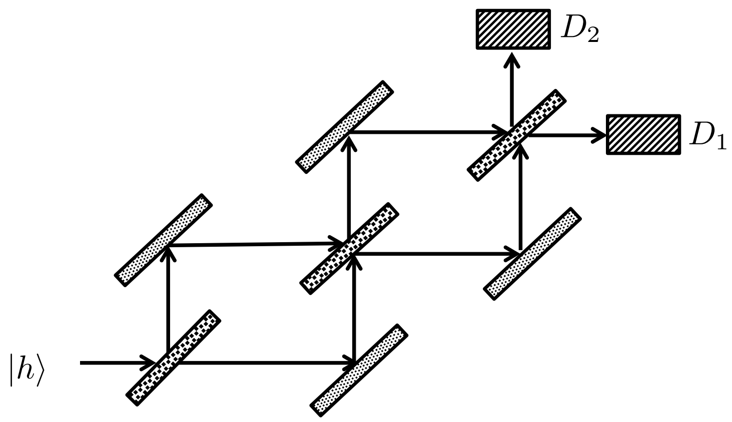
Examen Final

Nom: .... **Prénom:** .... **Section et sciper no:** ....

- Vous pouvez répondre aux questions en Francais ou en Anglais.
- Ecrivez votre nom sur chaque feuille double, rendez la donnée et tous les brouillons SVP.
- Durée: 8h15-11h00.
- Vous avez le droit de faire les calculs en notation de Dirac ou en composantes si vous préférez (on prend tout ce qui est juste).
- Vous avez droit à votre résumé personnel.

Problème 1: Interferomètre double.

On considère l'interféromètre de la figure ci-dessous. L'espace de Hilbert d'un photon est ici $\mathbb{C}^2 = \{\alpha|h\rangle + \beta|v\rangle; |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1\}$ ou $|h\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ correspond à un photon de trajectoire horizontale et $|v\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ correspond à un photon de trajectoire verticale.



Les miroirs semi-transparents sont décrits par la matrice de Hadamard $H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et les miroirs parfaitement réfléchissants par la matrice $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Un seul photon à la fois est envoyé dans l'interféromètre et toujours dans l'état initial $|h\rangle$.

(a) Calculez l'état à la sortie de l'interféromètre, juste avant les détecteurs D_1 et D_2.

(b) Quelle est la probabilité d'entendre un clic dans le photodétecteur D_1? Même question pour le photodétecteur D_2.

(c) On installe un déphaseur *uniquement sur la branche horizontale après le deuxième miroir semi-transparent* rencontré par le photon. Lorsqu'un photon traverse ce déphaseur son état est multiplié par $e^{i\varphi}$ avec $\varphi \in [0, 2\pi[$. Quelle est la matrice 2×2 qui modélise ce déphaseur?

(d) Maintenant en présence du déphaseur calculez l'état à la sortie de l'interféromètre, ainsi que les probabilités de l'observer dans D_1 ou D_2.

Problème 2: Dynamique du spin.

On considère deux spins 1/2 (moments magnétiques) qui interagissent via l'Hamiltonien $\mathcal{H} = -\hbar J \sigma_1^x \otimes \sigma_2^z$ où $\sigma_1^x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\sigma_2^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ sont les matrices de Pauli associées à chaque spin. Ces matrices sont exprimées dans la base $|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $|\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(a) Calculez la matrice d'évolution temporelle $U_t = \exp\left(-\frac{it}{\hbar}\mathcal{H}\right)$. *Rappel*: pour une matrice A on a $\exp(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$ et aussi $\cos t = \sum_{k \text{ pair}} \frac{(it)^k}{k!}$ et $i \sin t = \sum_{k \text{ impair}} \frac{(it)^k}{k!}$.

(b) Soit l'état initial $|\Psi_0\rangle = |\uparrow\rangle \otimes (\frac{|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle}{\sqrt{2}})$. Calculez l'état $|\Psi_t\rangle$ à l'instant t.

(c) On fait une mesure du *premier* spin à l'instant t dans la base $\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$. le deuxième spin n'est pas observé. Calculez la probabilité d'obtenir le *premier* spin dans l'état $|\uparrow\rangle$.

Problème 3: Intrication.

On considère l'état à trois qubits de Greenberger, Horne et Zeilinger:

$$|\Psi_{\text{GHZ}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|0\rangle \otimes |0\rangle \otimes |0\rangle \; + \; |1\rangle \otimes |1\rangle \otimes |1\rangle\big)$$

(a) Démontrez que cet état est intriqué (entangled).

(b) Soit $H = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|0\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|\big)$. Soit $|\Psi_1\rangle = H \otimes H \otimes H |\Psi_{\text{GHZ}}\rangle$. Est-ce que $|\Psi_1\rangle = |\Psi_{\text{GHZ}}\rangle$? Justifiez. La situation est-elle différente de celle des états de Bell ?

(c) Reprenons l'état $|\Psi_{\text{GHZ}}\rangle$. On fait une mesure sur le premier qubit uniquement. Cette mesure est faite dans la base $\{\frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}}, \frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}}\}$. Calculez les états finaux possibles (de l'ensemble des trois qubits) que l'on obtient juste après la mesure. En particulier si l'état obtenu pour le premier qubit est $\frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}}$, quel est l'état des deux autres qubits? Ce dernier est-il intriqué (justifiez)?

(d) Proposez un ensemble d'états à trois qubits satisfaisant aux conditions suivantes:

- $|\Psi_{\text{GHZ}}\rangle$ est un élément de l'ensemble.
- Cet ensemble forme une base orthonormée de l'espace d'Hilbert des trois qubits.
- Tous les états de cet ensemble sont intriqués.