avec  $\bar{\rho}_p \propto r^{-\alpha}$ , où le système test est irrotationnel (d'après Dekel et al. 2003). Le gros point à gauche représente le perturbant (qui n'est ponctuel que pour le cas  $\alpha = 3$ ).

au rayon de marée  $r = r_m$ , on a :

$$\mathbf{a}_{maree} = \frac{G M(r_m)}{r_m^3} \mathbf{r}_m \quad , \quad (8.24)$$

où  $M(r)$  est le profil de masse du système test.

Sur l'axe séparant le système test du perturbant, l'équation 8.24 devient, avec les équations 8.20 et 8.23 :

$$\bar{\rho}(r_m) = (\alpha - \eta) \bar{\rho}_p(R) \quad , \quad (8.25)$$

où  $\eta = 1$  pour le cas d'un système test irrotationnel et  $\eta = 0$  pour le cas où il est verrouillé en phase avec le perturbant. L'équation 8.25 indique qu'*au*

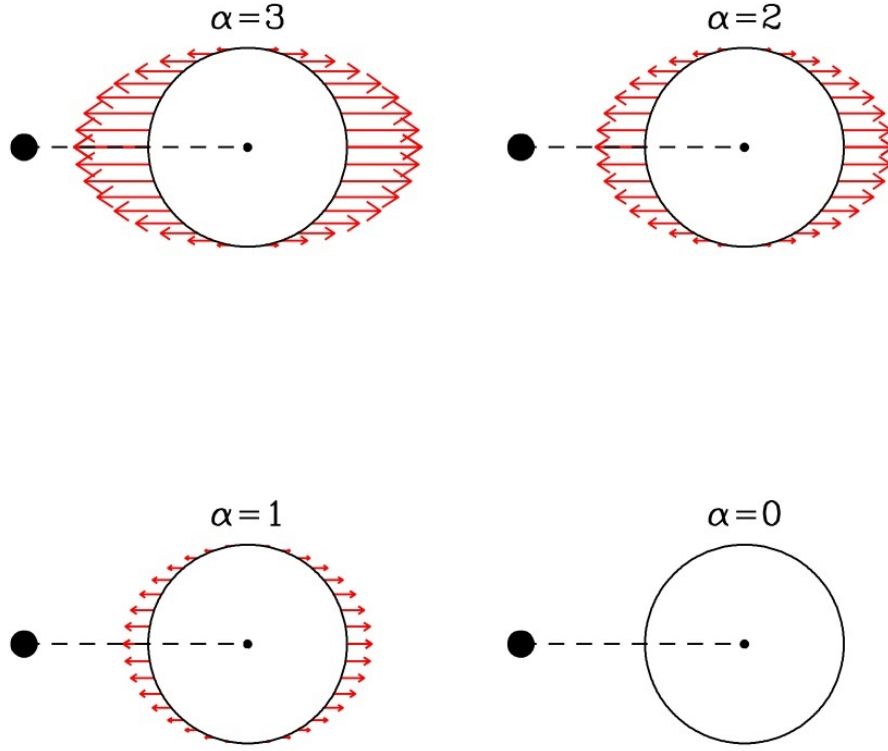


FIG. 8.5 – Effets de marée causés par un perturbant sphérique avec  $\bar{\rho}_p \propto r^{-\alpha}$ , où le système test est verrouillé en phase avec le perturbant (gros point à gauche qui n'est généralement pas ponctuel, sauf pour le cas  $\alpha = 3$ ).

*rayon de marée, la densité moyenne d'un système est de l'ordre de celui du perturbant.* Dans le cas où le système test a une densité de masse homologue à celui du perturbant on trouve alors

$$r_m = (\alpha - \eta)^{-1/3} \left[ \frac{M(r_m)}{M_p(r)} \right]^{1/3} R = \frac{1}{\sqrt{\alpha - \eta}} \left( \frac{V_{circ}}{V_{circ,p}} \right) R \approx \frac{1}{\sqrt{\alpha - \eta}} \left( \frac{\sigma_v}{\sigma_{v,p}} \right) R . \quad (8.26)$$

Les équation 8.26 impliquent

$$r_m \propto R .$$

### 8.2.3 Orbites allongées

L'effet de marée cumulé sur une orbite va dépendre fortement de l'élongation de la trajectoire.

