Traitement Quantique de l'Information — EPFL Semestre de printemps 2018
Dr. Nicolas Macris — 21 Mars 2018

Homework 5
Traitement Quantique de l'Information

Exercice 1 *Algorithme de Deutsch et Josza le plus simple possible*

On considère une fonction d'un bit classique $f(x)$ qui prend ses valeurs dans $\{0,1\}$. Il existe 4 fonctions de ce type. On veut déterminer si la fonction est constante ou balancée (il y a deux fonctions constantes et deux fonctions balancées). Avec un "circuit classique" pour déterminer si f est constante ou balancée il faut calculer les deux sorties possibles $f(0)$ et $f(1)$ puis les comparer (par exemple on calcule $f(0)-f(1)$ et on détermine si cette différence vaut 0 ou 1). On doit "appeler" la fonction f deux fois.

On suppose que l'on a disposition une porte quantique qui effectue l'opération

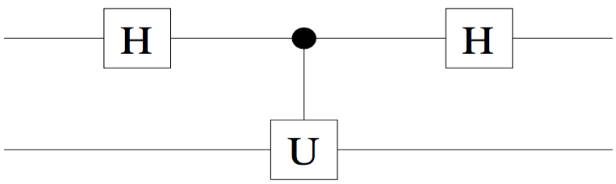
$$U_f|x\rangle \otimes |y\rangle = |x\rangle \otimes |y \oplus f(x)\rangle$$

Montrez que U_f est une matrice unitaire.

Reprendre le circuit de Deutsch et Josza du cours et refaire l'analyse détaillee dans ce cas particulier. Montrez en particulier qu'une seule utilisation de U_f suffit à déterminer si f est constante ou balancée.

Exercice 2 *Un petit algorithme quantique*

Soit U une matrice unitaire et $|u\rangle$ un vecteur propre, c'est à dire $U\,|u\rangle = \exp(2\pi i\varphi)\,|u\rangle$. Considérez le circuit suivant :



a) Calculez la sortie pour l'état initial $|0\rangle \otimes |u\rangle$.

b) Calculez la probabilité d'observer le premier bit dans l'état $|0\rangle$ à la sortie. Même question pour la probabilité d'observer le premier bit dans l'état $|1\rangle$ à la sortie.

c) Même question pour les probabilités d'observer $\frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}}$; $\frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}}$; $\frac{|0\rangle+i|1\rangle}{\sqrt{2}}$ et $\frac{|0\rangle-i|1\rangle}{\sqrt{2}}$ à la sortie.

d) Supposons que l'on remplace U par U^k, k entier dans le circuit ci-dessus. Soit $\varphi = 0,\varphi_1\varphi_2...\varphi_t$ ou $\varphi_i \in \{0,1\}$ le développement binaire de $0 < \varphi < 1$. En d'autres termes $\varphi = \frac{\varphi_1}{2} + \frac{\varphi_2}{2^2} + \cdots + \frac{\varphi_t}{2^t}$.
Comment choisir k pour déterminer le bit le moins significatif φ_t en une seule mesure ? [*Indication* : inspirez vous de la question b)].