Prof. Georges Meylan Semestre d'automne 2008

Cours de cosmologie observationnelle

Corrigé Série 9

Exercice 15

Pression due aux galaxies

Quelle est la pression due aux galaxies ?

La densité d'énergie cinétique est donnée par :

$$u_{cin} = \int_0^\infty n(p) E_{\text{cin}}(p)\, dp \qquad \text{avec} \qquad E_{\text{cin}}(p) = \frac{p^2}{2m}$$

On considère ici une distribution de vitesse très simple, $n(p) = n \cdot \delta(p - m\overline{v})$:

$$u_{cin} = \int_0^\infty E_{\text{cin}}(p)\, n\, \delta(p - m\overline{v})\, dp = n\, \frac{(m\overline{v})^2}{2m} = n\, \frac{1}{2} m\overline{v}^2$$

Pour la matière, la pression vaut par conséquent :

$$P = \frac{2}{3} u_{cin} = \frac{1}{3} n\, m\overline{v}^2 = 3.4 \cdot 10^{-18} \text{ N m}^{-2}$$

avec les grandeurs suivantes :
$m = 3 \cdot 10^{41}$ kg
$n = 0.1 \text{ Mpc}^{-3} = 3.40 \cdot 10^{-69} \text{ m}^{-3}$
$\overline{v} = 10^5 \text{ m s}^{-1}$

Comment cette contribution à la pression de l'Univers se compare-t-elle avec la pression du rayonnement à 2.725 *K ?*

Dans l'approximation du corps noir, on a une densité d'énergie :

$$u_{rad} = \frac{4\sigma}{\mathrm{c}} T^4$$

La pression du rayonnement s'écrit alors (avec $\frac{4\sigma}{\mathrm{c}} = 7.566 \cdot 10^{-16} \text{ J m}^{-3} \text{ K}^{-4}$) :

$$P_{rad} = \frac{1}{3} u_{rad} = \frac{4\sigma}{3\mathrm{c}} T^4 = 1.39 \cdot 10^{-14} \text{ N m}^{-2}$$

Par conséquent, la pression du rayonnement cosmologique est près de 10'000 fois plus forte que celle due aux galaxies ! Par contre, la densité d'énergie associée aux galaxies (à la matière en général) est bien plus élevée que celle associée au rayonnement cosmologique, à cause de l'énergie de masse des baryons.

Exercice 16

Loi thermique de l'Univers

A partir des équations de Friedmann obtenues dans l'exercice 9, exprimer la pression totale p et la densité de masse inertielle totale ρ.

Partant de la seconde équation de Friedmann :

$$\dot{R}^2 = \frac{8\pi \mathrm{G}}{3} R^2 \rho - k\,\mathrm{c}^2 + \frac{1}{3}\Lambda\,\mathrm{c}^2 R^2$$

on peut aisément isoler le terme de densité, et en divisant par R^2 on obtient :

$$\frac{8\pi \mathrm{G}}{3}\rho = \frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{k\mathrm{c}^2}{R^2} - \frac{1}{3}\Lambda\,\mathrm{c}^2$$

Pour exprimer la pression totale, on utilise ensuite la première équation de Friedmann :

$$\ddot{R} = -\frac{4\pi \mathrm{G}}{3}\left(\rho + \frac{3p}{\mathrm{c}^2}\right) R + \frac{1}{3}\Lambda\,\mathrm{c}^2\,R$$

dans laquelle on isole le terme de pression :

$$\frac{4\pi \mathrm{G}}{\mathrm{c}^2} Rp = -\ddot{R} - \frac{4\pi \mathrm{G}}{3} R\rho + \frac{1}{3}\Lambda \mathrm{c}^2\,R$$

En multipliant par 2 et en divisant par R, cela donne :

$$\frac{8\pi \mathrm{G}}{\mathrm{c}^2} p = -2\,\frac{\ddot{R}}{R} - \frac{8\pi \mathrm{G}}{3}\rho + \frac{2}{3}\Lambda\,\mathrm{c}^2$$