Pour une orbite quasi-circulaire ou légèrement allongée, King (1962) a proposé d'étendre la théorie circulaire, où le terme centrifuge ne représente plus  $V_{circ}^2 R$  mais  $V^2 R$ . Alors, l'accélération de marée s'écrit, à partir de l'équation 8.23

$$\mathbf{a}_{maree} = \frac{4\pi}{3} G \bar{\rho}_p(R) r \left\{ \alpha (\mathbf{e}_R \cdot \mathbf{e}_r) \mathbf{e}_R + \left[ \left( \frac{V}{V_{circ}} \right)^2 - 1 \right] \mathbf{e}_r \right\} , \quad (8.27)$$

et le rayon de marée sur l'axe s'écrit

$$r_m \approx \frac{1}{\sqrt{\alpha + (V/V_{circ})^2 - 1}} \frac{\sigma_v}{\sigma_{v,p}} R . \quad (8.28)$$

Mais, lorsque l'orbite relative entre systèmes test et perturbant est très excentrique, la force de marée instantanée est faible lors de l'approche, puis très forte au péricentre, puis à nouveau faible. Ainsi, l'effet de marée est similaire à un *choc de marées* (Ostriker, Spitzer & Chevalier 1972), comme illustré dans la Figure 8.6.

Contrairement au cas de la friction dynamique, dont le temps ne peut être appliqué que pour un objet qui voit une densité qui ne varie pas fortement sur un temps plus court, l'effet cumulé de marée peut être intégré le long de l'orbite, en intégrant sur le temps la force de marée instantanée. Chaque particule du système test reçoit une impulsion

$$\Delta \mathbf{v} = \int \mathbf{a}_m dt . \quad (8.29)$$

En première approximation, cette impulsion est égale au produit de l'accélération de marée au péricentre et de la durée du passage au péricentre :

$$\Delta \mathbf{v} = cte \frac{G M_p(R_p) r}{R_p^3} \left( \frac{R_p}{V} \right) , \quad (8.30)$$

où  $R_p$  est le péricentre et la constante est de l'ordre de l'unité. Le calcul analytique précis de l'impulsion est difficile, sauf dans le cas où la rencontre avec le perturbant se fait à très grande vitesse, de sorte qu'au premier ordre,

