

---

## Série 8

### Calcul Quantique

---

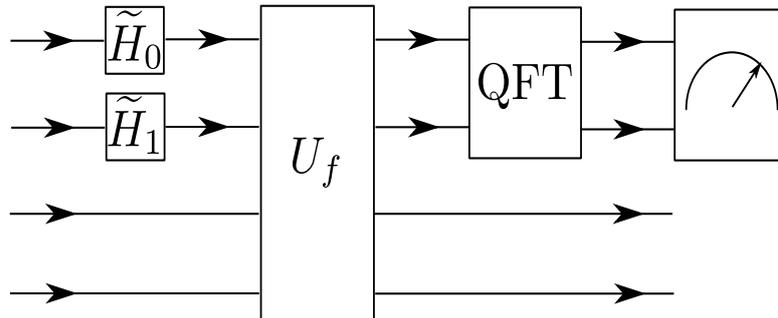
**Exercice 1** *Effet des “imperfections” sur quelques portes dans l’algorithme de Shor*

On considère une fonction sur  $\mathbb{Z}$ , de période égale à 2. C’est à dire  $f(x) = f(x+2)$ ,  $x \in \mathbb{Z}$ . Nous voulons étudier le circuit ci-dessous (voir figure) où les portes de Hadamard usuelles sont modifiées par une perturbation aléatoire

$$\tilde{H}_0 |b\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( |0\rangle + (-1)^b e^{i\varphi_0} |1\rangle \right), \text{ où } b = 0, 1$$

$$\tilde{H}_1 |b\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( |0\rangle + (-1)^b e^{i\varphi_1} |1\rangle \right), \text{ où } b = 0, 1$$

avec  $\varphi_0$  et  $\varphi_1$  uniformément distribués sur  $[0, 2\pi]$ .



Le circuit est initialisé dans l’état  $|\psi_0\rangle = |0\rangle \otimes |0\rangle \otimes |0\rangle \otimes |0\rangle$ . On prendra la convention  $|0\rangle \otimes |0\rangle = |0\rangle$ ;  $|0\rangle \otimes |1\rangle = |1\rangle$ ;  $|1\rangle \otimes |0\rangle = |2\rangle$ ;  $|1\rangle \otimes |1\rangle = |3\rangle$  et les définitions pour  $x, y \in \mathbb{Z}$  :

$$U_f |x\rangle \otimes |y\rangle = |x\rangle \otimes |y + f(x)\rangle$$

$$\text{QFT} |x\rangle = \frac{1}{\sqrt{4}} \sum_{y=0}^3 \exp\left(\frac{2\pi i}{4} xy\right) |y\rangle$$

a) Montrez que l'état après les portes de type Hadamard est :

$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{4}} (|0\rangle + e^{i\varphi_1} |1\rangle + e^{i\varphi_0} |2\rangle + e^{i(\varphi_0+\varphi_1)} |3\rangle) \otimes |0\rangle$$

b) Montrez que l'état juste avant la mesure est

$$|\psi_2\rangle = \frac{1}{4} \sum_{y=0}^3 (1 + e^{i(\varphi_0+\pi y)}) |y\rangle \otimes |f(0)\rangle + \left( e^{i(\varphi_1+\frac{\pi}{2}y)} + e^{i(\varphi_0+\varphi_1+\frac{3\pi}{2}y)} \right) |y\rangle \otimes |f(1)\rangle$$

c) On mesure les deux premiers qu-bit dans la base définie par les projecteurs

$$\{P_y \otimes \mathbb{I}_{4 \times 4} = |y\rangle \langle y| \otimes \mathbb{I}_{4 \times 4}; y = 0, 1, 2, 3\}$$

Calculez l'état juste après la mesure (à un facteur de normalisation près). Ensuite calculez la probabilité d'obtenir  $y$ . Vous devriez trouver un résultat indépendant de  $\varphi_1$ .

d) Dans la question précédente vous avez calculé une probabilité étant donné  $\varphi_0$  et  $\varphi_1$  fixés. En principe vous avez trouvé un résultat dépendant uniquement de  $\varphi_0$ . Faire un dessin de  $\Pr(y|\varphi_0)$  pour  $\varphi_0 = 0, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi$ . Calculez et dessinez la probabilité totale  $\Pr(y)$  en considérant que  $\varphi_0$  est distribuée uniformément sur  $[0, 2\pi]$ .