

---

Solution de la série 10  
Calcul Quantique

---

**Exercice 1** *Le code de Steane*

- (a) La matrice de parité du code de Hamming  $(7, 4)$  est donné par tous vecteurs non nuls à  $r$  composantes pour  $2^r - 1 = 7$ , c.à.d.  $r = 3$  :

$$H_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

La matrice génératrice de  $C_2 = C_1^\perp$  est donné par des vecteurs perpendiculaires à  $C_1$ . Comme un vecteur de  $C_1$  satisfait  $H_1 \vec{x} = \vec{0}$ , les lignes de  $H_1$  sont 3 vecteurs  $\perp$  à  $C_1$ . Notons que  $C_1$  est de dimension 4, donc  $C_1^\perp$  est de dimension  $7 - 4 = 3$ . Donc il suffit de prendre les 3 lignes de  $H_1$  comme matrice génératrice de  $C_1^\perp$  :

$$G_2 = H_1^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Les mots de code de  $C_2$  sont donnés par

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_3 \\ u_2 \\ u_1 \\ u_2 + u_3 \\ u_1 + u_3 \\ u_1 + u_2 \\ u_1 + u_2 + u_3 \end{bmatrix} \quad (1)$$

avec  $(u_1, u_2, u_3) \in \{0, 1\}^3$ . La liste des mots de codes de  $C_2$  est  $(0000000)$ ,  $(1001101)$ ,  $(0101011)$ ,  $(0010111)$ ,  $(0111100)$ ,  $(1011010)$ ,  $(1100110)$ ,  $(1110001)$ .

Pour montrer que  $C_2 \subset C_1$ , il suffit de montrer que (vérifiez !)

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_3 \\ u_2 \\ u_1 \\ u_2 + u_3 \\ u_1 + u_3 \\ u_1 + u_2 \\ u_1 + u_2 + u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(où on prend les sommes mod 2 comme d'habitude).

Finalement  $C_1$  corrige 1 erreur, car toutes paires de colonnes de  $H_1$  sont indépendantes, et la 4ème est combinaison linéaire des deux premières, et donc  $d = 3$  (et  $t = 1$ ).

De plus,  $C_2^\perp = (C_1^\perp)^\perp = C_1$  et corrige aussi 1 erreur.

- (b) Le code  $\text{CSS}(C_2, C_1)$  possède les paramètres :  $n = 7$  (longueur),  $\dim \mathcal{H} = 2^7$  ( $\mathcal{H}$  l'espace de Hilbert des 7 qubits).

$k_1 - k_2 = \dim C_1 - \dim C_2 = 4 - 3 = 1$ . Le code  $\text{CSS}(C_2, C_1)$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{H}$  de dimension  $2^1 = 2$ . Le code corrige  $t = 1$  erreur.

- (c) **Mots de code :**

La classe d'équivalence de  $\vec{x} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0) \in C_1$  est :

$$\begin{aligned} |0\rangle_{\text{Steane}} &= \frac{1}{\sqrt{|C_2|}} \sum_{y \in C_2} |\vec{y}\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{8}} \left\{ |0000000\rangle + |1001101\rangle + |0101011\rangle + |0010111\rangle + \right. \\ &\quad \left. + |0111100\rangle + |1011010\rangle + |1100110\rangle + |1110001\rangle \right\}. \end{aligned}$$

où on a utilisé la liste des 8 mots de code de  $C_2$  donnée par eq. 1.

Avec  $\vec{x} = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1) \in C_1$  (vérifiez) on a un mot de  $C_1$  qui n'est pas dans  $C_2$  (vérifiez). Sa classe d'équivalence donne l'autre vecteur indépendant du code de Steane :

$$\begin{aligned} |1\rangle_{\text{Steane}} &= \frac{1}{\sqrt{|C_2|}} \sum_{y \in C_2} |y\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{8}} \left\{ |1111111\rangle + |0110010\rangle + |1010100\rangle + |1101000\rangle + \right. \\ &\quad \left. + |1000011\rangle + |0100101\rangle + |0011001\rangle + |0001110\rangle \right\}. \end{aligned}$$

Un mot de code général est (sous-espace vectoriel de dim 2)

$$|\psi\rangle = \alpha |0\rangle_{\text{Steane}} + \beta |1\rangle_{\text{Steane}}$$

avec  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ ;  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ . Ce code utilise 7 qubits pour corriger  $t = 1$  erreur sur un qubit.