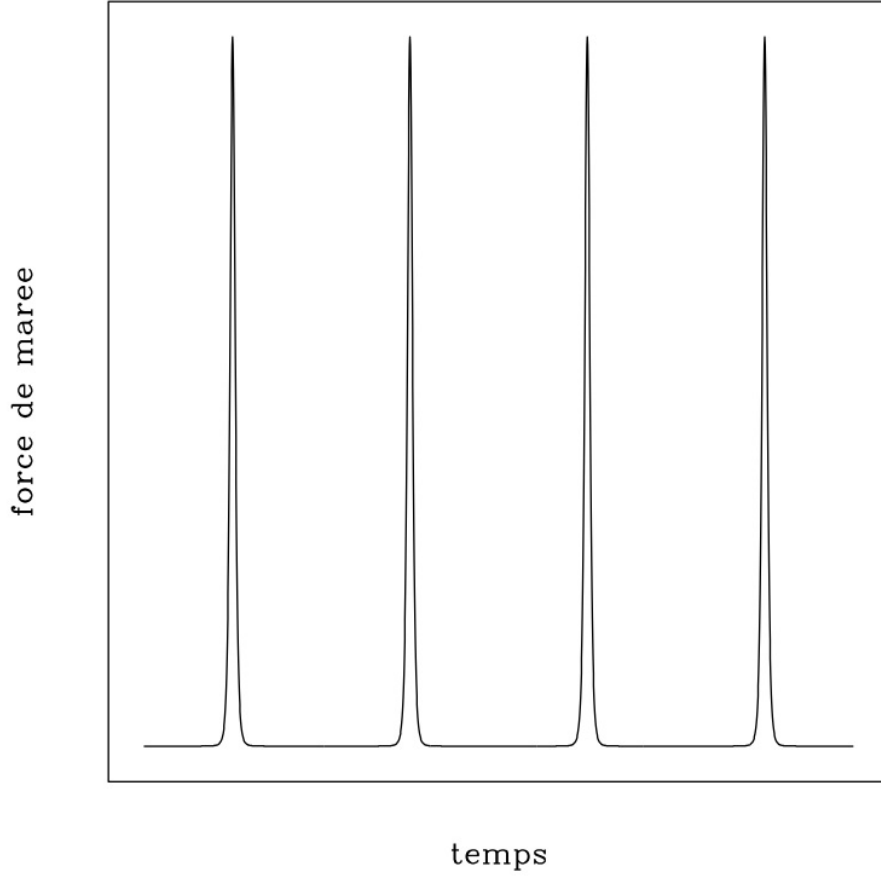


FIG. 8.6 – Effet de marée pour une orbite allongée.

le perturbant se déplace de façon rectiligne à vitesse constante et les déplacements des particules du système test lors du passage du perturbant sont négligeables. Dans cette *approximation impulsive*, la constante de l'équation 8.30 est en effet d'ordre 1 pour un perturbant ponctuel (Spitzer 1958) ou pour un perturbant de Hernquist (Gnedin, Hernquist & Ostriker 1999).

Le rayon de marée est alors défini comme le rayon où une coquille sphérique a une énergie nulle, c'est-à-dire qu'elle a reçu autant d'énergie (par unité de masse) par marée que son énergie spécifique (par unité de masse) de liaison (White 1983) :

$$E + \Delta E = 0 \quad . \quad (8.31)$$

Sur la coquille de rayon  $r$ , on a

$$\Delta E = \langle \mathbf{v} \cdot \Delta \mathbf{v} \rangle + \frac{1}{2} \langle (\Delta v)^2 \rangle \quad , \quad (8.32)$$

où les moyennes sont sur la coquille. Le premier terme de l'équation 8.32 a une intégrale nulle ou presque, de sorte que le second terme domine, et *l'énergie reçue par marée est toujours positive*. D'autre part, on a  $E(r) \approx -GM(r)/r$ . L'équation 8.31 devient alors

$$\frac{GM(r_m)}{r_m} \approx \frac{1}{2} (\Delta v)^2 \quad , \quad (8.33)$$

ce qui, avec l'équation 8.30, donne un rayon de marée satisfaisant un critère de densité modifié par la vitesse du perturbant :

$$\bar{\rho}(r_m) \simeq \bar{\rho}_p(R_p) \left[ \frac{V_{circ}(R_p)}{V_p} \right]^2 \quad , \quad (8.34)$$

où  $V_p$  est la vitesse relative au péricentre. L'équation 8.34 s'applique donc à la fois aux orbites circulaires et aux orbites excentriques. Par conséquent, le rayon de marée peut s'écrire de façon générale (Mamon 2000) :

$$r_m \simeq \left[ \frac{V_p}{V_{circ}^p(R_p)} \right] \left[ \frac{V_{circ}(r_m)}{V_{circ}^p(R_p)} \right] R_p \approx \left[ \frac{V_p}{V_{circ}^p(R_p)} \right] \left( \frac{\sigma_{v,int}}{\sigma_v} \right) R_p \quad , \quad (8.35)$$

où  $V_{circ}(r_m)$  est la vitesse circulaire du système test au rayon de marée et  $\sigma_{v,int}$  sa dispersion de vitesse interne, tandis que  $V_{circ}^p(R_p)$  est la vitesse circulaire du perturbant au rayon  $R_p$ . La Figure 8.7 illustre les rayons de marée calculés dans les approximations quasi-circulaires (King 1962) et impulsives (orbites allongés). L'abscisse vaut 1 pour les orbites circulaires. Une généralisation peut être faite en choisissant l'approximation donnant la marée la plus faible (le rayon de marée le plus grand), et la Figure 8.7 montre que pour des profils piqués au centre comme NFW, c'est l'approximation impulsive qui domine pour  $V_p > 1.2 V_{circ}$ . Les simulation cosmologiques à  $N$ -corps indiquent des rapports d'axes  $R_a/R_p \approx 5$  (Ghigna et al. 1998), ce qui donne  $V_p/V_{circ}(R_p) \simeq 2.4$ , et alors  $r_m/R_{peri} \approx (1.3 \pm 0.3) \sigma_v/\sigma_{v,pert}$ .

