

Exercice 1 *Rotations sur la sphère de Bloch*

- a) Représentez sur la sphère de Bloch les vecteurs propres de σ_x , σ_y et σ_z .
- b) Calculez explicitement les matrices $\exp(-i\frac{\alpha}{2}\sigma_x)$, $\exp(-i\frac{\beta}{2}\sigma_y)$, $\exp(-i\frac{\gamma}{2}\sigma_z)$.
- c) Considérez le qubit $|\psi\rangle = (\cos\frac{\theta}{2})|\uparrow\rangle + e^{i\frac{\pi}{2}}(\sin\frac{\theta}{2})|\downarrow\rangle$. Représentez l'action des matrices $\exp(-i\frac{\gamma}{2}\sigma_z)$, $\exp(-i\frac{\alpha}{2}\sigma_x)$ et $\exp(-i\frac{\beta}{2}\sigma_y)$ sur ce vecteur. Représentez vous le résultat sur la sphère de Bloch (au moins pour les deux premières rotations).

Exercice 2 *Création d'intrication grâce à une interaction magnétique.*

On considère deux spins $\frac{1}{2}$ nucléaires avec Hamiltonien d'interaction $\mathcal{H} = \hbar J \sigma_1^z \otimes \sigma_2^z$. L'opérateur d'évolution de ce système est $U = \exp(-\frac{it}{\hbar}\mathcal{H})$. Soit

$$|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle)$$

l'état initial des deux spins.

- a) Montrez que l'état après un temps $t = \frac{\pi}{4J}$ est

$$|\psi_t\rangle = \frac{e^{-\frac{i\pi}{4}}}{2} (|\uparrow\uparrow\rangle - i|\uparrow\downarrow\rangle + i|\downarrow\uparrow\rangle - |\downarrow\downarrow\rangle)$$

- b) Montrez que cet état est intriqué, c'est à dire qu'il est impossible de l'écrire sous la forme $(\alpha|\uparrow\rangle + \beta|\downarrow\rangle) \otimes (\gamma|\uparrow\rangle + \delta|\downarrow\rangle)$.
- c) Maintenant on laisse évoluer l'état obtenu ci-dessus, encore pendant un temps $\frac{\pi}{4J}$. Calculez l'état résultant et déterminez si il est intriqué ou non.
- d) Et que ce passe-t-il si on laisse évoluer l'état initial $|\Psi_0\rangle$ pendant un temps $\frac{\pi}{J}$?