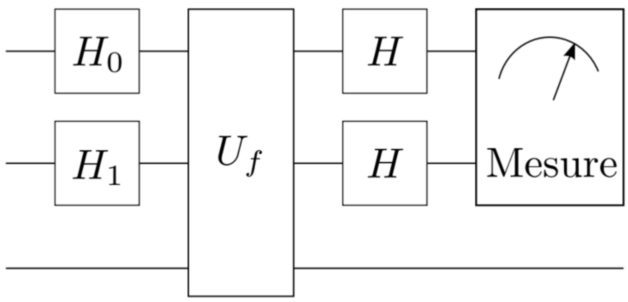
Homework 6 : 29 March 2018
Calcul Quantique

Exercise 1 *Effet des imperfections sur l'algorithme de Simon*

On considère le problème de Simon pour $n = 2$. Soit $H = \big\{ \underline{x} \in \mathbb{F}_2^2 \bigm| \underline{x} = (0, x_2), \text{avec } x_2 \in \{0,1\} \big\}$. C'est le "sous-espace vectoriel cachè" de $\mathbb{F}_2^2$. Soit $f : \mathbb{F}_2^2 \longrightarrow \{0,1\}$ telle que $f(\underline{x}) = f(\underline{y})$ si et seulement si $\underline{x} - \underline{y} \in H$. Pour fixer les idèes on prendra la fonction $f(0,0) = f(0,1) = 0$ et $f(1,0) = f(1,1) = 1$.

Considèrez le circuit (de l'algorithme de Simon) :



où H_0 et H_1 sont des portes de Hadamard *imparfaites* :

$$H_0 \left|b\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \big(\left|0\right\rangle + (-1)^b e^{i\phi_0} \left|1\right\rangle \big)$$
$$H_1 \left|b\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \big(\left|0\right\rangle + (-1)^b e^{i\phi_1} \left|1\right\rangle \big)$$

et ϕ_0 et ϕ_1 sont des phases dans $[0, 2\pi]$. Les deux dernières portes du circuit sont des portes de Hadamard standard

$$H \left|b\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \big(\left|0\right\rangle + (-1)^b \left|1\right\rangle \big)$$

et $U_f \left|x_1, x_2\right\rangle \otimes \left|z\right\rangle = \left|x_1, x_2\right\rangle \otimes \left|z \oplus f(x_1, x_2)\right\rangle$. Le circuit est initialisè à $\left|0, 0\right\rangle \otimes \left|0\right\rangle$.

1. Calculez l'état juste après les deux premières portes de H_0 et H_1.
2. Calculez l'état après U_f, puis enfin calculez l'état juste après les deux dernières portes de Hadamard (c.à.d. juste avant la mesure).

3. On mesure les deux premiers qu-bits dans la base dèfinie par les projecteurs

$$\left\{ |\underline{y}\rangle \langle \underline{y}| \otimes I \;\middle|\; \underline{y} \in \{00, 01, 10, 11\} \right\}.$$

   Le qu-bit de stockage n'est pas mesurè, ce qui est reflètè par la matrice $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   Calculez les probabilités d'obtenir les ètats $|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle$ juste après la mesure.

4. Deduire la probabilité de tomber sur un vecteur de $H^{\perp}$ et celle de tomber sur un vecteur de H. Pour quelles valeurs de ϕ_0 et ϕ_1 retrouve-t-on les cas où les portes de Hadamard sont parfaites ? Y a-t-il quelquechose d'ètonnant dans vos resultats ?