Solutions Serie 8 : 19 Avril 2018
Calcul Quantique

Exercise 1 *Effet de la décohérence dans l'algorithme de Shor*

1. Après les portes de Hadamard :

$$\begin{aligned}&\widetilde{H}_0 \otimes \widetilde{H}_1 \otimes \mathbb{I} \otimes \mathbb{I}(|0\rangle \otimes |0\rangle \otimes |0\rangle \otimes |0\rangle)\\ &\qquad\qquad = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 (|0\rangle + e^{i\varphi_0}|1\rangle) \otimes (|0\rangle + e^{i\varphi_1}|1\rangle) \otimes |0\rangle \otimes |0\rangle\\ &\qquad\qquad = \frac{1}{\sqrt{4}}(|00\rangle + e^{i\varphi_0}|10\rangle + e^{i\varphi_1}|01\rangle + e^{i(\varphi_0+\varphi_1)}|11\rangle) \otimes |00\rangle\\ &\qquad\qquad = \frac{1}{\sqrt{4}}(|0\rangle + e^{i\varphi_1}|1\rangle + e^{i\varphi_0}|2\rangle + e^{i(\varphi_0+\varphi_1)}|3\rangle) \otimes |0\rangle\end{aligned}$$

2. Après U_f on obtient l'état :

$$\frac{1}{\sqrt{4}}(|0\rangle \otimes |f(0)\rangle + e^{i\varphi_1}|1\rangle \otimes |f(1)\rangle + e^{i\varphi_0}|2\rangle \otimes |f(2)\rangle + e^{i(\varphi_0+\varphi_1)}|3\rangle \otimes |f(3)\rangle)$$

Puisque $f(x) = f(x+2)$ on a :

$$\frac{1}{\sqrt{4}}(|0\rangle + e^{i\varphi_0}|2\rangle) \otimes |f(0)\rangle + \frac{1}{\sqrt{4}}(e^{i\varphi_1}|1\rangle + e^{i(\varphi_0+\varphi_1)}|3\rangle) \otimes |f(1)\rangle$$

Appliquons la QFT à chaque terme :

$$\frac{1}{4}\sum_{y=0}^{3}(1 + e^{i(\varphi_0+\frac{\pi}{2}2y)})|y\rangle \otimes |f(0)\rangle + \frac{1}{4}\sum_{y=0}^{3}(e^{i(\varphi_1+\frac{\pi}{2}y)} + e^{i(\varphi_0+\varphi_1+\frac{\pi}{2}3y)})|y\rangle \otimes |f(1)\rangle$$

3. L'état juste après la mesure est :

$$|\psi_{post}\rangle = \frac{1}{4}(1 + e^{i(\varphi_0+\pi y)})|y\rangle \otimes |f(0)\rangle + \frac{1}{4}e^{i(\varphi_1+\frac{\pi}{2}y)}(1 + e^{i(\varphi_0+\pi y)})|y\rangle \otimes |f(1)\rangle.$$

La probabilité de l'obtenir est donné par sa norme (au carré)

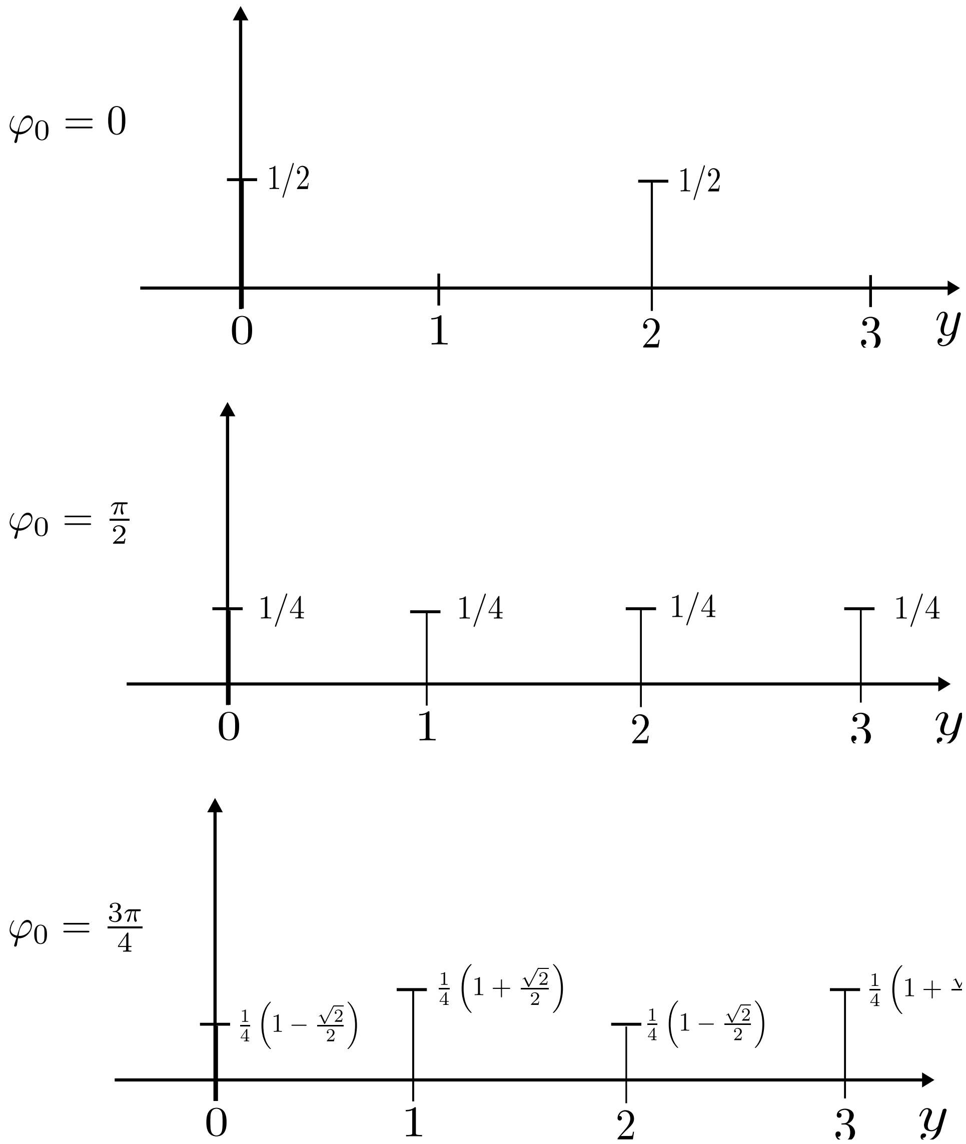
$$\begin{aligned}\mathrm{Prob}(y|\varphi_0,\varphi_1) &= \frac{1}{16}\left\{|1+e^{i(\varphi_0+\pi y)}|^2+|1+e^{i(\varphi_0+\pi y)}|^2\right\}\\ &= \frac{1}{8}\left((1+\cos(\varphi_0+\pi y))^2+\sin^2(\varphi_0+\pi y)\right)\end{aligned}$$

