Homework 12: 6 December 2017
Traitement Quantique de l'Information

Exercise 1 *Identité utile pour la réalisation expérimentale de la porte CNOT par RMN*

Dans cet exercice nous prouvons une identité utile à la réalisation expérimentale de la porte logique CNOT (dfinie ci-dessous) qui sera discutée en cours. On considère deux qubits (par exemple: spins 1/2, systèmes à deux niveaux) et les opérateurs suivants:

- Rotations d'angle $\frac{\pi}{2}$ autour de l'axe z pour chaque spin

$$R_1 = \exp\left(-i\frac{\pi}{2}\frac{\sigma_1^z}{2}\right) \text{ et } R_2 = \exp\left(-i\frac{\pi}{2}\frac{\sigma_2^z}{2}\right)$$

- Porte de Hadamard $H = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

- L'opérateur d'évolution $U = \exp\left(-i\frac{t}{\hbar}\mathcal{H}\right)$ associé à l'hamiltonien d'interaction de Heisenberg anisotrope pour deux spins

$$\mathcal{H} = \hbar J \sigma_1^z \otimes \sigma_2^z.$$

On laisse évoluer le système pendant un temps $t = \frac{\pi}{4J}$.

a) Calculez le produit

$$(I \otimes H)\, U\, (R_1 \otimes R_2)\, (I \otimes H)$$

ou I est la matrice identité 2×2.

b) Montrez qu'il est égal à une matrice 4×4 équivalente à la porte CNOT définie par

$$\text{CNOT}|x\rangle \otimes |y\rangle = |x\rangle \otimes |y \oplus x\rangle$$

where $x, y \in \{0, 1\}$ and $\oplus$ is sum modulo 2. Here $|x\rangle$ is called the control quantum bit. The second quantum bit is flipped iff the control bit is in state $|1\rangle$.

Exercise 2 *Refocusing*

Considérez un Hmailtonien de type Heisenberg anisotrope (uniquement le terme "z" intervient).

$$\mathcal{H} = \hbar J \sigma_1^z \otimes \sigma_2^z$$

pour l'interaction de deux qubits. Soit

$$R_1 = \exp\left(i\pi\frac{\sigma_1^x}{2}\right),$$

le π-pulse (ou bien rotation autour de x) agissant sur le premier spin. Cette opération est une opération à un qubit et peut être réalisée par des techniques de RMN comme vu au cours (champ constant plus champ tournant).

On considère l'évolution des deux spins pendant un temps $\frac{t}{2}$, suivi d'un π-pulse, suivi de l'évolution pendant un temps $\frac{t}{2}$, et suivi à nouveau d'un π-pulse. L'évolution totale est

$$U_{tot} = (R_1 \otimes \mathbb{I}_2)\, e^{-i\frac{t}{2}\frac{\mathcal{H}}{\hbar}}\, (R_1 \otimes \mathbb{I}_2)\, e^{-i\frac{t}{2}\frac{\mathcal{H}}{\hbar}}$$

a) Montrez maintenant l'identité générale valable pour tout t:

$$(R_1 \otimes \mathbb{I}_2)\, e^{-\frac{it}{\hbar}\mathcal{H}}\, (R_1 \otimes \mathbb{I}_2)\, e^{-\frac{it}{\hbar}\mathcal{H}} = \mathbb{I}_1 \otimes \mathbb{I}_2$$

b) En pratique $J << 1$. Cela entraîne une interprétation physique de cette identité qui sera discutée en cours. Pouvez-vous déja en dire quelques mots?