Substituant dans cette équation la densité par l'expression obtenue précédemment, on a :

$$\frac{8\pi \mathrm{G}}{\mathrm{c}^2} p = -2\,\frac{\ddot{R}}{R} - \left(\frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{k\mathrm{c}^2}{R^2} - \frac{1}{3}\Lambda\,\mathrm{c}^2\right) + \frac{2}{3}\Lambda\,\mathrm{c}^2$$

expression que l'on peut simplifier, pour finalement obtenir l'équation :

$$\frac{8\pi \mathrm{G}}{\mathrm{c}^2} p = -2\,\frac{\ddot{R}}{R} - \frac{k\mathrm{c}^2}{R^2} - \frac{\dot{R}^2}{R^2} + \Lambda\,\mathrm{c}^2$$

Déduire la loi thermique de l'Univers (valable pour la radiation).

On multiplie l'équation de la densité par $3R^3$:

$$8\pi \mathrm{G}\rho R^3 = 3k\mathrm{c}^2 R + 3R\dot{R}^2 - \Lambda \mathrm{c}^2 R^3$$

On dérive par rapport au temps :

$$\begin{aligned}\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(8\pi \mathrm{G}\rho R^3\right) &= 3k\mathrm{c}^2\dot{R} + 3\dot{R}^3 + 6R\dot{R}\ddot{R} - 3\Lambda \mathrm{c}^2 R^2\dot{R} \\ &= -3\dot{R}R^2\left(-\tfrac{k\mathrm{c}^2}{R^2} - \tfrac{\dot{R}^2}{R^2} - 2\tfrac{\ddot{R}}{R} + \Lambda \mathrm{c}^2\right)\end{aligned}$$

En substituant l'équation de la pression p dans l'expression ci-dessus :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\rho \mathrm{c}^2\, R^3\right) = -3\dot{R}R^2 p = -p\frac{\mathrm{d}R^3}{\mathrm{d}t}$$

Noter que cette équation est de la forme $\mathrm{d}E = -p\,\mathrm{d}V$, qui rappelle le premier principe de la thermodynamique.
Pour la composante matérielle, on a l'équation d'état $p_M = 0$, d'où on déduit :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\rho_M \mathrm{c}^2\, R^3\right) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \rho_M \propto R^{-3}$$

Pour la composante radiative, on a l'équation d'état $p_r = \frac{1}{3}\rho_r \mathrm{c}^2$, d'où :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\rho_r \mathrm{c}^2\, R^3\right) = -p_r\frac{\mathrm{d}R^3}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{3}\rho_r \mathrm{c}^2\frac{\mathrm{d}R^3}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\rho_r \mathrm{c}^2\right) R^3 + \rho_r \mathrm{c}^2\frac{\mathrm{d}R^3}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{3}\rho_r \mathrm{c}^2\frac{\mathrm{d}R^3}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\rho_r \mathrm{c}^2\right)\, R^3 = -\frac{4}{3}\rho_r \mathrm{c}^2\frac{\mathrm{d}R^3}{\mathrm{d}t} = -4\rho_r \mathrm{c}^2 R^2\dot{R}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\rho_r \mathrm{c}^2\right)\, R^4 = -4\rho_r \mathrm{c}^2 R^3\dot{R}$$

Ce qui est équivalent à :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\rho_r \mathrm{c}^2\right)\, R^4 + \rho_r \mathrm{c}^2\frac{\mathrm{d}R^4}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\rho_r \mathrm{c}^2 R^4\right) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \rho_r \propto R^{-4}$$

La loi de Stefan-Boltzmann donne pour un rayonnement de corps noir $\rho_r = \frac{4\sigma}{\mathrm{c}}\,T^4$, d'où on déduit la loi thermique de l'Univers :

$$R \cdot T = \mathrm{cte}$$