Notons que l'effet de marée n'est pas infini quand  $R_p \rightarrow 0$ . On peut calculer son effet directement sans faire l'expansion de Taylor. Considérons l'impulsion de vitesse d'un point situé aux coordonnées  $(x, y, 0)$  de son système,

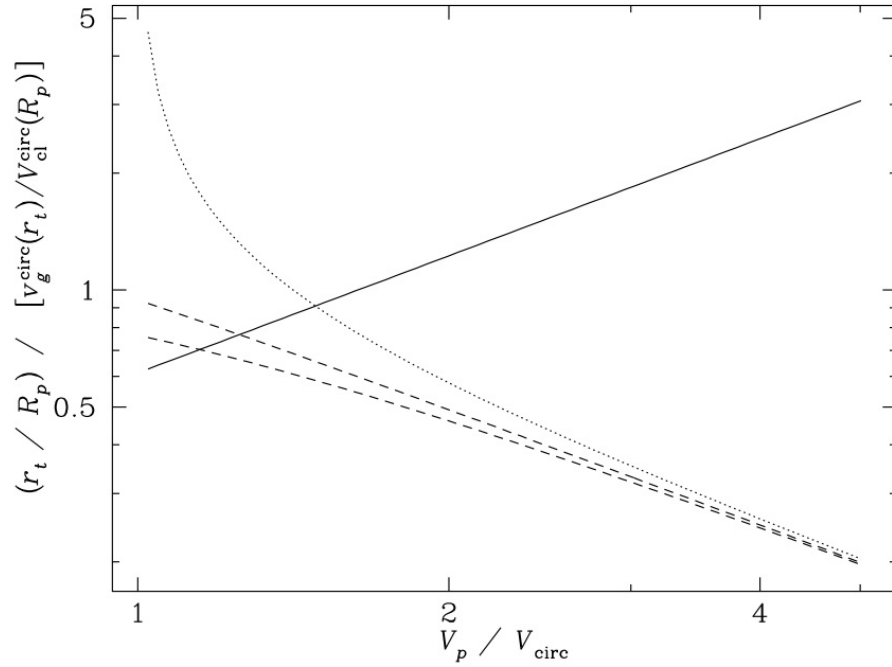


FIG. 8.7 – Rayon de marée (en unités du rayon péricentrique multiplié par le rapport des vitesses circulaires), en fonction de la vitesse au péricentre (en unités de la vitesse circulaire), selon Mamon (2000). Les courbes pointillées et hachurées correspondent au modèle quasi-circulaire de King (1962) pour des profils avec coeur (pointillées) et piquées au centre (NFW : hachurées). La droite pleine correspond au modèle d'orbites allongées dans l'approximation impulsive.

lors du passage d'un perturbant en choc frontal avec le système, c'est-à-dire avec des coordonnées  $(Vt, 0, 0)$ . Sur la direction de la trajectoire du perturbant (l'axe des  $x$ ), l'impulsion nette sera nulle car il y a une symétrie avant et après le passage du perturbant (même pour les passages à paramètre d'impact non nul). Aussi par symétrie n'y a-t-il pas d'impulsion sur l'axe des  $z$ , car l'axe des  $z$  coïncide avec l'axe reliant la particule au centre du potentiel perturbant. L'impulsion subie par la particule sera donc sur l'axe des  $y$ , c'est-à-dire l'axe entre la particule et le perturbant quand celui-ci est au point le

plus proche de la particule :

$$\Delta v = \Delta v_y = \int_{-\infty}^{\infty} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_y) dt = - \int_{-\infty}^{\infty} (\nabla \Phi \cdot \mathbf{e}_y) dt = -2 \frac{y}{V} \int_y^{\infty} \frac{d\Phi}{dR} \frac{dR}{(R^2 - y^2)^{1/2}} . \quad (8.36)$$

Par exemple, pour un perturbant de Plummer de rayon de coeur  $a$ , on trouve  $\Delta v = -2 G M y / [V(y^2 + a^2)]$  (Binney & Tremaine 1987, chap. 7.2e), à comparer avec l'équation 8.30.