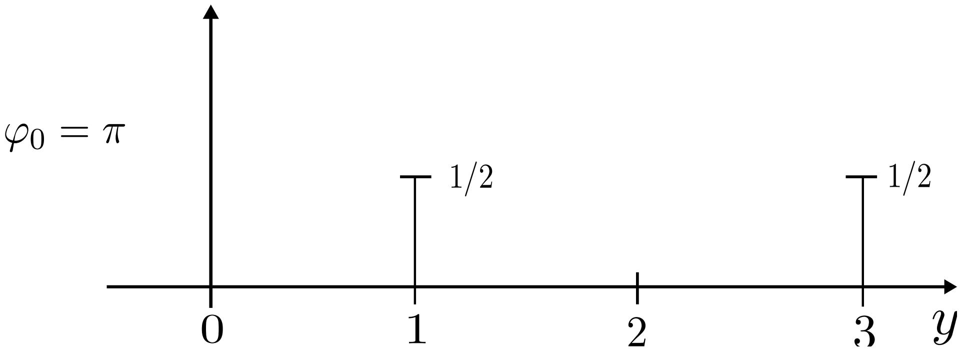
$\Rightarrow$

$$\mathrm{Prob}(y|\varphi_0,\varphi_1) = \frac{1}{4}\left(1+\cos(\varphi_0+\pi y)\right)$$

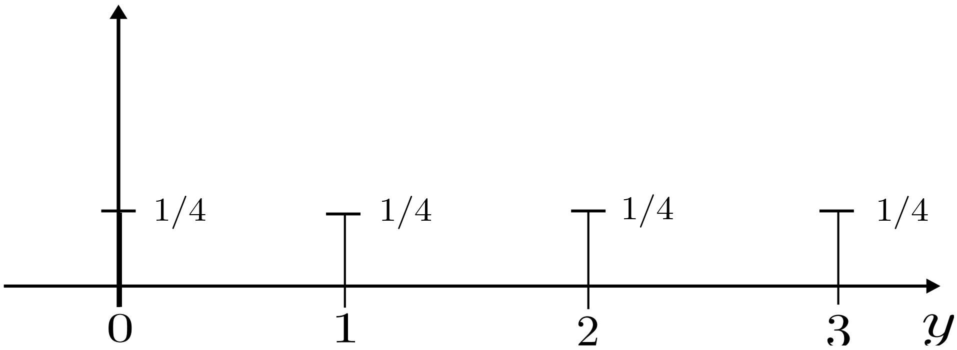
On voit que curieusement cette probabilité ne depend pas de φ_1. Donc l'algorithme de Shor a l'air robuste par rapport à ce déphasage.

4.





$$\mathrm{Prob}(y) = \int \mathrm{d}\varphi_0 \, \mathrm{Prob}(y|\varphi_0) \, \mathrm{Prob}(\varphi_0) = \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\varphi_0}{2\pi} \, \mathrm{Prob}(y|\varphi_0) = \frac{1}{4}$$



5. Dans une expérience de RMN on obtient ces spectres. Dans les cas où $\varphi_0 = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$ et π on peut lire la période.