Quand une particule fait partie d'un sous-système d'un plus grand ensemble, il existe deux types de marées :

1. La marée causée par les autres sous-systèmes, qu'on peut appeler *marée collisionnelle*. On pense aux rencontres de galaxies dans les groupes.
2. La marée causée par le système global, qu'on peut appeler *marée du potentiel*. Les marées du potentiel s'appliquent particulièrement aux amas globulaires dans les galaxies ainsi qu'aux galaxies dans les amas riches (Merritt 1984).

Des simulations cosmologiques (Ghigna et al. 1998) ont vérifié l'équation 8.35 dans le cas de galaxies à l'intérieur d'amas (marées du potentiel).

## 8.3 Coalescence (“mergers”)

Les rencontres de systèmes dynamiques ne sont pas élastiques : l'énergie orbitale est transférée en énergie interne, c'est-à-dire dans les mouvements des particules constituant chaque système. Cette perte d'énergie orbitale provient en partie de la friction dynamique, car le perturbant est composé de particules. Mais même si le perturbant n'est pas constitué de particules, l'énergie orbitale sera dissipée en énergie interne de la primaire, par les effets de marée décrits plus haut (on appelle ce phénomène le *freinage par marée*).

Une orbite non liée peut se transformer, après une rencontre, en orbite liée, et de même deux objets sur une orbite liée peuvent fusionner en une seule structure. On appelle cela la *fusion* ou la *coalescence* (*merging* en anglais). Pour qu'il y ait fusion, *il faut que la rencontre soit lente*. On peut définir, au moyen de simulations numériques, le paramètre d'impact critique pour la fusion, qui sera fonction de la vitesse de rencontre. En termes de variables physiques (rayon moyen de moitié de masse et dispersion de vitesse quadratique moyenne), la relation entre le paramètre d'impact critique et la



vitesse au péricentre est presque linéaire (Roos & Norman 1979, Aarseth & Fall 1980).

Il existe des galaxies dans l'univers proche qui semblent être à divers stades de leur fusion. A noter les paires de *queues de marée* formant des

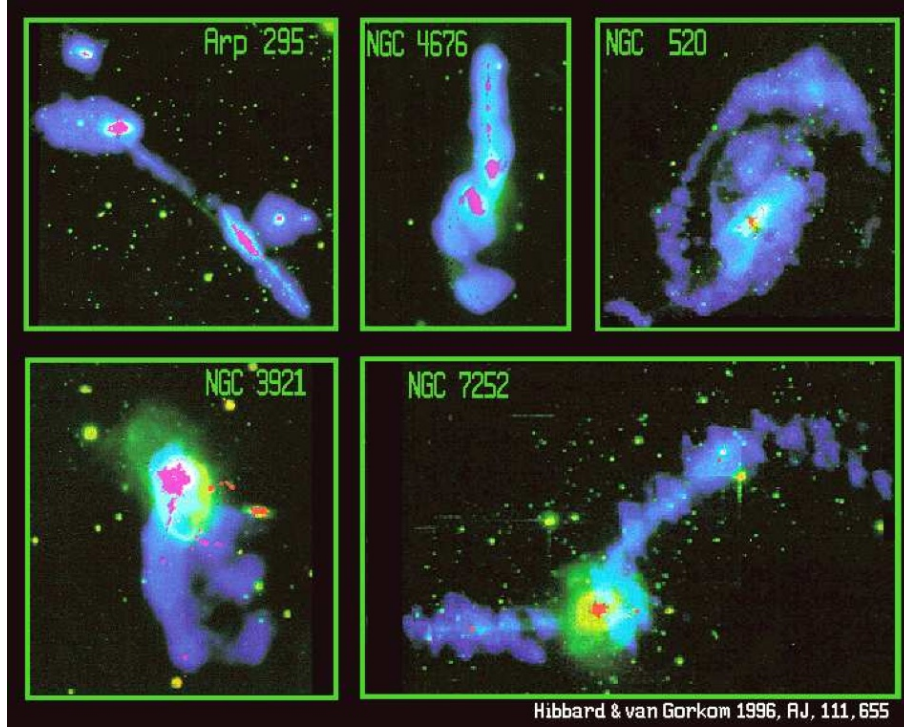


FIG. 8.8 – Galaxies dans une séquence de fusion (Hibbard & van Gorkom 1996). La lumière optique est en vert, le gaz froid en bleu et le gaz tiède en rose.

filaments en direction radiale.

Non seulement la morphologie de galaxies en fusion est complexe, mais les champs de vitesse le sont aussi, comme attesté dans la Figure 8.9 (sauf pour la galaxie au milieu en haut, qui semble en rotation pure). Les simulations numériques à  $N$ -corps sont nécessaires pour la modélisation précise des galaxies en fusion. Elles rendent compte des queues de marée.

D'autre part, les simulations numériques montrent que *les galaxies qui résultent de fusions ont des profils projetés de densité de masse comparable aux*

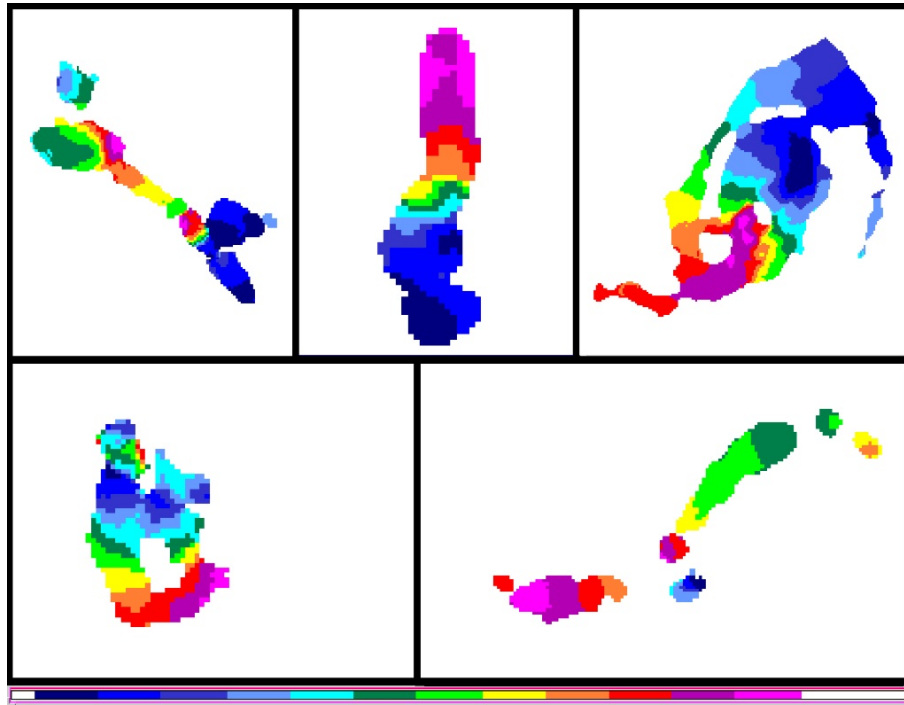


FIG. 8.9 – Champs de vitesse de galaxies en cours de fusion (Hibbard & van Gorkom 1996).

*profils de brillance de surface des galaxies elliptiques.* Mais il n'est pas encore sûr que la majorité des galaxies elliptiques sont formées de cette manière.

Il existe deux sites sur le web qui permettent de lancer une simulation de collision de galaxies en ajustant les paramètres des galaxies et de leur orbite : GalCrash de Chris Mihos et JSPAM d'Anthony Holincheck. Pour des raisons de rapidité, ces sites emploient tous les deux des codes à 3 corps restreint.